

1

Introdução

O Método dos Elementos Finitos (MEF) estabeleceu-se como a principal ferramenta de análise estrutural a partir dos anos 70 e, com o passar do tempo, seu uso se disseminou amplamente, tanto em aplicações acadêmicas quanto profissionais (Assan, 1999).

Em sua formulação tradicional, os deslocamentos no elemento são representados com o uso das chamadas funções de forma que, em geral, são polinomiais. Tais polinômios, em alguns casos particulares, são a própria resposta analítica do sistema, como é o caso das funções de forma de um elemento de viga. Em outros casos, mais complexos, a resposta do sistema de Elementos Finitos é apenas uma aproximação da solução real que, muitas vezes, não pode ser obtida de forma analítica. Por se tratar de uma aproximação, a maneira como o sistema é discretizado pelo MEF é de vital importância para a precisão do resultado obtido, o que muitas vezes pode tornar elevado o custo computacional do problema.

O refinamento da solução, por hipótese, deve fazer com que haja uma convergência da resposta para um determinado resultado, caso contrário o problema estaria mal formulado. Existem os seguintes tipos de refinamento:

- refinamento p , em que as funções de aproximação tornam-se mais complexas, enriquecendo a resposta dos elementos;
- refinamento h , em que o tamanho dos elementos diminui, ou seja, a malha torna-se mais densa;
- refinamento $p-h$, que consiste em uma combinação dos dois tipos anteriormente descritos.

É sabido que a obtenção de uma solução razoável depende da forma como foi disposta a malha de elementos (refinamento h) e da complexidade dos mesmos (refinamento p). Em regiões de elevado gradiente de tensões e/ou deformações sabe-se que é necessário aumentar o grau de refinamento da malha, seja por um dos métodos descritos ou ambos.

Um exemplo clássico de descontinuidade na resposta de um problema estrutural é o caso da aplicação de um carregamento concentrado em algum ponto interior de um elemento unidimensional. No caso de uma viga com um carregamento concentrado ocorre descontinuidade no esforço cortante, o que se reflete no momento fletor através de uma descontinuidade na tangente, como mostram os diagramas da fig. (1).

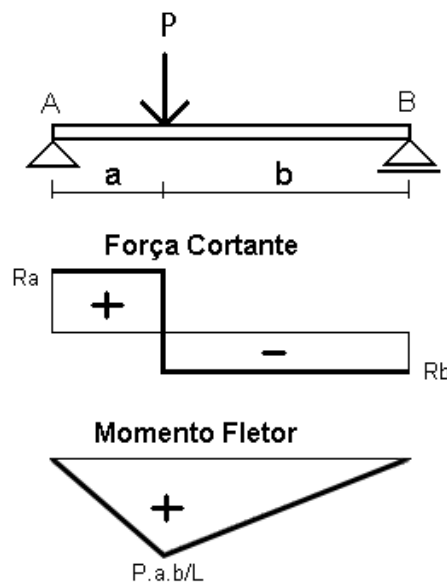


Figura 1 – Descontinuidades num modelo estrutural

Além disso, em problemas dinâmicos ou geometricamente não-lineares, a necessidade de um maior refinamento torna-se evidente. No caso de um elemento de viga-coluna padrão, seriam necessários pelo menos três elementos para o cálculo da carga crítica de flambagem ou da primeira frequência de vibração com boa aproximação, enquanto que para uma análise linear estática tradicional bastaria apenas um elemento. Situação similar ocorre no caso de não-linearidade física: é necessário um maior número de elementos para modelar adequadamente o surgimento de rótulas plásticas (Horne e Merchant, 1965) em vigas e pórticos.

O refinamento é ainda mais importante no caso de extremas concentrações de deformações. Exemplos de tais situações são o surgimento de modos de enrugamento localizado, na instabilidade elástica, e bandas de cisalhamento, na plasticidade (Khan e Huang, 1995).

Outro tipo de problema em que o refinamento é necessário, ainda que com limitado sucesso, é o caso da propagação de ondas, que envolve uma análise

dinâmica. Na maioria dos casos, a solução da equação da onda é mais facilmente implementada por diferenças finitas e o MEF acaba tornando-se demasiadamente custoso para o tipo de problema, já que a malha torna-se muito densa quando é necessário modelar problemas em que frequências altas são importantes (Cook et al., 1989).

