

6

Método de Wavelet-Galerkin Modificado

No capítulo anterior foi possível perceber a aplicabilidade das funções wavelet de Daubechies e Interpolets na formulação de Elementos Finitos. No entanto, há uma série de limitações que emergem desse tipo de formulação. A principal contribuição desta tese está na introdução de modificações no Método de Wavelet-Galerkin que permitem a sua aplicação direta às equações diferenciais, inclusive àquelas com coeficientes variáveis.

Uma das limitações já citada no capítulo 4 se refere à localização dos graus de liberdade dos elementos. O número de graus de liberdade das funções wavelet em geral leva a divisões não diádicas do contínuo, o que pode dificultar a obtenção da matriz de transformação de espaços. Um exemplo claro é a formulação de um elemento de viga a partir das interpolets IN2, IN3 e IN4. Estas funções têm 6, 10 e 14 graus de liberdade, respectivamente. Reservando dois graus de liberdade para as rotações nos extremos do elemento, deve-se dividi-lo em 3, 7 e 11 segmentos iguais, o que leva à avaliação das funções em pontos como $1/3$, $1/7$ e $1/11$, por exemplo, que não fazem parte da malha diádica e requerem aproximação através de um processo iterativo. Se um número suficiente de iterações é escolhido, em geral 8, o erro não é significativo e os elementos apresentam boa resposta, como pode ser visto no capítulo anterior. Ainda assim seria interessante poder evitar a introdução de erros numéricos no sistema.

A limitação advinda do número de graus de liberdade “irregular” das wavelets tem ainda maior relevância quando se imagina a formulação de elementos bidimensionais. Um elemento bidimensional formulado a partir de uma interpolet com 6 graus de liberdade, por exemplo, necessitaria de 36 graus de liberdade. A escolha da posição de cada um desses graus de liberdade seria difícil num elemento de placa, por exemplo. Com uma formulação mais livre o cálculo da resposta poderia ser feito em qualquer ponto do contínuo a partir de coeficientes de interpolação e não da própria resposta em certos pontos.

Outra limitação da formulação em elementos finitos é a impossibilidade de utilizar as vantagens da análise multirresolução que as funções wavelet apresentam, já que as matrizes de rigidez, massa e geométrica dos elementos são baseadas nas funções em seu nível de resolução mais baixo. A detecção de descontinuidades e gradientes elevados depende em grande parte da análise em níveis de resolução mais altos, o que pode ser obtido com o uso de vários elementos, como é feito usualmente no MEF.

6.1.

Analogias entre o Método de Wavelet-Galerkin Modificado e o MEF

Como pode ser visto no capítulo 2, o Método de Wavelet-Galerkin aplicado à solução de equações diferenciais resulta num sistema de equações como o seguinte:

$$\mathbf{A}\mathbf{d} = \mathbf{b} \quad (6.1)$$

Na eq. (6.1), a matriz \mathbf{A} contém coeficientes de conexão no nível de resolução escolhido e linhas correspondentes às condições de contorno. As incógnitas (o vetor \mathbf{d}) são os coeficientes de interpolação que representam a função resposta em função da base e não os próprios valores da função. As matrizes dos coeficientes de conexão em níveis posteriores ao básico podem ser obtidas a partir de um processo semelhante ao de montagem das matrizes globais de um sistema de elementos finitos, ou seja, o aumento da resolução da função wavelet é análogo ao refinamento da malha.

Numa solução pelo MEF chega-se ao seguinte sistema de equações:

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{F} \quad (6.2)$$

A matriz \mathbf{K} , por sua vez, contém informações de todos os elementos e também da posição dos graus de liberdade envolvidos, além das condições de contorno e também foi obtida através de um processo de montagem semelhante ao da matriz de coeficientes de conexão. O vetor \mathbf{u} contém os valores da função resposta nos graus de liberdade utilizados para a montagem da matriz \mathbf{K} .

