

7 Exemplos do Método Proposto

Para demonstrar a capacidade do método baseado numa análise multirresolução através de funções wavelet, foram formulados exemplos de aplicação contendo descontinuidades e não-linearidades.

7.1. Viga Biapoiada com Carga Concentrada

Como um primeiro exemplo, ainda na análise estática, foi testada uma viga biapoiada com uma carga concentrada em seu ponto médio, como mostra a fig. (55). Apesar de ser um exemplo relativamente simples, o mesmo serve para demonstrar a capacidade da formulação de captar as descontinuidades geradas pela carga concentrada nos diagramas de momento fletor e esforço cortante sem que haja necessidade da colocação de um nó no ponto de aplicação da carga.

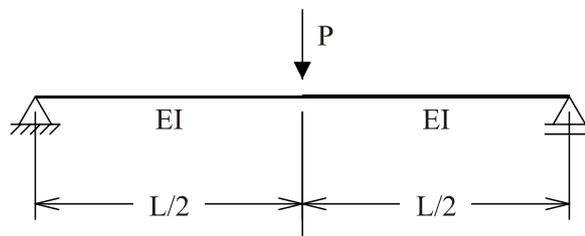


Figura 55 – Modelo estrutural de uma viga com carga concentrada

Incorporando as condições de contorno e de carregamento, o sistema pode ser escrito matricialmente como:

$$\begin{bmatrix} 8^m EI \Gamma_{[0,2^m]}^{22} & -\Phi_0^T & -\Phi_1^T \\ -\Phi_0 & 0 & 0 \\ -\Phi_1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d} \\ \lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -P \Phi_{0.5}^T \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}, \quad \lambda = \begin{Bmatrix} w'''(0) \\ -w'''(L) \end{Bmatrix} \quad (7.1)$$

O exemplo foi testado utilizando a Daubechies DB10 e a Interpolet IN4 e os resultados em momento fletor e esforço cortante para diferentes níveis de resolução encontram-se nas figs. (56) a (59).

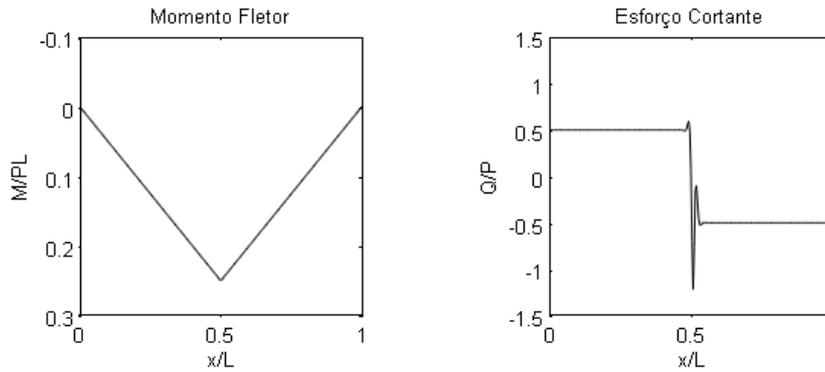


Figura 56 – Diagramas para DB10 em nível 8

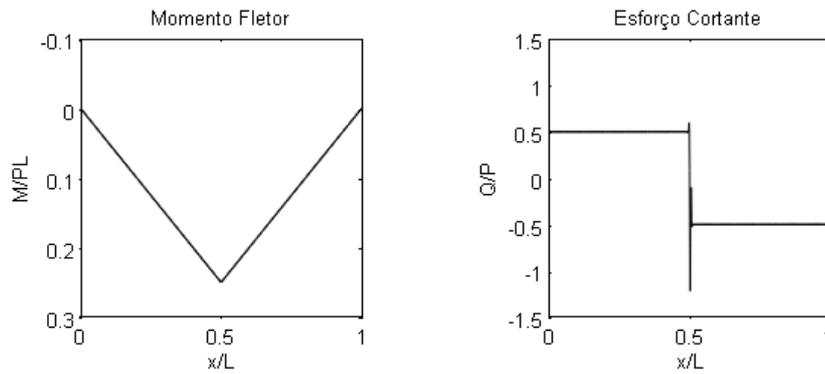


Figura 57 – Diagramas para DB10 em nível 10

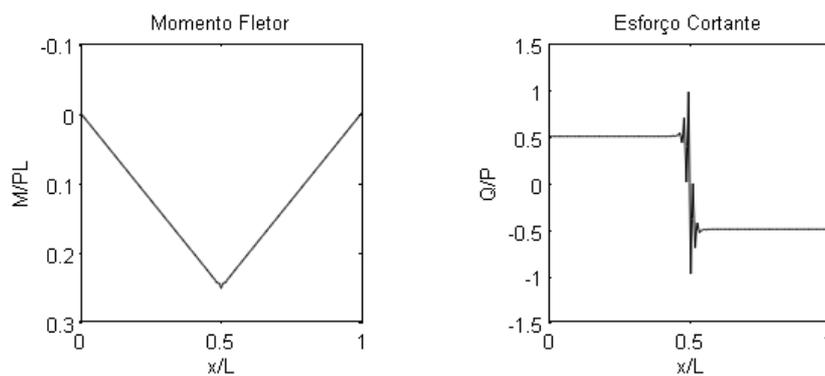


Figura 58 – Diagramas para IN4 em nível 6

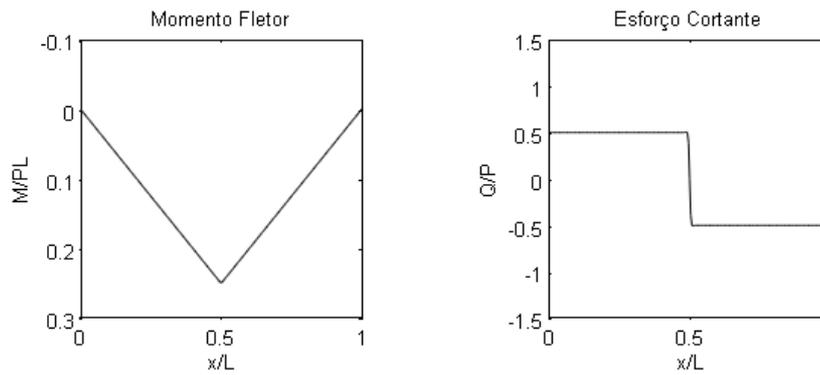


Figura 59 – Diagramas para IN4 em nível 8

Nota-se que tanto para a DB10 quanto para a IN4 níveis de resolução mais baixos são suficientes para captar a mudança de inclinação do momento fletor no ponto de aplicação da carga. Já para representar corretamente a descontinuidade no esforço cortante é necessário aumentar o nível de resolução.

Este exemplo permite verificar de forma qualitativa o poder da análise multirresolução com o uso das funções wavelet e interpoleto. Deve-se lembrar que a carga foi imposta através de um delta de Dirac como mostrado na seção anterior e não houve qualquer artifício de criação de um nó para a sua aplicação, já que toda a resolução se mantém no espaço das funções.

7.2. Coluna com Área Variável

Este exemplo, mostrado na fig. (60), apresenta um coeficiente não-constante na equação diferencial que o caracteriza, já que a área da seção transversal da coluna varia linearmente.

