

2 Fundamentação Teórica

Neste capítulo são apresentados os conceitos básicos utilizados no restante da tese. Uma das contribuições do trabalho aparece na seção 2.7.5.5 onde é desenvolvido um coeficiente de conexão de grande utilidade para a solução de equações com coeficientes variáveis, como vigas com mísulas.

2.1. Método dos Elementos Finitos (MEF)

Para um problema de valor de contorno cuja solução será designada por $u(x)$, os métodos numéricos de solução da equação diferencial que governa o problema são formulados de tal forma que, para uma base de funções $\phi_i(x)$ (chamadas de funções de interpolação, funções coordenadas ou funções de forma), se possa escrever:

$$u(x) = \sum_i \alpha_i \phi_i(x) \quad (2.1)$$

Os coeficientes α_i são as incógnitas que deverão ser determinadas através da resolução de um sistema do tipo:

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (2.2)$$

No caso do MEF tradicional, os coeficientes de interpolação α_i são os deslocamentos nos nós dos elementos, u_i . Na eq. (2.2), quando o método é aplicado a problemas de análise linear estática de estruturas, $\mathbf{K}$ é a chamada matriz de rigidez, $\mathbf{u}$ é o vetor dos deslocamentos e $\mathbf{f}$ é o vetor dos carregamentos nodais.

A formalização matemática do MEF não será abordada, podendo ser encontrada na literatura (Bathe, 1996). Entretanto, vale apresentar a formulação com base em resíduos ponderados, particularmente o chamado Método de

Galerkin, que servirá como base para a obtenção dos elementos baseados em funções wavelet, através da introdução dos coeficientes de conexão que aparecem no método conhecido como Wavelet-Galerkin (Harbrecht et al., 2002).

2.2. Método de Galerkin

Pelo Método dos Resíduos Ponderados, objetiva-se reduzir a equação diferencial do problema a um sistema de equações do tipo:

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (2.3)$$

De uma forma mais geral, o vetor $\mathbf{u}$ representa os pesos pelos quais será multiplicada cada uma das funções da uma base ϕ para interpolar a função resposta $u(x)$.

$$u(x) = \sum_i u_i \phi_i(x) \quad (2.4)$$

Para garantir que um determinado vetor $\mathbf{u}_0$ é de fato solução do problema, este deve minimizar o resíduo dado pela eq. (2.5).

$$\mathbf{R} = \mathbf{A}\mathbf{u}_0 - \mathbf{f} \quad (2.5)$$

Para encontrar o vetor $\mathbf{u}_0$ que minimiza o resíduo $\mathbf{R}$ deve-se impor que o mesmo seja ortogonal a um vetor arbitrário $\mathbf{v}$ dado por:

$$v(x) = \sum_i v_i \phi_i(x) \quad (2.6)$$

A condição citada pode ser descrita matematicamente pela eq. (2.7).

$$\langle \mathbf{A}\mathbf{u}_0 - \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle = 0 \quad (2.7)$$

O Método de Galerkin é um caso particular do Método dos Resíduos Ponderados em que o conjunto de funções $\phi(x)$ utilizado para interpolar $u(x)$ faz-

se idêntico ao conjunto $\varphi(x)$ utilizado para interpolar $v(x)$ (Strang e Fix, 1973). Ao se utilizar a condição de minimização do resíduo em sub-regiões (elementos), a formulação leva ao Método dos Elementos Finitos.

O Método de Wavelet-Galerkin consiste em utilizar funções wavelet para compor tanto o conjunto de funções de interpolação quanto o de teste.

2.3. Introdução às Wavelets

A tradução literal de wavelet é *ondaleta* ou *pequena onda*. As wavelets surgiram como continuação de diversos trabalhos que procuravam encontrar novas formas de representar funções, principalmente as que apresentam singularidades e gradientes elevados, tanto no domínio do tempo como no da frequência.

Os sistemas de wavelets são compostos por funções que em geral são bastante irregulares, dadas as propriedades que lhes são impostas. Uma das propriedades que se procura garantir é a da ortogonalidade dos sistemas de wavelets. A tentativa de obter um sistema de funções ortogonais definidas dentro de um intervalo finito origina funções bastante irregulares e assimétricas, como é o caso das wavelets de Daubechies. Não existe, em geral, uma expressão analítica para as funções de escala e wavelets primárias, sendo usual que tais funções sejam definidas através de fórmulas recursivas, o que implica a utilização de procedimentos numéricos.

Analogamente ao que se faz na análise de Fourier, na qual se decompõe um sinal utilizando funções trigonométricas, a análise wavelet pode decompor uma função utilizando uma base de funções chamadas wavelets. As séries de Fourier têm como base as funções trigonométricas de senos e cossenos que têm localização definida no domínio da frequência, mas não no domínio do tempo (ou do espaço, se for o caso). O conceito de localização é detalhado na seção 2.4.2.1. Desta forma, torna-se difícil representar um impulso curto no tempo com as funções trigonométricas, originando o chamado efeito de Gibbs (Pereira e Castilho, 2005).

Em geral, a análise Wavelet é mais precisa do que a de Fourier pela sua maior capacidade de representar transientes e descontinuidades, pois as próprias wavelets podem ser irregulares e assimétricas, ao contrário de senos e cossenos.

Há uma série de aplicações para a análise wavelet, entre as quais se pode citar: compressão de dados e imagens, redução de ruído e solução de equações diferenciais parciais.

Assim como ocorre com os senos e cossenos da transformada de Fourier, a forma geral de uma wavelet é a mesma para toda a análise, sendo denominada wavelet mãe (*mother wavelet*). Uma vez escolhida a wavelet mãe, o resto das funções que formam a base de análise é composto por translações e transformações de escala a partir desta (Lima, 2003).

A wavelet é uma forma de onda de duração limitada que tem um valor médio igual a zero, assim como os senos e cossenos. A fig. (3) mostra uma comparação entre uma função senoidal (base da análise de Fourier), sem limite de duração, e uma função wavelet, com duração limitada, assimétrica e irregular.

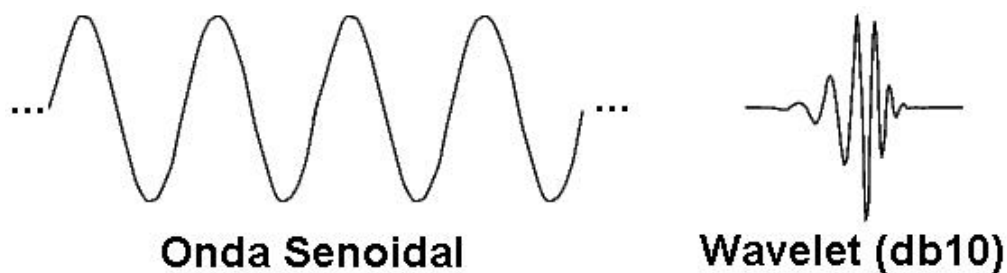


Figura 3 – Comparação entre uma função senoidal e uma função wavelet

Matematicamente, o processo de análise de Fourier é representado pela Transformada de Fourier, eq. (2.8), que é a soma de todo o sinal $f(t)$ multiplicado por uma exponencial complexa (que pode ser separada em componentes senoidais de parte real e imaginária).

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (2.8)$$

A fig. (4) mostra como a transformada de Fourier decompõe um sinal (função) qualquer em suas componentes senoidais.

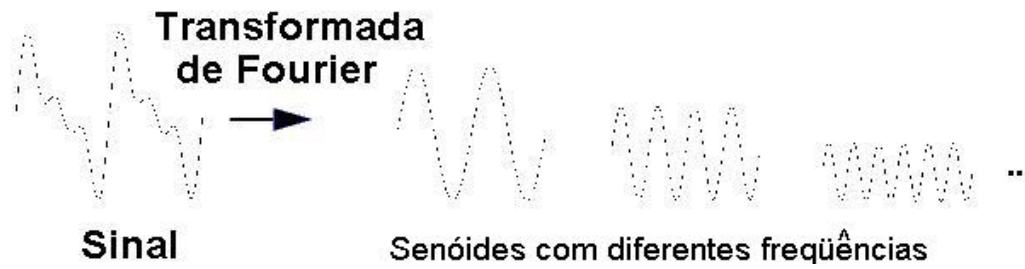


Figura 4 – Decomposição de um sinal (função) em componentes senoidais

Similarmente, a transformada wavelet é definida como o produto interno da função que se quer decompor com a função wavelet, como mostram a eq. (2.9) e a fig. (5).

$$c_k^j = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \psi_{j,k}(t) dt \quad (2.9)$$

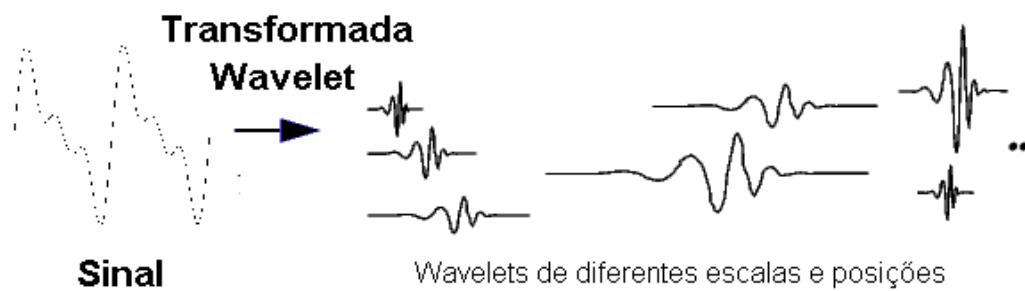


Figura 5 – Decomposição de uma função qualquer em wavelets de diferentes escalas e posições

Um conjunto de funções wavelet consiste em uma função de escala $\varphi(x)$ e uma função wavelet $\psi(x)$. A relação de escala é definida como:

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \varphi(2x - k) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \varphi_k(2x) \quad (2.10)$$

As funções wavelet mais amplamente utilizadas são as chamadas Daubechies, desenvolvidas por Ingrid Daubechies nos anos 80, utilizando um conjunto finito de coeficientes a_k não nulos de tal forma que:

$$\sum_{k=0}^{N-1} a_k = 2 \quad (2.11)$$

onde N é a ordem da função wavelet (Daubechies, 1988). As funções geradas pelos coeficientes a_k têm suporte compacto, ou seja, seu domínio é limitado de tal forma que seu valor é nulo fora do intervalo $[0, N-1]$.

Em geral, utiliza-se a seguinte expressão para todas as dilatações (j) e translações (k) das funções de escala:

$$\varphi_{j,k}(x) = \varphi(2^j x - k) \quad (2.12)$$

A função wavelet é definida a partir da função de escala da seguinte forma:

$$\psi(x) = \sum_{k=0}^{N-1} (-1)^k a_{N-1-k} \varphi(2x - k) \quad (2.13)$$

As funções de escala e wavelet têm uma série de propriedades que serão resumidas a seguir. Nas expressões que se seguem, define-se V como o conjunto de todas as funções de escala $\{\varphi(x)\}$ e W como o conjunto de todas as funções wavelet $\{\psi(x)\}$.

2.3.1. Propriedades das Wavelets

As funções wavelet têm diversas propriedades que as tornam especialmente interessantes para o uso em métodos numéricos. Nesta seção são detalhadas as propriedades da família Daubechies, que se aplicam também às interpolets de Deslauriers-Dubuc com algumas adaptações, como uma modificação no domínio.

A função de escala possui sua energia concentrada em um intervalo finito, dado pela ordem da wavelet.

$$\text{supp}(\varphi) = [0, N-1] \quad (2.14)$$

A energia total da função de escala é unitária. Essa propriedade pode ser expressa pela seguinte integral:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx = 1 \quad (2.15)$$

As translações das funções de escala são ortogonais entre si:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x-i)\varphi(x-j)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_i(x)\varphi_j(x)dx = \delta_{i,j} \quad (2.16)$$

Outra propriedade importante, especialmente para a escolha da ordem da função wavelet a ser utilizada na análise, é a sua capacidade de representar exatamente polinômios de determinado grau. Essa propriedade deriva da sua quantidade de momentos nulos (*vanishing moments*):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^k \psi(x)dx = 0, \quad k = 0, 1, \dots, N/2 - 1 \quad (2.17)$$

Conforme indicado na eq. (2.17), uma wavelet de Daubechies de ordem N tem $N/2$ momentos nulos, o que a torna capaz de representar exatamente polinômios $f(x)$ de grau até $N/2 - 1$:

$$f(x) = p_1 + p_2x + \dots + p_{m+1}x^m, \quad m \leq \frac{N}{2} - 1 \quad (2.18)$$

O polinômio da eq. (2.18) pode ser representado exatamente a partir de um somatório das diferentes translações das funções de escala.

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_k \varphi(x-k) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_k \varphi_k(x) \quad (2.19)$$

Para representar uma reta (polinômio de grau um) deve-se usar no mínimo uma wavelet com dois momentos nulos. As translações necessárias para representar uma reta no intervalo qualquer são aquelas cujos suportes o intersectam em mais de um ponto. Por exemplo, utilizando uma Daubechies de ordem $N = 4$ no intervalo $[0,1]$ são necessárias as translações $\varphi(x+2)$, $\varphi(x+1)$ e $\varphi(x)$, cujos suportes são, respectivamente, $[-2,1]$, $[-1,2]$ e $[0,3]$, como pode ser visto na fig. (6).

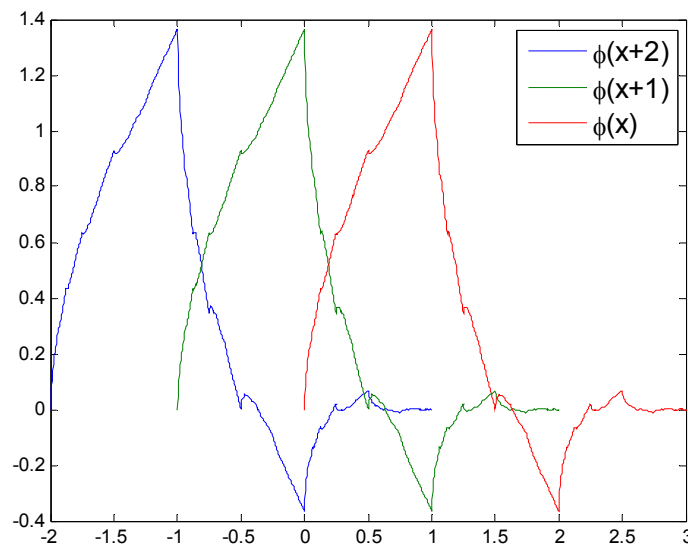


Figura 6 – Translações da wavelet DB4 que contém o intervalo $[0,1]$

Os coeficientes c_k são os chamados momentos das funções de escala e mais adiante é mostrado como calculá-los. Os valores mostrados na eq. (2.20) correspondem aos momentos da wavelet *DB4* com relação ao monômio de primeiro grau e foram truncados na terceira casa decimal.