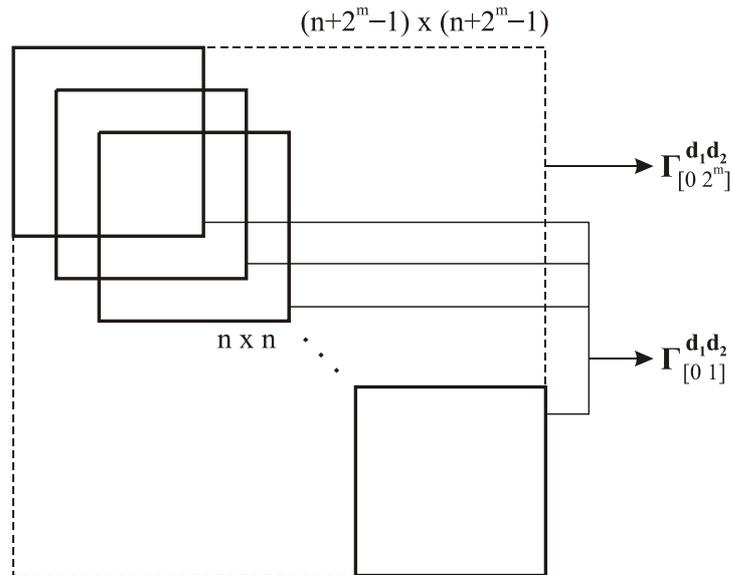


Figura 54 – Montagem da matriz de coeficientes de conexão no intervalo $[0, 2^m]$

6.2. Imposição das Condições de Contorno no Espaço das Funções

Sabe-se que a imposição das condições de contorno no espaço físico é feita, em geral, com a supressão das linhas e colunas correspondentes aos deslocamentos prescritos (em geral nulos) na matriz de rigidez. Essa forma de resolução pode ser posta em forma matricial da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ff} & \mathbf{K}_{fl} \\ \mathbf{K}_{lf} & \mathbf{K}_{ll} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_f \\ \mathbf{u}_l \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_f \\ \mathbf{F}_l \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (6.3)$$

Na eq. (6.3), os índices f se referem aos graus de liberdade com valor prescrito e os índices l aos livres. O vetor \mathbf{R} contém as forças que surgem como reações de apoio nos pontos onde os deslocamentos são prescritos (ou nulos). Os deslocamentos desconhecidos e as reações de apoio são obtidos da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_l &= \mathbf{K}_{ll}^{-1} (\mathbf{F}_l - \mathbf{K}_{lf} \mathbf{u}_f) \\ \mathbf{R} &= \mathbf{K}_{ff} \mathbf{u}_f + \mathbf{K}_{fl} \mathbf{K}_{ll}^{-1} (\mathbf{F}_l - \mathbf{K}_{lf} \mathbf{u}_f) - \mathbf{F}_f \end{aligned} \quad (6.4)$$

Supondo que o sistema da eq. (6.4) se refira a um único elemento, pode-se dizer que a matriz global \mathbf{K} e a local \mathbf{k} são idênticas e o sistema pode ser reescrito em função das matrizes e vetores no espaço das funções:

$$\mathbf{T}^{-T} \tilde{\mathbf{k}} \mathbf{T}^{-1} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_f \\ \mathbf{u}_l \end{Bmatrix} = \mathbf{T}^{-T} \tilde{\mathbf{f}} + \begin{Bmatrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (6.5)$$

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{u}_f \\ \mathbf{u}_l \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_f \\ \mathbf{T}_l \end{bmatrix} \mathbf{d} \quad (6.6)$$

Conforme indicado na eq. (6.6), a matriz de transformação de espaços \mathbf{T} pode ser dividida em linhas correspondentes aos deslocamentos prescritos e aos livres. Substituindo a eq. (6.6) na eq. (6.5) chega-se a uma expressão em função dos coeficientes de interpolação (vetor \mathbf{d}).

$$\mathbf{T}^{-T} \tilde{\mathbf{k}} \mathbf{d} = \mathbf{T}^{-T} \tilde{\mathbf{f}} + \begin{Bmatrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (6.7)$$

Multiplicando ambos os lados da eq. (6.7) por \mathbf{T}^T e separando as colunas correspondentes às partes fixas e livres, chega-se a:

$$\tilde{\mathbf{k}} \mathbf{d} = \tilde{\mathbf{f}} + \begin{bmatrix} \mathbf{T}_f^T & | & \mathbf{T}_l^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} = \tilde{\mathbf{f}} + \mathbf{T}_f^T \mathbf{R} \quad (6.8)$$

No sistema da eq. (6.8) são conhecidos a matriz $\tilde{\mathbf{k}}$, o vetor $\tilde{\mathbf{f}}$ e a matriz \mathbf{T} a partir da formulação em coeficientes de conexão, mas a matriz \mathbf{R} das reações de apoio é desconhecida, ou seja, deve ser incorporada ao sistema como incógnita.