A equação diferencial de uma barra de treliça com área variável é dada por:

$$E \frac{\partial}{\partial \xi} \left[A(\xi) \frac{\partial u}{\partial \xi} \right] = -q(\xi) \quad (7.2)$$

Aplicando a diferenciação da eq. (7.2) chega-se a:

$$E \left(\frac{\partial A}{\partial \xi} \frac{\partial u}{\partial \xi} + A(\xi) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \right) = -q(\xi) \quad (7.3)$$

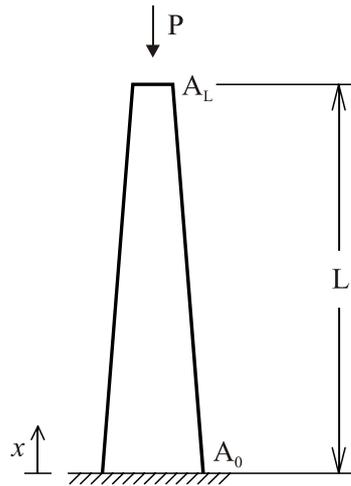


Figura 60 – Coluna com área variável submetida a carga concentrada

Se definirmos uma relação α entre a área da seção transversal no topo e na base da coluna, pode-se escrever:

$$A(\xi) = (A_L - A_0)\xi + A_0 = A_0 [(\alpha - 1)\xi + 1], \quad A_L = \alpha A_0 \quad (7.4)$$

Substituindo a eq. (7.4) na eq. (7.3) chega-se a:

$$EA_0 \left((\alpha - 1) \frac{\partial u}{\partial \xi} + [(\alpha - 1)\xi + 1] \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \right) = -q(\xi) \quad (7.5)$$

Substituindo as expressões para as derivadas primeira e segunda do deslocamento axial e aplicando Wavelet-Galerkin no nível de resolução m chega-se a:

$$EA_0 \left[(\alpha - 1) \left(\Gamma_{10,2^m}^{01} + \Pi_{10,2^m}^{102} \right) + 2^m \Gamma_{10,2^m}^{02} \right] \mathbf{d} = - \int_0^1 q(\xi) \mathbf{\Phi}^T d\xi \quad (7.6)$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{i,j_{[0,2^m]}}^{01} &= \int_0^{2^m} \varphi(\xi - i) \varphi'(\xi - j) d\xi \\
\Gamma_{i,j_{[0,2^m]}}^{02} &= \int_0^{2^m} \varphi(\xi - i) \varphi''(\xi - j) d\xi \\
\Pi_{i,j_{[0,2^m]}}^{102} &= \int_0^{2^m} x \varphi(\xi - i) \varphi''(\xi - j) d\xi
\end{aligned} \tag{7.7}$$

A expressão do coeficiente de conexão Π^{102} pode ser reescrita através de uma integração por partes assim como foi feito com os coeficientes Γ no capítulo 6:

$$\begin{aligned}
\Pi_{i,j_{[0,2^m]}}^{102} &= x \varphi(\xi - i) \varphi'(\xi - j) \Big|_0^{2^m} - \int_0^{2^m} [\varphi(\xi - i) + \xi \varphi'(\xi - i)] \varphi'(\xi - j) d\xi \\
\Pi_{i,j_{[0,2^m]}}^{102} &= 2^m \varphi(2^m - i) \varphi'(2^m - j) - \Gamma_{i,j_{[0,2^m]}}^{01} - \Pi_{i,j_{[0,2^m]}}^{111}
\end{aligned} \tag{7.8}$$

Substituindo as expressões para Π e Γ na eq. (7.6) chega-se ao seguinte sistema:

$$\begin{aligned}
\left[(\alpha - 1) \Pi_{[0,2^m]}^{111} + 2^m \Gamma_{[0,2^m]}^{11} \right] \mathbf{d} &= \frac{1}{EA_0} \int_0^1 q(x) \Phi^T dx + \\
&+ \alpha \left(2^m \Phi'_{2^m} \mathbf{d} \right) \Phi_1^T - \left(2^m \Phi'_0 \mathbf{d} \right) \Phi_0^T
\end{aligned} \tag{7.9}$$

Os valores de $2^m \Phi'_1 \mathbf{d}$ e $2^m \Phi'_0 \mathbf{d}$ são as expressões para as derivadas do deslocamento no topo e na base da coluna, respectivamente. Estas expressões são, por sua vez, proporcionais às tensões. Dependendo das condições de contorno do problema, estas tensões são conhecidas (cargas concentradas ou tensões nulas) ou incógnitas (multiplicadores de Lagrange) e isso se reflete na montagem da matriz de solução.

Neste exemplo, a coluna da fig. (60) está submetida a uma carga concentrada no seu topo e não há carregamento distribuído. O deslocamento é nulo na base e a tensão no topo é conhecida e proporcional a $-1/\alpha$. Com essas condições de contorno, a solução exata da equação diferencial é dada por:

$$EA_0 u(\xi) = \frac{1}{\alpha - 1} \ln \left(\frac{1}{\xi(\alpha - 1) + 1} \right) \quad (7.10)$$

A tensão em qualquer ponto é dada por:

$$\sigma_x(\xi) = E u'(\xi) = -\frac{1}{A_0(\xi(\alpha - 1) + 1)} \quad (7.11)$$

A complexidade da solução aumenta à medida que o valor de α cai, ou seja, à medida que a área da seção transversal no topo se aproxima de zero. Neste caso, a tensão nas proximidades do topo da coluna apresenta um gradiente elevado. No limite em que a área da seção transversal no topo é nula, a tensão nesse ponto é infinita. Obviamente, essa é uma questão apenas teórica, já que seria fisicamente impossível a aplicação de carga numa seção transversal de área nula.

Após a imposição das condições de contorno, o sistema fica:

$$\begin{bmatrix} (\alpha - 1) \mathbf{\Pi}_{|0,2^{m_1}}^{111} + 2^m \mathbf{\Gamma}_{|0,2^{m_1}}^{11} & -\mathbf{\Phi}_0^T \\ -\mathbf{\Phi}_0^T & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d} \\ \lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{P}{EA_L} \mathbf{\Phi}_1^T \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \lambda = 2^m \mathbf{\Phi}'_0 \mathbf{d} \quad (7.12)$$

Alguns valores de α foram testados em diferentes níveis de resolução para as wavelets DB10 e IN4. Os resultados para o deslocamento no topo e a tensão nos extremos da coluna se encontram nas tabs. (7) a (9).

	exato	DB10			IN4		
		nível de resolução			nível de resolução		
		0	4	8	0	4	8
$\sigma_x(0)$	-1.00000	-0.99944	-1.00000	-1.00000	-0.99869	-1.00000	-1.00000
$\sigma_x(L)$	-2.00000	-1.99579	-1.99994	-2.00000	-2.00291	-2.00003	-2.00000
$u(L)$	-1.38629	-1.38629	-1.38629	-1.38629	-1.38629	-1.38629	-1.38629

Tabela 7 – Tensões e deslocamento para $\alpha = 1/2$.

	exato	DB10			IN4		
		nível de resolução			nível de resolução		
		0	4	8	0	4	8
$\sigma_x(0)$	-1.00000	-0.96279	-0.99999	-1.00000	-1.13050	-0.99999	-1.00000
$\sigma_x(L)$	-10.0000	-8.21252	-9.82114	-9.99997	-8.82056	-10.0328	-10.0000
$u(L)$	-2.55843	-2.54911	-2.55839	-2.55843	-2.54730	-2.55839	-2.55843

Tabela 8 - Tensões e deslocamento para $\alpha = 1/10$.

	exato	DB10			IN4		
		nível de resolução			nível de resolução		
		0	4	8	0	4	8
$\sigma_x(0)$	-1.00000	-0.85154	-0.99998	-1.00000	-1.82048	-0.99998	-1.00000
$\sigma_x(L)$	-100.000	-20.6613	-54.6500	-99.2506	-23.5388	-94.7266	-100.150
$u(L)$	-4.65169	-3.99186	-4.55227	-4.65168	-3.97950	-4.62762	-4.65168

