

Rodrigo Bird Burgos

**Análise de Estruturas Utilizando Wavelets de Daubechies e
Interpolets de Deslauriers-Dubuc**

Tese de Doutorado

Tese apresentada como requisito parcial para
obtenção do título de Doutor pelo Programa de Pós-
Graduação em Engenharia Civil da PUC-Rio.

Orientadores: Raul Rosas e Silva
Marco Antonio Cetale Santos

Rio de Janeiro, setembro de 2009



Rodrigo Bird Burgos

Análise de Estruturas Utilizando Wavelets de Daubechies e Interpolets de Deslauriers-Dubuc

Tese apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Doutor pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Raul Rosas e Silva

Orientador
PUC-Rio

Marco Antonio Cetale Santos

Co-Orientador
UFF

Deane de Mesquita Roehl

PUC-Rio

Luiz Fernando Campos Ramos Martha

PUC-Rio

Paulo Batista Gonçalves

PUC-Rio

Luiz Eloy Vaz

UFRJ

Roque Luiz da Silva Pitangueira

UFMG

José Eugênio Leal

Coordenador(a) Setorial do Centro Técnico Científico - PUC-Rio

Rio de Janeiro, 18 de setembro de 2009

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

Rodrigo Bird Burgos

Graduou-se em Engenharia Civil pela PUC-Rio, em dezembro de 2002. Em fevereiro de 2005 defendeu sua Dissertação de Mestrado. Ingressou no doutorado em março de 2005.

Ficha Catalográfica

Burgos, Rodrigo Bird

Análise de estruturas utilizando wavelets de Daubechies e interpolets de Deslauriers-Dubuc / Rodrigo Bird Burgos ; orientadores: Raul Rosas e Silva, Marco Antonio Cetale Santos. – 2009.

185 f. : il. (color.) ; 30 cm

Tese (Doutorado em Engenharia Civil)–Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2009.

Inclui bibliografia

1. Engenharia civil – Teses. 2. Wavelets. 3. Interpolets. 4. MEF 5. Método de Wavelet-Galerkin. 6. Daubechies. 7. Flambagem. 8. Carga crítica. 9. Estabilidade estrutural. 10. Dinâmica estrutural. I. Silva, Raul Rosas e. II. Santos, Marco Antonio Cetale. III. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Engenharia Civil. IV. Título.

CDD: 624

À minha filha Irene.

Agradecimentos

Ao professor Raul Rosas e Silva pela amizade, dedicação, paciência e ensinamentos, além da confiança que demonstrou ao me propor este desafio.

Ao professor Marco Antonio Cetale Santos, principalmente por aceitar o desafio de me co-orientar.

Aos professores Luiz Fernando Martha e Paulo Batista Gonçalves pela ajuda fornecendo exemplos pela motivação.

Aos demais professores integrantes da banca examinadora.

À secretária Rita, pela inesgotável paciência, e aos demais integrantes do Departamento de Engenharia Civil da PUC-Rio.

À minha filha Irene, pela inspiração.

Aos meus pais, por terem me ajudado a me tornar quem sou.

À minha namorada Aline, pela ajuda com as figuras e pelo apoio.

Ao CNPQ e à FAPERJ pelo auxílio financeiro.

Resumo

Burgos, Rodrigo Bird. **Análise de Estruturas Utilizando Wavelets de Daubechies e Interpolets de Deslauriers-Dubuc**. Rio de Janeiro, 2009. 185p. Tese de Doutorado - Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Funções Wavelet de suporte compacto têm sido recentemente aplicadas na resolução numérica de equações diferenciais com resultados bastante promissores. A partir do sucesso do uso das wavelets de Daubechies em diversos métodos como o de Galerkin, surgiram novas famílias de wavelets para a resolução de problemas específicos. Nesse contexto, vale destacar uma família de wavelets com características de funções interpoladoras chamadas Interpolets. Este trabalho tem como uma de suas contribuições a formulação de elementos finitos baseados em funções wavelet de Daubechies e interpolets de Deslauriers-Dubuc para sua utilização em problemas dinâmicos como a propagação de ondas em estruturas, além de problemas não-lineares como o cálculo de cargas críticas de flambagem para colunas e pórticos. A partir dessa formulação, o Método de Wavelet-Galerkin foi adaptado para a solução direta das equações diferenciais através de uma implementação que não depende da discretização do sistema em graus de liberdade (formulação sem-malha ou meshless). Este tipo de abordagem permite também explorar ao máximo as propriedades de multirresolução das wavelets. Diversos exemplos com descontinuidades e não-linearidades foram estudados com êxito.