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{k}} & | & -\mathbf{T}_f^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d} \\ \mathbf{R} \end{Bmatrix} = \tilde{\mathbf{f}} \quad (6.9)$$

A eq. (6.9) contém mais incógnitas do que equações, já que as reações de apoio também são desconhecidas. Equações adicionais podem ser obtidas das

condições de contorno dadas pelos deslocamentos prescritos. A partir da eq. (6.6) pode-se escrever:

$$\mathbf{u}_f = \mathbf{T}_f \mathbf{d} \quad (6.10)$$

Adicionando as linhas correspondentes à eq. (6.10) na eq. (6.9), chega-se a um sistema com tantas equações quanto incógnitas:

$$\left[\begin{array}{c|c} \tilde{\mathbf{k}} & -\mathbf{T}_f^T \\ \hline \mathbf{T}_f & \mathbf{0} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{d} \\ \mathbf{R} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \tilde{\mathbf{f}} \\ \mathbf{u}_f \end{array} \right\} \quad (6.11)$$

Como em geral os deslocamentos prescritos \mathbf{u}_f são nulos pode-se escrever:

$$\left[\begin{array}{c|c} \tilde{\mathbf{k}} & -\mathbf{T}_f^T \\ \hline -\mathbf{T}_f & \mathbf{0} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{d} \\ \mathbf{R} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \tilde{\mathbf{f}} \\ \mathbf{0} \end{array} \right\} \quad (6.12)$$

A abordagem utilizada para chegar à eq. (6.12) é semelhante ao que se faz em métodos sem-malha (ou *meshless*) em que são usados multiplicadores de Lagrange para a imposição das condições de contorno (Nguyen et al., 2008). Em geral, em problemas de otimização ou programação matemática, qualquer sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ sujeito a restrições $\mathbf{Gx} = \mathbf{0}$ pode ser resolvido utilizando multiplicadores de Lagrange da seguinte forma:

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{G}^T \\ \hline \mathbf{G} & \mathbf{0} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{x} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{b} \\ \mathbf{0} \end{array} \right\} \quad (6.13)$$

A vantagem desta abordagem reside no fato de que os multiplicadores de Lagrange $\boldsymbol{\lambda}$ têm significado físico, ao contrário do que ocorre normalmente em problemas de otimização. Os valores de $\boldsymbol{\lambda}$ da eq. (6.13) são as próprias reações de apoio do modelo estrutural.

A solução de problemas de análise estrutural desta forma traz algumas vantagens com relação ao Método de Galerkin tradicional e à formulação pelo MEF. No método proposto, as reações de apoio são incógnitas do próprio sistema,

o que evita o custo de obtê-las separadamente. Outra vantagem diz respeito ao número de equações para imposição das condições de contorno: no caso do Método de Galerkin tradicional, este número depende do tipo de equação diferencial, enquanto que no método proposto é necessário apenas impor as condições de deslocamentos ou rotações conhecidas, assim como ocorre no MEF.

O fato de o sistema da eq. (6.12) depender apenas da matriz \mathbf{T}_f mostra que é necessário avaliar a base de funções apenas nos pontos cujos deslocamentos são prescritos, tornando desnecessária a formação da matriz \mathbf{T} completa. Isto representa uma grande vantagem, já que não é mais necessário estabelecer a localização de todos os graus de liberdade do elemento, apenas daqueles responsáveis por impor as condições de contorno.

Como foi visto no capítulo 3, pelo Método de Wavelet-Galerkin, a solução da equação diferencial de uma viga tem 4 linhas e 4 colunas adicionais na matriz dos coeficientes de conexão, independente do número de deslocamentos prescritos. Já pela abordagem modificada, se a viga é biapoiada, por exemplo, são necessárias apenas duas equações adicionais para impor as condições de deslocamento nulo nas extremidades (condições essenciais). Não é necessário impor ao sistema as condições de momento nulo (condições naturais), como no caso do método tradicional.

6.3. Demonstração da Equivalência dos Métodos

Como foi visto no capítulo 3, a aplicação do Método de Wavelet-Galerkin na solução da equação diferencial da barra de treliça submetida a um carregamento polinomial de grau n leva a:

$$EA \Gamma^{02} \mathbf{d} = - \sum_{k=0}^n q_k \Omega^k \quad (6.14)$$

No entanto, a matriz $\tilde{\mathbf{k}}$ dos coeficientes de conexão utilizada pra a formulação dos elementos é baseada em coeficientes de ordem diferente da que aparece na formulação dos elementos:

$$\tilde{\mathbf{k}} = EA \Gamma^{11} \quad (6.15)$$

Realizando uma integração por partes, chega-se a:

$$\begin{aligned} \Gamma_{i,j}^{02} &= \int_0^1 \varphi(\xi-i)\varphi''(\xi-j)d\xi = \left\{ \varphi(\xi-i)\varphi'(\xi-j) \right\}_0^1 \\ &\quad - \int_0^1 \varphi'(\xi-i)\varphi'(\xi-j)d\xi = \varphi(1-i)\varphi'(1-j) - \varphi(-i)\varphi'(-j) - \Gamma_{i,j}^{11} \end{aligned} \quad (6.16)$$