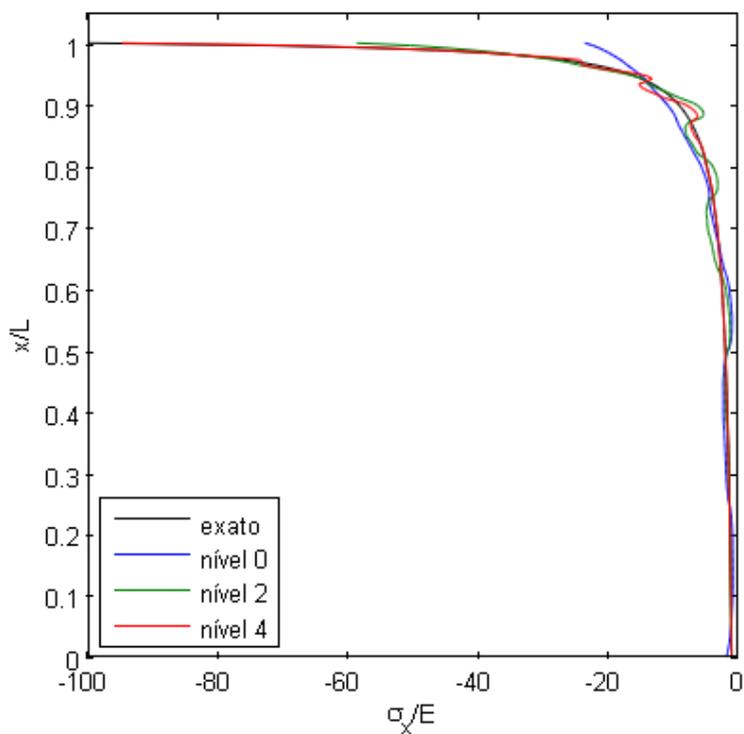
Tabela 9 - Tensões e deslocamento para $\alpha = 1/100$.

Figura 61 - Tensão na coluna com área variável

A fig. (61) mostra o resultado para a tensão normal com $\alpha = 1/100$ em diferentes níveis com a interpolete IN4. Percebe-se que a resposta se aproxima da hipérbole obtida ao fazer $\alpha = 0$ na eq. (7.11).

A fig. (62) mostra o detalhe da região de alto gradiente de tensões. Pode-se perceber como o aumento do nível de resolução contribui para uma maior exatidão.

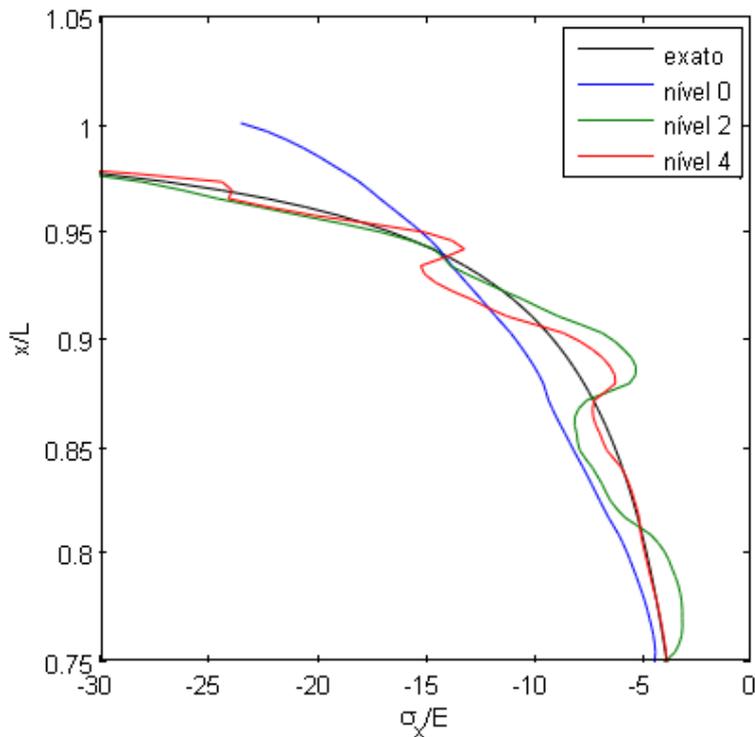


Figura 62 – Detalhe da tensão na coluna com área variável na região de maior gradiente

7.3. Viga com Altura Variável

Uma viga com altura variável (ou com mísulas) também introduz uma modificação na equação diferencial que governa o seu comportamento, já que o seu momento de inércia deixa de ser constante. Um tipo de mísula muito comum é aquele em que a variação da altura é parabólica ao longo da viga, alcançando um valor mínimo no seu ponto médio, como mostra a fig. (63).

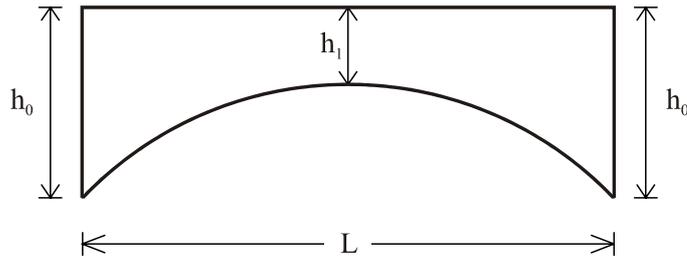


Figura 63 – Viga com altura variável (mísula)

A variação parabólica na altura produz uma variação do momento de inércia segundo um polinômio de sexto grau, conforme as expressões que se seguem:

$$h(\xi) = 4(h_0 - h_1)(\xi^2 - \xi) + h_0 \quad (7.13)$$

$$I(\xi) = \frac{b}{12} [h(\xi)]^3 = \frac{b}{12} [4(h_0 - h_1)(\xi^2 - \xi) + h_0]^3 \quad (7.14)$$

Designando por α a relação entre a altura no ponto médio da viga e a altura nos extremos da mesma, pode-se escrever uma expressão para o momento de inércia em função do seu valor nos extremos.

$$I(\xi) = I_0 (a\xi^6 + b\xi^5 + c\xi^4 + d\xi^3 + e\xi^2 + f\xi + g), \quad I_0 = \frac{bh_0^3}{12} \quad (7.15)$$

$$\begin{aligned} a &= 64(1 - 3\alpha + 3\alpha^2 - \alpha^3) \\ b &= 192(\alpha^3 - 3\alpha^2 + 3\alpha - 1) \\ c &= 240 - 192\alpha^3 - 624\alpha^2 - 672\alpha \\ d &= 64\alpha^3 - 288\alpha^2 + 384\alpha - 160 \\ e &= 48\alpha^2 - 180\alpha + 60 \\ f &= 12(\alpha - 1) \\ g &= 1 \\ \alpha &= \frac{h_1}{h_0} \end{aligned} \quad (7.16)$$

A equação diferencial de uma viga com momento de inércia variável é dada por:

$$E \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left[I(\xi) \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \right] = q(\xi) \quad (7.17)$$

Aplicando a diferenciação da eq. (7.17) chega-se à seguinte expressão:

$$E \left(\frac{\partial^2 I}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial I}{\partial \xi} \frac{\partial^3 w}{\partial \xi^3} + I(\xi) \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} \right) = q(\xi) \quad (7.18)$$