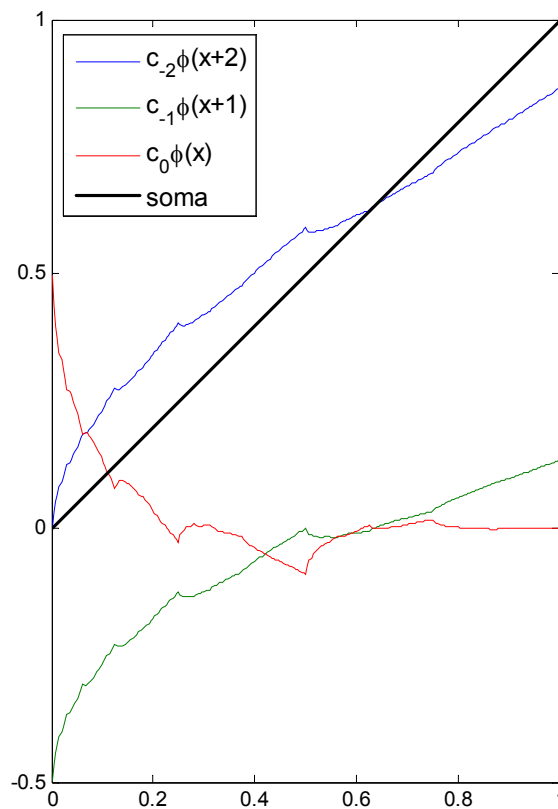


Figura 7 – Translações ponderadas da função de escala e somatório que resulta na reta $y = x$ no intervalo $[0,1]$

A fig. (7) mostra a reta $y = x$ no intervalo $[0,1]$ sendo representada como um somatório de três translações de uma Daubechies de ordem $N = 4$.

$$x = \sum_{-2}^0 c_k \varphi(x-k) = 0.634 \varphi(x) - 0.366 \varphi(x+1) - 1.366 \varphi(x+2) \quad (2.20)$$

onde

$$c_k = \langle x, \varphi_k(x) \rangle \quad (2.21)$$

2.4. Análise Multirresolução

A análise multirresolução em $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, espaço das funções unidimensionais de quadrado integrável (Castro, 2004), é um método de representar funções como um conjunto de coeficientes que fornecem informação sobre a posição e a frequência da função através de uma sequência de subespaços lineares $V^j \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ e uma função associada φ , conhecida como função de escala, que satisfaz as seguintes condições (Mallat, 1989a):

1. Ao passar de um espaço de resolução V^j para um espaço V^{j+1} , novos detalhes são acrescentados à aproximação de um sinal, ou seja, o subespaço que representa o nível seguinte contém mais informação do que o anterior.

$$\dots \subset V^{-2} \subset V^{-1} \subset V^0 \subset V^1 \subset V^2 \subset \dots \quad (2.22)$$

2. Para estes espaços de resolução, a interseção resulta no espaço nulo.

$$\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V^j = \{0\} \quad (2.23)$$

3. A união dos espaços V^j é capaz de representar as funções pertencentes ao espaço de funções unidimensionais de quadrado integrável $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$.

$$\mathcal{L}^2(\mathbb{R}) = \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V^j \quad (2.24)$$

4. Existe uma relação de escala diádica entre os subespaços.

$$f(x) \in V^j \Leftrightarrow f(2x) \in V^{j+1} \quad (2.25)$$

5. Cada subespaço V^j é gerado através de todas as translações inteiras de uma única função $f(x)$.

$$f(x) \in V^0 \Leftrightarrow f(x-k) \in V^0, \forall k \in \mathbb{Z} \quad (2.26)$$

6. Existe uma função $\varphi \in V^0$, chamada função de escala, tal que o conjunto formado por suas translações forma uma base de Riesz de V^0 (Holub, 2003).

$$\{\varphi_{0,k} : \varphi_{0,k}(x) = \varphi(x-k), k \in \mathbb{Z}\} \quad (2.27)$$

A eq. (2.27) representa um conjunto de funções linearmente independentes que gera o espaço V^0 . A fig. (8) mostra as funções de Haar (Haar, 1910), suas diferentes escalas, translações e de que forma estas se relacionam com os subespaços V^j .

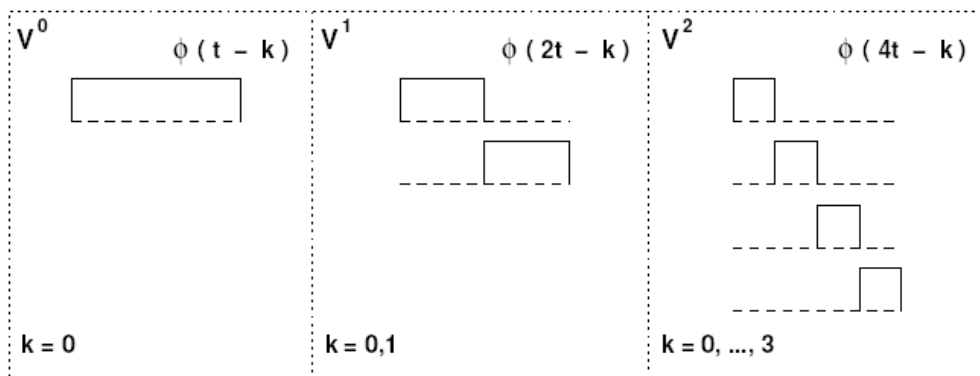


Figura 8 – Os subespaços e suas funções associadas

As propriedades acima descritas têm como consequência os seguintes resultados:

1. Existe uma relação de escala válida para as funções $\varphi(x)$.

$$\varphi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \varphi(2x-k) \quad (2.28)$$

Na eq. (2.28), os escalares a_k são chamados de coeficientes de filtro de escala. Mais adiante é mostrado como são gerados os valores das funções de escala e wavelet para todos os pontos de uma malha diádica.

2. Para os inteiros j e k , o conjunto dado pelas translações da função de escala no nível j forma uma base de Riesz de V^j .

$$\{\varphi_{j,k} : \varphi_{j,k}(x) = \varphi(2^j x - k), j, k \in \mathbb{Z}\} \quad (2.29)$$

Desta forma, pode-se escrever:

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \varphi_{j,k}(x), \quad f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \quad (2.30)$$

A teoria wavelet tem como sua grande contribuição a caracterização de espaços complementares entre dois subespaços encaixados, através das somas diretas.

$$V^{j+1} = V^j \oplus W^j \quad (2.31)$$

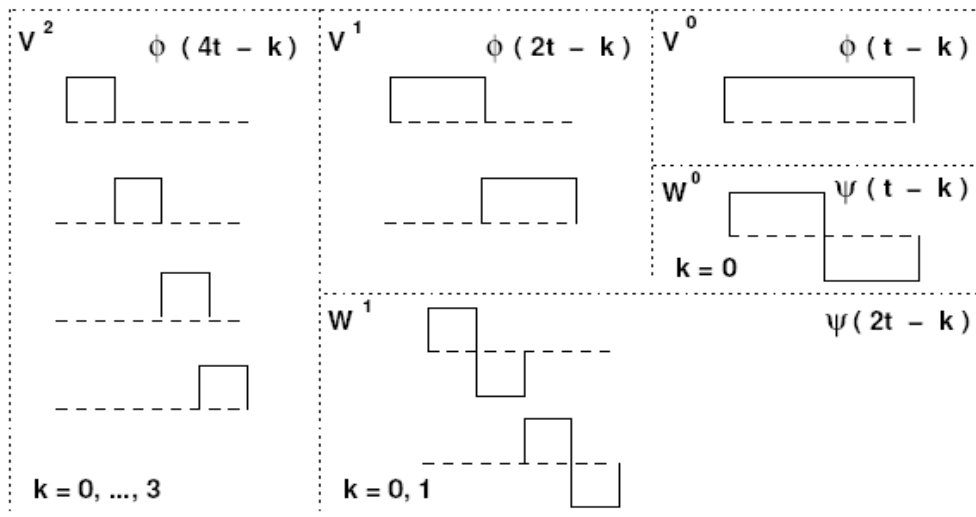


Figura 9 – Subespaços, funções de escala e wavelet.

A eq. (2.31) diz que os subespaços W^j , associados a uma função ψ , contêm a diferença de informação entre o nível de resolução j e o nível $j + 1$, que é mais refinado. Os subespaços W^j contêm os detalhes perdidos na resolução j que

levam à resolução $j + 1$. A fig. (9) mostra a relação entre as funções de escala φ e as funções wavelet ψ , associadas, respectivamente, aos subespaços V^j e W^j (Mallat, 1999).

2.4.1. Aproximação de funções

Uma análise multirresolução utilizando funções wavelet é muito útil para o estudo de funções em $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$. Funções $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ podem ser aproximadas pelas suas projeções em V^j (Mattos e Lopes, 2003).

$$\mathcal{P}^j f(x) = \sum_k \langle f, \varphi_k^j \rangle \varphi_k^j(x) \quad (2.32)$$

As projeções em W^j são dadas por:

$$\mathcal{Q}^j f(x) = \sum_k \langle f, \psi_k^j \rangle \psi_k^j(x) \quad (2.33)$$

As projeções expressas na eq. (2.34) contém a diferença de informação entre os níveis j e $j + 1$, ou seja:

$$\mathcal{Q}^j f(x) = [\mathcal{P}^{j+1} - \mathcal{P}^j] f(x) \quad (2.34)$$

Desta forma,

$$\mathcal{P}^{j+1} f(x) = [\mathcal{P}^j + \mathcal{Q}^j] f(x) \quad (2.35)$$

Definem-se então os seguintes coeficientes:

$$c_k^j = \langle f, \varphi_k^j \rangle \quad (2.36)$$

$$d_k^j = \langle f, \psi_k^j \rangle \quad (2.37)$$

A eq. (2.35) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\sum_k c_k^{j+1} \varphi_k^{j+1}(x) = \sum_k c_k^j \varphi_k^j(x) + \sum_k d_k^j \psi_k^j(x) \quad (2.38)$$

O cálculo dos coeficientes c_k^j e d_k^j é realizado a partir do algoritmo de Mallat, que também é conhecido como algoritmo piramidal (Minetto, 2005).

$$c_k^j = \sum_r h_r \langle f, \varphi_{j+1, 2k+r} \rangle = \sum_r h_{r-2k} c_r^{j+1} \quad (2.39)$$

$$d_k^j = \sum_r g_r \langle f, \varphi_{j+1, 2k+r} \rangle = \sum_r g_{r-2k} c_r^{j+1} \quad (2.40)$$

Nota-se que o cálculo dos coeficientes no nível j é feito a partir dos coeficientes do nível $j+1$, ou seja, começa-se pelo nível máximo de refinamento. As eqs. (2.39) e (2.40) podem ser vistas como um processo de convolução seguido de uma decimação (*downsampling*). Logo, no nível j tem-se metade dos coeficientes do nível $j+1$. Essa é a razão do nome piramidal dado ao algoritmo.

2.4.2. Propriedades da Análise Multirresolução

Uma análise multirresolução que utiliza funções wavelet tem uma série de propriedades que a tornam interessante na resolução de problemas numéricos, como será apresentado a seguir.

2.4.2.1. Localização

Tipicamente, a função escala $\varphi(x)$ e a função wavelet $\psi(x)$ concentram-se em um intervalo finito, com comprimento dx , ao que é dado o nome de suporte. Se a wavelet tem a maior parte de sua energia concentrada nesse intervalo finito, ou seja, seu valor é nulo ou decai exponencialmente fora dele, é dito que a mesma tem suporte compacto. Neste caso, diz-se que as wavelets têm localização espacial, o que é uma propriedade de grande importância para o seu uso como base ortonormal para a solução de equações diferenciais. À medida que j aumenta,

$\varphi(2^j x - k)$ fica localizada em intervalos cada vez menores, sempre reduzidos pela metade quando se passa de um nível a outro através da relação de escala. Assim, a cada mudança de nível, todas as funções possuem a mesma forma, só mudando o seu comprimento. A fig. (10) mostra a função escala e a wavelet de Daubechies de ordem $N = 4$. Nota-se que o suporte da função de escala $\varphi(x)$ é $[0,3]$ e o da função wavelet $\psi(x)$ é $[-1,2]$.

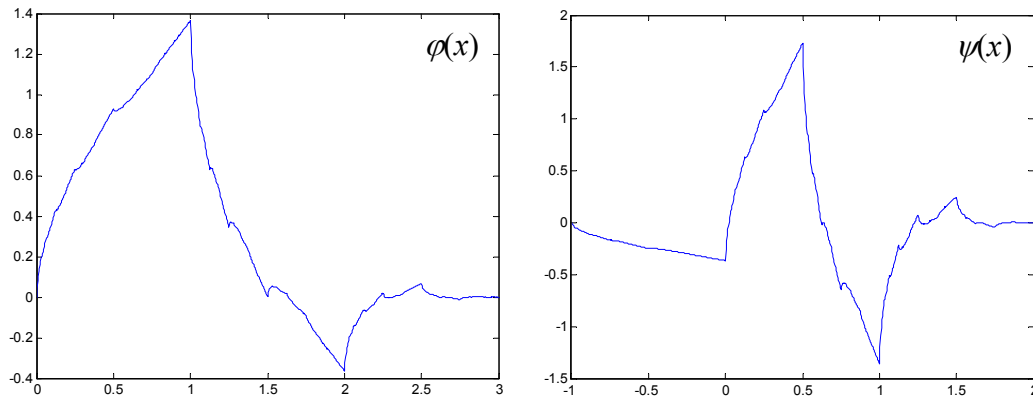


Figura 10 – Funções de escala e wavelet de Daubechies de ordem $N = 4$

2.4.2.2.

Momentos Nulos e Aproximação de Polinômios

Pode-se verificar que a função wavelet correspondente à função de escala de ordem N atende à seguinte equação de momentos nulos:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^m \psi(x) dx = 0, \quad m = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1 \quad (2.41)$$

Esta propriedade tem como consequência a possibilidade de a base formada por funções de escala de ordem N ser capaz de representar exatamente polinômios de grau até $N/2 - 1$. Uma função de escala de Daubechies de ordem $N = 4$, por exemplo, pode representar exatamente uma reta (polinômio de grau um), como foi demonstrado anteriormente.

2.4.2.3.**Caracterização de Regularidade e Representação de Singularidades**

Em uma análise wavelet, há duas formas de representar funções no espaço da análise multirresolução. A primeira utiliza expansões em termos das funções de escala e a outra em termos das funções wavelet. Uma importante característica dos coeficientes das funções wavelet d_k^j é a sua associação com a suavidade da função f . Devido a essa característica, os coeficientes wavelet podem ser utilizados como indicadores locais de regularidade das funções analisadas, pois são pequenos em regiões suaves e maiores em regiões com singularidades ou gradientes elevados. A representação exata de polinômios até certa ordem apenas pelas funções de escala é um exemplo desta propriedade. Neste caso, os coeficientes d_k^j das funções wavelet são nulos. Por esta razão, assim como acontece no refinamento de malha do Método dos Elementos Finitos, pode-se fazer uso da análise multirresolução, refinando o nível da análise em regiões específicas, onde o gradiente do campo analisado é elevado, utilizando níveis mais baixos nas regiões em que há maior regularidade.

Para determinar a regularidade ou suavidade de uma wavelet, o número de momentos nulos da mesma é de suma importância. Em geral, quanto maior o valor de m na eq. (2.41), mais suave é a wavelet. Entretanto, pode-se obter wavelets com a mesma regularidade e com um número menor de momentos nulos (Souza et al., 2007).

2.4.3.**Exemplo de uma Análise Multirresolução**

Como foi visto em seções anteriores, uma wavelet de Daubechies de ordem N pode representar exatamente um polinômio de grau até $N/2 - 1$. A representação de um polinômio de ordem superior com a mesma wavelet implica em erros que são minimizados com o aumento da resolução. Tal procedimento é análogo a um refinamento do tipo h no MEF, enquanto que o aumento da ordem da wavelet seria considerado um refinamento do tipo p .