Palavras-chave

Wavelets; Interpolets; MEF; Método de Wavelet-Galerkin; Daubechies; Flambagem; Carga Crítica; Estabilidade Estrutural; Dinâmica Estrutural

Abstract

Burgos, Rodrigo Bird. **Structural Analysis with use of Daubechies Wavelets and Deslauriers-Dubuc Interpolets**. Rio de Janeiro, 2009. 185p.
Tese de Doutorado - Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

The use of compactly supported wavelet functions has become increasingly popular in the development of numerical solutions for differential equations. Daubechies wavelets have been successfully used as base functions in several schemes like the Galerkin Method. Meanwhile, Deslauriers and Dubuc developed a new wavelet family with interpolating characteristics called Interpolets. One important contribution presented in this work is the formulation of Finite Elements based in Daubechies wavelets and Deslauriers-Dubuc interpolets. Dynamic problems like wave propagation and structural stability problems were used as examples for the validation of the Finite Elements. The Wavelet-Galerkin Method has then been adapted for the direct solution of differential equations in a meshless formulation. This approach enables the use of a multiresolution analysis. Several examples with discontinuities and nonlinearities were studied successfully.

Keywords

Wavelets; Interpolets; FEM; Wavelet-Galerkin Method; Daubechies; Buckling; Critical Loads; Structural Stability; Structural Dynamics

Sumário

1 Introdução	20
1.1. Organização do texto	26
2 Fundamentação Teórica	28
2.1. Método dos Elementos Finitos (MEF)	28
2.2. Método de Galerkin	29
2.3. Introdução às Wavelets	30
2.3.1. Propriedades das Wavelets	33
2.4. Análise Multirresolução	36
2.4.1. Aproximação de funções	39
2.4.2. Propriedades da Análise Multirresolução	40
2.4.2.1. Localização	40
2.4.2.2. Momentos Nulos e Aproximação de Polinômios	41
2.4.2.3. Caracterização de Regularidade e Representação de Singularidades	42
2.4.3. Exemplo de uma Análise Multirresolução	42
2.5. Tipos de Wavelets	46
2.5.1. Wavelets Ortonormais	47
2.5.1.1. Wavelets de Daubechies	48
2.5.1.2. Wavelets de Daubechies Bidimensionais	49
2.5.2. Interpolets de Deslauriers-Dubuc	50
2.6. Método de Wavelet-Galerkin	52
2.6.1. Avaliação correta dos coeficientes de conexão	54
2.6.2. Incorporação das Condições de Contorno	56
2.7. Construção das Wavelets de Daubechies	57
2.7.1. Determinação dos coeficientes de filtro	58
2.7.1.1. Exemplo de cálculo dos coeficientes da wavelet DB4	59
2.7.2. Obtenção da função de escala	60
2.7.2.1. Exemplo de cálculo dos valores da wavelet DB4	62

2.7.3. Integrais das Wavelets de Daubechies	64
2.7.3.1. Exemplo de cálculo de integral Daubechies DB4	66
2.7.3.2. Produto interno com polinômios	67
2.7.4. Derivadas das Wavelets de Daubechies	69
2.7.5. Coeficientes de Conexão das Wavelets de Daubechies	71
2.7.5.1. Coeficientes de Conexão Impróprios	71
2.7.5.2. Coeficientes de Conexão para Matrizes de Rigidez, Massa e Geométrica	75
2.7.5.3. Coeficientes de Conexão para Carregamento	78
2.7.5.4. Coeficientes de Conexão de Três Funções de Escala	79
2.7.5.5. Coeficientes de Conexão de Polinômios e Duas Funções de Escala	80
2.7.5.6. Cálculo dos Momentos	82
2.8. Construção das Interpolets	84
2.8.1. Integrais das Interpolets	86
2.8.2. Derivadas e Coeficientes de Conexão das Interpolets	87
3 Aplicação do Método de Wavelet-Galerkin	89
3.1. Equação Diferencial Harmônica	89
3.1.1. Solução pelo Método das Condições de Contorno Fictícias	90
3.1.2. Solução Utilizando Coeficientes de Conexão Próprios	94
3.1.2.1. Solução em Níveis Seguintes	95
3.2. Equação Diferencial de uma Barra de Trelça	97
3.3. Equação Diferencial de uma Viga à Flexão	98
3.4. Viga Submetida a uma Carga Axial	100
3.5. Viga Sobre Base Elástica	101
4 Formulação dos Elementos Unidimensionais	103
4.1. Elemento de Trelça	103
4.1.1. Funções de Forma Wavelet de Trelça	106
4.1.2. Matrizes de Rigidez e de Massa do Elemento de Trelça	108
4.2. Elemento de Viga	109
4.2.1. Funções de Forma Wavelet de Viga	111