Substituindo as expressões do momento de inércia, sua primeira e segunda derivadas na eq. (7.18) chega-se a:

$$\begin{aligned} EI_0 \left[a(30\Pi^{402} + 12\Pi^{503} + \Pi^{604}) + b(20\Pi^{302} + 10\Pi^{403} + \Pi^{504}) + \right. \\ \left. + c(12\Pi^{202} + 8\Pi^{303} + \Pi^{404}) + d(6\Pi^{102} + 6\Pi^{203} + \Pi^{304}) + \right. \\ \left. + e(2\Gamma^{02} + 4\Pi^{103} + \Pi^{204}) + f(2\Gamma^{03} + \Pi^{104}) + g\Gamma^{04} \right] \mathbf{d} = \int_0^1 q(\xi) \Phi^T d\xi \end{aligned} \quad (7.19)$$

A eq. (7.19) pode ser simplificada com o auxílio das seguintes relações:

$$\begin{aligned} \Pi^{k02} &= \Phi_1' \otimes \Phi_1^T - k \Pi^{(k-1)02} - \Pi^{k11} \\ \Pi^{k03} &= \Phi_1'' \otimes \Phi_1^T - k \Pi^{(k-1)02} - \Pi^{k12} \\ \Pi^{k04} &= \Phi_1''' \otimes \Phi_1^T - \Phi_1' \otimes \Phi_1^T - k \Pi^{(k-1)03} + k \Pi^{(k-1)12} + \Pi^{k22} \end{aligned} \quad (7.20)$$

Substituindo as expressões em (7.20) na eq. (7.19):

$$\begin{aligned} EI_0 \left[a \Pi^{622} + b \Pi^{522} + c \Pi^{422} + d \Pi^{322} + e \Pi^{222} + f \Pi^{122} + g \Gamma^{22} \right] \mathbf{d} = \\ = \int_0^1 q(\xi) \Phi^T d\xi + (\Phi_0'' \mathbf{d}) \Phi_0 - (\Phi_1'' \mathbf{d}) \Phi_1 + \\ + (\Phi_1'' \mathbf{d}) [\Phi_1' + f \Phi_1] - (\Phi_0'' \mathbf{d}) [\Phi_0' - f \Phi_0] \end{aligned} \quad (7.21)$$

A tab. (10) mostra os resultados de momento fletor obtidos para o caso de uma carga concentrada no ponto médio de uma viga biengastada, como mostra a fig. (64), utilizando a wavelet DB10 e a interpoleto IN6 em diferentes níveis de

resolução. Os valores são comparados com os obtidos pelo MEF com 10, 100 e 1000 elementos polinomiais.

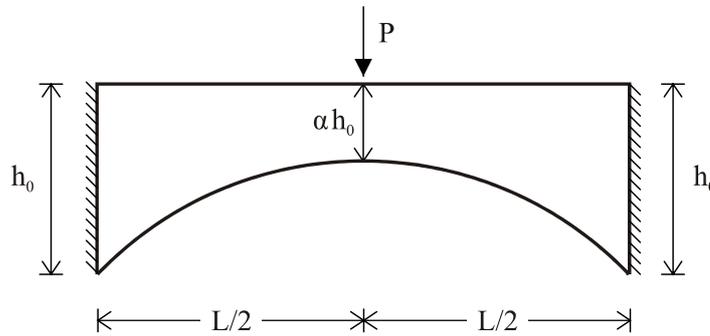


Figura 64 – Carregamento concentrado para a viga com mísula

	DB10			IN6			MEF		
	nível de resolução			nível de resolução			nº de elementos		
	0	4	8	0	4	8	10	100	1000
$-M(0)$	31.909	15.136	16.391	21.932	16.381	16.392	16.304	16.391	16.392
$M(L/2)$	2.014	7.583	8.546	8.873	8.892	8.619	8.696	8.609	8.608

Tabela 10 – Momentos fletores adimensionais para a viga com mísula e carregamento concentrado ($\times 10^{-2}$)

A tab. (11) mostra os resultados de momento fletor obtidos para o caso de uma carga distribuída uniformemente na viga, como mostra a fig. (65), utilizando as mesmas funções do exemplo anterior. Os valores são comparados com os obtidos pelo MEF com 10, 100 e 1000 elementos polinomiais.

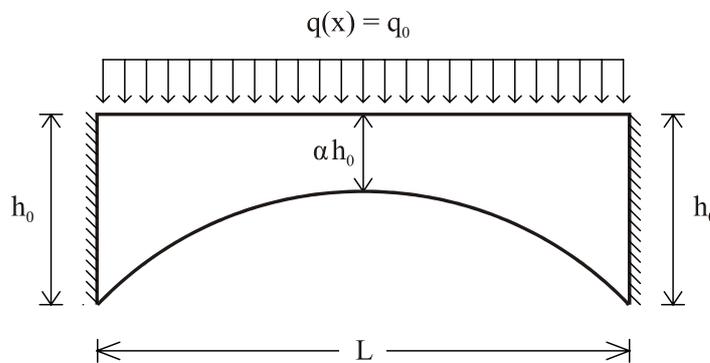


Figura 65 – Carregamento distribuído na viga com mísula

	DB10			IN6			MEF		
	nível de resolução			nível de resolução			nº de elementos		
	0	4	8	0	4	8	10	100	1000
-M(0)	16.423	9.910	10.246	11.981	10.248	10.246	10.202	10.246	10.246
M(L/2)	1.042	2.357	2.254	2.503	2.288	2.254	2.381	2.255	2.254

Tabela 11 – Momentos fletores adimensionais para a viga com mísula e carregamento distribuído ($\times 10^{-2}$)

A fig. (66) mostra o erro relativo no momento fletor nos engastes para cada função em relação ao número de graus de liberdade utilizados para o exemplo da carga distribuída. O valor obtido com o uso de 1000 elementos polinomiais foi utilizado como referência, já que não há valor analítico exato.

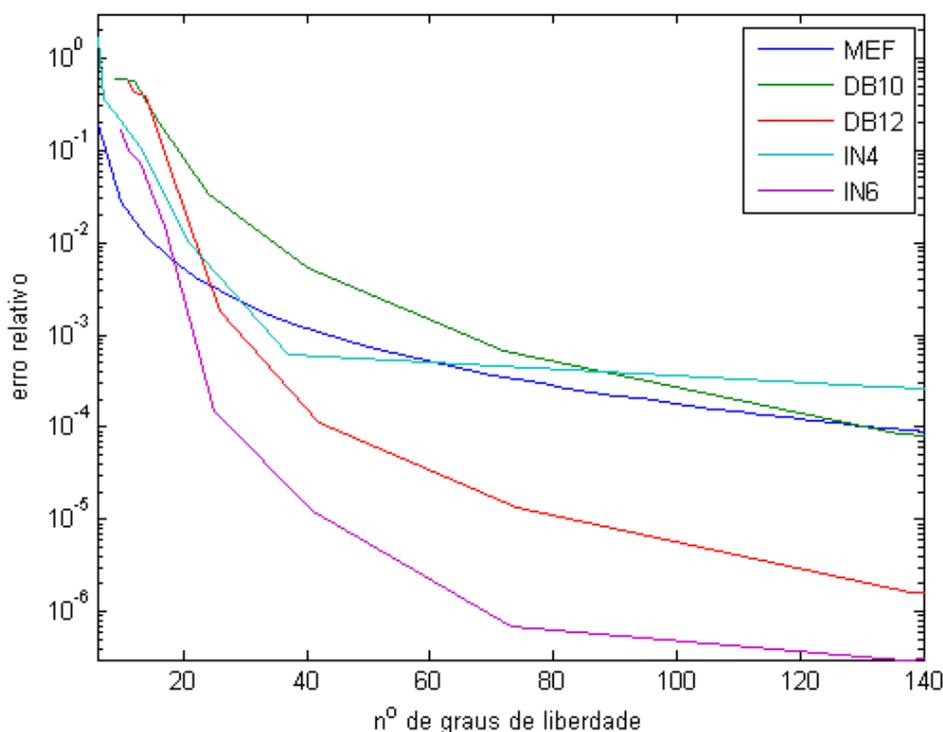


Figura 66 – Erro relativo no momento fletor do engaste em função dos graus de liberdade utilizados por cada método

Nota-se que a convergência da interpolete IN6 se dá muito mais rapidamente, embora o resultado pelo MEF seja mais preciso até aproximadamente 20 graus de liberdade. Também é interessante notar que as Daubechies DB10 apresentam

resultados piores que o FEM para poucos graus de liberdade, porém melhoram seu desempenho à medida que se refina mais o sistema.