Pela eq. (2.38) pode-se deduzir uma aproximação para uma função qualquer pertencente a $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ a partir do somatório de funções de escala e funções wavelet.

$$f(x) \cong \sum_i c_i^j \varphi_i^j(x) + \sum_i d_i^j \psi_i^j(x) = \sum_p c_p^{j+1} \varphi_p^{j+1}(x) \quad (2.42)$$

Caso a função $f(x)$ seja um monômio e a interpolação feita no nível 0, os coeficientes c e d são os momentos das funções de escala e wavelet, respectivamente. Pode-se, portanto, escrever:

$$x^k = \sum_i M_i^k \varphi(x-i) + \sum_i L_i^k \psi(x-i) \quad (2.43)$$

$$M_i^k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \varphi(x-i) dx, \quad L_i^k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \psi(x-i) dx \quad (2.44)$$

Deve-se lembrar que se k for menor ou igual a $N/2 - 1$, os valores de L serão nulos, já que a função de escala poderá representar exatamente o monômio. Esta é mais uma forma de interpretar a propriedade de momentos nulos das funções wavelet.

A função wavelet no nível 0 é descrita por um somatório da função de escala no nível 1:

$$\psi(x) = \sum_i h_i \varphi(2x-i), \quad h_i = (-1)^i a_{N-1-i} \quad (2.45)$$

Levando em conta que os coeficientes de filtro da função wavelet (h_i) podem ser escritos em função dos coeficientes de filtro da função de escala (a_i), pode-se substituir a eq. (2.45) em (2.44) e obter uma expressão para o momento da função wavelet que depende unicamente do momento da função de escala:

$$\begin{aligned} L_i^k &= \sum_m h_m \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \varphi(2x-2i-m) dx = \frac{1}{2^{k+1}} \sum_m h_m \int_{-\infty}^{+\infty} y^k \varphi(y-2i-m) dy \\ &= \frac{1}{2^{k+1}} \sum_m h_m M_{2i+m}^k \end{aligned} \quad (2.46)$$

Substituindo a relação de escala na eq. (2.43) pode-se obter uma aproximação de nível 1 para o monômio:

$$\begin{aligned}
 x^k &= \sum_i M_i^k \sum_m a_m \varphi(2x - 2i - m) + \sum_i L_i^k \sum_m h_m \varphi(2x - 2i - m) \\
 &= \sum_i \sum_m \left(M_i^k a_m + \frac{h_m}{2^{k+1}} \sum_p h_p M_{2i+p}^k \right) \varphi(2x - 2i - m)
 \end{aligned} \tag{2.47}$$

A partir da eq. (2.47) pode-se obter os coeficientes de interpolação do nível 1 apenas para a função de escala:

$$c_i^1 = \sum_m \left(M_i^k a_m + \frac{h_m}{2^{k+1}} \sum_p h_p M_{2i+p}^k \right) \tag{2.48}$$

A eq. (2.48) pode ser aplicada sucessivamente até o nível de resolução desejado, substituindo-se as expressões dos momentos pelos coeficientes do nível anterior. Tal procedimento pode ser custoso do ponto de vista computacional. Como os coeficientes de interpolação de qualquer função podem ser obtidos diretamente pelo produto interno entre a própria função e as funções interpoladoras (eqs. (2.36) e (2.37)), existe uma forma alternativa para obter os coeficientes da função de escala no nível j :

$$c_i^j = 2^j \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \varphi(2^j x - i) dx \tag{2.49}$$

Através de uma substituição de variáveis, pode-se chegar a uma expressão que relaciona os coeficientes de interpolação no nível j com os momentos da função de escala (interpolação no nível 0):

$$c_i^j = \frac{2^j}{2^{j(k+1)}} \int_{-\infty}^{+\infty} y^k \varphi(y - i) dy = \frac{M_i^k}{2^{jk}} \tag{2.50}$$

A vantagem desta forma de representação é não depender de um processo iterativo como seria a aplicação da eq. (2.48). Pode-se obter diretamente a aproximação no nível j sem a necessidade de se calcular o nível $j - 1$.

Deve-se ter em conta que a cada mudança de nível mudam as translações necessárias para cobrir todo o intervalo de interesse. Por exemplo, para a DB4, no nível 0 e intervalo $[0,1]$ são necessárias as translações -2, -1 e 0, como explicado

anteriormente. Já para o nível 1 são necessárias -2, -1, 0 e 1, que são as mesmas utilizadas para o intervalo [0,2] no nível 0. Como regra geral, as translações necessárias para cobrir o intervalo [a,b] no nível j são as mesmas que seriam utilizadas para cobrir o intervalo $[2^j a, 2^j b]$ no nível 0.

Como exemplo, pode-se tentar representar uma parábola (polinômio do segundo grau) com a wavelet DB4 no intervalo [0,1]. Deve-se lembrar que a DB4 só pode representar exatamente uma reta.

$$\begin{aligned} x^2 &\cong \sum_{i=-2}^0 M_i^2 \varphi(x-i), \quad j=0 \\ x^2 &\cong \sum_{i=-2}^1 \frac{M_i^2}{4} \varphi(2x-i), \quad j=1 \\ x^2 &\cong \sum_{i=-2}^3 \frac{M_i^2}{16} \varphi(4x-i), \quad j=2 \end{aligned} \quad (2.51)$$

À medida que o nível de resolução aumenta, mais precisa fica a aproximação, porém com a necessidade de mais translações. A fig. (11) mostra o resultado da aproximação da parábola para diferentes níveis da wavelet DB4.

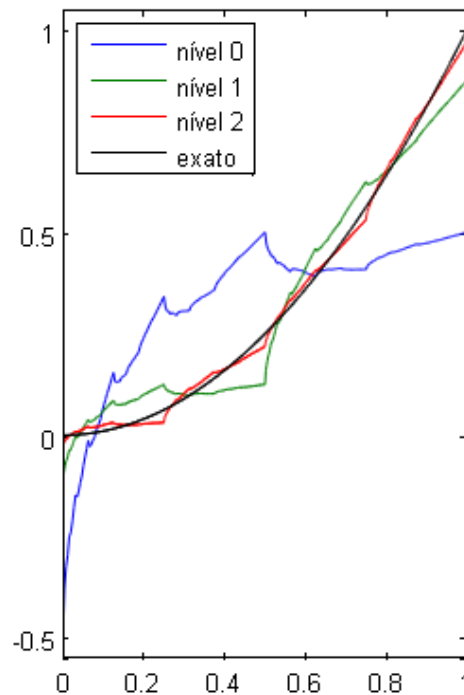


Figura 11 – Aproximação de uma parábola por wavelets em diferentes níveis

Se o nível de resolução é alto o suficiente, pode-se dizer que as funções de escala funcionam como deltas de Dirac na expressão do produto interno, o que, de certa forma, é equivalente a utilizar amostras da própria função como coeficientes de interpolação (Walnut, 2002). Deve-se lembrar que, apesar de a wavelet DB4 necessitar de certo grau de refinamento para aproximar uma parábola, a utilização de uma DB6 no seu nível mais básico já seria suficiente para representá-la exatamente.

2.5.

Tipos de Wavelets

Existem dois grandes grupos de wavelets que podem ser utilizadas como funções interpoladoras para o uso em métodos numéricos: as wavelets ortonormais e as biortogonais. A descoberta de bases ortonormais e de suporte compacto é atribuída a Ingrid Daubechies (1988) que estendeu o trabalho de Haar (1910) sintetizando famílias de wavelets ortonormais e possibilitando uma análise mais eficiente do que a obtida com outros sistemas. As wavelets ortonormais mais conhecidas são as da própria família Daubechies, além das Symlets e as Coiflets (Daubechies, 1992).

O desenvolvimento das wavelets teve sua origem em função de problemas de processamento de dados e sinais, que envolvem bancos de filtros e uma série de conceitos específicos do processamento de sinais digitais que fogem ao escopo deste trabalho (Mallat, 1989b). Deve-se apenas ressaltar que as restrições impostas e as propriedades das wavelets ortonormais, pela necessidade de decomposição e reconstrução exatas, obrigam que tais wavelets sejam assimétricas, ao contrário do que acontece com as wavelets biortogonais, como as da família das Splines, que não serão abordadas nesta tese.

Nesta seção serão descritas algumas das principais famílias de wavelets, dando especial atenção à família de Wavelets Ortonormais de Daubechies e às Interpolets de Deslauriers-Dubuc.

2.5.1. Wavelets Ortonormais

Wavelets são blocos construtores de funções localizados no tempo e no espaço. As wavelets são obtidas de translações e dilatações de uma única função $\psi(t)$, chamada de wavelet mãe (*mother wavelet*):

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right), \quad a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0 \quad (2.52)$$

Na eq. (2.52), a representa o parâmetro de dilatação e b o parâmetro de translação, ou seja, a determina o tamanho do intervalo de suporte da função e b determina os valores iniciais e finais do suporte. Tal função dos valores de a e b é análoga ao papel desempenhado pela frequência e pela fase em funções trigonométricas quando se utiliza uma análise de Fourier.

$$f_{a,b}(t) = \text{sen}(at + b) \quad (2.53)$$

Na eq. (2.53), a determina o período (ou a frequência) da função seno e o valor de b determina a sua translação em relação ao eixo vertical, ou seja, a sua fase.

Para algumas escolhas especiais de a , b e $\psi(t)$, a família de funções $\psi_{a,b}(t)$ constitui uma base ortonormal para o espaço de funções quadrado integrável $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$. Utilizando os valores $a = 2^j$ e $b = k2^j$, tem-se:

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{-j/2} \psi(2^{-j}t - k), \quad j, k \in \mathbb{Z} \quad (2.54)$$

Pode-se dizer que a família de funções descrita pela eq. (2.54) forma uma base ortonormal (Chui, 1992). Para construir essa família de funções, utiliza-se a relação de escala para $j = 1$.

$$\varphi(t) = \sqrt{2} \sum_k g_k \varphi(2t - k) \quad (2.55)$$

onde

$$g_k = \sqrt{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) \varphi(2t - k) dt \quad (2.56)$$

Em geral, na análise wavelet faz-se uso dos coeficientes a_k que são obtidos incorporando-se o valor de $\sqrt{2}$ aos valores de g_k .

$$a_k = \sqrt{2} g_k \quad (2.57)$$

A partir da relação de escala, chega-se à expressão para a função wavelet $\psi(t)$ a partir da função de escala $\varphi(t)$:

$$\psi(t) = \sum_k h_k \varphi(2t - k) \quad (2.58)$$

onde

$$h_k = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) \varphi(2t - k) dt \quad (2.59)$$

A partir das eqs. (2.56) e (2.58), utilizando a relação de escala, pode-se chegar facilmente à expressão para os coeficientes h_k a partir dos coeficientes a_k para $j = 0$.

$$h_k = (-1)^k a_{N-1-k} \quad (2.60)$$

2.5.1.1. Wavelets de Daubechies

As wavelets de Daubechies possuem suporte compacto e geram bases ortonormais. A wavelet de Daubechies de ordem N possui $N/2$ momentos nulos e tem suporte $[N/2+1, N/2]$. A função de escala de Daubechies de mesma ordem tem suporte $[0, N-1]$ e conta com N coeficientes de filtro.

As condições para a construção da base ortonormal de funções de escala de Daubechies são dadas pelo número de momentos nulos, necessidade de suporte compacto (número finito de coeficientes) e ortogonalidade entre suas translações, o que gera funções bastante irregulares e assimétricas (Burrus et al., 1998).

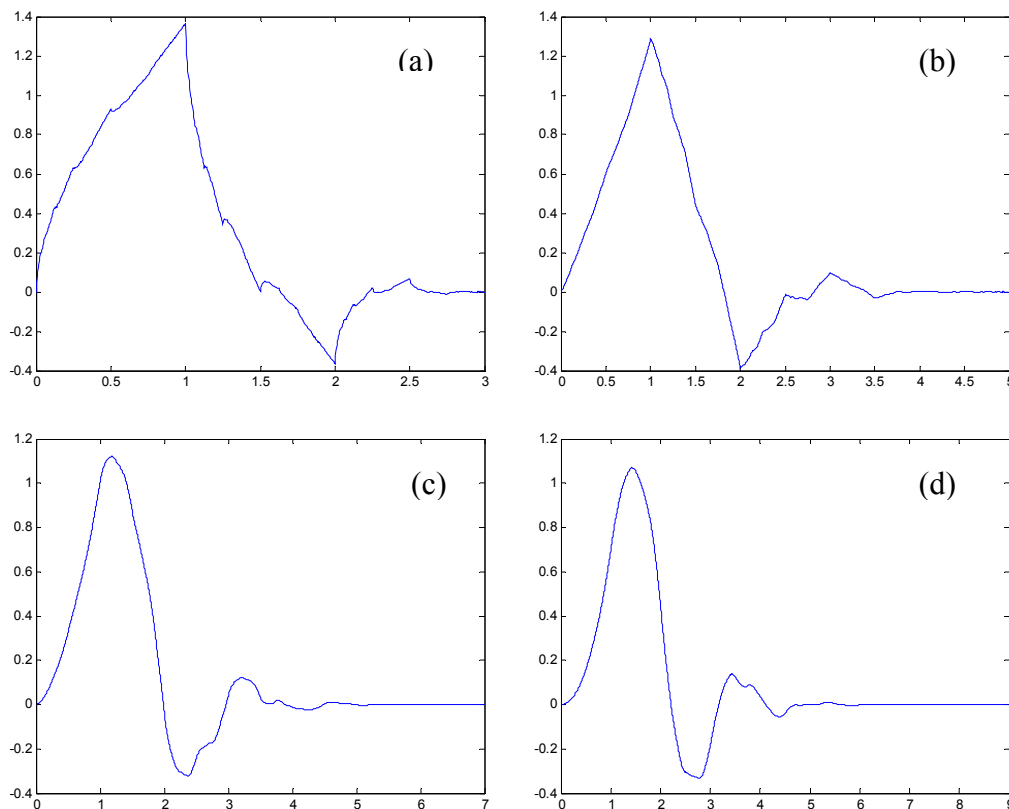


Figura 12 - Wavelets de Daubechies: (a) $N = 4$; (b) $N = 6$; (c) $N = 8$; (d) $N = 10$

As funções wavelet da família Daubechies não possuem qualquer tipo de simetria, como pode ser visto na fig. (12) para as funções de escala de ordem $N = 4, 6, 8, 10$. Pode-se notar também que quanto maior a ordem, mais suave é a função, característica que está relacionada com o número de momentos nulos da mesma, como será visto adiante.

2.5.1.2.

Wavelets de Daubechies Bidimensionais

As funções de Daubechies bidimensionais são obtidas pelo produto cartesiano entre as funções unidimensionais. Para cada conjunto de k translações possíveis de uma wavelet unidimensional haverá k^2 combinações de wavelets bidimensionais.

$$\Phi_{i,j}(x,y) = \varphi_i(x)\varphi_j(y) = \varphi(x-i)\varphi(y-j) \quad (2.61)$$

A fig. (13) ilustra o comportamento de uma wavelet bidimensional gerada a partir de uma Daubechies de ordem $N = 4$.