4.2.2. Matrizes de Rigidez, Geométrica e de Massa do Elemento de Viga	114
4.3. Cargas Equivalentes Nodais	115
4.4. Wavelets de Alta Ordem	116
 5 Validação dos Elementos	 117
5.1. Análise Estática	117
5.1.1. Coluna sob Ação do Peso Próprio	117
5.1.2. Viga sob Ação do Peso Próprio	119
5.1.3. Viga Biengastada Submetida a Carregamento Linear	121
5.1.4. Viga sobre Base Elástica Submetida a Carregamento Concentrado	124
5.1.5. Casca Cilíndrica Axissimétrica	127
5.2. Análise Dinâmica	130
5.2.1. Cálculo de Frequências Naturais de Vibração	130
5.2.2. Propagação de Ondas	131
5.3. Análise de Instabilidade	135
5.3.1. Obtenção de Cargas Críticas e Modos de Flambagem de Colunas Clássicas	135
5.3.2. Cálculo de Cargas Críticas do Pórtico de Roorda	136
5.4. Discussão dos Resultados	137
 6 Método de Wavelet-Galerkin Modificado	 138
6.1. Analogias entre o Método de Wavelet-Galerkin Modificado e o MEF	139
6.2. Imposição das Condições de Contorno no Espaço das Funções	140
6.3. Demonstração da Equivalência dos Métodos	143
6.4. Imposição de Cargas e Momentos Concentrados	145
 7 Exemplos do Método Proposto	 146
7.1. Viga Biapoiada com Carga Concentrada	146
7.2. Coluna com Área Variável	148
7.3. Viga com Altura Variável	153
7.4. Cálculo de Cargas Críticas de Peso Próprio de Colunas	158

7.5. Cálculo de Cargas Críticas de Vigas sobre Base Elástica	162
8 Conclusões e Propostas para Trabalhos Futuros	170
9 Referências Bibliográficas	172
Apêndice A Implementação Computacional	177
Apêndice B Aplicação a Placas Finas	180
Apêndice C Exemplo de Montagem da Matriz dos Coeficientes de Conexão	182

Lista de símbolos

Romanos

A – área da seção transversal
 a_i – coeficientes de filtro da função de escala
 c – rigidez da base elástica
 c_i^j – coeficientes de aproximação da função de escala
 d_i – coeficientes de interpolação
 d_i^j – coeficientes de aproximação da função wavelet
 E – módulo de elasticidade
 \mathbf{f} – vetor de forças nodais
 I – momento de inércia da seção reta
 \mathbf{K} – matriz de rigidez elástica
 \mathbf{k} – matriz de rigidez elástica do elemento
 \mathbf{G} – matriz geométrica
 \mathbf{g} – matriz geométrica do elemento
 h_i – coeficientes de filtro da função wavelet
 j, m – nível de resolução
 L – comprimento do elemento ou estrutura
 L_i^j – momento j da função wavelet com translação i
 \mathbf{m} – matriz de massa do elemento
 \mathbf{M} – matriz de massa da estrutura
 M_i^j – momento j da função de escala com translação i
 $N_i(x)$ – funções de forma de elementos finitos
 N – ordem da função wavelet
 P – força axial
 $q(x)$ – função de carregamento transversal
 \mathbf{R} – vetor das reações de apoio
 u – deslocamento axial
 V – subespaço de resolução da função de escala