7.4. Cálculo de Cargas Críticas de Peso Próprio de Colunas

A coluna da fig. (67a) está sujeita a seu peso próprio e o equilíbrio de momentos da fig. (68b) leva à seguinte equação:

$$dM + \gamma A(L-x)\theta dx = 0 \quad (7.22)$$

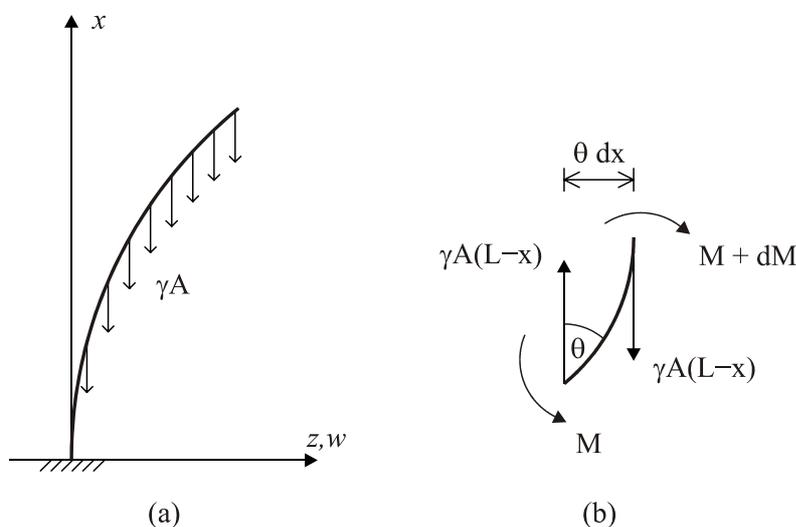


Figura 67 – Equilíbrio de momentos de uma coluna submetida ao peso próprio no estado pós-flambagem

Como $dM/dx = EI d^2\theta/dx^2$, escreve-se:

$$EI \frac{d^2\theta}{dx^2} + \gamma A(L-x)\theta = 0, \quad \theta = \frac{dw}{dx} \quad (7.23)$$

$$EI \frac{d^3w}{dx^3} + \gamma A(L-x) \frac{dw}{dx} = 0 \quad (7.24)$$

A eq. (7.24) pode ser resolvida utilizando as funções de Bessel após uma substituição de variáveis (Wang et al., 2005). Por ser uma equação de segunda ordem em θ , apenas duas condições de contorno podem ser estabelecidas, o que

não permite contemplar todas as combinações existentes para uma viga-coluna. Além disso, somente condições de rotação e momento podem ser impostas. A carga crítica de peso próprio para o caso de uma coluna engastada e livre como a da fig. (67) é dada por:

$$(\gamma AL)_{cr} = 7.83735 \frac{EI}{L^2} \quad (7.25)$$

Outra forma de obter a equação diferencial de uma coluna sujeita a seu peso próprio seria considerar o esforço normal produzido por esse carregamento, como mostra a fig. (68).

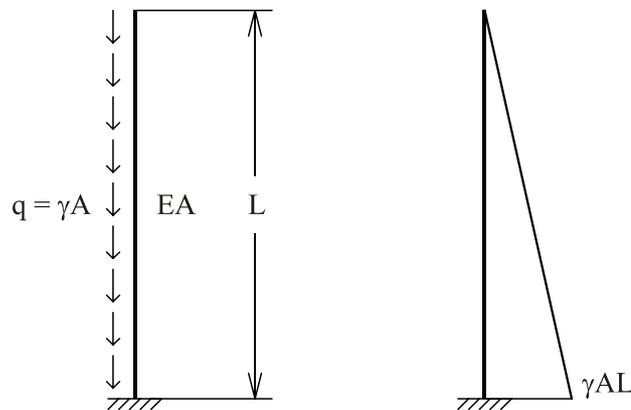


Figura 68 – Esforço normal da coluna sujeita ao peso próprio

O esforço normal pode ser incorporado como carregamento à equação diferencial de uma viga submetida a uma carga axial da seguinte forma:

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + \frac{\partial}{\partial \xi} \left[N(\xi) \frac{\partial w}{\partial \xi} \right] = 0 \quad (7.26)$$

Diferenciando a eq. (7.26):

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + \frac{\partial N}{\partial \xi} \frac{\partial w}{\partial \xi} + N(\xi) \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} = 0 \quad (7.27)$$

A expressão do esforço normal representado na fig. (68) é dada por:

$$N(\xi) = qL(1-\xi), \quad q = \gamma A \quad (7.28)$$

Substituindo a eq. (7.28) na eq. (7.27):

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} - qL \frac{\partial w}{\partial \xi} + qL(1-\xi) \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} = 0 \quad (7.29)$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} - \frac{\partial w}{\partial \xi} - \xi \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \right) = 0, \quad \mu = \frac{qL}{EI} \quad (7.30)$$

Fazendo as substituições necessárias para a aplicação do Método de Wavelet-Galerkin chega-se a:

$$\left[\Gamma^{04} + \mu(\Gamma^{02} - \Gamma^{01} - \Pi^{102}) \right] \mathbf{d} = \mathbf{0} \quad (7.31)$$

Substituindo os coeficientes de conexão:

$$\begin{aligned} & \left[\Gamma^{22} + \mu(\Pi^{111} - \Gamma^{11}) \right] \mathbf{d} - \left[\Phi_0'' \mathbf{d} + \mu(\Phi_0' \mathbf{d}) \right] \Phi_0^T + \\ & + (\Phi_1'' \mathbf{d}) \Phi_1^T - (\Phi_1' \mathbf{d}) \Phi_1'^T + (\Phi_0'' \mathbf{d}) \Phi_0'^T = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (7.32)$$

Para a coluna engastada e livre o sistema é escrito matricialmente como:

$$\left\{ \begin{bmatrix} \Gamma^{22} & -\Phi_0^T & -\Phi_0'^T \\ -\Phi_0 & 0 & 0 \\ -\Phi_0' & 0 & 0 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} \Pi^{111} - \Gamma^{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \begin{Bmatrix} \mathbf{d} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}, \quad \boldsymbol{\lambda} = \begin{Bmatrix} w'''(0) \\ -w''(0) \end{Bmatrix} \quad (7.33)$$

Os valores obtidos para a carga crítica de peso próprio da coluna engastada e livre estão na tab. (12) para alguns níveis de resolução e são comparados com os obtidos por 10, 100 e 1000 elementos finitos polinomiais.

A fig. (69) mostra a convergência das diferentes funções em comparação com o MEF.