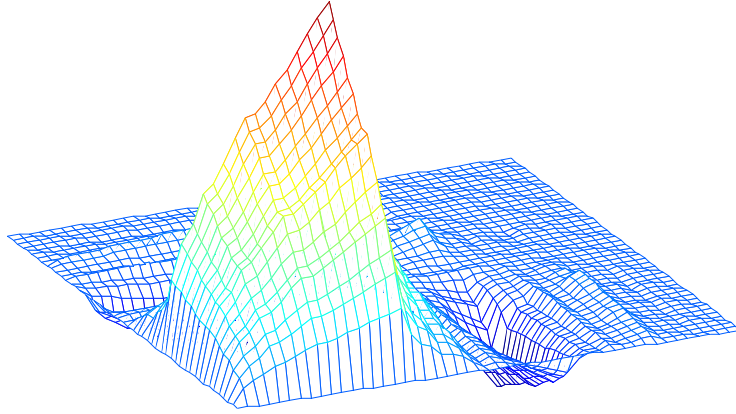


Figura 13 – Função de escala bidimensional de Daubechies de ordem $N = 4$

2.5.2. Interpolets de Deslauriers-Dubuc

Uma função pode ser considerada interpoladora quando atende ao seguinte critério (Shi et al., 1999):

$$\varphi(k) = \delta_{0,k} = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (2.62)$$

Neste caso, toda $f \in V_j$ satisfaz:

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(2^{-j}k) \varphi_{j,k}(x) \quad (2.63)$$

Consideram-se então os pontos $x = 2^{-j}k$ na equação de interpolação da função $f(x)$ (Blanco, 2002):

$$f(2^{-j}k) = \sum_{r \in \mathbb{Z}} c_r \varphi_{j,r}(2^{-j}k) = \sum_{r \in \mathbb{Z}} c_r \varphi(2^j 2^{-j}k - r) = \sum_{r \in \mathbb{Z}} c_r \delta_{k-r} = c_k \quad (2.64)$$

O resultado da eq. (2.64) mostra que os coeficientes c_k são simples avaliações da função nos pontos $x = 2^{-j}k$, portanto para calculá-los não é necessário realizar qualquer operação complexa, como uma integração. Isto representa uma grande vantagem com respeito a outras bases como a família Daubechies.

Define-se a malha diádica Θ_j como o conjunto dado pela eq. (2.65).

$$\Theta_j = \{x_{j,k} \in \mathbb{R} : x_{j,k} = 2^{-j}k, j, k \in \mathbb{Z}\} \quad (2.65)$$

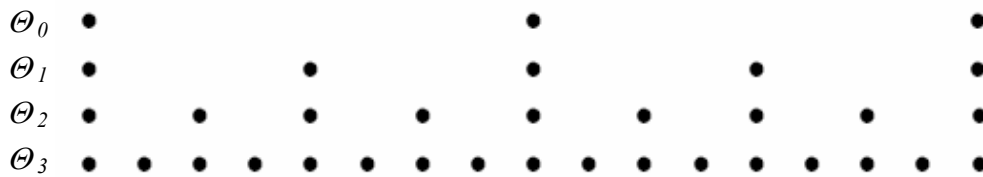


Figura 14 – Representação física de uma malha diádica

A fig. (14) mostra a representação física de uma malha diádica. Com o uso da eq. (2.64), pode-se estabelecer uma relação entre os espaços físico Θ_j e funcional V^j , já que a coordenada de f que corresponde a $\varphi_{j,k} \in V^j$ é exatamente a avaliação de f no ponto $x_{j,k} \in \Theta_j$. Esta relação entre os espaços físico e funcional é muito semelhante ao que se faz no Método dos Elementos Finitos, em que o valor do deslocamento num nó, por exemplo, é exatamente o coeficiente de interpolação utilizado como peso pelas funções de forma para obter deslocamentos no interior dos elementos.

A construção das interpolets deve ser realizada visando atender aos requisitos para funções interpoladoras, além de gerar funções simétricas em torno do eixo vertical ($x = 0$) e de obedecer à relação de escala, na qual os coeficientes que multiplicam as funções da base são dados pela própria avaliação da função a ser interpolada nos pontos $x = 2^{-j}k$.

$$\varphi(x) = \sum_{k=1-N}^{N-1} \varphi(k/2) \varphi(2x - k) \quad (2.66)$$

As primeiras funções wavelet interpoladoras surgiram na literatura no trabalho de Deslauriers e Dubuc (1989), como funções fundamentais de um esquema de refinamento interpolante no qual se trabalha com grades diádicas encaixadas como a da fig. (14).

Além das propriedades já citadas que devem ser atendidas por todas as funções wavelet interpoladoras, pode-se dizer que as funções de Deslauriers e Dubuc têm suporte compacto no intervalo $[1-N, N-1]$. O valor de N é a ordem da wavelet de Daubechies utilizada para gerar a função de Deslauriers e Dubuc e se relaciona também com o grau do polinômio que pode ser interpolado de forma exata pela interpolet.

Todo polinômio $q(x)$ de grau menor ou igual a $N-1$ pode ser representado de forma exata num intervalo qualquer como uma combinação linear das funções interpoladoras de Deslauriers e Dubuc de ordem N :

$$q(x) = a_1 + a_2x + \dots + a_{m+1}x^m, \quad m \leq N-1 \quad (2.67)$$

$$q(x) = \sum_k q(2^{-j}k) \varphi_{j,k}(x) \quad (2.68)$$

O índice k na eq. (2.68) varia conforme o intervalo de interesse, assim como ocorre com as wavelets de Daubechies.

2.6. Método de Wavelet-Galerkin

Como acontece no método de Galerkin tradicional, a resolução de uma equação diferencial se resume num sistema de equações cujas incógnitas são os pesos pelos quais são multiplicadas as funções base para obter a função resposta. O sistema é formado, portanto, por produtos internos entre as próprias funções base e suas derivadas, o que, dependendo da base utilizada, pode ser trivial (como é o caso de um elemento de viga-coluna modelado com funções polinomiais). No caso das funções wavelet, esses produtos internos são integrais chamadas coeficientes de conexão. Por não terem expressão analítica, o cálculo dessas integrais não é trivial. O uso de métodos numéricos tradicionais, como o de Gauss, não é recomendável devido à natureza altamente oscilatória das wavelets e

suas derivadas. Contudo, utilizando a relação de escala característica das funções wavelet, é possível obter os coeficientes de conexão através da solução de um sistema de equações, o que garante o seu cálculo exato (Beylkin, 1992).

As funções wavelet de Daubechies têm uma série de propriedades que as tornam particularmente interessantes como uma base para o Método de Wavelet-Galerkin de resolução de equações diferenciais parciais: são ortogonais, têm suporte compacto e seus coeficientes de conexão podem ser calculados sem aproximações numéricas.

Para a resolução de equações diferenciais, deve-se avaliar as derivadas da função resposta $f(x)$ em termos das funções de escala $\varphi(x)$. Desta forma, define-se a derivada da função de escala:

$$\varphi_i^n = \frac{d^n \varphi_i(x)}{dx^n} = \frac{d^n \varphi(x-i)}{dx^n} \quad (2.69)$$

Podemos, portanto, escrever a d -ésima derivada de $f(x)$ em função das derivadas de $\varphi(x)$.

$$f(x) = \sum_k c_k \varphi_k(x) \quad (2.70)$$

$$f^d(x) = \sum_k c_k \varphi_k^d(x) \quad (2.71)$$

onde

$$\varphi_k^d(x) = \sum_j \Lambda_j \varphi_j(x) \quad (2.72)$$

$$\Lambda_j = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_k^d(x) \varphi_j(x) dx \quad (2.73)$$

O termo Λ_j é um coeficiente de conexão e, de uma maneira mais geral, pode-se escrevê-lo em função das derivadas (d_1 e d_2) e translações (i e j) das funções de escala utilizadas.

$$\Lambda_{i,j}^{d_1,d_2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_i^{(d_1)}(x) \varphi_j^{(d_2)}(x) dx \quad (2.74)$$

A utilização dos coeficientes de conexão como aparecem na eq. (2.74) depende da hipótese de que a solução da equação diferencial é periódica, o que equivale a dizer que o domínio do problema é infinito, e já não é possível aplicá-los quando o domínio é fechado. A ortogonalidade, por exemplo, é perdida se as funções base são truncadas devido à limitação do domínio de integração. Diversos autores propuseram soluções para a utilização do Método de Wavelet-Galerkin em domínios fechados, como será visto adiante.

2.6.1.

Avaliação correta dos coeficientes de conexão

A solução de equações diferenciais pelo método de Wavelet-Galerkin depende fundamentalmente da correta avaliação dos produtos internos entre as funções de escala, suas translações e suas derivadas, conhecidos como coeficientes de conexão. Wavelets de suporte compacto têm um número finito de coeficientes de filtro, entretanto as suas derivadas, quando existentes, têm uma natureza altamente oscilatória, motivo pelo qual o uso de técnicas tradicionais de quadratura torna-se difícil e instável (Krishna e Shrikhande, 2006). Para solucionar essa limitação, diversos autores propuseram métodos para o cálculo exato dos coeficientes de conexão, utilizando para isso as propriedades de translação e escala das funções wavelet. Latto et al. (1992) apresentaram um método que, a partir das relações de escala e das condições de momento das funções wavelet, reduz o cálculo dos coeficientes de conexão a um problema de autovalor. Esse método é válido apenas para domínios sem fronteira. Quando utilizado em sistemas definidos num intervalo finito, essa abordagem leva a resultados imprecisos nas regiões próximas ao contorno do problema. Além disso, a resolução numérica das integrais, que poderia dar um tratamento adequado ao

problema das condições de contorno, torna-se impraticável devido à natureza oscilatória das wavelets.

Romine e Peyton (1997) tentaram contornar tal dificuldade propondo os coeficientes de conexão “próprios”, com limites de integração dentro do suporte (domínio) da função wavelet. Denominam-se coeficientes de conexão próprios aqueles definidos em intervalos fechados, em oposição aos impróprios, que seriam as integrais calculadas em domínio infinito, ou seja, sem fronteiras.

Este trabalho baseia-se no cálculo proposto por Zhou e Zhang (1998), que formulou os coeficientes de conexão definidos no intervalo $[0,1]$, ou seja, no nível $m = 0$, já que a partir destes pode-se obter os demais. Define-se o coeficiente de conexão no nível m .

$$\Gamma_{i,j_{[0,2^m]}}^{d_1,d_2} = \int_0^{2^m} \varphi_i^{(d_1)}(x) \varphi_j^{(d_2)}(x) dx \quad (2.75)$$

Pode-se, a partir da eq. (2.75), chegar a uma expressão para o coeficiente de conexão do nível seguinte.

$$\Gamma_{i,j_{[0,2^{m+1}]}}^{d_1,d_2} = \int_0^{2^{m+1}} \varphi_i^{(d_1)}(x) \varphi_j^{(d_2)}(x) dx \quad (2.76)$$

$$\Gamma_{i,j_{[0,2^{m+1}]}}^{d_1,d_2} = \int_0^{2^m} \varphi_i^{(d_1)}(x) \varphi_j^{(d_2)}(x) dx + \int_{2^m}^{2^{m+1}} \varphi_i^{(d_1)}(x) \varphi_j^{(d_2)}(x) dx \quad (2.77)$$

Fazendo $y = x - 2^m$ na segunda integral, chega-se a uma expressão em que os coeficientes de conexão do nível seguinte dependem apenas do nível anterior, sendo esta a essência da análise multirresolução.

$$\Gamma_{i,j_{[0,2^{m+1}]}}^{d_1,d_2} = \int_0^{2^m} \varphi_i^{(d_1)}(x) \varphi_j^{(d_2)}(x) dx + \int_0^{2^m} \varphi_{i-2^m}^{(d_1)}(y) \varphi_{j-2^m}^{(d_2)}(y) dy \quad (2.78)$$

$$\Gamma_{i,j_{[0,2^{m+1}]}}^{d_1,d_2} = \Gamma_{i,j_{[0,2^m]}}^{d_1,d_2} + \Gamma_{i-2^m,j-2^m_{[0,2^m]}}^{d_1,d_2} \quad (2.79)$$

Desta forma, pode-se notar que para calcular os coeficientes de conexão em qualquer nível basta ter o valor do nível mais básico, ou seja, para $m = 0$, definido no intervalo $[0,1]$.

Uma vantagem do uso dos coeficientes de conexão no Método de Wavelet-Galerkin, assim como ocorre com as matrizes de rigidez, geométrica e de massa no MEF, é o fato de o cálculo para sua obtenção ser feito uma única vez e utilizado para a formulação das matrizes posteriormente. O cálculo para a obtenção dos coeficientes de conexão tanto das wavelets de Daubechies quanto das interpolets de Deslauriers-Dubuc é detalhado adiante e consiste unicamente na resolução de um sistema de equações lineares.

2.6.2. Incorporação das Condições de Contorno

As excelentes propriedades atribuídas às wavelets de Daubechies são baseadas na hipótese de que o domínio computacional é infinito. Tais propriedades não são bem aproveitadas em domínios finitos, tornando complicada a imposição das condições de contorno em problemas desse tipo. Amaratunga et al. (1994) sugeriram uma técnica de extrapolação polinomial que permite modificar as funções em regiões próximas à fronteira do problema. Neste método, as funções de escala podem ser regulares (aquelas que estão completamente contidas no intervalo do problema), irregulares (parcialmente contidas no intervalo) e exteriores (totalmente fora do intervalo). Os coeficientes de conexão entre as funções regulares são calculados pelo método tradicional e um método de extrapolação é utilizado para lidar com o cálculo dos coeficientes que envolvem as funções irregulares e exteriores.

Devido à dificuldade de imposição das condições de contorno que tanto Romine e Peyton (1997) quanto Latto et al. (1992) enfrentaram, Lu et al. (1996) criaram uma abordagem com “condições de contorno fictícias”, ou seja, estendem-se artificialmente as fronteiras do problema para que a solução seja correta dentro do domínio desejado. A solução neste caso utiliza os coeficientes impróprios propostos por Latto, impondo posteriormente as condições de contorno na fronteira real. Segundo essa abordagem, o Método de Wavelet-Galerkin pode ser aplicado diretamente desde que a fronteira seja estendida artificialmente de tal forma que os limites fictícios não possam influenciar o

contorno real do problema. O que é conhecido como “fronteira fictícia” é imposto de forma a manter a fronteira original livre das imprecisões introduzidas pelos coeficientes de conexão calculados para domínios infinitos. As condições de contorno reais são, então, impostas na fronteira original do problema e a solução da equação diferencial só é válida para o domínio em questão.

Utilizando-se os coeficientes de conexão propostos por Zhou e Zhang (1998) no intervalo $[0,1]$ pode-se impor as condições de contorno mais facilmente, de maneira semelhante ao que é feito no MEF tradicional, motivo pelo qual este foi o método escolhido para o seu cálculo.

2.7.

Construção das Wavelets de Daubechies

As wavelets de Daubechies são uma família de funções com suporte compacto que atende a certas condições como a ortogonalidade entre suas translações inteiras e a possibilidade de representar de forma exata polinômios de grau até $N/2 - 1$, sendo N a ordem da wavelet de Daubechies.

Para que uma wavelet tenha suporte compacto é necessário que um número finito de coeficientes tenha valores não nulos. Para uma wavelet de ordem N , vale a seguinte expressão:

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \varphi(2x - k) \quad (2.80)$$

Alguns autores consideram $N/2$ como a ordem da wavelet, o que ocorre quando se deseja designar a função de Daubechies pelo seu número de momentos nulos. A propriedade dos momentos nulos é exatamente a responsável pela representação exata de polinômios de grau até $N/2 - 1$, como foi visto anteriormente.