w – deslocamento transversal

W – subespaço de resolução da função wavelet

Gregos

Π – energia potencial total

$\Delta\Pi$ – variação da energia potencial total

δ – delta de Dirac

μ – parâmetro de carga

σ – tensão axial

ε – deformação axial

Δ – variação

ω – frequência de vibração

ρ – massa por unidade de volume

γ – peso por unidade de volume

θ – grau de liberdade de rotação

φ – função de escala

ψ – função wavelet

Θ – malha diádica

Γ – coeficiente de conexão próprio

Λ – coeficiente de conexão impróprio

Φ – vetor das componentes da função de escala

ξ – coordenada espacial adimensional

Outros

\mathcal{L}^2 – espaço das funções quadrado integráveis

\mathcal{P} – projeção no espaço das funções de escala

\mathcal{Q} – projeção no espaço das funções wavelet

Lista de figuras

Figura 1 – Descontinuidades num modelo estrutural	21
Figura 2 – Decomposição de uma função contendo descontinuidades em séries de Fourier e wavelets	23
Figura 3 – Comparação entre uma função senoidal e uma função wavelet	31
Figura 4 – Decomposição de um sinal (função) em componentes senoidais	32
Figura 5 – Decomposição de uma função qualquer em wavelets de diferentes escalas e posições	32
Figura 6 – Translações da wavelet DB4 que contém o intervalo $[0,1]$	35
Figura 7 – Translações ponderadas da função de escala e somatório que resulta na reta $y = x$ no intervalo $[0,1]$	35
Figura 8 – Os subespaços e suas funções associadas	37
Figura 9 – Subespaços, funções de escala e wavelet	38
Figura 10 – Funções de escala e wavelet de Daubechies de ordem $N = 4$	41
Figura 11 – Aproximação de uma parábola por wavelets em diferentes níveis	45
Figura 12 - Wavelets de Daubechies	49
Figura 13 – Função de escala bidimensional de Daubechies de ordem $N = 4$	50
Figura 14 – Representação física de uma malha diádica	51
Figura 15 – Diferentes iterações para a obtenção da função de escala DB4	65
Figura 16 – Interpolet de Deslauriers-Dubuc de ordem $N = 4$	86
Figura 17 – Oscilador harmônico	89
Figura 18 – Solução da equação harmônica por DB6 e DB12	93
Figura 19 – Aproximação da solução da equação harmônica com DB6 em diferentes níveis	96

Figura 20 – Funções de forma de treliça baseadas na wavelet DB4	106
Figura 21 – Três primeiras funções de forma de treliça baseadas na interpolet IN4	107
Figura 22 – Três últimas funções de forma de treliça baseadas na interpolet IN4	107
Figura 23 – Graus de liberdade de um elemento de viga DB8	111
Figura 24 – Duas primeiras funções de forma de deslocamento do elemento de viga baseado na wavelet DB8	112
Figura 25 – Função de forma de rotação unitária na extremidade direita do elemento de viga baseado na wavelet DB8	112
Figura 26 – Funções de forma de deslocamento do elemento de viga baseado na interpolet IN4	113
Figura 27 – Funções de forma de rotação do elemento de viga baseado na interpolet IN4	113
Figura 28 – Esquema estrutural de uma coluna sob ação de seu peso próprio	118
Figura 29 – Resultados para o deslocamento da coluna sob peso próprio	118
Figura 30 – Esquema estrutural de uma viga biapoiada sob ação de seu peso próprio	119
Figura 31 – Deslocamentos para a viga biapoiada sob peso próprio	119
Figura 32 – Momento fletor obtido em alguns pontos por interpolação	120
Figura 33 – Modelo estrutural da viga submetida a carregamento linear em metade de seu vão	121
Figura 34 – Deslocamento para os elementos DB10 e DB12	122
Figura 35 - Momento fletor para os elementos DB10 e DB12	122
Figura 36 – Deslocamento para os elementos IN4 e IN6	123
Figura 37 – Momento fletor para os elementos IN4 e IN6	123
Figura 38 – Viga sobre base elástica submetida a carga concentrada	124
Figura 39 – Deslocamento para a viga sobre base elástica utilizando elementos DB10 e DB12	124
Figura 40 – Momento fletor para a viga sobre base elástica utilizando elementos DB10 e DB12	125