CARGA CRÍTICA (EI/L^2)									
exato	DB10			IN4			MEF		
	nível de resolução			nível de resolução			nº de elementos		
	0	4	8	0	4	8	10	100	1000
7.8373	7.8678	7.8375	7.8376	7.8564	7.8378	7.8374	7.8536	7.8375	7.8373

Tabela 12 – Resultados obtidos para cargas críticas de peso próprio da coluna engastada e livre

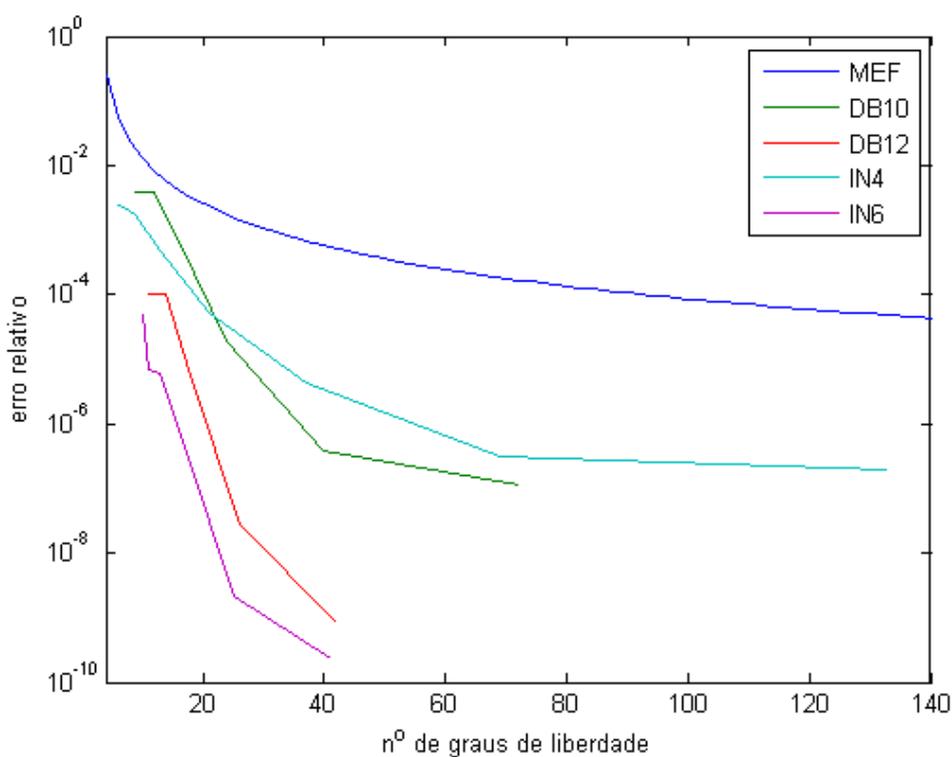


Figura 69 – Erro relativo na carga crítica de peso próprio em função dos graus de liberdade utilizados por cada método

Para as demais condições de contorno possíveis não há na literatura valores analíticos de carga crítica de peso próprio. Considerando que o deslocamento vertical do topo da coluna seja permitido em todos os casos, a função que descreve o esforço normal da coluna engastada e livre valerá também para as condições de contorno da fig. (70).

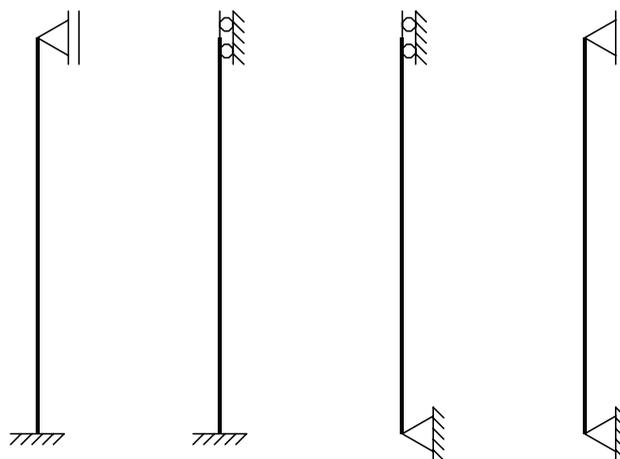


Figura 70 – Diferentes condições de contorno para as quais vale a mesma expressão do esforço normal

A tab. (13) mostra os resultados obtidos para as demais condições de contorno. Deve-se notar que como o esforço normal aumenta à medida que x diminui, a condição de engaste na base e apoio simples no topo leva a uma carga crítica diferente da condição de apoio simples na base e engaste no topo.

CARGA CRÍTICA (EI/L^2)									
	DB10			IN4			MEF		
	nível de resolução			nível de resolução			nº de elementos		
	0	4	8	0	4	8	10	100	1000
A	18.9594	18.5702	18.5688	19.5512	18.5765	18.5687	19.7129	18.6822	18.5801
B	83.3379	74.9390	74.6286	116.653	74.8549	74.6286	79.5290	75.0818	74.6736
C	32.0183	30.0171	30.0095	32.4877	30.0395	30.0094	32.4448	30.2432	30.0327
D	54.5225	52.5947	52.5007	67.2576	52.5817	52.5007	54.2119	52.6720	52.5178

Tabela 13 – Cargas críticas de peso próprio para as condições de contorno: biapoiada (A), biengastada (B), engastada e apoiada (C) e apoiada e engastada (D)

7.5.

Cálculo de Cargas Críticas de Vigas sobre Base Elástica

A equação diferencial de uma viga sobre base elástica de Winkler submetida a um carregamento axial é dada por:

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + P \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + cw = 0 \quad (7.34)$$

O polinômio característico da eq. (7.34) e suas raízes são dados por:

$$EI\lambda^4 + P\lambda^2 + c = 0$$

$$\lambda = \pm \frac{1}{\sqrt{EI}} \sqrt{-P \pm \sqrt{P^2 - 4cEI}} \quad (7.35)$$

Para que haja uma solução periódica para $w(\xi)$ na eq. (7.34) é necessário que todos os valores de λ sejam complexos, o que pode ser facilmente obtido fazendo $P = 2\sqrt{cEI}$ na eq. (7.35). Este é, portanto, um valor possível da carga crítica para uma solução periódica (Bazant e Cedolin, 1991).

Contudo, pode haver valores menores de P que ainda levam a soluções periódicas ou não. Timoshenko e Gere (1961) apresentam valores possíveis de carga crítica para uma viga sobre base elástica biapoiada:

$$P = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \left(n^2 + \frac{cL^4}{n^2 \pi^4 EI} \right), \quad n = 1, 2, \dots \quad (7.36)$$

Dependendo da relação entre a rigidez da fundação e a da viga, diferentes valores de n podem fornecer a menor carga crítica possível. Por exemplo, a transição entre $n = 1$ e $n = 2$ é dada para o seguinte valor de c :

$$c = 4 \frac{\pi^4 EI}{L^4} \quad (7.37)$$

Para valores de c menores do que o dado pela eq. (7.37), prevalece a carga crítica para $n = 1$ e para valores maiores de c prevalece $n = 2$. À medida que c aumenta, valores maiores de n produzem as menores cargas críticas.