É nesse contexto da necessidade de refinamento dos sistemas de Elementos Finitos que surgiram vários novos elementos com diferentes adaptações que enriquecem sua resposta, como é o caso das formulações Hierárquicas (Ribeiro e Petyt, 1999), Sem-Malha (*Meshless*) (Basu et al., 2003) e outras.

Recentemente, as *wavelets* (Burrus et al., 1998) ganharam espaço considerável na análise e solução de problemas numéricos em diversas áreas do conhecimento, como compressão de imagens, análises financeiras, entre outras. Muitas aplicações aproveitam apenas parte das propriedades das funções wavelet, utilizando somente os seus coeficientes da análise multirresolução (Beylkin et al. 1991), enquanto o seu uso para a resolução de equações diferenciais requer um conhecimento mais detalhado de características específicas das funções wavelet e de suas derivadas.

As wavelets surgiram a partir da necessidade de encontrar novas formas de representar funções, principalmente as que apresentam singularidades e gradientes elevados, tanto no domínio do tempo como no da frequência. A fig. (2) mostra uma função contendo descontinuidades e singularidades (primeiro gráfico) decomposta por séries de Fourier (segundo gráfico) e por wavelets (terceiro gráfico). Nota-se como as wavelets não produzem o efeito de Gibbs característico da análise de Fourier.

Wavelets de suporte compacto têm sido recentemente aplicadas na resolução numérica de equações diferenciais parciais com resultados bastante promissores. Tais trabalhos empregam o método de Wavelet-Galerkin (Qian e Weiss, 1993; Ho e Yang, 2001), uma adaptação do já conhecido método de Galerkin (Fairweather, 1978), utilizando uma série de funções wavelet para representar a função de resposta do problema.

Uma base completa de wavelets pode ser obtida através de relações de escala e translação, característica que é de fundamental importância para a obtenção dos coeficientes de conexão, que são utilizados para o cálculo das matrizes de rigidez, geométrica e de massa dos elementos formulados neste

trabalho. Para sua obtenção não há necessidade do cálculo numérico de integrais e, devido à natureza altamente oscilatória das funções wavelet e de suas derivadas, o uso de quadraturas torna-se instável. Os coeficientes de conexão são obtidos através da resolução de sistemas de equações lineares, obtidos a partir das propriedades das funções wavelet (Besora, 2004).