Figura 41 – Deslocamento para a viga sobre base elástica utilizando elementos IN6 e IN8	125
Figura 42 – Momento fletor para a viga sobre base elástica utilizando elementos IN6 e IN8	126
Figura 43 – Modelagem da casca cilíndrica axissimétrica como uma viga sobre base elástica	127
Figura 44 – Deslocamento para a casca cilíndrica axissimétrica modelada com elementos DB10 e DB12	128
Figura 45 – Momento fletor para a casca cilíndrica axissimétrica modelada com elementos DB10 e DB12	128
Figura 46 – Deslocamento para a casca cilíndrica axissimétrica modelada com elementos IN6 e IN8	129
Figura 47 – Momento fletor para a casca cilíndrica axissimétrica modelada com elementos IN6 e IN8	129
Figura 48 – Barra submetida a uma onda de deslocamento axial $u(t)$	132
Figura 49 – Deslocamento aplicado à extremidade da barra	132
Figura 50 – Espectro do deslocamento aplicado	133
Figura 51 – Detalhe do deslocamento do ponto médio da barra obtido utilizando elementos Interpolet e elementos de treliça padrão	134
Figura 52 – Estados do deslocamento em todas as posições e tempos utilizando elementos de treliça padrão e elementos IN4	134
Figura 53 – Pórtico de Roorda com dois tipos de carregamento	136
Figura 54 – Montagem da matriz de coeficientes de conexão no intervalo $[0, 2^m]$	140
Figura 55 – Modelo estrutural de uma viga com carga concentrada	146
Figura 56 – Diagramas para DB10 em nível 8	147
Figura 57 – Diagramas para DB10 em nível 10	147
Figura 58 – Diagramas para IN4 em nível 6	147
Figura 59 – Diagramas para IN4 em nível 8	148
Figura 60 – Coluna com área variável submetida a carga concentrada	149
Figura 61 – Tensão na coluna com área variável	152
Figura 62 – Detalhe da tensão na coluna com área variável na região de maior gradiente	153

Figura 63 – Viga com altura variável (mísula)	154
Figura 64 – Carregamento concentrado para a viga com mísula	156
Figura 65 – Carregamento distribuído na viga com mísula	156
Figura 66 – Erro relativo no momento fletor do engaste em função dos graus de liberdade utilizados por cada método	157
Figura 67 – Equilíbrio de momentos de uma coluna submetida ao peso próprio no estado pós-flambagem	158
Figura 68 – Esforço normal da coluna sujeita ao peso próprio	159
Figura 69 – Erro relativo na carga crítica de peso próprio em função dos graus de liberdade utilizados por cada método	161
Figura 70 – Diferentes condições de contorno para as quais vale a mesma expressão do esforço normal	162
Figura 71 – Viga biapoiada sobre base elástica submetida a carga axial	164
Figura 72 – Dois primeiros modos de flambagem da viga biapoiada sobre base elástica	165
Figura 73 – Modos de flambagem para a mesma carga crítica da viga biapoiada sobre base elástica	166
Figura 74 – Primeiro modo de flambagem da viga biapoiada sobre base elástica infinitamente longa	167
Figura 75 – Viga infinitamente longa sobre base elástica livre nas extremidades	168
Figura 76 – Modos de flambagem simétrico e antissimétrico da viga infinitamente longa sobre base elástica livre nas extremidades	169

Lista de tabelas

Tabela 1 – Coeficientes de filtro das interpolets de Deslauriers-Dubuc	85
Tabela 2 – Momento fletor no ponto de aplicação da carga	126
Tabela 3 – Momento fletor na base da casca	130
Tabela 4 – Frequências de vibração	131
Tabela 5 – Resultados para o cálculo da carga crítica de flambagem comparados com os obtidos por 3 elementos de viga padrão	135
Tabela 6 – Resultados para o cálculo da carga crítica de flambagem do pórtico de Roorda comparados com os obtidos por 3 elementos de viga padrão	136
Tabela 7 – Tensões e deslocamento para $\alpha = 1/2$.	151
Tabela 8 – Tensões e deslocamento para $\alpha = 1/10$.	152
Tabela 9 – Tensões e deslocamento para $\alpha = 1/100$.	152
Tabela 10 – Momentos fletores adimensionais para a viga com mísula e carregamento concentrado ($\times 10^{-2}$)	156
Tabela 11 – Momentos fletores adimensionais para a viga com mísula e carregamento distribuído ($\times 10^{-2}$)	157
Tabela 12 – Resultados obtidos para cargas críticas de peso próprio da coluna engastada e livre	161
Tabela 13 – Cargas críticas de peso próprio para as condições de contorno: biapoiada, biengastada, engastada e apoiada e apoiada e engastada	162
Tabela 14 – Resultados para as duas primeiras cargas críticas de uma viga biapoiada sobre base elástica	165
Tabela 15 – Resultados para as duas primeiras cargas críticas de uma viga biapoiada sobre base elástica com $c = 4\pi^4 EI/L^4$	166
Tabela 16 – Resultados de cargas críticas para uma viga biapoiada sobre base elástica infinitamente longa	167
Tabela 17 – Resultados de cargas críticas para uma viga infinitamente longa sobre base elástica livre nas extremidades	168

Tabela 18 – Resultados para cargas críticas de viga sobre base elástica com as condições de contorno: engastada e livre, biengastada e engastada e apoiada

169