Derivando a expressão em (7.36), chega-se ao valor de n que produzirá um mínimo na carga crítica:

$$n = \sqrt[4]{\frac{cL^4}{\pi^4 EI}} \quad (7.38)$$

A eq. (7.38) fornece valores reais de n que minimizam a carga crítica. Porém, n deve ser um número inteiro. Contudo, se c é muito maior do que EI/L^4 , pode-se concluir que a aproximação de n real pelo inteiro mais próximo é válida. Com isso, pode-se substituir o valor de n da eq. (7.38) na eq. (7.36), obtendo-se:

$$P = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \sqrt{\frac{cL^4}{\pi^4 EI}} = 2\sqrt{cEI} \quad (7.39)$$

Verifica-se que, para valores de rigidez da fundação consideravelmente maiores que EI/L^4 , a carga crítica é dada pela eq. (7.39) e é a mesma já obtida para garantir uma solução periódica. Isto pode ocorrer por valores altos de rigidez da fundação ou pelo fato de a viga ser longa. Pode-se concluir que o valor $P = 2\sqrt{cEI}$ constitui um limite inferior para a carga crítica de uma viga biapoiada infinitamente longa. Aplicando o Método de Wavelet-Galerkin na eq. (7.34):

$$(\mathbf{k} + \mathbf{b} + P\mathbf{g})\mathbf{d} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{k} = 8^m EI \Gamma_{[0,2^m]}^{04}, \quad \mathbf{g} = 2^m \Gamma_{[0,2^m]}^{02}, \quad \mathbf{b} = \frac{c}{2^m} \Gamma_{[0,2^m]}^{00} \quad (7.40)$$

Substituindo os coeficientes de conexão e incorporando as condições de contorno para uma viga biapoiada como a da fig. (71), o sistema fica:

$$\left\{ \begin{array}{ccc} 8^m EI \Gamma_{[0,2^m]}^{22} + 2^{-m} c \Gamma_{[0,2^m]}^{00} & -\Phi_0^T & -\Phi_1^T \\ -\Phi_0 & 0 & 0 \\ -\Phi_1 & 0 & 0 \end{array} \right\} - P \left\{ \begin{array}{ccc} \Gamma^{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{d} \\ \lambda \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{array} \right\} \quad (7.41)$$

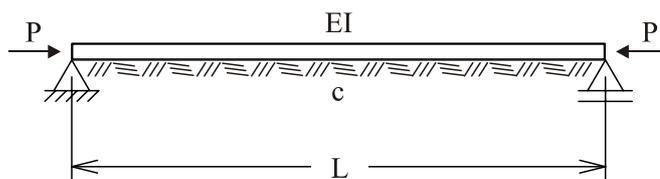


Figura 71 – Viga biapoiada sobre base elástica submetida a carga axial

A tab. (14) mostra os resultados obtidos para as duas primeiras cargas críticas considerando um valor de $c = \pi^4 EI/L^4$. Este valor de rigidez da fundação produzirá uma carga crítica para $n = 1$ menor do que para $n = 2$ considerando a eq. (7.36). Os resultados são comparados com os valores exatos.

CARGA CRÍTICA (EI/L^2)							
MODO	EXATO	DB10			IN4		
		NÍVEL DE RESOLUÇÃO			NÍVEL DE RESOLUÇÃO		
		0	4	8	0	4	8
1	19.73921	19.74409	19.73942	19.73925	20.21914	19.74125	19.73921
2	41.94582	59.19314	42.00375	41.94583	48.92507	42.06881	41.94582

Tabela 14 – Resultados para as duas primeiras cargas críticas de uma viga biapoiada sobre base elástica

A fig. (72) mostra os dois primeiros modos de flambagem obtidos com a interpolete IN6 em nível de resolução 8.

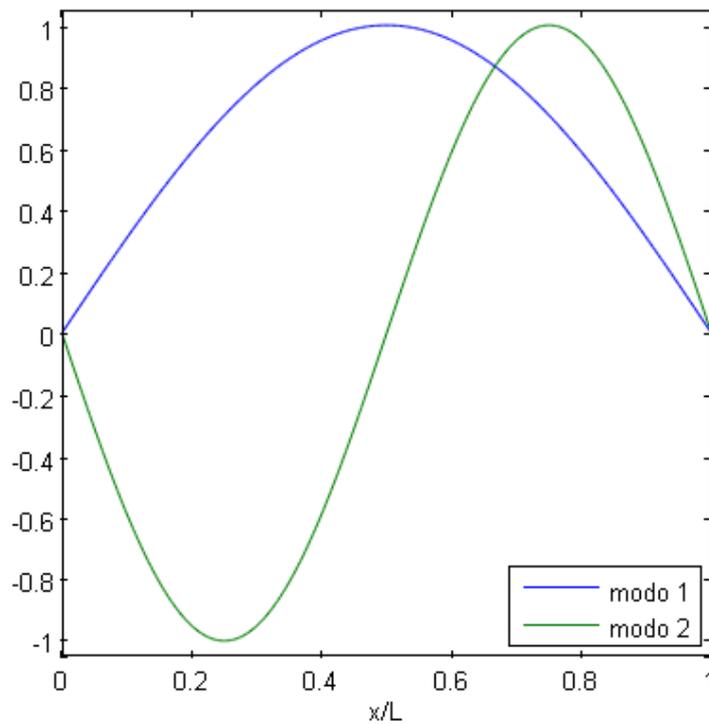


Figura 72 – Dois primeiros modos de flambagem da viga biapoiada sobre base elástica

Para o caso em que $c = 4\pi^4 EI/L^4$ espera-se que haja coincidência nas duas primeiras cargas críticas. Os resultados estão na tab. (15).

CARGA CRÍTICA (EI/L^2)							
MODO	EXATO	DB10			IN4		
		NÍVEL DE RESOLUÇÃO			NÍVEL DE RESOLUÇÃO		
		0	4	8	0	4	8
1	49.34802	49.35166	49.34823	49.34803	49.75403	49.35005	49.34802
2	49.34802	66.29724	49.40585	49.34806	56.13089	49.47094	49.34803

Tabela 15 – Resultados para as duas primeiras cargas críticas de uma viga biapoiada sobre base elástica com $c = 4\pi^4 EI/L^4$

A fig. (73) mostra os dois primeiros modos de flambagem obtidos com a interpolete IN6 em nível de resolução 8. Nota-se que, apesar de corresponderem à mesma carga crítica, o modo correspondente a $n = 1$ contém meio período de um seno e o correspondente a $n = 2$ contém um período completo.

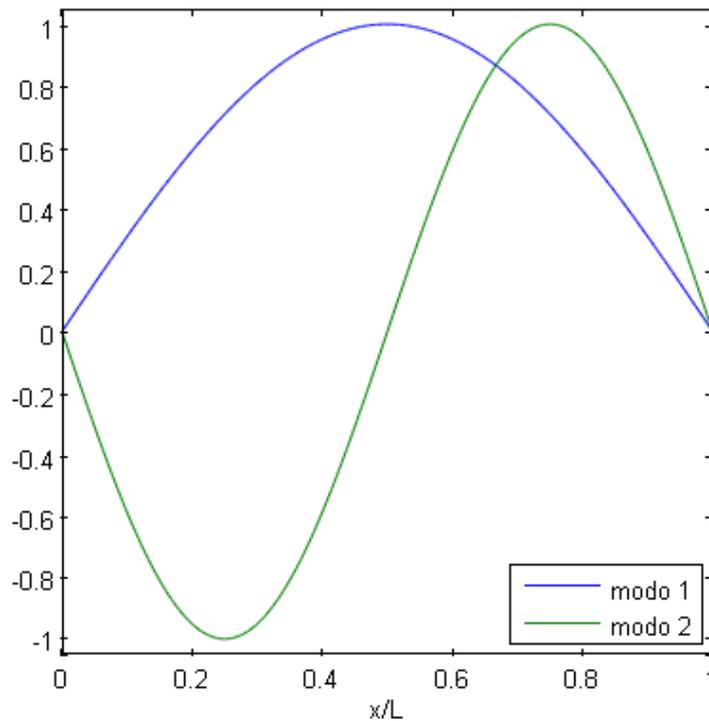


Figura 73 – Modos de flambagem para a mesma carga crítica da viga biapoiada sobre base elástica

Foi testado também um valor de $c = 256\pi^4 EI/L^4$, suficiente para fazer a viga ser considerada infinitamente longa. A carga crítica esperada nesse caso é $P = 2\sqrt{cEI}$. Os resultados estão na tab. (16). O modo de flambagem obtido pela IN6 em nível 8 está mostrado na fig. (74).