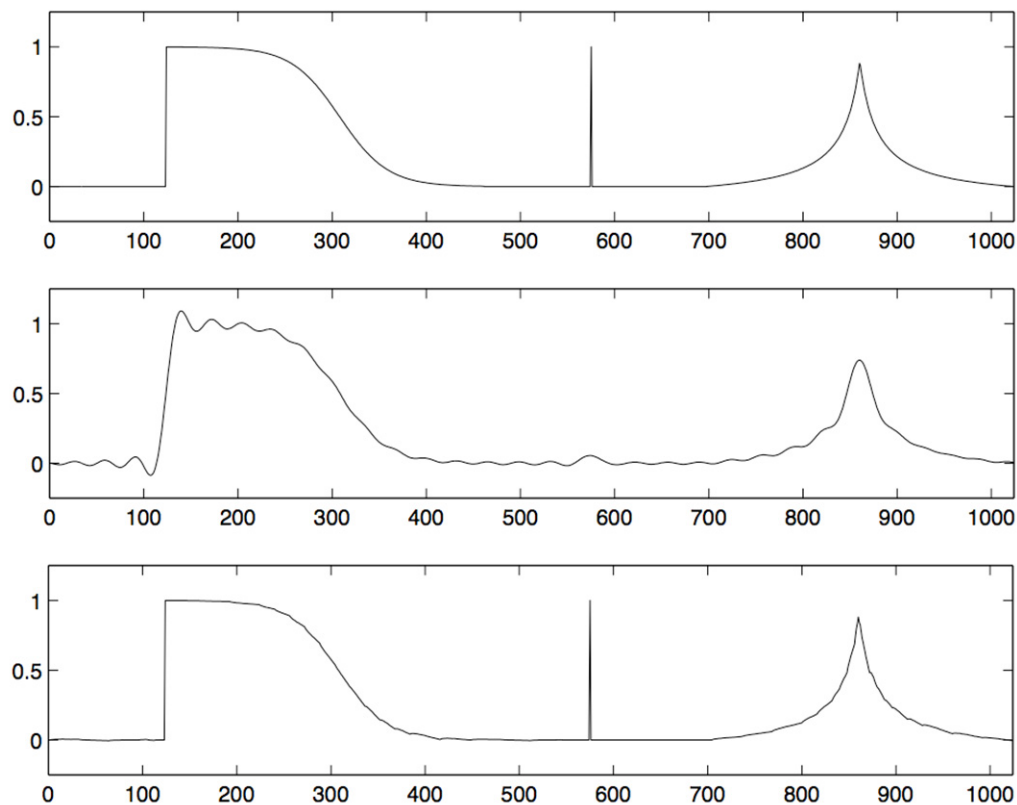


Figura 2 – Decomposição de uma função contendo descontinuidades (acima) em séries de Fourier (meio) e wavelets (abaixo)

O que é conhecido nos estudos das funções wavelet como Análise Multirresolução (Walnut, 2002) pode ser comparado ao papel do refinamento de malha no MEF tradicional. Uma função wavelet pode ser “escalada” assim como um elemento finito pode ter suas dimensões modificadas de modo a obter uma maior precisão nos resultados.

Em geral, não há expressões analíticas para as funções wavelet, a não ser em casos especiais como a função *Mexican Hat*, que não será objeto de estudo deste trabalho. Os valores das funções nos pontos desejados são obtidos através de algoritmos recursivos que se baseiam nas propriedades das wavelets, como a relação de escala (Goswami e Chan, 1999).

Devido ao seu uso em processamento de sinais e compressão de imagens, por exemplo, muito do jargão utilizado comumente nos textos sobre wavelets é contextualizado em expressões da Engenharia Elétrica, como é o caso dos coeficientes de interpolação que são chamados “coeficientes de filtro” e a Transformada Wavelet, que é obtida através de uma sucessão de filtros “passa-alta” e “passa-baixa” (Strang e Nguyen, 1996).

A base de funções wavelet está para a Transformada Wavelet assim como a base trigonométrica está para a Transformada de Fourier. Muitas vezes, o próprio termo wavelet é confundido com a Transformada Wavelet, o que, embora não seja totalmente errado, pode levar a interpretações equivocadas quanto ao tipo de análise empregado.

Neste trabalho, as propriedades das funções wavelet são exploradas em sua totalidade, ou seja, utilizam-se os coeficientes de filtro, as características das funções, de suas derivadas, integrais e produtos internos.

Como será visto no capítulo 2, as propriedades das funções wavelet de Daubechies permitem que se calculem os produtos internos entre as próprias funções e suas derivadas sem a necessidade de um método numérico, já que isso é feito através da solução de um sistema de equações. Na verdade, esse é o conceito mais difícil de assimilar quando se começa a estudar as funções wavelet, pois não há expressão analítica para as mesmas e, no entanto, suas integrais, derivadas e produtos internos têm soluções fechadas e exatas numericamente. No MEF tradicional em problemas bidimensionais, as integrais são usualmente calculadas por métodos numéricos como a Quadratura de Gauss, especialmente quando se consideram formas mais gerais, com Jacobiano variável aparecendo no denominador do integrando. O uso de wavelets parece mais adequado a malhas regulares, não havendo estudos ainda conclusivos sobre seu comportamento na modelagem de problemas com geometrias irregulares, já que as expressões de quadraturas para wavelets existentes na literatura são demasiadamente custosas nos casos em que o Jacobiano é variável, por ser necessário um número muito elevado de pontos de integração para obter resultados confiáveis (Maleknejad et al., 2007).

A partir do sucesso do uso das wavelets de Daubechies na resolução de equações diferenciais parciais por diversos métodos como o de Wavelet-Galerkin, novos trabalhos surgiram na tentativa de encontrar novas famílias de wavelets

para a resolução de problemas específicos. Nesse contexto, vale destacar a contribuição de Deslauriers e Dubuc (1989) que obtiveram, a partir das wavelets da família Daubechies, outra família de wavelets com características de funções interpoladoras, à qual se deu o nome de *Interpolets*.

As interpolets de Deslauriers-Dubuc são geradas a partir da correlação dos filtros das Daubechies originais e, por essa razão, apresentam simetria, característica não encontrada nas Daubechies e muito interessante para a análise numérica. Como será visto adiante, o uso de interpolets no lugar das wavelets tradicionais melhora muito a resposta dos métodos numéricos.

Exemplos foram formulados para a validação das hipóteses, desde problemas simples como a análise linear estática de vigas até a obtenção de cargas críticas de flambagem. Num segundo momento, são estudados problemas dinâmicos como a propagação de ondas em estruturas.

