

5 Validação dos Elementos

Para validar os elementos finitos baseados nas Wavelets de Daubechies e nas Interpolets de Deslauriers-Dubuc, foram formulados diversos exemplos de análise linear estática, bem como o cálculo de frequências naturais de vibração e cargas críticas de flambagem de colunas com diferentes condições de contorno. O fenômeno de propagação de ondas numa barra também foi simulado.

5.1. Análise Estática

Para a validação dos elementos wavelet na análise linear estática, foram elaborados alguns exemplos, com diferentes carregamentos e condições de contorno. Foram testados elementos obtidos a partir das funções Wavelet de Daubechies e das Interpolets de Deslauriers-Dubuc. Os resultados são apresentados em forma adimensional e comparados com os obtidos a partir de um elemento polinomial cúbico. Pode-se notar que, ao menos qualitativamente, os elementos propostos têm resposta condizente com os resultados analíticos.

5.1.1. Coluna sob Ação do Peso Próprio

A fig. (28) mostra o esquema estrutural de uma coluna sob ação do seu peso próprio modelada por um elemento de treliça submetido a uma carga axial uniformemente distribuída.

Para este exemplo simples foram utilizadas a wavelet DB6 e a interpolet IN4, levando em conta que a resposta exata da equação diferencial é um polinômio do segundo grau. A fig. (29) mostra os resultados para os deslocamentos nos pontos calculados.

Nota-se que não há distinção entre os valores exatos e os obtidos por wavelets e interpolets, já que o erro relativo é da ordem de 10^{-13} para a DB6 e de 10^{-14} para a IN4.

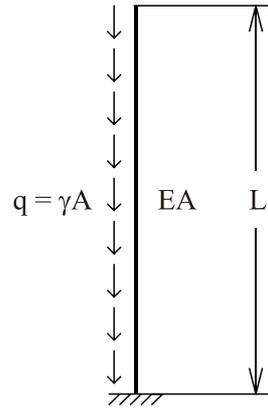


Figura 28 – Esquema estrutural de uma coluna sob ação de seu peso próprio

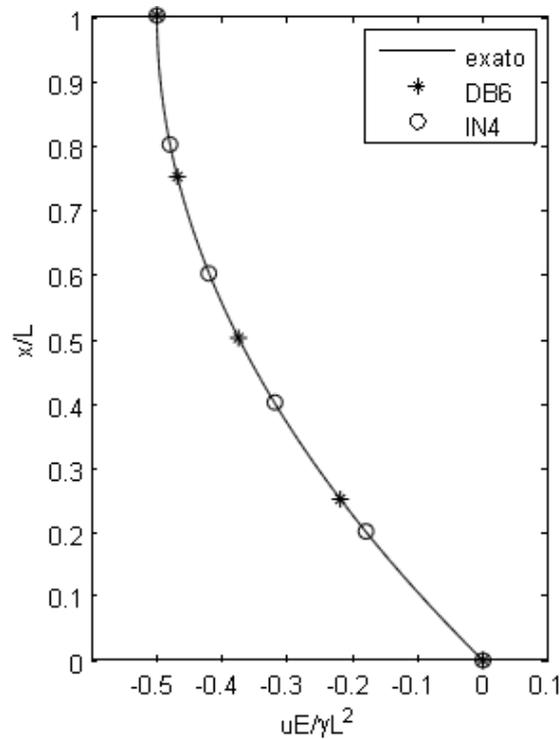


Figura 29 – Resultados para o deslocamento da coluna sob peso próprio

Pelas expressões a seguir, o deslocamento e a tensão normal em qualquer ponto da coluna podem ser calculados a partir das funções de forma:

$$\begin{aligned}
 u(\xi) &= \sum_i u_i N_i(\xi) \\
 \sigma_x(\xi) &= E \varepsilon_x(\xi) = E \sum_i u_i N_i'(\xi)
 \end{aligned}
 \tag{5.1}$$

Sabe-se que, para elementos de treliça lineares, a resposta em tensão é constante e, portanto, não é possível reproduzir a resposta exata do problema com

apenas um elemento. São necessários vários elementos lineares ou apenas um elemento quadrático. A reação de apoio na base da coluna é calculada de forma exata para todos os casos, inclusive para um elemento linear apenas.

5.1.2. Viga sob Ação do Peso Próprio

Considerando que uma viga submetida a um carregamento uniformemente distribuído tem como resposta analítica de deslocamento um polinômio do quarto grau, para este exemplo, mostrado na fig. (30), foram utilizadas a wavelet DB10 e a interpolete IN6 por serem capazes de representar exatamente esta resposta polinomial.

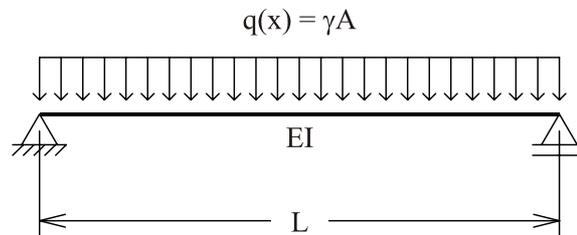


Figura 30 – Esquema estrutural de uma viga biapoiada sob ação de seu peso próprio

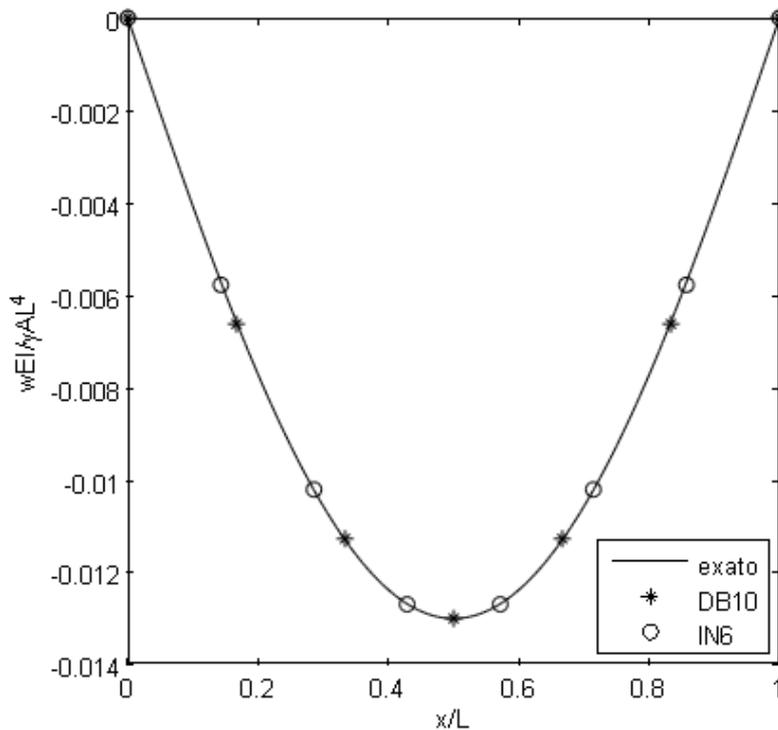


Figura 31 – Deslocamentos para a viga biapoiada sob peso próprio

Para a interpolação do deslocamento, rotação, momento fletor e esforço cortante são utilizadas as funções de forma e suas derivadas primeira, segunda e terceira, respectivamente:

$$\begin{aligned}
 w(\xi) &= \sum_i u_i N_i(\xi) \\
 \theta(\xi) &= \sum_i u_i N_i'(\xi) \\
 M(\xi) &= EI \sum_i u_i N_i''(\xi) \\
 Q(\xi) &= EI \sum_i u_i N_i'''(\xi)
 \end{aligned}
 \tag{5.2}$$

A fig. (32) mostra o resultado da interpolação do momento fletor em alguns pontos para os elementos testados. Pode-se perceber que não há distinção entre os valores interpolados e os exatos, o que também pode ser obtido com a utilização de um elemento polinomial de quarto grau.