EXATO	DB10			IN4		
	NÍVEL DE RESOLUÇÃO			NÍVEL DE RESOLUÇÃO		
	0	4	8	0	4	8
315.82734	410.36478	329.60448	315.82734	537.08314	322.01481	315.82747

Tabela 16 – Resultados de cargas críticas para uma viga biapoiada sobre base elástica infinitamente longa

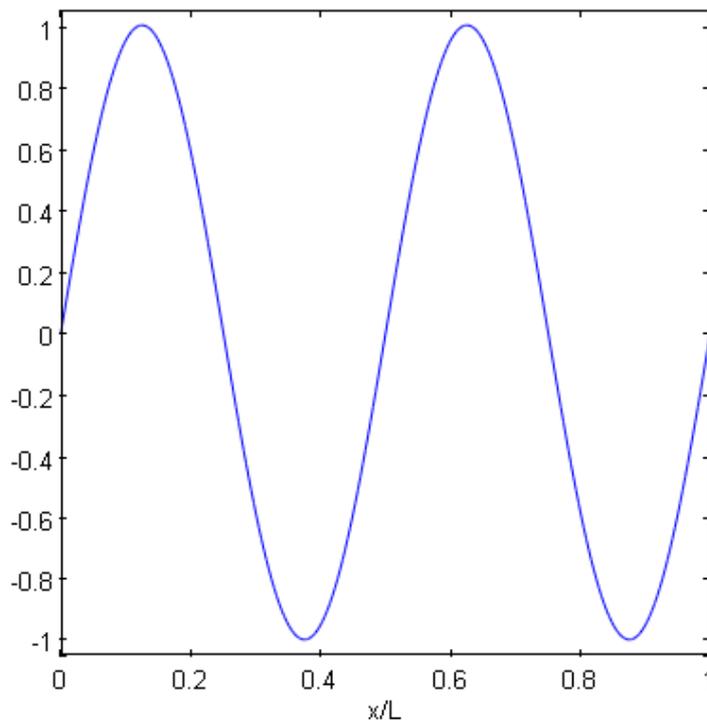


Figura 74 – Primeiro modo de flambagem da viga biapoiada sobre base elástica infinitamente longa

Pode-se notar que $n = 4$ devido ao número de meias-ondas presentes no modo de flambagem da fig. (74).

Outro caso interessante a se considerar é o de uma viga infinitamente longa, livre nas duas extremidades, como a da fig. (75). Neste caso, a carga crítica é dada por $P = \sqrt{cEI}$ e o modo de flambagem é dado por uma senóide cuja amplitude

aumenta em direção aos extremos da viga. Dois modos são possíveis: um simétrico e outro antissimétrico, ambos correspondentes à mesma carga crítica. Os resultados das duas primeiras cargas críticas obtidas com $c = 256 \pi^4 EI/L^4$ podem ser vistos na tab. (17) e os modos de flambagem correspondentes utilizando a IN4 em nível 8 podem ser vistos na fig. (76).

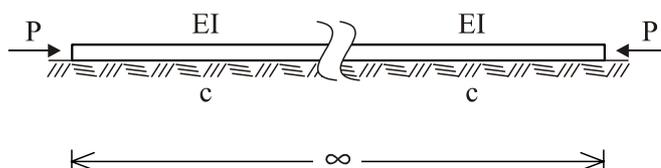


Figura 75 – Viga infinitamente longa sobre base elástica livre nas extremidades

CARGA CRÍTICA (EI/L^2)							
MODO	EXATO	DB10			IN4		
		NÍVEL DE RESOLUÇÃO			NÍVEL DE RESOLUÇÃO		
		0	4	8	0	4	8
1	157.9137	180.2027	160.8943	157.2460	195.0601	159.0982	157.2461
2	157.9137	187.0251	162.9417	158.5998	243.6150	160.7499	158.5999

Tabela 17 – Resultados de cargas críticas para uma viga infinitamente longa sobre base elástica livre nas extremidades

Nota-se pelos valores da tab. (17) que, mesmo em altos níveis de resolução, as cargas críticas exatas não são corretamente obtidas. No caso do nível mais alto, a primeira carga crítica calculada é menor do que a exata e a segunda, maior. Interessante notar que, tanto para a DB10 quanto para a IN4, a média entre as cargas críticas calculadas corresponde a um valor mais próximo do valor exato. É possível que haja uma interação entre os modos simétrico e antissimétrico que dificultam a correta obtenção dos menores autovalores.

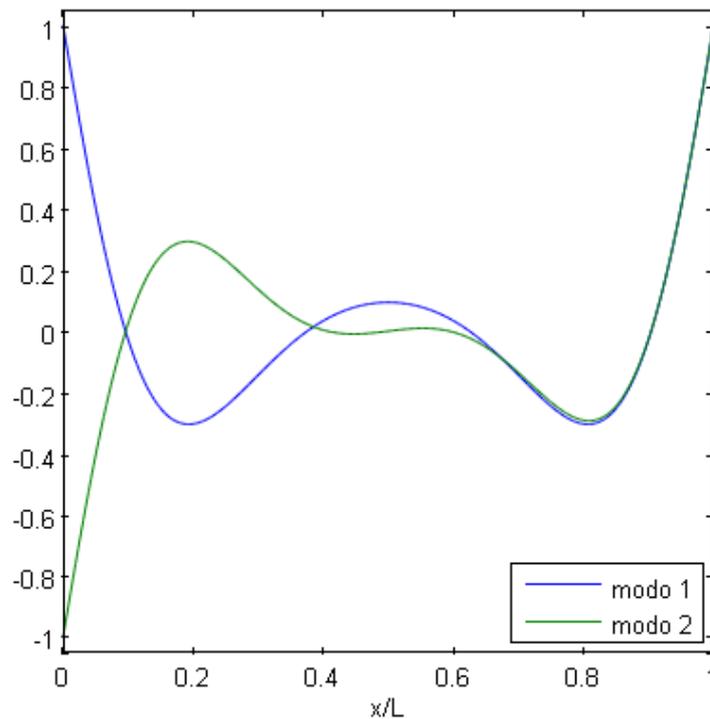


Figura 76 – Modos de flambagem simétrico e antissimétrico da viga infinitamente longa sobre base elástica livre nas extremidades

Resultados para outras condições de contorno podem ser vistos na tab. (18). Os resultados são comparados com os obtidos por 10, 100 e 1000 elementos de viga padrão.

CARGA CRÍTICA (EI/L^2)									
	DB10			IN4			MEF		
	nível de resolução			nível de resolução			nº de elementos		
	0	4	8	0	4	8	10	100	1000
A	187.672	161.987	157.914	218.365	159.911	157.915	158.429	157.914	157.914
B	753.778	389.391	353.203	771.521	368.303	353.204	354.673	353.204	353.203
C	508.173	343.420	325.549	609.787	333.629	325.550	326.263	325.549	325.549

Tabela 18 – Resultados para cargas críticas de viga sobre base elástica com as condições de contorno: engastada e livre (A), biengastada (B) e engastada e apoiada (C)