2.7.1. Determinação dos coeficientes de filtro

As condições que se deve estabelecer para o cálculo dos coeficientes de filtro de uma wavelet da família Daubechies de ordem N , buscando obter uma família de funções ortogonais com $N/2 - 1$ momentos nulos, são as seguintes:

1. A integral definida pela função de escala em todo o seu domínio é unitária.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx = 1 \quad (2.81)$$

Esta propriedade leva à condição de que o somatório dos coeficientes de filtro é constante e igual a 2.

$$\sum_{k=0}^{N-1} a_k = 2 \quad (2.82)$$

2. A função de escala é ortogonal a todas as suas translações inteiras.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \varphi(x-k) dx = \delta_{0,k} \quad (2.83)$$

A partir da eq. (2.83), chega-se a:

$$\sum_{r=0}^{N-1} a_r a_{r+2k} = 2\delta_k, \quad k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1 \quad (2.84)$$

3. Qualquer polinômio de grau inferior a $N/2 - 1$ é representado de forma exata pela combinação linear da função escala e de todas as suas translações inteiras.

$$x^m = \sum_k c_k^m \varphi(x-k) \quad (2.85)$$

A eq. (2.85) é consequência da equação de momentos nulos descrita anteriormente e leva à terceira condição.

$$\sum_{k=0}^{N-1} (-1)^k a_k k^j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, \frac{N}{2} - 1 \quad (2.86)$$

As duas primeiras condições permitem definir $N/2 + 1$ equações e são necessários N coeficientes de filtro para a descrição completa da wavelet de ordem N . A terceira condição fornece as $N/2 - 1$ equações restantes que permitem obter de forma única os coeficientes de filtro, através da solução de um sistema de equações não-lineares.

2.7.1.1.

Exemplo de cálculo dos coeficientes da wavelet DB4

A partir da primeira condição, tem-se:

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 2 \quad (2.87)$$

Da segunda condição:

$$k = 0: \quad a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 2 \quad (2.88)$$

$$k = 1: \quad a_0 a_2 + a_1 a_3 = 0 \quad (2.89)$$

E da última condição:

$$j = 1: \quad -a_1 + 2a_2 - 3a_3 = 0 \quad (2.90)$$

A partir da resolução do sistema formado pelas quatro equações não-lineares descritas, calculam-se os quatro coeficientes de filtro necessários para definir a wavelet de ordem $N = 4$.

Os coeficientes de filtro são números irracionais e o resultado mostrado na eq. (2.91) está com a precisão de 15 casas decimais.

$$\begin{aligned} a_0 &= 0.683012701892219 \\ a_1 &= 1.183012701892219 \\ a_2 &= 0.316987298107781 \\ a_3 &= -0.183012701892219 \end{aligned} \quad (2.91)$$

2.7.2. Obtenção da função de escala

A geração das funções de escala é realizada por procedimentos numéricos, levando-se em consideração que, em geral, tais funções não têm expressão analítica. Existem vários algoritmos propostos (Daubechies, 1988, Meyer, 1993 e Strang e Nguyen, 1996) para gerar as funções de escala das wavelets de Daubechies, sendo que o mais difundido é o que utiliza um processo recursivo de obtenção dos valores das funções nos pontos diádicos, definindo-se *a priori* o número de iterações que se pretende realizar.

Primeiramente, calculam-se os valores da função nos pontos inteiros, partindo da relação de escala, da seguinte forma:

$$\varphi(x) = a_0\varphi(2x) + a_1\varphi(2x-1) + \dots + a_{N-1}\varphi(2x-N+1) \quad (2.92)$$

A partir da eq. (2.92), chega-se a:

$$\varphi(0) = a_0\varphi(0) \quad (2.93)$$

$$\varphi(1) = a_0\varphi(2) + a_1\varphi(1) + a_2\varphi(0) \quad (2.94)$$

$\vdots$

$$\varphi(N-2) = a_{N-3}\varphi(N-1) + a_{N-2}\varphi(N-2) + a_{N-1}\varphi(N-3) \quad (2.95)$$

$$\varphi(N-1) = a_{N-1}\varphi(N-1) \quad (2.96)$$

Partindo do fato de que $a_0 \neq 0$ e $a_{N-1} \neq 0$, pode-se concluir pelas eqs. (2.93) e (2.96) que os valores da função de escala nos extremos do intervalo de suporte são nulos.

$$\varphi(0) = \varphi(N-1) = 0 \quad (2.97)$$

As demais equações podem ser colocadas em forma matricial pela seguinte expressão:

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{N-4} & a_{N-5} & a_{N-6} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{N-2} & a_{N-3} & a_{N-4} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{N-1} & a_{N-2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi(1) \\ \varphi(2) \\ \varphi(3) \\ \vdots \\ \varphi(N-4) \\ \varphi(N-3) \\ \varphi(N-2) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varphi(1) \\ \varphi(2) \\ \varphi(3) \\ \vdots \\ \varphi(N-4) \\ \varphi(N-3) \\ \varphi(N-2) \end{Bmatrix} \quad (2.98)$$

A eq. (2.98) pode ser condensada na seguinte expressão:

$$\mathbf{A}\Phi = \Phi \quad (2.99)$$

Na eq. (2.99), Φ é o vetor que contém os valores da função de escala avaliada nos pontos inteiros e $\mathbf{A}$ é uma matriz de dimensão $N-2$, cujos coeficientes são dados por:

$$A_{ij} = [a_{2i-j}]_{0 \leq 2i-j \leq N-1} \quad (2.100)$$

A eq. (2.99) pode ser reescrita levando a um problema de autovalor cuja solução é o vetor Φ associado ao autovalor $\lambda = 1$. Conforme exposto adiante, todos os cálculos envolvendo funções de escala recaem em sistemas desse tipo.

$$(\mathbf{A} - \mathbf{I})\Phi = \mathbf{0} \quad (2.101)$$

Como a solução da eq. (2.101) não é única, já que o sistema torna-se homogêneo, deve-se utilizar outra equação para torná-lo determinado. A partir da propriedade de integral unitária, chega-se a uma relação entre os valores da função de escala nos pontos inteiros que permite determinar a solução do sistema de equações de forma única.

$$\sum_k \varphi(x-k) = 1 \quad (2.102)$$

Desenvolvendo-se a série da eq. (2.102), chega-se a:

$$\varphi(1) + \dots + \varphi(N-2) = 1 \quad (2.103)$$

A eq. (2.103) funciona como uma condição de normalização ao vetor Φ obtido pela solução do problema de autovalor na eq. (2.101).

Uma vez obtidos os valores de $\varphi(x)$ nos pontos inteiros, aplicam-se novas iterações sucessivas para determinar os valores nos pontos $x = k/2^j$, com $k, j \in \mathbb{Z}$. Em geral, para uma aproximação razoável da função, nove iterações ($j=8$) são suficientes. Este, inclusive, é o número padrão utilizado pelo programa MATLAB. Esse número de iterações origina $2^8 = 256$ intervalos (257 pontos da malha diádica) para cada unidade do suporte da função de escala.

$$\varphi\left(\frac{k}{2^j}\right) = \sum_{r=0}^{N-1} a_r \varphi\left(\frac{k}{2^{j-1}} - r\right) \quad (2.104)$$

Nota-se que a eq. (2.104) é a essência da análise multirresolução, ou seja, os pontos da malha diádica do nível seguinte são calculados a partir dos valores do nível anterior.

2.7.2.1.

Exemplo de cálculo dos valores da wavelet DB4

Pela propriedade de suporte compacto, sabe-se que:

$$\varphi(0) = \varphi(3) = 0 \quad (2.105)$$

O sistema fica então reduzido a duas equações e duas incógnitas num problema de autovalor com $\lambda = 1$, sendo assim escrito em forma matricial:

$$\begin{bmatrix} a_1 - 1 & a_0 \\ a_3 & a_2 - 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi(1) \\ \varphi(2) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.106)$$

Sabe-se que o sistema não tem solução única, sendo estabelecida apenas uma relação entre as incógnitas, além da solução trivial em que as mesmas são nulas. Pode-se, portanto, utilizar tanto a primeira quanto a segunda linha do sistema da eq. (2.106), pois as mesmas são linearmente dependentes. Utilizando a primeira linha, chega-se à seguinte relação entre $\varphi(1)$ e $\varphi(2)$:

$$(a_1 - 1)\varphi(1) + a_0\varphi(2) = 0 \quad (2.107)$$

Adicionando a condição de normalização (eq. 2.108), chega-se aos valores da função de escala nos pontos inteiros:

$$\varphi(1) + \varphi(2) = 1 \quad (2.108)$$

$$\begin{aligned} \varphi(1) &= 1.366025403782968 \\ \varphi(2) &= -0.366025403782968 \end{aligned} \quad (2.109)$$

Se, agora, deseja-se conhecer o valor de $\varphi(x)$ em $x = 1/2, 3/2$ e $5/2$, ou seja, a iteração seguinte, basta aplicar a relação de escala num nível posterior, e assim sucessivamente até o nível de resolução desejado.

$$\varphi(1/2) = \sum_{k=0}^3 a_k \varphi(1-k) = a_0 \varphi(1) + a_1 \varphi(0) = 0.93301270189152 \quad (2.110)$$

$$\varphi(3/2) = \sum_{k=0}^3 a_k \varphi(3-k) = a_0 \varphi(3) + a_1 \varphi(2) + a_2 \varphi(1) + a_3 \varphi(0) = 1.15 \times 10^{-12} \quad (2.111)$$

$$\varphi(5/2) = \sum_{k=0}^3 a_k \varphi(5-k) = a_2 \varphi(3) + a_3 \varphi(2) = 0.06698729810734 \quad (2.112)$$

A partir dessa definição da função wavelet, pode-se realizar uma análise multirresolução eficiente em que cada nível seguinte tem metade do suporte do anterior e subdividido o problema em malhas diádicas, num procedimento bastante semelhante ao que é feito numa malha de elementos finitos.

A fig. (15) mostra a construção da função de escala DB4 e como cada iteração adiciona novos pontos à malha diádica. A primeira iteração ($j = 0$) mostra os valores da eq. (2.109); em seguida, adicionam-se os valores das eqs. (2.110) a (2.112) e assim sucessivamente até a oitava iteração com $j = 7$, ou seja, 129 pontos (128 intervalos) para cada unidade do suporte. Como o intervalo de suporte da função de escala DB4 é $[0,3]$, a representação total da mesma conta com 385 pontos ($3 \times 128 + 1$).

2.7.3. Integrais das Wavelets de Daubechies

Os valores das integrais de wavelets em intervalos inteiros podem ser obtidos através da resolução de um sistema de equações que deriva das propriedades de translação e escala das funções wavelet (Jin e Ye, 1999).

$$q^0(x) = \int_0^x \varphi(y) dy \quad (2.113)$$

A partir da relação de escala, pode-se escrever:

$$q^0(x) = \int_0^x \sum_{i=0}^{N-1} a_i \varphi(2y - i) dy \quad (2.114)$$

Fazendo $u = 2y - i$.

$$q^0(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N-1} a_i \int_0^x \varphi(u) du \quad (2.115)$$

$$q^0(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N-1} a_i q^0(2x - i) \quad (2.116)$$

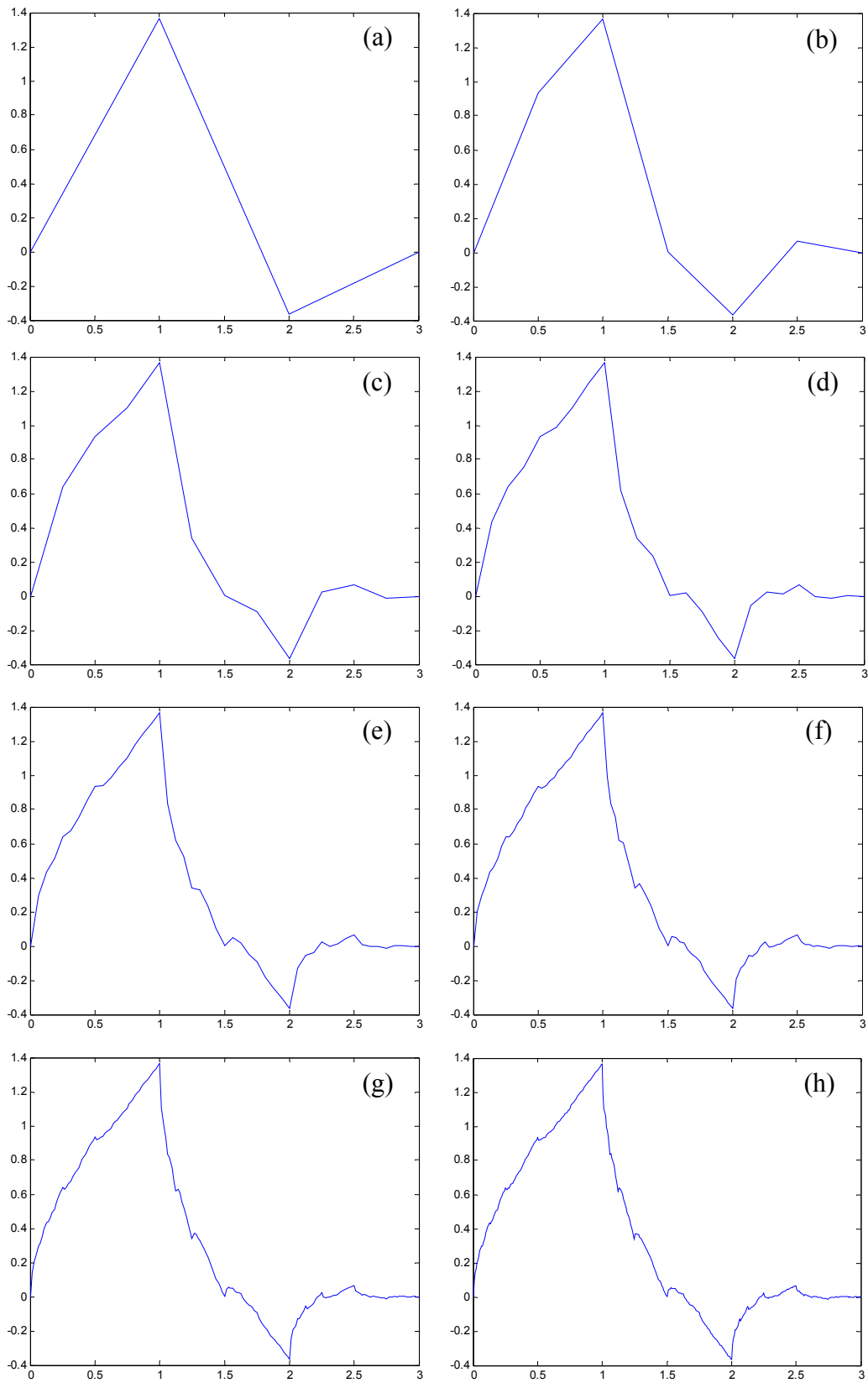


Figura 15 – Diferentes iterações para a obtenção da função de escala DB4: (a) $j = 0$; (b) $j = 1$; (c) $j = 2$; (d) $j = 3$; (e) $j = 4$; (f) $j = 5$; (g) $j = 6$; (h) $j = 7$;

A eq. (2.116) pode ser colocada em forma matricial.

$$(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\mathbf{q}^0 = \mathbf{b} \quad (2.117)$$

onde

$$\mathbf{A} = [a_{2i-k}]_{1 \leq i, k \leq N-2} \quad (2.118)$$

$$b_i = - \sum_{\substack{k=0 \\ 2i-k \geq N-1}}^{N-1} a_k \quad (2.119)$$

2.7.3.1.