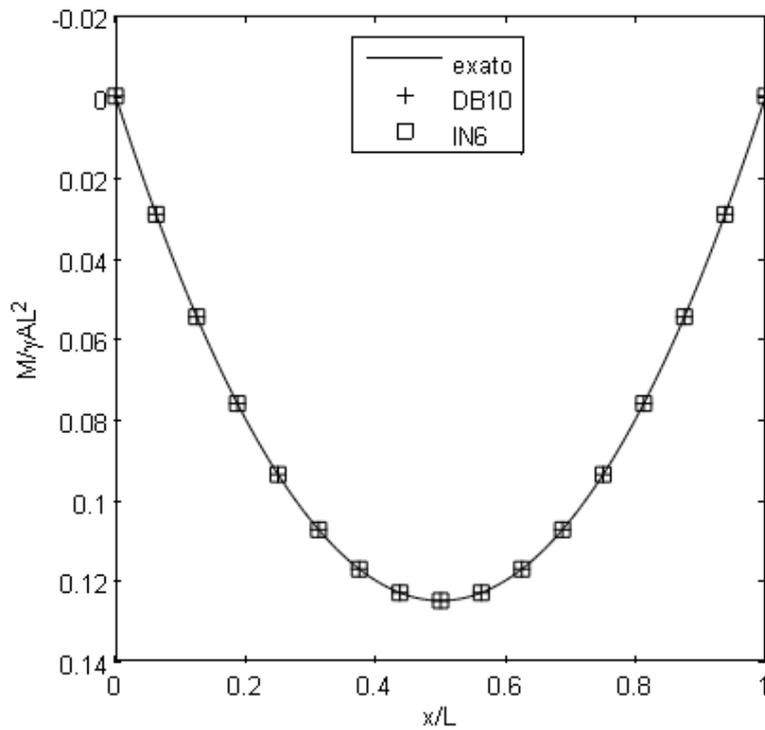


Figura 32 – Momento fletor obtido em alguns pontos por interpolação

5.1.3. Viga Biengastada Submetida a Carregamento Linear

O próximo exemplo consiste numa viga biengastada de inércia constante submetida a um carregamento linear em metade de seu comprimento, como mostra a fig. (33). Devido às condições diferentes de carregamento em cada metade da viga é necessário utilizar dois elementos, o que permite analisar o comportamento dos elementos formulados quando associados.

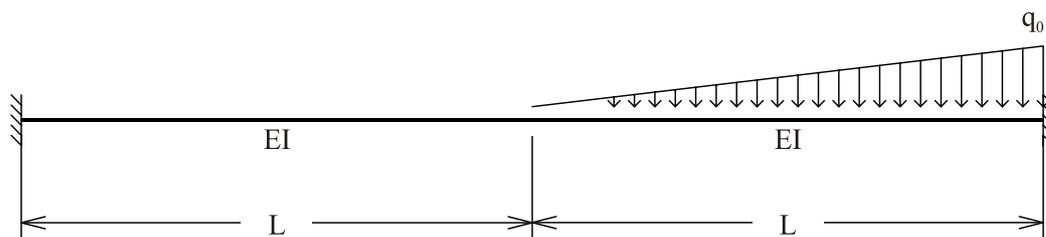


Figura 33 – Modelo estrutural da viga submetida a carregamento linear em metade de seu vão

A estrutura da fig. (33) é um exemplo interessante, pois tem como resposta exata um polinômio do terceiro grau para a metade não carregada e um polinômio do quinto grau para a metade carregada. Para que esta estrutura seja representada de forma exata é necessário utilizar pelo menos uma Daubechies DB12 ou uma Interpolet IN6 no elemento carregado.

Para efeitos de comparação, foram também analisados os elementos baseados em DB10 e IN4, que não têm capacidade de reproduzir a resposta exata. A fig. (34) mostra os resultados em deslocamento para os elementos baseados nas Daubechies DB10 e DB12. Nota-se que o elemento DB10 não apresenta resposta exata para o deslocamento na segunda metade da viga, o que é esperado. O mesmo problema pode ser visto na fig. (35), onde se encontra o resultado da interpolação do momento fletor.

A fig. (36) mostra os resultados em deslocamento para os elementos baseados nas Interpolets IN4 e IN6. Nota-se, como esperado, que a IN4 não reproduz corretamente a resposta na parte onde a carga é linearmente distribuída, embora tenha resposta adequada na parte onde não há carga aplicada. Naturalmente, a interpolação do momento fletor sofre também a influência dos erros introduzidos no caso da IN4, como mostra a fig. (37). Deve-se lembrar que

elementos baseados em polinômios do terceiro grau também apresentam resultados inexatos para as funções resposta em pontos interiores da estrutura.