A principal motivação para o estudo das wavelets, principalmente da transformada Wavelet, surgiu da necessidade de se obter soluções mais precisas em problemas com singularidades e transientes, para os quais a Transformada de Fourier torna-se pouco interessante. Por apresentarem domínio limitado, as wavelets são bem localizadas no espaço e sua energia está concentrada numa faixa bem específica do eixo real, o que permite o refinamento em regiões de maior gradiente, como locais de concentração de tensões, mudança de condições de contorno, sem a necessidade de uma maior discretização em todo o sistema. Com esse objetivo, a combinação entre o uso de wavelets e o MEF é muito interessante e será explorada adiante.

Este trabalho tem como uma de suas contribuições a formulação de elementos finitos baseados em funções wavelet de Daubechies e interpolets de Deslauriers-Dubuc para sua utilização em problemas dinâmicos como a propagação de ondas em estruturas, além de problemas de instabilidade linearizados como o cálculo de cargas críticas de flambagem para colunas e pórticos.

A principal contribuição deste trabalho, no entanto, é obtida da solução direta das equações diferenciais pelo Método de Galerkin através de uma implementação que não depende da discretização do sistema em graus de liberdade (formulação sem-malha ou *meshless*). Este tipo de formulação permite também explorar ao máximo as propriedades de multirresolução das wavelets.

Apesar de não ser o escopo deste trabalho, verifica-se que a formulação sem-malha facilita a modelagem de problemas bidimensionais, já que não existe a necessidade de estabelecer coordenadas nodais fixas para os elementos, o que seria impraticável devido ao número variável de graus de liberdade das wavelets.

1.1.

Organização do texto

Este trabalho será desenvolvido conforme a descrição apresentada a seguir.

Capítulo 2 – neste capítulo, são apresentados todos os conceitos necessários ao desenvolvimento do trabalho, como os métodos de resolução de equações diferenciais, em especial o Método de Galerkin; são também descritas as funções wavelet e suas propriedades, bem como as funções interpolet. Será dada especial atenção ao cálculo dos coeficientes de conexão, que são os produtos internos entre as funções e suas derivadas e que, tanto no caso das wavelets quanto das interpolets, têm solução obtida através de sistemas de equações.

Capítulo 3 – neste capítulo são desenvolvidas soluções pelo Método de Wavelet-Galerkin para algumas equações diferenciais comuns em problemas de análise estrutural. Pode-se visualizar a importância da análise multirresolução em problemas que necessitam de uma maior discretização.

Capítulo 4 – neste capítulo são apresentados os elementos unidimensionais que são utilizados para a validação da formulação. São apresentadas as funções de forma de viga e de treliça tanto para wavelets de Daubechies quanto para interpolets de Deslauriers-Dubuc.

Capítulo 5 – neste capítulo, são apresentados os exemplos elaborados para a validação dos elementos formulados. Exemplos de análise estática e dinâmica de vigas e treliças e de instabilidade de colunas e pórticos são formulados.

Capítulo 6 – neste capítulo é desenvolvida uma formulação modificada do Método de Wavelet-Galerkin a partir dos elementos formulados. Esta formulação não necessita da imposição de coordenadas de todos os graus de liberdade do contínuo e tem como incógnitas os coeficientes de interpolação e não os deslocamentos. Ainda assim, a imposição das condições de contorno e dos carregamentos se aproxima do que é feito tradicionalmente no MEF.

Capítulo 7 – nesta seção são apresentados alguns exemplos para a validação da formulação desenvolvida, com especial atenção a problemas que apresentam coeficientes variáveis, descontinuidades e elevados gradientes.

Capítulo 8 – são apresentadas neste capítulo as conclusões e perspectivas de trabalhos futuros.

Apêndice A – neste apêndice são descritos os algoritmos utilizados na implementação computacional dos elementos formulados. Os códigos foram elaborados com o auxílio do programa MATLAB (Chapman, 2003).

Apêndice B – embora não seja o escopo principal do trabalho, neste apêndice é desenvolvida a análise de placas pela formulação proposta com o intuito de apontar para trabalhos futuros que possam se valer deste tipo de análise.

Apêndice C – nesta seção é mostrado o cálculo do coeficiente de conexão em níveis de resolução mais altos. Como exemplo, é realizado o cálculo para a DB4.