Colocando a eq. (6.16) em forma matricial, tem-se:

$$\mathbf{\Gamma}^{02} = \mathbf{\Phi}'_1 \otimes \mathbf{\Phi}_1^T - \mathbf{\Phi}'_0 \otimes \mathbf{\Phi}_0^T - \mathbf{\Gamma}^{11} \quad (6.17)$$

Substituindo a eq. (6.17) na eq. (6.14) tem-se:

$$EA \left[\mathbf{\Gamma}^{11} \mathbf{d} + (\mathbf{\Phi}'_0 \mathbf{d}) \mathbf{\Phi}_0^T - (\mathbf{\Phi}'_1 \mathbf{d}) \mathbf{\Phi}_1^T \right] = \sum_{k=0}^n q_k \mathbf{\Omega}^k \quad (6.18)$$

Os valores de $\mathbf{\Phi}'_1 \mathbf{d}$ e $-\mathbf{\Phi}'_0 \mathbf{d}$ são proporcionais às reações de apoio (ou às tensões) nas extremidades da treliça. Ambas podem ser incógnitas (caso a treliça seja fixa nos dois extremos) ou uma delas pode ser nula (caso não haja restrição ao deslocamento em uma das extremidades). O sistema pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{\Gamma}^{11} & -\mathbf{T}_f^T \\ \hline -\mathbf{T}_f & \mathbf{0} \end{array} \right] \begin{Bmatrix} \mathbf{d} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{f}} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (6.19)$$

$$\tilde{\mathbf{f}} = \sum_{k=0}^n q_k \mathbf{\Omega}^k, \quad \mathbf{T}_f = \begin{Bmatrix} \mathbf{\Phi}_0 \\ \mathbf{\Phi}_1 \end{Bmatrix}, \quad \boldsymbol{\lambda} = \begin{Bmatrix} -\mathbf{\Phi}'_0 \mathbf{d} \\ \mathbf{\Phi}'_1 \mathbf{d} \end{Bmatrix} \quad (6.20)$$

Caso um dos valores de $\boldsymbol{\lambda}$ seja conhecido, ou seja, caso não haja restrição ao deslocamento em uma das extremidades, a linha correspondente da matriz \mathbf{T}_f pode ser retirada do sistema.

A eq. (6.19) pode ser aplicada em qualquer nível de resolução, bastando obter a matriz dos coeficientes de conexão no nível desejado e ajustar as funções base, já que estas serão avaliadas em pontos adicionais.

Depois de calculados os valores dos coeficientes de interpolação d_i pode-se obter o deslocamento em qualquer ponto da treliça através da equação:

$$u(\xi) = \sum_i d_i \varphi(\xi - i) \quad (6.21)$$

Nota-se pela eq. (6.21) que por este método a interpolação é realizada diretamente da base de funções e não pelas funções de forma, como se faz no MEF tradicional.

6.4. Imposição de Cargas e Momentos Concentrados

Pelo MEF, cargas concentradas são facilmente impostas ao sistema através da sua soma no grau de liberdade correspondente no vetor de cargas nodais equivalentes. No Método de Galerkin, tal imposição é feita através de um delta de Dirac. Uma carga concentrada P aplicada no ponto a pode ser representada por:

$$P(\xi) = P\delta(\xi - a) \quad (6.22)$$

Aplicando o método através da multiplicação pelas funções teste, surge uma integral que fornece os valores de P_j a serem acrescentados ao vetor de cargas:

$$P_j = P \int_0^1 \delta(\xi - a) \phi(\xi - j) d\xi = P \phi(a - j) \quad (6.23)$$

$$\mathbf{P} = P \Phi_a^T$$

O mesmo pode ser aplicado a momentos concentrados:

$$M_j = M \int_0^1 \delta(\xi - a) \phi'(\xi - j) d\xi = P \phi'(a - j) \quad (6.24)$$

$$\mathbf{M} = M \Phi_a'^T$$