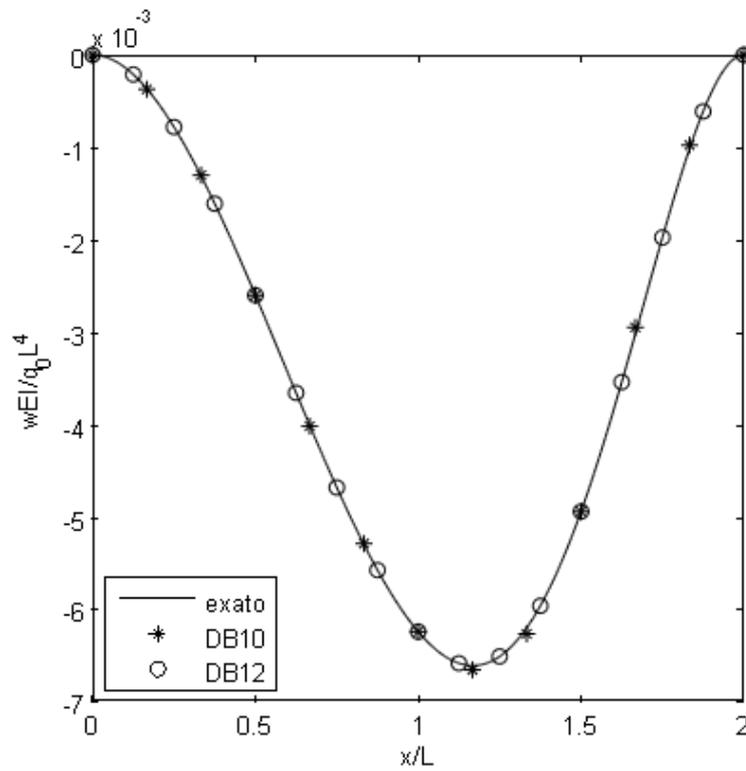


Figura 34 – Deslocamento para os elementos DB10 e DB12

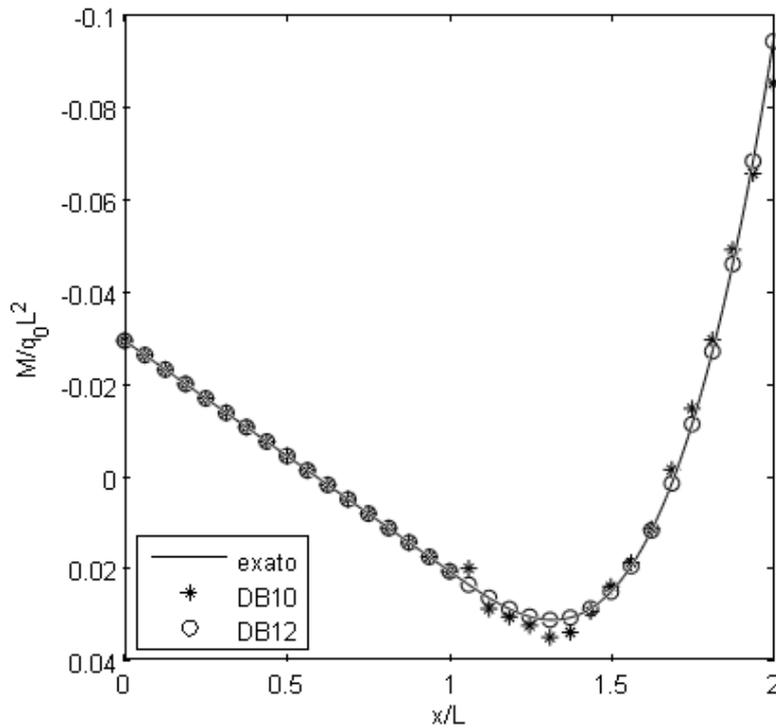


Figura 35 - Momento fletor para os elementos DB10 e DB12

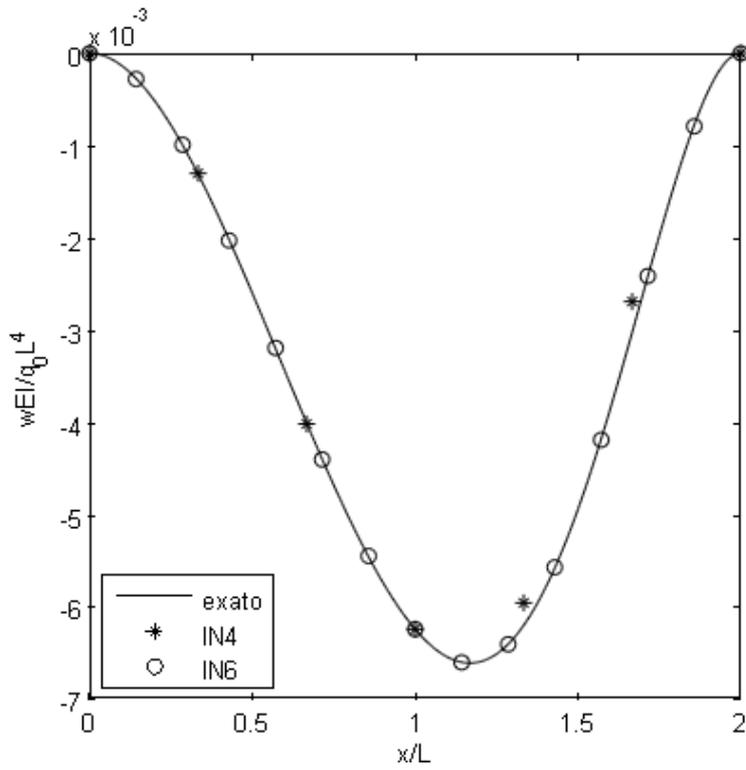


Figura 36 – Deslocamento para os elementos IN4 e IN6

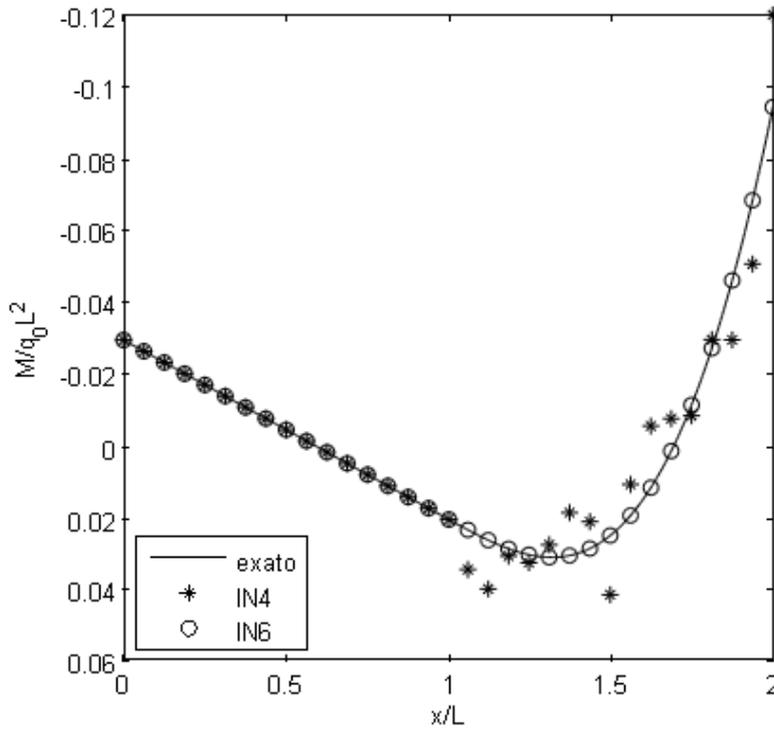


Figura 37 – Momento fletor para os elementos IN4 e IN6

5.1.4. Viga sobre Base Elástica Submetida a Carregamento Concentrado

A fig. (38) mostra um esquema de uma viga sobre uma base apoiada sobre uma fundação elástica, que pode ser modelada segundo uma base elástica de Winkler. O valor de c é expresso em unidade de força por unidade de comprimento ao quadrado. A mesma foi analisada por elementos baseados nas wavelets DB10 e DB12 e nas interpolets IN6 e IN8.

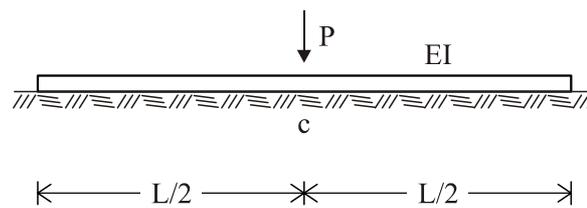


Figura 38 – Viga sobre base elástica submetida a carga concentrada

Os resultados em deslocamento para os elementos DB10 e DB12 estão na fig. (39). Os resultados da interpolação do momento fletor podem ser vistos na fig. (40). O mesmo pode ser visto para os elementos IN6 e IN8 nas figs. (41) e (42).

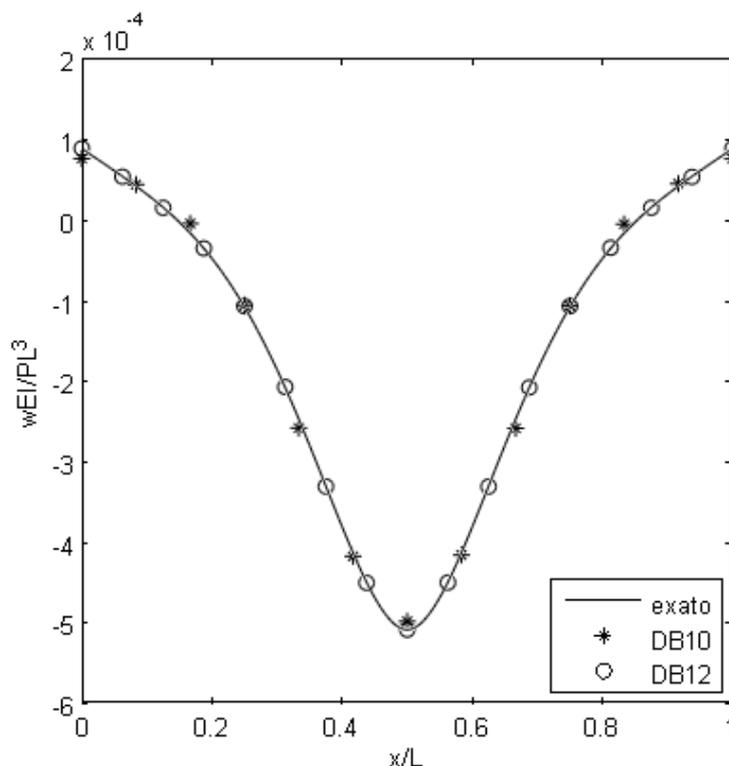


Figura 39 – Deslocamento para a viga sobre base elástica utilizando elementos DB10 e DB12