Exemplo de cálculo de integral Daubechies DB4

Sabe-se que a integral é nula para qualquer valor inferior ou igual a zero e unitária para qualquer valor à direita do intervalo de suporte. No caso da DB4, essa condição pode ser vista na eq. (2.120).

$$\begin{aligned} q^0(0) &= 0 \\ q^0(3) &= q^0(4) = \dots = q^0(\infty) = 1 \end{aligned} \quad (2.120)$$

Aplicando a eq. (2.116) chega-se ao sistema da eq. (2.123).

$$q^0(1) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^3 a_i q^0(2-i) = \frac{1}{2} [a_0 q^0(2) + a_1 q^0(1)] \quad (2.121)$$

$$q^0(2) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^3 a_i q^0(4-i) = \frac{1}{2} [a_0 + a_1 + a_2 q^0(2) + a_3 q^0(1)] \quad (2.122)$$

$$\begin{bmatrix} a_1 - 2 & a_0 \\ a_3 & a_2 - 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q^0(1) \\ q^0(2) \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} 0 \\ a_1 + a_0 \end{Bmatrix} \quad (2.123)$$

Resolvendo o sistema, obtêm-se os valores das integrais.

$$\begin{aligned} q^0(1) &= \int_0^1 \varphi(x) dx = 0.849679368558646 \\ q^0(2) &= \int_0^2 \varphi(x) dx = 1.016346035225534 \end{aligned} \quad (2.124)$$

Para obter os valores de integrais de funções do tipo $\varphi(x-k)$ basta realizar uma substituição de variáveis para modificar os limites de integração.

2.7.3.2.

Produto interno com polinômios

Para alguns casos especiais de equações diferenciais com termos independentes, para aplicar o Método de Wavelet-Galerkin é necessário obter a interação entre as funções que os descrevem e as que aproximam a função resposta do sistema. No caso em que tanto o termo independente quanto a interpolação são descritos por funções polinomiais ou trigonométricas, tal interação é trivialmente calculada, já que as integrais têm solução analítica. No caso de as funções de interpolação serem formadas a partir de uma base wavelet, é necessário calcular a integral que expressa o produto interno entre as funções de escala e as funções dos termos independentes. No caso de um problema estrutural discretizado por elementos finitos, os termos independentes representariam o carregamento aplicado à estrutura que, em geral, pode ser representado a partir de polinômios. Quando essas integrais são calculadas no suporte completo da função de escala, $[0, N-1]$ no caso das wavelets de Daubechies, são obtidos os chamados momentos da função de escala, cujo cálculo será visto a seguir.

$$q^n(x) = \int_0^x y^n \varphi(y) dy \quad (2.125)$$

Fazendo uso da relação de escala, temos:

$$q^n(x) = \int_0^x y^n \sum_{i=0}^{N-1} a_i \varphi(2y-i) d(2y-i) \quad (2.126)$$

$$q^n(x) = \int_0^x \sum_{i=0}^{N-1} a_i y^n \varphi(2y-i) d(2y-i) \quad (2.127)$$

Realizando uma substituição de variáveis $z = 2y - i$.

$$q^n(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N-1} a_i \int_0^{2x-i} \left(\frac{z+i}{2} \right)^n \varphi(z) dz \quad (2.128)$$

Desenvolvendo-se o polinômio na eq. (2.128).

$$q^n(x) = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{i=0}^{N-1} a_i \left[\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} i^k q^{n-k}(2x-i) \right] \quad (2.129)$$

Nota-se na eq. (2.129) que para o cálculo do produto interno entre em polinômio de grau n e uma função wavelet faz-se necessário conhecer todos os produtos internos da mesma wavelet com os polinômios de grau inferior, ou seja, até o grau $n-1$.

As eqs. (2.130) e (2.131) mostram um exemplo do cálculo do produto interno entre um monômio de grau um e uma função de escala, que seria utilizado para o caso de um carregamento linear.

$$q^1(x) = \int_0^x y \varphi(y) dy \quad (2.130)$$

$$q^1(x) = \frac{1}{4} \sum_{i=0}^{N-1} a_i \left[q^1(2x-i) + i q^0(2x-i) \right] \quad (2.131)$$

A relação expressa na eq. (2.131) também pode ser escrita em forma matricial, como será visto adiante na seção que trata dos coeficientes de conexão para cargas equivalentes nodais.

2.7.4. Derivadas das Wavelets de Daubechies

Para o cálculo das integrais envolvidas na obtenção das matrizes de rigidez e geométrica do elemento finito wavelet, torna-se necessário obter as derivadas das funções wavelet. Como não existe uma expressão explícita para as funções de Daubechies, as derivadas só podem ser obtidas em pontos da malha diádica, com a utilização das propriedades de tais funções, pelo mesmo procedimento adotado para o cálculo dos valores da função de escala.

A partir da relação existente entre a função de escala e suas translações, pode-se deduzir que o mesmo vale para as suas derivadas (Lin et al., 2005).

$$\varphi^{(d)}(x) = 2^d \sum_{i=0}^{N-1} a_i \varphi^{(d)}(2x-i) \quad (2.132)$$

A partir da expressão acima, pode-se calcular a d -ésima derivada da função escala em alguns pontos.

$$\varphi^{(d)}(0) = 2^d a_0 \varphi^{(d)}(0) \quad (2.133)$$

$$\varphi^{(d)}(1) = 2^d [a_0 \varphi^{(d)}(2) + a_1 \varphi^{(d)}(1) + a_2 \varphi^{(d)}(0)] \quad (2.134)$$

$$\varphi^{(d)}(2) = 2^d [a_0 \varphi^{(d)}(4) + a_1 \varphi^{(d)}(3) + a_2 \varphi^{(d)}(2) + a_3 \varphi^{(d)}(1) + a_4 \varphi^{(d)}(0)] \quad (2.135)$$

$\vdots$

$$\begin{aligned} \varphi^{(d)}(N-3) = 2^d [& a_{N-5} \varphi^{(d)}(N-1) + a_{N-4} \varphi^{(d)}(N-2) + \\ & a_{N-3} \varphi^{(d)}(N-3) + a_{N-2} \varphi^{(d)}(N-4) + a_{N-1} \varphi^{(d)}(N-5)] \end{aligned} \quad (2.136)$$

$$\varphi^{(d)}(N-2) = 2^d [a_{N-3} \varphi^{(d)}(N-1) + a_{N-2} \varphi^{(d)}(N-2) + a_{N-1} \varphi^{(d)}(N-3)] \quad (2.137)$$

$$\varphi^{(d)}(N-1) = 2^d a_{N-1} \varphi^{(d)}(N-1) \quad (2.138)$$

As eqs. (2.133) a (2.138) podem ser colocadas em forma matricial:

$$(2^d \mathbf{A} - \mathbf{I}) \Phi^{(d)} = \mathbf{0} \quad (2.139)$$

Na eq. (2.139), a matriz $\mathbf{A}$ e o vetor $\Phi^{(d)}$ são dados pelas eqs. (2.140) e (2.141), respectivamente. A matriz $\mathbf{A}$ é muito semelhante à que é utilizada para o cálculo das integrais das funções de escala.

$$\mathbf{A} = [a_{2i-k}]_{0 \leq i, k \leq N-1} \quad (2.140)$$

$$\Phi^{(d)} = \begin{Bmatrix} \varphi^{(d)}(0) \\ \varphi^{(d)}(1) \\ \dots \\ \varphi^{(d)}(N-1) \end{Bmatrix} \quad (2.141)$$

Como o sistema de equações resultante é homogêneo com autovalor $1/2^d$, deve-se fornecer uma equação adicional para garantir a solução única. Esta equação é obtida a partir da propriedade de representação exata de polinômios pela soma de translações da função de escala ponderada pelos seus momentos, cuja expressão é dada pela eq. (2.143).

$$x^d = \sum_i M_i^d \varphi(x-i) \quad (2.142)$$

$$M_i^d = \int_{-\infty}^{+\infty} x^d \varphi(x-i) dx \quad (2.143)$$

Derivando-se d vezes a eq. (2.142) chega-se a uma relação entre os valores das derivadas da função de escala nos pontos inteiros. Deve-se ajustar os índices do somatório para que a equação contenha todos os pontos de interesse.

$$\sum_i M_i^d \varphi^{(d)}(x-i) \xrightarrow{x=0} \sum_{i=1-N}^0 M_i^d \varphi^{(d)}(-i) = d! \quad (2.144)$$

Uma vez obtidos os valores da d -ésima derivada da função escala nos pontos de valor inteiro, a partir da eq. (2.132), calculam-se os valores para todo $x = k/2^j$, com $k = 1, 3, 5, \dots, N-2$. Pode-se notar que a eq. (2.145) representa o mesmo algoritmo piramidal utilizado para o cálculo dos valores da função de escala.

$$\varphi^{(d)}\left(\frac{k}{2^j}\right) = 2^d \sum_{i=0}^{N-1} a_i \varphi^{(d)}\left(\frac{k}{2^{j-1}} - i\right), \quad k = 1, 3, 5, \dots, N-2 \quad (2.145)$$

2.7.5.

Coeficientes de Conexão das Wavelets de Daubechies

Nesta seção é desenvolvido o cálculo dos coeficientes de conexão, que são a base da formulação tanto do Método de Wavelet-Galerkin quanto dos elementos finitos baseados em wavelets e interpolets. Destaca-se o coeficiente de conexão formado por polinômios e duas funções de escala, que não existe na literatura, e é de fundamental importância para a solução de equações diferenciais com coeficientes variáveis.

2.7.5.1.

Coeficientes de Conexão Impróprios

A aplicação do método de Wavelet-Galerkin em condições de contorno periódicas permite a adoção de coeficientes de conexão calculados em todo o suporte da função de escala. Nessa abordagem é necessário computar apenas as translações relativas, como mostra a eq. (2.146):

$$\begin{aligned} \Lambda_{i,j}^{d_1,d_2} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^{d_1}(\xi - i) \varphi^{d_2}(\xi - j) d\xi = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^{d_1}(\zeta) \varphi^{d_2}(\zeta - j + i) d\zeta = \Lambda_{0,j-i}^{d_1,d_2} = \Lambda_{j-i}^{d_1,d_2} \end{aligned} \quad (2.146)$$

Esta simplificação só é possível porque a integral é realizada em todo o domínio, já que a função tem suporte compacto. Pode-se verificar facilmente, por exemplo, que o produto integral de uma função transladada de $i = 1$ com outra transladada de $j = 2$ é equivalente ao de uma função sem translação com outra

transladada de apenas $j - i = 1$, caso a integral seja calculada em todo o domínio. Esta propriedade permite que se calculem menos coeficientes de conexão do que no caso em que a integral é feita em um intervalo finito.

A partir deste ponto, refere-se aos coeficientes de conexão impróprios apenas pela sua segunda componente, ou seja, os mesmos não formam uma matriz e sim um vetor-coluna.

$$\Lambda_j^{d_1, d_2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^{d_1}(\xi) \varphi^{d_2}(\xi - j) d\xi \quad (2.147)$$

Utilizando a relação de escala pode-se desenvolver os termos dentro da integral.

$$\varphi^{(d_1)}(\xi) = 2^{d_1} \sum_{k=0}^{N-1} a_k \varphi^{(d_1)}(2\xi - k) \quad (2.148)$$

$$\varphi^{(d_2)}(\xi - j) = 2^{d_2} \sum_{l=0}^{N-1} a_l \varphi^{(d_2)}(2\xi - 2j - l) \quad (2.149)$$

Substituindo (2.148) e (2.149) em (2.147), temos:

$$\Lambda_j^{d_1, d_2} = 2^{d_1 + d_2} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} a_k a_l \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^{(d_1)}(2\xi - k) \varphi^{(d_2)}(2\xi - 2j - l) d\xi \quad (2.150)$$

Fazendo $\zeta = 2\xi - k$:

$$\Lambda_j^{d_1, d_2} = 2^{d_1 + d_2 - 1} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} a_k a_l \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^{(d_1)}(\zeta) \varphi^{(d_2)}(\zeta - 2j - l + k) d\zeta \quad (2.151)$$

A integral da eq. (2.151) é um coeficiente de conexão e, ajustando para os índices correspondentes, chega-se à eq. (2.152).

$$\Lambda_j^{d_1, d_2} = 2^{d_1 + d_2 - 1} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} a_k a_l \Lambda_{2j+l-k}^{d_1, d_2} \quad (2.152)$$

Pode-se, finalmente, reescrever a eq. (2.152) reagrupando os coeficientes de conexão para que estes fiquem apenas em função de l .

$$\Lambda_j^{d_1, d_2} = 2^{d_1 + d_2 - 1} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=2-N}^{N-2} a_k a_{l-2j+k} \Lambda_l^{d_1, d_2} \quad (2.153)$$

Nota-se que o índice l , que variava segundo os coeficientes de filtro da função de escala, agora passa a variar segundo as translações, ou seja, da mesma forma que varia j . Isto ocorreu devido ao reagrupamento de coeficientes. Nota-se também que há índices no somatório que levam a coeficientes de filtro inexistentes. Para resolver este problema, basta ajustar o algoritmo para que esses coeficientes sejam considerados nulos. A forma de fazê-lo será vista num capítulo posterior.

A eq. (2.153) pode ser colocada em forma matricial.

$$\left(\mathbf{P} - \frac{1}{2^{d_1 + d_2 - 1}} \mathbf{I} \right) \mathbf{\Lambda}^{d_1, d_2} = \mathbf{0} \quad (2.154)$$

$$P_{i,j} = \sum_k a_k a_{j-2i+k} \quad (2.155)$$

A eq. (2.154) é um sistema homogêneo, que tem autovalores $1/2^{d_1 + d_2 - 1}$. Para torná-lo determinado, deve-se adicionar tantas equações de momento quanto necessárias. Este método leva a um sistema cuja matriz é retangular, sendo necessário obter a sua pseudo-inversa para calcular as incógnitas.