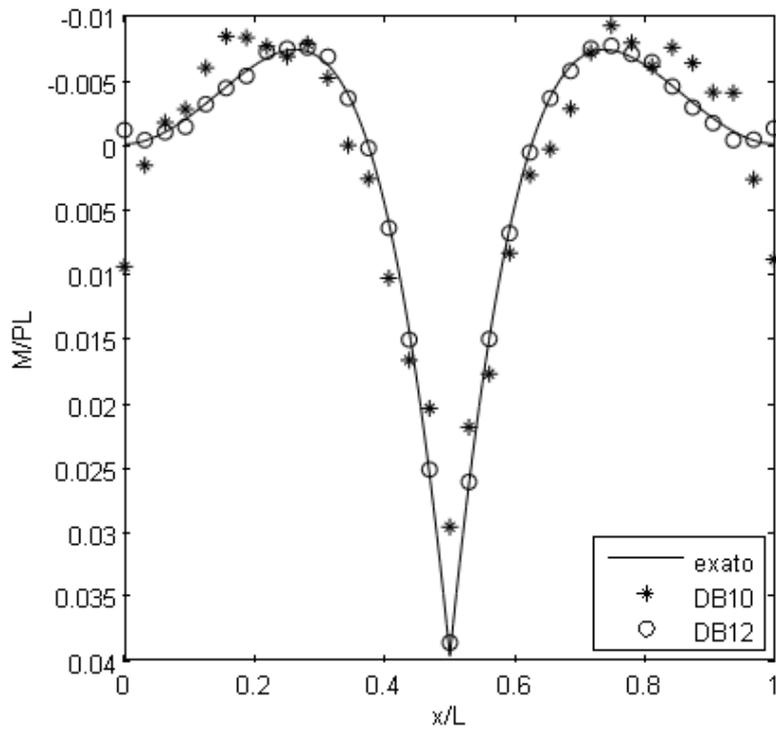


Figura 40 – Momento fletor para a viga sobre base elástica utilizando elementos DB10 e DB12

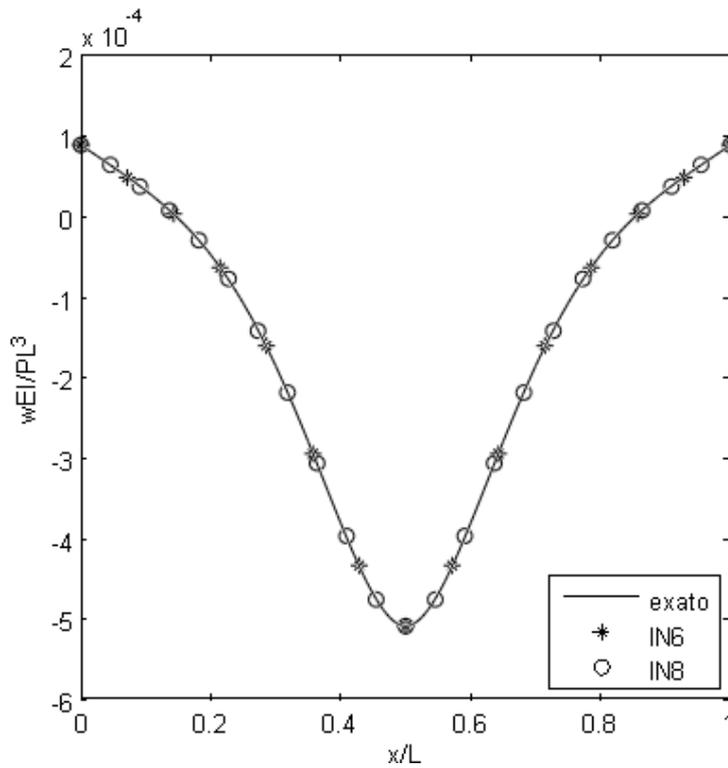


Figura 41 – Deslocamento para a viga sobre base elástica utilizando elementos IN6 e IN8

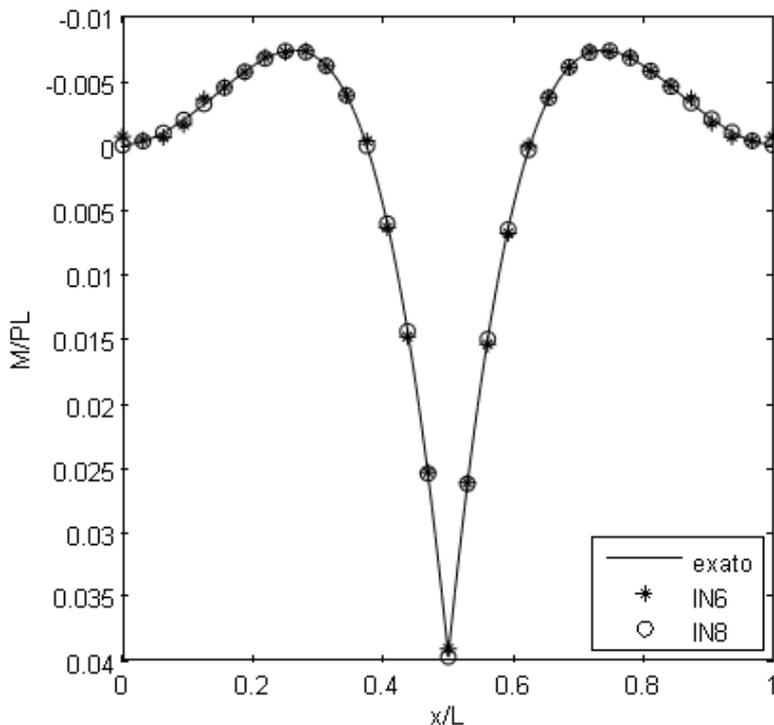


Figura 42 – Momento fletor para a viga sobre base elástica utilizando elementos IN6 e IN8

Nota-se que o elemento baseado na Daubechies DB10 não apresenta uma resposta confiável para o momento fletor. Isto se deve ao alto grau oscilatório na segunda derivada dessa função que contribui para a aproximação errônea. Contudo, os elementos baseados nas interpolets IN6 e IN8 apresentam resultados satisfatórios, mesmo para a interpolação do momento fletor.

Os valores de momento fletor no ponto de aplicação da carga calculados por cada um dos elementos estão dados na tab. (2). Alguns resultados para diversas malhas de elementos polinomiais são apresentados para fins de comparação.

MOMENTO FLETOR ($\times 10^{-2}$)								
EXATO	DB10	DB12	IN6	IN8	Nº de Elementos de Viga Padrão			
					2	4	8	16
3.9640	3.9409	3.9621	3.9631	3.9640	4.2243	3.9548	3.9623	3.9639

Tabela 2 – Momento fletor (adimensional) no ponto de aplicação da carga

5.1.5. Casca Cilíndrica Axissimétrica

Um reservatório cilíndrico engastado e livre contendo um fluido de peso específico γ pode ser modelado como uma casca cilíndrica axissimétrica (Rekach, 1978). Esta, por sua vez, pode ser representada como uma viga sobre base elástica com algumas modificações em seus parâmetros, como mostra a fig. (43).

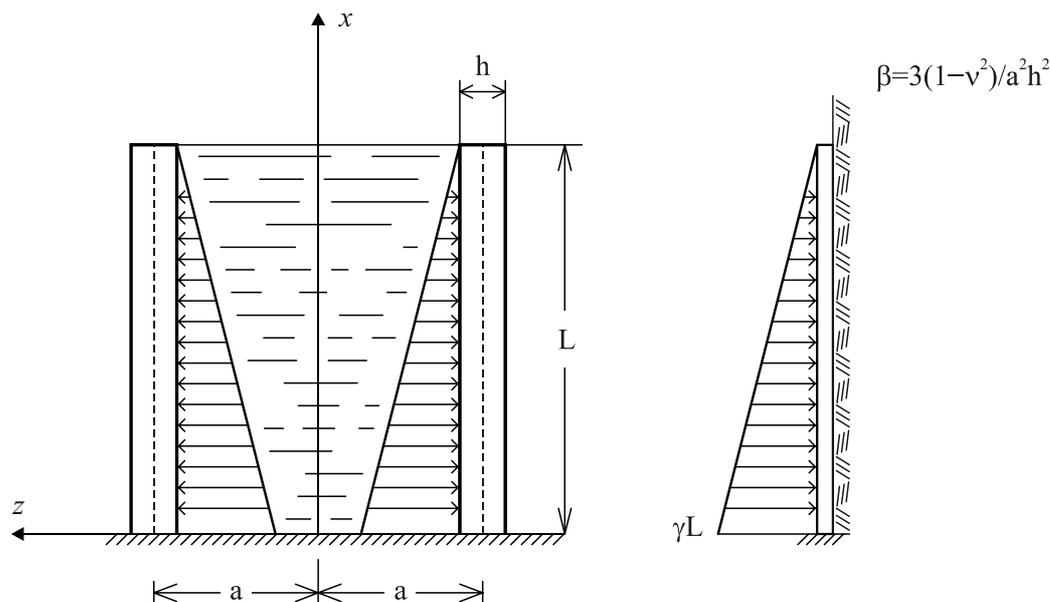


Figura 43 – Modelagem da casca cilíndrica axissimétrica como uma viga sobre base elástica

Pode-se notar que a rigidez à flexão da viga (EI) é substituída pela rigidez à flexão de uma placa fina $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$ e a rigidez da base elástica passa a ser dada por $c = Eh/a^2$, o que leva o parâmetro β ao valor mostrado na fig. (43). Para valores de $c \gg D$, a casca pode ser modelada como infinitamente longa. Como em geral $a \gg h$, este comportamento é o que ocorre na prática.

As figs. (44) e (45) mostram os resultados em deslocamento e momento fletor dos elementos Daubechies. Nas figs. (46) e (47), resultados dos elementos Interpolet. Nota-se pelos resultados apresentados que os elementos baseados em wavelets de Daubechies não apresentam resposta confiável, principalmente no caso da interpolação do momento fletor. No caso das interpolets, por terem natureza menos oscilatória, os resultados se aproximam mais das respostas exatas. Ainda assim, os resultados podem ser considerados aceitáveis, levando em conta o fato de que a casca foi modelada com apenas um elemento.

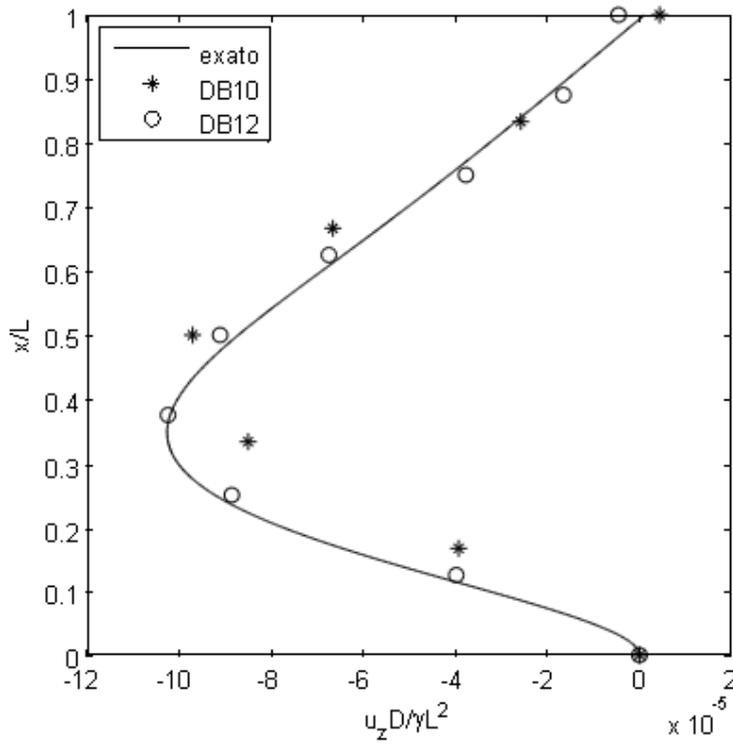


Figura 44 – Deslocamento para a casca cilíndrica axissimétrica modelada com elementos DB10 e DB12

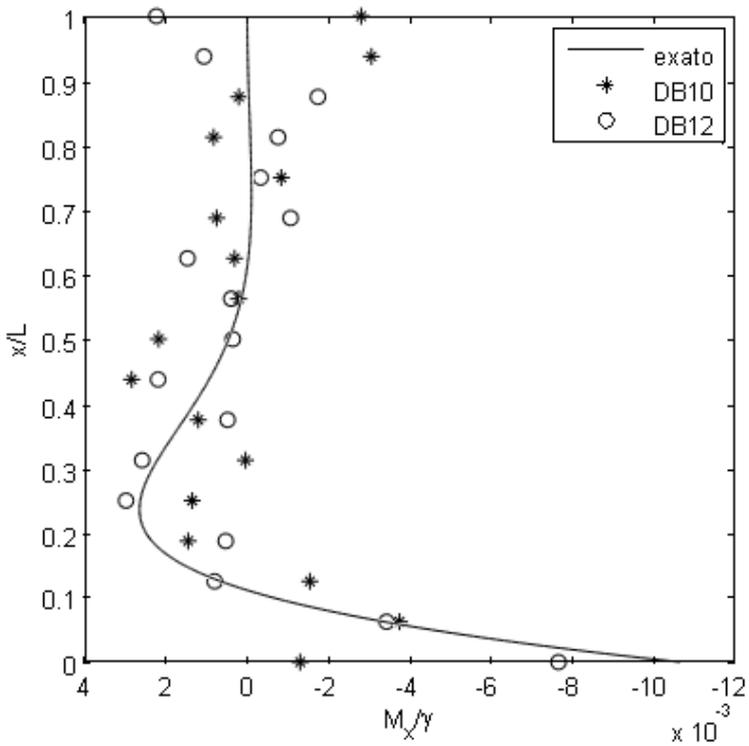


Figura 45 – Momento fletor para a casca cilíndrica axissimétrica modelada com elementos DB10 e DB12