As equações de momento são obtidas da seguinte forma:

$$\xi^k = \sum_j M_j^k \varphi(\xi - j) \quad (2.156)$$

onde

$$M_l^k = \int_{-\infty}^{+\infty} \xi^k \varphi(\xi - j) d\xi \quad (2.157)$$

Fazendo $k = d_1 + d_2 = d$ e derivando a eq. (2.156) d vezes, temos:

$$d! = \sum_j M_j^d \varphi^{(d)}(\xi - j) \quad (2.158)$$

Multiplicando a eq. (2.158) por $\varphi(\xi)$, chega-se a:

$$d! \varphi(\xi) = \sum_j M_j^d \varphi(\xi) \varphi^{(d)}(\xi - j) \quad (2.159)$$

Integrando no suporte da função, pode-se notar que o lado direito da eq. (2.160) tem solução analítica devido à propriedade de integral unitária da função de escala e a integral do lado esquerdo contém coeficientes de conexão. Chega-se, portanto, a equações que relacionam coeficientes de conexão do tipo $\Lambda_{i,j}^{0,d}$. A partir de outra propriedade das wavelets, pode-se transformá-los em coeficientes do tipo $\Lambda_{i,j}^{d_1,d_2}$, já que $d = d_1 + d_2$. Nota-se também que, para que a expressão tenha sentido matemático, $k \geq d_1 + d_2$.

$$d! \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) = \sum_j M_j^d \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) \varphi^{(d)}(\xi - j) d\xi \quad (2.160)$$

$$d! = \sum_j M_j^d \Lambda_j^{0,d} \quad (2.161)$$

Para que a equação fique em termos de $\Lambda_{i,j}^{d_1,d_2}$, deve-se recorrer a uma integração por partes da expressão do coeficiente de conexão que resulta em:

$$\Lambda_j^{d_1,d_2} = \left[\varphi^{d_1-1}(\xi) \varphi^{d_2}(\xi - j) \right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^{d_1-1}(\xi) \varphi^{d_2+1}(\xi - j) d\xi \quad (2.162)$$

Como as funções têm suporte compacto, sua avaliação fora do suporte tem valor nulo, de onde se pode escrever:

$$\Lambda_j^{d_1,d_2} = - \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^{d_1-1}(\xi) \varphi^{d_2+1}(\xi - j) d\xi \quad (2.163)$$

Repetindo o procedimento d_l vezes, até que a primeira função da integral não seja uma derivada:

$$\Lambda_j^{d_1, d_2} = (-1)^{d_1} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) \varphi^{d_1+d_2}(\xi-j) d\xi = (-1)^{d_1} \Lambda_j^{0, d} \quad (2.164)$$

A eq. (2.164) revela uma importante propriedade dos coeficientes de conexão impróprios: qualquer coeficiente de conexão impróprio pode ser escrito em função de outros cuja soma dos índices de derivação seja a mesma.

Finalmente, substituindo (2.164) em (2.161), chega-se a uma equação que relaciona os coeficientes de conexão de interesse:

$$d! = (-1)^{d_1} \sum_j M_j^d \Lambda_j^{d_1, d_2} \quad (2.165)$$

2.7.5.2.

Coeficientes de Conexão para Matrizes de Rigidez, Massa e Geométrica

Ao contrário do que ocorre nos elementos finitos tradicionais, com funções de forma polinomiais, as integrais dos produtos entre as derivadas das funções não têm uma expressão analítica. No caso das funções wavelet, suas propriedades permitem que o cálculo dessas integrais se resuma na solução de um sistema de equações cujas incógnitas são os coeficientes de conexão.

$$\Gamma_{i,j}^{d_1, d_2} = \int_0^1 \varphi^{(d_1)}(\xi-i) \varphi^{(d_2)}(\xi-j) d\xi \quad (2.166)$$

Pelas propriedades de escala e translação de wavelets, pode-se desenvolver os termos dentro da integral.

$$\varphi^{(d_1)}(\xi-i) = 2^{d_1} \sum_{k=0}^{N-1} a_k \varphi^{(d_1)}(2\xi-2i-k) \quad (2.167)$$

$$\varphi^{(d_2)}(\xi-j) = 2^{d_2} \sum_{l=0}^{N-1} a_l \varphi^{(d_2)}(2\xi-2j-l) \quad (2.168)$$

Substituindo, temos:

$$\Gamma_{i,j}^{d_1,d_2} = 2^{d_1+d_2} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} a_k a_l \int_0^1 \varphi^{(d_1)}(2\xi - 2i - k) \varphi^{(d_2)}(2\xi - 2j - l) d\xi \quad (2.169)$$

Fazendo $\zeta = 2\xi$:

$$\Gamma_{i,j}^{d_1,d_2} = 2^{d_1+d_2-1} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} a_k a_l \int_0^2 \varphi^{(d_1)}(\zeta - 2i - k) \varphi^{(d_2)}(\zeta - 2j - l) d\zeta \quad (2.170)$$

Divide-se então o intervalo de integração em duas partes e faz-se $\chi = \zeta - 1$ para que ambas fiquem no intervalo $[0,1]$.

$$\Gamma_{i,j}^{d_1,d_2} = 2^{d_1+d_2-1} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} a_k a_l \left[\int_0^1 \varphi^{(d_1)}(\zeta - 2i - k) \varphi^{(d_2)}(\zeta - 2j - l) d\zeta + \int_0^1 \varphi^{(d_1)}(\chi - 2i - k + 1) \varphi^{(d_2)}(\chi - 2j - l + 1) d\chi \right] \quad (2.171)$$

As integrais da eq. (2.171) também podem ser escritas como coeficientes de conexão, ajustando para os índices correspondentes, gerando a eq. (2.172).

$$\Gamma_{i,j}^{d_1,d_2} = 2^{d_1+d_2-1} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} a_k a_l \left(\Gamma_{2i+k, 2j+l}^{d_1,d_2} + \Gamma_{2i+k-1, 2j+l-1}^{d_1,d_2} \right) \quad (2.172)$$

Pode-se, finalmente, reescrever a eq. (2.172) reagrupando os coeficientes de conexão para que estes fiquem apenas em função de k e l .

$$\Gamma_{i,j}^{d_1,d_2} = 2^{d_1+d_2-1} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} (a_{k-2i} a_{l-2j} + a_{k-2i+1} a_{l-2j+1}) \Gamma_{k,l}^{d_1,d_2} \quad (2.173)$$

A eq. (2.173) pode ser reordenada e colocada em forma matricial.

$$\left(\mathbf{S} - \frac{1}{2^{d_1+d_2-1}} \mathbf{I} \right) \mathbf{\Gamma}^{d_1,d_2} = \mathbf{0} \quad (2.174)$$

$$S_{i,j} = \sum_k \sum_l a_{k-2i} a_{l-2j} + a_{k-2i+1} a_{l-2j+1} \quad (2.175)$$

A eq. (2.174) é um sistema homogêneo, que tem autovalores $1/2^{d_1+d_2-1}$. Para torná-lo determinado, deve-se calcular o posto da matriz S e adicionar tantas equações de momento quanto sejam necessárias para que o número de equações linearmente independentes seja igual ao de incógnitas (Lin e Zhou, 2001). Este método leva a um sistema cuja matriz é retangular, sendo necessário obter a sua pseudo-inversa para calcular as incógnitas.

Derivando a eq. (2.156) d_1 e d_2 vezes, respectivamente, temos:

$$\frac{k!}{(k-d_1)!} \xi^{k-d_1} = \sum_i M_i^k \varphi^{(d_1)}(\xi-i) \quad (2.176)$$

$$\frac{k!}{(k-d_2)!} \xi^{k-d_2} = \sum_j M_j^k \varphi^{(d_2)}(\xi-j) \quad (2.177)$$

Multiplicando as eqs. (2.176) e (2.177), chega-se a:

$$\frac{(k!)^2}{(k-d_1)!(k-d_2)!} \xi^{2k-d_1-d_2} = \sum_i \sum_j M_i^k M_j^k \varphi^{(d_1)}(\xi-i) \varphi^{(d_2)}(\xi-j) \quad (2.178)$$

Integrando no intervalo $[0,1]$, pode-se notar que a integral do lado direito da eq. (2.179) tem solução analítica e a do lado esquerdo contém os coeficientes de conexão. Chega-se, portanto, às equações adicionais para diferentes valores de k . Nota-se também que para que a expressão tenha sentido matemático, $k \geq d_1, d_2$. Em alguns trabalhos, inclusive, há formulações que utilizam valores diferentes de k nas eqs. (2.176) e (2.177) para, desta forma, obter uma combinação maior de equações adicionais (Ma et al., 2003).

$$\int_0^1 \frac{(k!)^2}{(k-d_1)!(k-d_2)!} \xi^{2k-d_1-d_2} d\xi = \int_0^1 \sum_i \sum_j M_i^k M_j^k \varphi^{(d_1)}(\xi-i) \varphi^{(d_2)}(\xi-j) d\xi \quad (2.179)$$

$$\frac{(k!)^2}{(k-d_1)!(k-d_2)!(2k-d_1-d_2+1)} = \sum_i \sum_j M_i^k M_j^k \Gamma_{i,j}^{d_1,d_2} \quad (2.180)$$

2.7.5.3.

Coeficientes de Conexão para Carregamento

Além dos coeficientes de conexão que relacionam as derivadas das funções wavelet, também devem ser calculados os coeficientes que relacionam as funções wavelet com as possíveis funções de carregamento, em geral polinomiais. A expressão de tais coeficientes de conexão é parecida com a que define os momentos das funções wavelet, porém os momentos são calculados em todo o suporte da wavelet e os coeficientes de conexão são calculados apenas no intervalo $[0,1]$, assim como acontece com os coeficientes de conexão das matrizes. Caso o carregamento seja uniformemente distribuído, usa-se diretamente as expressões para integrais de funções de escala desenvolvidas anteriormente.

$$\Omega_i^j = \int_0^1 \xi^j \varphi(\xi - i) d\xi \quad (2.181)$$

Aplicando-se a relação de escala, temos:

$$\Omega_i^j = \int_0^1 \xi^j \sum_{k=0}^{N-1} a_k \varphi(2\xi - 2i - k) d\xi \quad (2.182)$$

Procedendo de forma semelhante ao que foi feito na seção anterior, com duas mudanças de variáveis, desenvolve-se a eq. (2.182) até chegar à expressão final para os coeficientes de conexão de carregamento. Nota-se que, para calcular os valores de Ω_i^j , é necessário conhecer os coeficientes de conexão para polinômios de grau inferior até Ω_i^{j-1} .

$$\Omega_i^j = \frac{1}{2^{j+1}} \sum_{k=0}^{N-1} a_k \int_0^2 \zeta^j \varphi(\zeta - 2i - k) d\zeta \quad (2.183)$$

$$\Omega_i^j = \frac{1}{2^{j+1}} \sum_{k=0}^{N-1} a_k \left(\int_0^1 \zeta^j \varphi(\zeta - 2i - k) d\zeta + \int_0^1 (\chi + 1)^j \varphi(\chi - 2i - k + 1) d\chi \right) \quad (2.184)$$

$$\Omega_i^j = \frac{1}{2^{j+1}} \sum_{k=0}^{N-1} a_k \left(\Omega_{2i+k}^j + \sum_{l=0}^j \binom{j}{l} \Omega_{2i+k-1}^{j-l} \right) \quad (2.185)$$

Na eq. (2.185), pode-se retirar do segundo somatório o termo correspondente a $l = 0$ e colocar o sistema em forma matricial.

$$(2^{j+1} \mathbf{I} - \mathbf{P}) \mathbf{\Omega}^j = \sum_{l=1}^j \mathbf{Q} \mathbf{\Omega}^{j-l} \quad (2.186)$$

$$\mathbf{P} = [a_{2i-k} + a_{2i-k+1}]_{0 \leq i, k \leq N-1} \quad (2.187)$$

$$\mathbf{Q} = [a_{2i-k+1}]_{0 \leq i, k \leq N-1} \quad (2.188)$$

2.7.5.4.

Coeficientes de Conexão de Três Funções de Escala

Na tentativa de solução de equações diferenciais com coeficientes variáveis pelo Método de Wavelet-Galerkin podem surgir coeficientes de conexão que relacionam três translações de funções de escala e suas derivadas:

$$\Gamma_{i,j,k}^{d_1, d_2, d_3} = \int_0^1 \varphi^{(d_1)}(\xi - i) \varphi^{(d_2)}(\xi - j) \varphi^{(d_3)}(\xi - k) d\xi \quad (2.189)$$

Procedendo de forma análoga ao que foi feito para os coeficientes de conexão de 2 termos, pode-se obter:

$$\left(\mathbf{S} - \frac{1}{2^{d_1+d_2+d_3-1}} \mathbf{I} \right) \mathbf{\Gamma}^{d_1, d_2, d_3} = \mathbf{0} \quad (2.190)$$

$$\mathbf{S}_{i,j,k} = \sum_p \sum_q \sum_r a_{p-2i} a_{q-2j} a_{r-2k} + a_{p-2i+1} a_{q-2j+1} a_{r-2k+1} \quad (2.191)$$

A equação de momentos também deve ser modificada:

$$\frac{(k!)^3}{(k-d_1)!(k-d_2)!(k-d_3)!(3k-d+1)} = \sum_i \sum_j \sum_l M_i^k M_j^k M_l^k \Gamma_{i,j,l}^{d_1,d_2,d_3} \quad (2.192)$$

$$d = d_1 + d_2 + d_3$$

2.7.5.5.

Coeficientes de Conexão de Polinômios e Duas Funções de Escala

Outro tipo de coeficiente de conexão que pode surgir na aplicação do Método de Wavelet-Galerkin a equações diferenciais com coeficientes variáveis é aquele que relaciona monômios com duas funções de escala:

$$\Pi_{i,j}^{k,d_1,d_2} = \int_0^1 \xi^k \varphi^{(d_1)}(\xi-i) \varphi^{(d_2)}(\xi-j) d\xi \quad (2.193)$$

Substituindo as expressões das derivadas das funções de escala, temos:

$$\Pi_{i,j}^{k,d_1,d_2} = 2^{d_1+d_2} \sum_{p=0}^{N-1} \sum_{q=0}^{N-1} a_p a_q \int_0^1 \xi^k \varphi^{(d_1)}(2\xi-2i-p) \varphi^{(d_2)}(2\xi-2j-q) d\xi \quad (2.194)$$

Fazendo $\zeta = 2\xi$:

$$\Pi_{i,j}^{k,d_1,d_2} = 2^{d_1+d_2-k-1} \sum_{p=0}^{N-1} \sum_{q=0}^{N-1} a_p a_q \int_0^2 \zeta^k \varphi^{(d_1)}(\zeta-2i-p) \varphi^{(d_2)}(\zeta-2j-q) d\zeta \quad (2.195)$$

Divide-se então o intervalo de integração em duas partes e faz-se $\chi = \zeta - 1$ para que ambas fiquem no intervalo $[0,1]$.

$$\Pi_{i,j}^{k,d_1,d_2} = 2^{d-k-1} \sum_{p=0}^{N-1} \sum_{q=0}^{N-1} a_p a_q \left[\int_0^1 \zeta^k \varphi^{(d_1)}(\zeta-2i-p) \varphi^{(d_2)}(\zeta-2j-q) d\zeta + \right. \\ \left. + \int_0^1 (\chi+1)^k \varphi^{(d_1)}(\chi-2i-p+1) \varphi^{(d_2)}(\chi-2j-q+1) d\chi \right] \quad (2.196)$$

$$d = d_1 + d_2$$

Substituindo a expressão do binômio da segunda integral, temos:

$$\begin{aligned} \Pi_{i,j}^{k,d_1,d_2} = & 2^{d-k-1} \sum_{p=0}^{N-1} \sum_{q=0}^{N-1} a_p a_q \left[\int_0^1 \zeta^k \varphi^{(d_1)}(\zeta - 2i - p) \varphi^{(d_2)}(\zeta - 2j - q) d\zeta + \right. \\ & + \int_0^1 \chi^k \varphi^{(d_1)}(\chi - 2i - p + 1) \varphi^{(d_2)}(\chi - 2j - q + 1) d\chi + \\ & \left. + \sum_{r=1}^k \binom{k}{r} \int_0^1 \chi^{k-r} \varphi^{(d_1)}(\chi - 2i - p + 1) \varphi^{(d_2)}(\chi - 2j - q + 1) d\chi \right] \end{aligned} \quad (2.197)$$