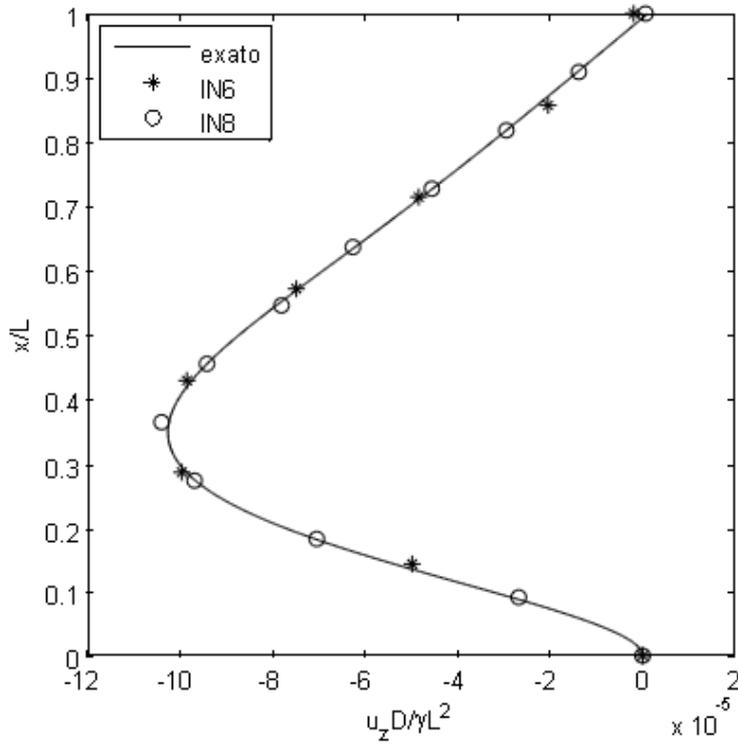


Figura 46 – Deslocamento para a casca cilíndrica axissimétrica modelada com elementos IN6 e IN8

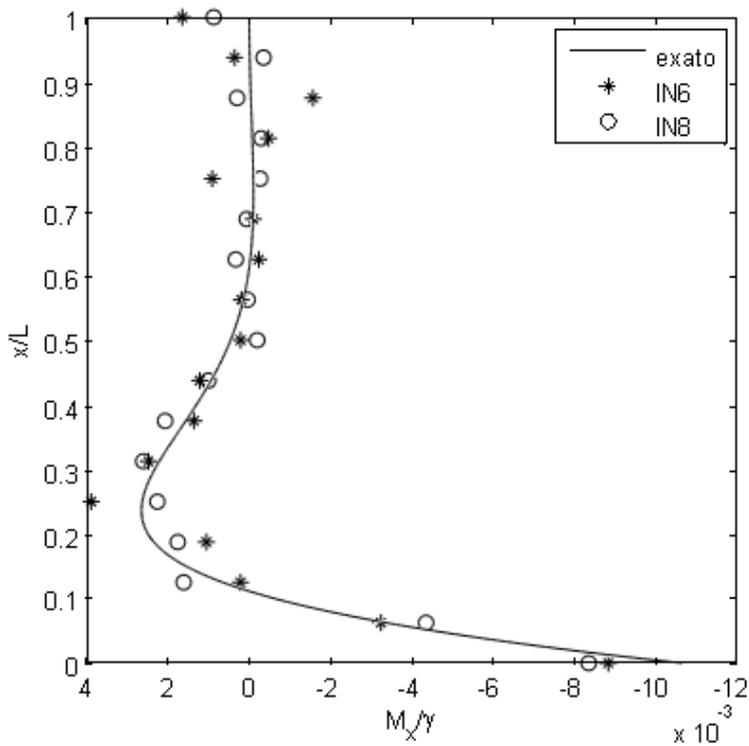


Figura 47 – Momento fletor para a casca cilíndrica axissimétrica modelada com elementos IN6 e IN8

A tab. (3) mostra os resultados obtidos para o momento fletor na base da casca.

MOMENTO FLETOR ($\times 10^{-2}$)							
EXATO	DB10	DB12	IN6	IN8	Nº de Elementos de Viga Padrão		
					2	4	8
1.06491	1.39197	1.09798	1.08085	1.06781	1.38478	1.08941	1.06623

Tabela 3 – Momento fletor (adimensional) na base da casca

5.2. Análise Dinâmica

5.2.1. Cálculo de Frequências Naturais de Vibração

Para a obtenção das frequências naturais de vibração de colunas com condições de contorno variadas foram utilizados elementos formulados a partir das funções de Daubechies e interpolets de Deslauriers-Dubuc através da solução do problema de autovalor dado por (Paz, 1997):

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \delta \mathbf{d} = \mathbf{0} \quad (5.3)$$

Na eq. (5.3), \mathbf{K} representa a matriz de rigidez elástica do sistema, \mathbf{M} a matriz de massa e $\delta \mathbf{d}$ uma solução não trivial do sistema, ou seja, o modo de vibração correspondente a cada autovalor (quadrado da frequência de vibração).

Foram testados elementos com as funções DB10, DB12, IN6 e IN8. Os resultados são apresentados na tab. (4) de forma adimensional e são comparados com os valores analíticos (Rao, 2004).

COND. DE CONTORNO	MODO	FREQUÊNCIA $\left(\sqrt{EI/\rho AL^4}\right)$					
		EXATO	DB10	DB12	IN6	IN8	POL3
Engastada e livre	1	3.51602	3.51696	3.51602	3.51602	3.51602	3.51637
	2	22.0345	22.2293	22.1303	22.0786	22.0350	22.1069
	3	61.6972	101.806	63.0002	62.1130	62.0354	62.4660
Biapoiada	1	9.86960	9.87238	9.87180	9.87070	9.86961	9.87760
	2	39.4784	48.2959	39.5924	39.5173	39.5124	39.9451
	3	88.8264	128.857	112.281	94.4683	88.9209	98.5901
Biengastada	1	22.3732	22.44631	22.4306	22.3993	22.3735	22.4648
	2	61.6728	155.464	62.5254	61.9772	61.9416	62.9041
	3	120.903	452.816	181.016	130.091	120.8285	146.305
Engastada e apoiada	1	15.4182	15.4464	15.4304	15.4235	15.4183	15.4485
	2	49.9649	71.0540	50.0308	50.1648	50.0550	50.8381
	3	104.248	237.024	157.715	111.558	104.652	118.466

Tabela 4 – Frequências de vibração

5.2.2. Propagação de Ondas

O fenômeno de propagação de ondas em uma barra de treliça é governado pela seguinte equação diferencial parcial (Achenback, 1993):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad v = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (5.4)$$

Na eq. (5.4), v é a velocidade de propagação da onda na barra, que é proporcional ao módulo de elasticidade E e inversamente proporcional à massa específica ρ . A propagação unidimensional, no caso da barra de treliça, admite apenas ondas de tensão axial na barra (Kolsky, 1963).

A modelagem da propagação de ondas é, em geral, implementada através do Método das Diferenças Finitas (MDF). O MEF tem sua aplicação limitada devido

ao alto custo computacional em relação ao MDF. A grande dificuldade na discretização pelo MEF reside na escolha das frequências representadas pelo sistema. Em geral, mesmo numa abordagem pelo MEF, são empregados os conceitos utilizados no MDF (Kelly et al. 1976).



Figura 48 – Barra submetida a uma onda de deslocamento axial $u(t)$

Aplicando-se o princípio de Hamilton (Clough e Penzien, 1975) e o Método da Diferença Central para discretizar o tempo chega-se à seguinte expressão:

$$\mathbf{u}_{t+\Delta t} = 2\mathbf{u}_t - \mathbf{u}_{t-\Delta t} - (\Delta t)^2 \mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} \mathbf{u}_t \quad (5.5)$$

Na eq. (5.5), \mathbf{M} e \mathbf{K} são as matrizes de massa e rigidez, respectivamente e \mathbf{u} é o vetor de deslocamentos. Considera-se um deslocamento $u(t)$ aplicado à extremidade livre da barra como mostra a fig. (49).

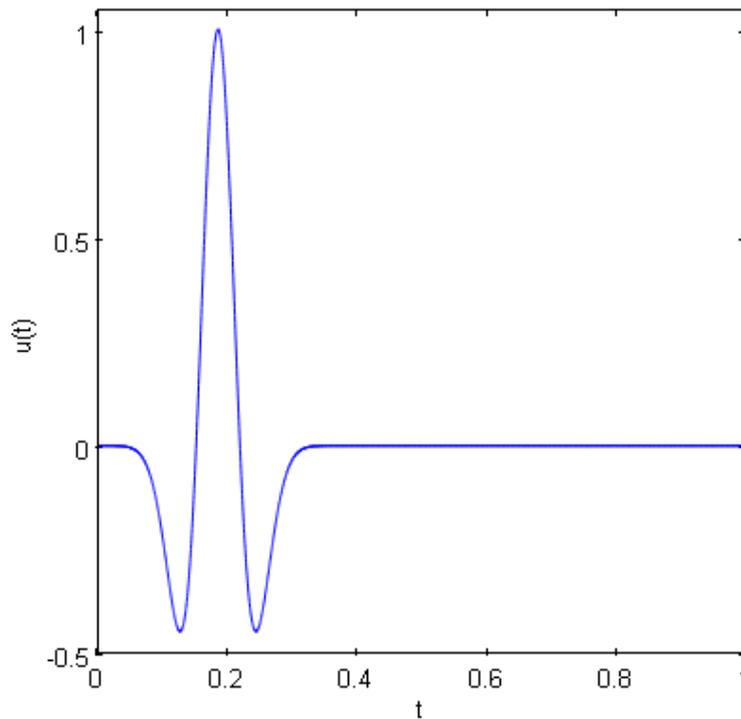


Figura 49 – Deslocamento aplicado à extremidade da barra

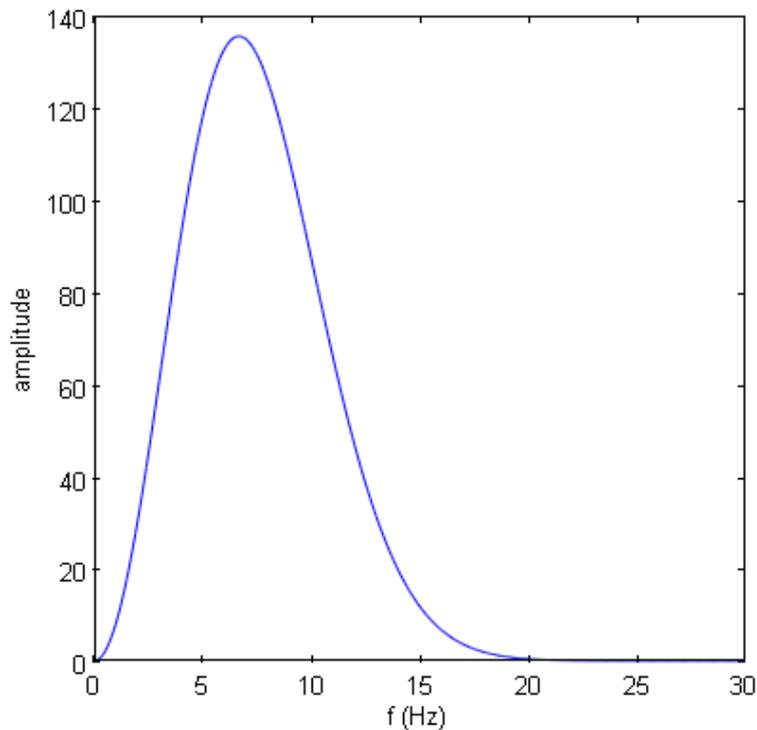


Figura 50 – Espectro do deslocamento aplicado

A fig. (50) mostra o espectro de freqüências do deslocamento aplicado. Como a freqüência máxima da fonte é 20Hz, o menor comprimento de onda de interesse é de $v/20$, sendo v a velocidade de propagação da barra. Em geral, utilizam-se 10 intervalos de amostragem espacial para o menor comprimento de onda, o que equivaleria a 200 elementos de treliça padrão no caso de a velocidade ser unitária. Um sistema com 200 elementos de treliça no intervalo $[0,1]$ tem como freqüência máxima $\omega = 6.92 \times 10^2 \text{ rad/s}$. Esta freqüência exige um Δt máximo de 2.887 ms para garantir a estabilidade. Há outros métodos na literatura para discretização do tempo em que Δt maiores podem ser utilizados sem comprometer a estabilidade do algoritmo, como o de Newmark (Kane, 1999), Wilson (Bathe, 1996), entre outros. Optou-se pelo Método da Diferença central pois este é também o conceito aplicado no MDF.

Esse sistema em elementos de treliça padrão foi comparado com um sistema gerado por 20 elementos IN4. Esse sistema tem uma freqüência máxima muito semelhante ao anterior, $\omega = 7.03 \times 10^2 \text{ rad/s}$, o que leva a um Δt semelhante para garantir a estabilidade. O sistema em elementos padrão tem 201 graus de liberdade e o IN4 tem 101.

A fig. (51) mostra um detalhe da propagação no ponto médio da barra estudada. Pode-se perceber que os elementos IN4 apresentam um comportamento satisfatório considerando o número reduzido de graus de liberdade. Na fig. (52) pode-se ver a propagação em todas as posições e estados de tempo.

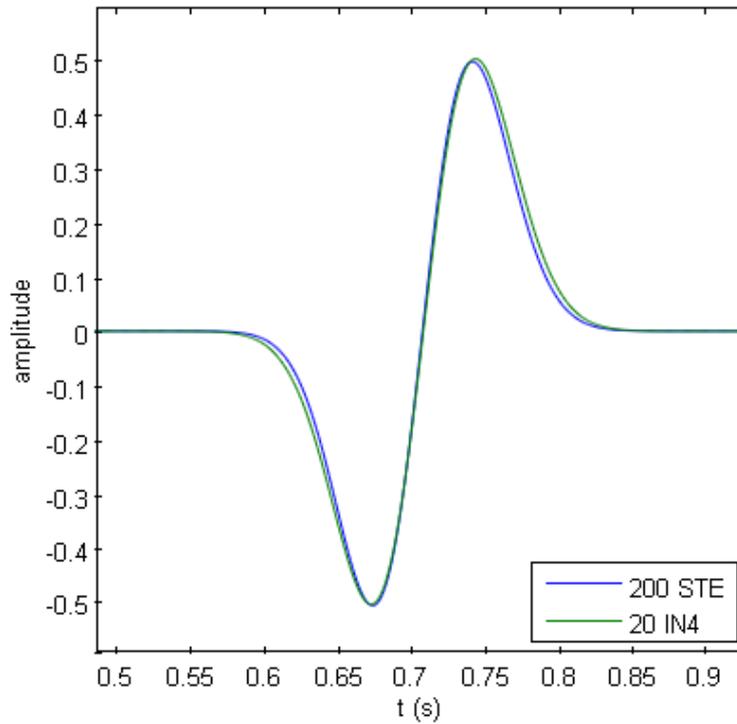


Figura 51 – Detalhe do deslocamento do ponto médio da barra obtido utilizando elementos Interpolet (IN4) e elementos de treliça padrão (STE)

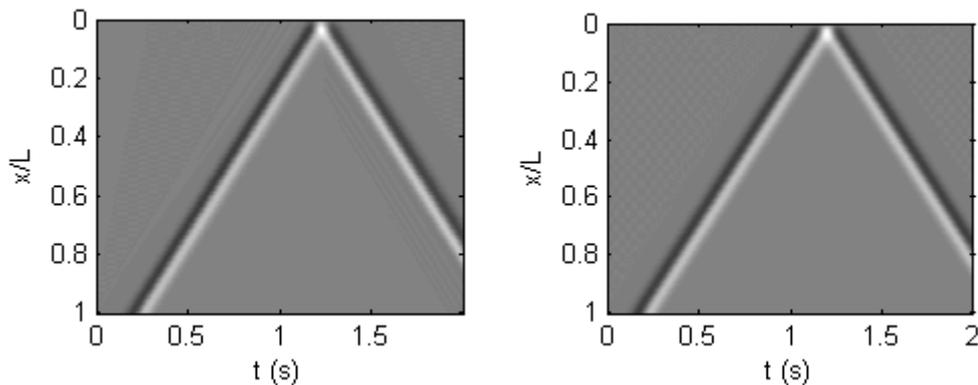


Figura 52 – Estados do deslocamento em todas as posições e tempos utilizando elementos de treliça padrão (à esquerda) e elementos IN4 (à direita). A escala de cinza mapeia valores mínimos em preto e máximos em branco.