Todas as expressões das integrais na eq. (2.197) são coeficientes de conexão, portanto:

$$\begin{aligned} \Pi_{i,j}^{k,d_1,d_2} = & 2^{d-k-1} \sum_{p=0}^{N-1} \sum_{q=0}^{N-1} a_p a_q \left[\Pi_{2i+p,2j+p}^{k,d_1,d_2} + \Pi_{2i+p-1,2j+p-1}^{k,d_1,d_2} + \right. \\ & \left. + \sum_{r=1}^k \binom{k}{r} \Pi_{2i+p-1,2j+p-1}^{k-r,d_1,d_2} \right] \end{aligned} \quad (2.198)$$

Pode-se, finalmente, reescrever a eq. (2.198) reagrupando os coeficientes de conexão para que estes fiquem apenas em função de p e q .

$$\begin{aligned} \Pi_{i,j}^{k,d_1,d_2} = & 2^{d_1+d_2-k-1} \left[\sum_{p=0}^{N-1} \sum_{q=0}^{N-1} (a_{p-2i} a_{q-2j} + a_{p-2i+1} a_{q-2j+1}) \Pi_{p,q}^{k,d_1,d_2} + \right. \\ & \left. + \sum_{p=0}^{N-1} \sum_{q=0}^{N-1} a_{p-2i+1} a_{q-2j+1} \sum_{r=1}^k \binom{k}{r} \Pi_{p,q}^{k-r,d_1,d_2} \right] \end{aligned} \quad (2.199)$$

A eq. (2.199) pode ser reordenada e colocada em forma matricial.

$$\left(\mathbf{S} - \frac{1}{2^{d_1+d_2-k-1}} \mathbf{I} \right) \mathbf{\Pi}^{k,d_1,d_2} = -\mathbf{B} \sum_{r=1}^k \binom{k}{r} \mathbf{\Pi}^{k-r,d_1,d_2} \quad (2.200)$$

$$\mathbf{S}_{i,j} = \sum_p \sum_q a_{p-2i} a_{q-2j} + a_{p-2i+1} a_{q-2j+1} \quad (2.201)$$

$$\mathbf{B}_{i,j} = \sum_p \sum_q a_{p-2i+1} a_{q-2j+1} \quad (2.202)$$

Ao contrário da equação dos coeficientes de conexão de 2 termos, este não é sempre um problema de autovalor, já que o vetor independente não é nulo. Caso $1/2^{d_1+d_2-k-1}$ seja um autovalor da matriz S , o sistema ficará indeterminado e será necessário lançar mão das equações de momento para que o mesmo tenha solução única. Procedendo de forma análoga ao que foi feito para os coeficientes de conexão de 2 termos, chega-se a:

$$\frac{(h!)^2}{(h-d_1)!(h-d_2)!(k+2h-d_1-d_2+1)} = \sum_i \sum_j M_i^h M_j^h \Pi_{i,j}^{k,d_1,d_2} \quad (2.203)$$

2.7.5.6. Cálculo dos Momentos

O cálculo dos momentos das funções wavelet é de fundamental importância para que o sistema de equações dos coeficientes de conexão tenha solução única, desta forma evitando o uso de métodos numéricos de integração.

Os momentos da multiplicação de qualquer monômio em x com a função wavelet são obtidos por indução, a partir da seguinte propriedade:

$$M_0^0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx = 1 \quad (2.204)$$

A expressão do momento M_i^j é:

$$M_i^j = \int_{-\infty}^{+\infty} x^j \varphi(x-i) dx \quad (2.205)$$

Primeiramente, procede-se ao cálculo dos momentos da wavelet sem qualquer translação, ou seja, com $i = 0$.

$$M_0^j = \int_{-\infty}^{+\infty} x^j \varphi(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^j \sum_{i=0}^{N-1} a_i \varphi(2x-i) dx \quad (2.206)$$

$$M_0^j = \frac{1}{2^{j+1}} \sum_{i=0}^{N-1} a_i \int_{-\infty}^{+\infty} y^j \varphi(y-i) dy = \frac{1}{2^{j+1}} \sum_{i=0}^{N-1} a_i M_i^j \quad (2.207)$$

Para a solução dos valores de M_0^j são necessários os valores de M_i^j . Através de uma substituição de variáveis na eq. (2.205), podemos obter:

$$M_i^j = \int_{-\infty}^{+\infty} (z+i)^j \varphi(z) dz \quad (2.208)$$

$$M_i^j = \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} i^{j-k} \int_{-\infty}^{+\infty} z^k \varphi(z) dz = \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} i^{j-k} M_0^k \quad (2.209)$$

Assim os valores de M_i^j estão em função dos próprios valores de M_0^k , portanto pode-se fazer a substituição na eq. (2.209) e obter um sistema que tem somente os M_0^j como incógnitas.

$$M_0^j = \frac{1}{2^{j+1}} \sum_{i=0}^{N-1} a_i \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} i^{j-k} M_0^k \quad (2.210)$$

Separa-se então o último termo do somatório ($k=j$) para colocá-lo do outro lado da equação.

$$M_0^j = \frac{1}{2^{j+1}} \sum_{i=0}^{N-1} a_i \sum_{k=0}^{j-1} \binom{j}{k} i^{j-k} M_0^k + \frac{1}{2^{j+1}} M_0^j \sum_{i=0}^{N-1} a_i \quad (2.211)$$

Sabe-se, pelas propriedades da função de escala, que o somatório dos coeficientes de filtro a_i tem valor definido.

$$\sum_{i=0}^{N-1} a_i = 2 \quad (2.212)$$

Desta forma, pode-se obter uma expressão para M_0^j :

$$M_0^j = \frac{1}{2^{j+1}} \sum_{i=0}^{N-1} a_i \sum_{k=0}^{j-1} \binom{j}{k} i^{j-k} M_0^k + \frac{1}{2^j} M_0^j \quad (2.213)$$

$$M_0^j = \frac{1}{2^{j+1} - 2} \sum_{k=0}^{j-1} \binom{j}{k} M_0^k \left(\sum_{i=0}^{N-1} a_i i^{j-k} \right) \quad (2.214)$$

A partir dos valores de M_0^j , chega-se à expressão final para os valores de M_i^j . Tal cálculo parece complexo, mas é eficiente e pouco exigente computacionalmente.

$$M_i^j = \frac{1}{2^{j+1}-2} \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} i^{j-k} \sum_{l=0}^{k-1} \binom{k}{l} M_0^l \left(\sum_{i=0}^{N-1} a_i i^{k-l} \right) \quad (2.215)$$

2.8. Construção das Interpolets

O termo interpolet foi introduzido por Donoho (1992) para designar wavelets com características de funções interpoladoras. Uma função contínua é denominada interpoladora se satisfaz a condição de valor unitário no ponto de interesse e valor nulo nos demais inteiros.

$$\varphi(k) = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z} \quad (2.216)$$

A função interpoladora de Deslauriers-Dubuc de ordem $2p-1$ é capaz de reproduzir de forma exata um polinômio de mesma ordem, onde p é o número de momentos nulos da função da família Daubechies utilizada para gerar a interpolet. A interpolet é determinada pela ordem da função de escala de Daubechies (φ_0) utilizada para sua geração.

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_0(y) \varphi_0(y-x) dy \quad (2.217)$$

A função de escala em questão, pela própria maneira como é gerada, é simétrica e tem suporte $[1-N, N-1]$, sendo N a ordem da função de Daubechies utilizada para sua construção. A função de escala da interpolet também satisfaz a relação de escala:

$$\varphi(x) = \sum_{k=1-N}^{N-1} a_k^* \varphi(2x-k) \quad (2.218)$$

Onde a_k^* são os coeficientes de filtro da interpolet de Deslauriers-Dubuc de ordem N . A eq. (2.217) representa uma correlação entre as funções de escala originais de Daubechies. Pode-se deduzir, portanto, que os coeficientes de filtro da interpolet são obtidos pela correlação entre os coeficientes da wavelet de Daubechies de ordem N utilizada, como pode ser visto pela eq. (2.219) (Fujii e Hofer, 2003).

Os coeficientes g_k utilizados na correlação têm uma relação de $\sqrt{2}$ com os a_k usuais, como visto anteriormente. Como geralmente são utilizados os coeficientes a_k nas análises wavelet, deve-se introduzir um fator de correção de $1/2$, como mostra a eq. (2.219). Pode-se notar pela mesma expressão que $a_k^* = a_{-k}^*$, o que demonstra a simetria das interpolets.

$$a_k^* = \sum_{m=0}^{N-1} g_m g_{m-k} = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{N-1} a_m a_{m-k} \quad (2.219)$$

A tab. (1) mostra os valores dos coeficientes de filtro para as interpolets de ordem $N = 4, 6, 8$.

k	$N = 4$	$N = 6$	$N = 8$
0	1.0	1.0	1.0
1	0.5625	0.5859375	0.59814453125
2	0.0	0.0	0.0
3	-0.0625	-0.09765625	-0.11962890625
4		0.0	0.0
5		0.01171875	0.02392578125
6			0.0
7			-0.00244140625

Tabela 1 – Coeficientes de filtro das interpolets de Deslauriers-Dubuc

Deslauriers e Dubuc estabeleceram também uma maneira de obter os coeficientes de filtro de interpolets capazes de interpolar exatamente polinômios de grau $N-1$ sem a necessidade de utilizar os coeficientes da função de Daubechies de ordem N . Devido à simetria, pode-se perceber facilmente que todos os coeficientes pares são nulos e que o coeficiente correspondente ao valor zero é unitário. Além disso, sabe-se que $a_k^* = a_{-k}^*$. Desta forma, o sistema

resultante fica reduzido a menos da metade das incógnitas originais, que são os coeficientes de filtro (Lippert et al., 1998). A eq. (2.220) mostra o sistema obtido por Deslauriers e Dubuc.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 3^2 & 5^2 & \cdots & (N-1)^2 \\ 1 & 3^4 & 5^4 & \cdots & (N-1)^4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & 3^{N-2} & 5^{N-2} & \cdots & (N-1)^{N-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_3 \\ a_5 \\ \vdots \\ a_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.220)$$

A interpolet com 6 graus de liberdade obtida a partir da DB4 pode representar exatamente um polinômio de grau até 3. A própria DB4, com 3 graus de liberdade, só pode representar exatamente um polinômio de grau até 1. Para representar um polinômio de terceiro grau é necessário utilizar a wavelet DB8, que tem 7 graus de liberdade. Nota-se, portanto, um ganho de precisão das interpolets em relação às wavelets de Daubechies. A fig. (16) mostra a função de escala da interpolet IN4 em seu suporte $[-3, 3]$.

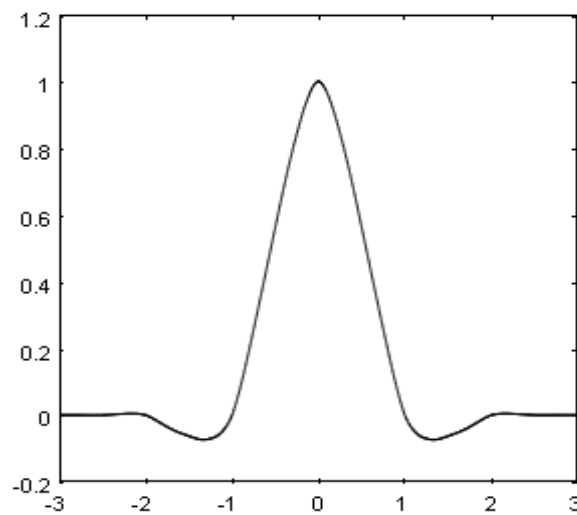


Figura 16 – Interpolet de Deslauriers-Dubuc de ordem $N = 4$

2.8.1. Integrais das Interpolets

As integrais de interpolets em intervalos inteiros são calculadas de forma semelhante às integrais de wavelets com uma única diferença: no caso das

interpolets, os intervalos de integração podem conter números inteiros negativos, pois o intervalo de suporte das mesmas é dado por $[1 - N, N - 1]$.

$$q^0(x) = \int_{1-N}^x \varphi(y) dy \quad (2.221)$$

$$q^0(x) = \int_{1-N}^x \sum_{i=1-N}^{N-1} a_i \varphi(2y-i) dy \quad (2.222)$$

Fazendo $u = 2y - i$.

$$q^0(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1-N}^{N-1} a_i \int_{1-N}^x \varphi(u) du \quad (2.223)$$

$$q^0(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1-N}^{N-1} a_i q^0(2x-i) \quad (2.224)$$

A eq. (2.224) pode ser colocada em forma matricial.

$$(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\mathbf{q}^0 = \mathbf{b} \quad (2.225)$$

onde

$$\mathbf{A} = [a_{2i-k}]_{2-N \leq i, k \leq N-2} \quad (2.226)$$

$$b_i = - \sum_{\substack{k=1-N \\ 2i-k \geq N-1}}^{N-1} a_k \quad (2.227)$$

2.8.2.

Derivadas e Coeficientes de Conexão das Interpolets

O cálculo das derivadas e coeficientes de conexão das interpolets de Deslauriers-Dubuc é muito semelhante ao realizado para as funções de escala de Daubechies e será resumido a seguir.

Para as derivadas, deve-se apenas ajustar os índices formadores da matriz $\mathbf{A}$ e considerar que, para as interpolets, os pontos inteiros também podem ser negativos.

$$(2^d \mathbf{A} - \mathbf{I}) \Phi^{(d)} = \mathbf{0} \quad (2.228)$$

$$\Phi^{(d)} = \left\{ \varphi^{(d)}(1-N) \quad \dots \quad \varphi^{(d)}(0) \quad \dots \quad \varphi^{(d)}(N-1) \right\}^T \quad (2.229)$$

$$\mathbf{A} = [a_{2i-k}]_{1-N \leq i, k \leq N-1} \quad (2.230)$$

As equações adicionais de momento também devem considerar a diferença nos limites dos somatórios.

$$d! = \sum_{i=1-N}^{N-1} M_i^d \varphi^{(d)}(x-i) \quad (2.231)$$

O mesmo raciocínio desenvolvido para as derivadas vale para os coeficientes de conexão de carregamento, matrizes e para os momentos que são utilizados nas equações adicionais.

$$\Lambda_{i,j}^{d_1, d_2} = 2^{d_1+d_2-1} \sum_{k=1-N}^{N-1} \sum_{l=1-N}^{N-1} (a_{k-2i} a_{l-2j} + a_{k-2i+1} a_{l-2j+1}) \Lambda_{k,l}^{d_1, d_2} \quad (2.232)$$

$$\Omega_i^j = \frac{1}{2^{j+1}} \sum_{k=1-N}^{N-1} a_k \left(\Omega_{2i+k}^j + \sum_{l=0}^j \binom{j}{l} \Omega_{2i+k-1}^{j-l} \right) \quad (2.233)$$

$$M_i^j = \frac{1}{2^{j+1} - 2} \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} i^{j-k} \sum_{l=0}^{k-1} \binom{k}{l} M_0^l \left(\sum_{i=1-N}^{N-1} a_i i^{k-l} \right) \quad (2.234)$$

$$M_0^j = \frac{1}{2^{j+1} - 2} \sum_{k=0}^{j-1} \binom{j}{k} M_0^k \left(\sum_{i=1-N}^{N-1} a_i i^{j-k} \right) \quad (2.235)$$