5.3. Análise de Instabilidade

Nesta seção, os elementos formulados são testados em problemas de instabilidade linearizada de colunas e pórticos. São obtidas cargas críticas de flambagem de colunas com diversas condições de contorno, assim como do pórtico de Roorda (Chen e Lui, 2001).

5.3.1. Obtenção de Cargas Críticas e Modos de Flambagem de Colunas Clássicas

Para a obtenção das cargas críticas de flambagem de colunas com condições de contorno variadas foram utilizados elementos formulados a partir das funções de Daubechies e interpolets de Deslauriers-Dubuc através da solução do problema de autovalor dado por (Waszczyszyn et al., 1994):

$$(\mathbf{K}_E + \lambda_{cr} \mathbf{K}_G) \delta \mathbf{d} = \mathbf{0} \quad (5.6)$$

Na eq. (5.6) \mathbf{K}_E representa a matriz de rigidez elástica do sistema, \mathbf{K}_G a matriz geométrica e $\delta \mathbf{d}$ uma solução não trivial do sistema, ou seja, o modo de flambagem correspondente a cada autovalor (carga crítica) (Croll e Walker, 1972).

Os resultados são apresentados na tab. (5) de forma adimensional e são comparados com os valores analíticos (Bazant e Cedolin, 1991).

COND. DE CONTORNO	CARGA CRÍTICA (EI/L^2)					
	EXATO	DB10	DB12	IN6	IN8	POL3
Engastada e livre	2.46740	2.46770	2.46740	2.46740	2.46740	2.46766
Biapoiada	9.86960	9.87483	9.87379	9.87174	9.86960	9.88521
Biengastada	39.4784	41.8877	41.3961	40.3757	39.4788	40.3432
Engastada e apoiada	20.1907	20.8275	20.2725	20.2272	20.1910	20.3146

Tabela 5 – Resultados para o cálculo da carga crítica de flambagem comparados com os obtidos por 3 elementos de viga padrão

5.3.2. Cálculo de Cargas Críticas do Pórtico de Roorda

O pórtico de Roorda é um exemplo clássico utilizado para validação de novas formulações já que suas cargas críticas e modos de flambagem podem ser facilmente obtidos analiticamente.

A fig. (53) mostra dois tipos de carregamento para a análise pelos elementos propostos. No primeiro caso apenas a coluna vertical sofre flambagem e a mesma transmite os esforços para o elemento horizontal. No segundo caso, os dois elementos funcionam como colunas clássicas de Euler biapoiadas independentes e a carga crítica do pórtico é a mesma que cada barra isolada apresentaria.

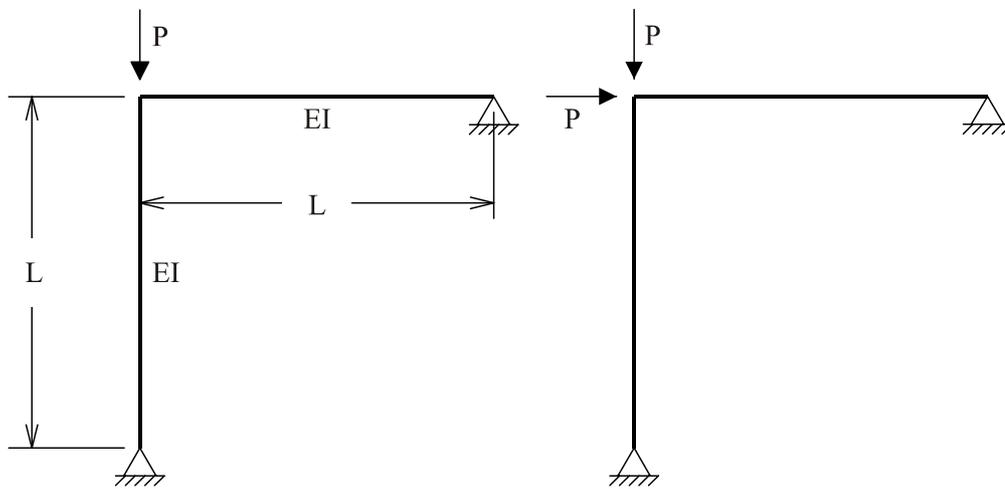


Figura 53 – Pórtico de Roorda com dois tipos de carregamento

A tab. (6) mostra o resultado das cargas críticas calculadas para o pórtico de Roorda para cada tipo de carregamento.

TIPO DE CARREGAMENTO	CARGA CRÍTICA (EI/L^2)					
	EXATO	DB10	DB12	IN6	IN8	POL3
Carga vertical	13.8859	13.9340	13.9041	13.8948	13.8859	13.9191
Cargas vertical e horizontal	9.86960	9.87483	9.87379	9.87174	9.86960	9.88521

Tabela 6 – Resultados para o cálculo da carga crítica de flambagem do pórtico de Roorda comparados com os obtidos por 3 elementos de viga padrão

Os resultados de cargas críticas obtidos tanto com elementos baseados em Daubechies quanto Interpolets foram satisfatórios, levando-se em conta que em todos os casos apenas um elemento foi utilizado para a discretização. No caso do pórtico de Roorda, o elemento baseado na IN8 teve desempenho excelente.

5.4. Discussão dos Resultados

O desempenho elementos finitos baseados em wavelets e interpolets foi excelente na análise linear estática de barras, já que tanto as Daubechies quanto as Interpolets têm a capacidade de representar exatamente polinômios, que são a resposta analítica desses problemas. No exemplo da viga sobre base elástica com carga concentrada o resultado também foi satisfatório, mas deve-se levar em conta que foram utilizados dois elementos, já que havia uma carga concentrada aplicada no ponto médio da viga. O melhor resultado para o momento fletor foi obtido com 28 graus de liberdade (dois elementos IN8) e é comparável ao obtido por 34 graus de liberdade de elementos de viga padrão (16 elementos). No exemplo da casca cilíndrica axissimétrica o resultado em deslocamentos foi satisfatório para todos os elementos testados, porém o resultado da interpolação dos momentos fletores só pode ser considerado confiável para o elemento IN8. Ainda assim, o número de graus de liberdade utilizados por esse elemento é menor do que o necessário para a correta representação do momento fletor por elementos de viga padrão. Na análise dinâmica verificou-se a boa capacidade dos elementos Interpolet de captar as frequências naturais de vigas-coluna com diferentes condições de contorno. Verificou-se que para a representação correta da propagação de uma onda de deslocamentos numa barra foi necessário um número menor de graus de liberdade de elementos Interpolet do que o de elementos de treliça padrão, o que refletiu num menor custo computacional. Os resultados obtidos no cálculo de cargas críticas tanto de colunas quanto de pórticos foi excelente, principalmente o elemento IN8.