

### 3

## **Árvores Binomiais para Aproximação de Movimento de Reversão à Média, para uso em Opções Reais**

### **Resumo**

Neste capítulo são propostos dois modelos de árvore binomial recombinante para reversão à média e uso em avaliação por opções reais. A relevância dessa abordagem decorre do fato de que as árvores binomiais são uma das metodologias mais utilizadas no apreçamento das opções tanto financeiras como reais, devido a sua facilidade de uso, versatilidade e precisão. No entanto a abordagem clássica desenvolvida por Cox, Ross e Rubinstein (1979) somente se aplica a processos modelados por Movimentos Geométricos Brownianos, limitando-se a variáveis que demonstrem ter esse comportamento.

Os modelos aqui desenvolvidos, apesar de mais intensivos em programação do que o modelo binomial de Cox et. al. (1979), são fundamentalmente mais simples que as abordagens concorrentes, tais como árvores trinomiais ou processos por simulação para opções americanas, mas ainda robustos o suficiente para serem combinados em modelos bi-variável, inclusive com outro MGB ou outra reversão à média. O capítulo ainda apresenta os resultados da aplicação destes modelos a avaliação de uma opção real hipotética.

#### **3.1.**

### **Introdução: árvores binomiais recombinantes para avaliação de opções reais**

A complexidade matemática associada com a teoria das opções reais vem do fato desta requerer uma solução probabilística para a decisão ótima de investimento da firma, não somente no momento presente, mas também em todas as instâncias de tempo até a maturidade da opção. A solução desse problema de otimização dinâmica, como descrita por Dixit e Pindyck (1994), está em modelar a incerteza do ativo subjacente como um processo estocástico, sendo o valor da

decisão ótima de investimento obtido pela solução de uma equação diferencial com as condições de contorno apropriadas. Frequentemente, no entanto, a equação diferencial decorrente do processo e a decisão ótima não tem solução analítica ou não reflete a real complexidade das condições de contorno do problema. Nesse caso pode ser usada uma aproximação discreta do processo estocástico subjacente, de forma a obter uma solução que seja computacionalmente eficiente para o problema de avaliação dinâmica envolvido.

A modelagem discreta por árvore binomial recombinante desenvolvida por Cox, Ross e Rubinstein (1979) para avaliar opções reais encontra ampla aceitação por generalizar o modelo de Black, Scholes e Merton (1973) devido à sua simplicidade de uso, flexibilidade e propriedade de convergir de forma fraca para um Movimento Geométrico Browniano (MGB) quando o passo no tempo ( $\Delta t$ ) diminui. Além disso, contrariamente ao modelo de Black, Scholes e Merton, essa abordagem permite obter aproximações para a solução de opções do tipo Americanas de exercício antecipado. Árvores binomiais são ferramentas precisas, notavelmente robustas, e intuitivamente atraentes para avaliação de opções. A abordagem de Cox, et al (1979), na qual os nós das ramificações se recombinam devido ao fato que o movimento de subida ( $u$ ) é o inverso do de descida ( $d$ ), faz com que em cada passo  $N$ , obtenha-se somente  $N+1$  nós, e não  $2^N$  como no caso de não haver re-combinação. A árvore binomial recombinante (ou *lattice* – treliça, como é comumente chamada) tem uma implementação simples e prática, podendo ser feita em planilhas de cálculo do tipo Excel, ou mesmo em programas de árvore de decisão. Na abordagem desenvolvida por Brandão, Hahn e Dyer (2005), por exemplo, os *payoffs* em cada ramificação correspondem aos fluxos de caixa de cada estado da opção.

Muitas vezes, no entanto, a incerteza a ser modelada não segue um processo estocástico similar a um MGB, o que ocorre quando os fluxos de caixa de um projeto dependem de preços que são função de uma média de longo prazo, como é o caso de *commodities* não financeiras. Diversos autores, como Bessimbinder, Coughenour, Sequin e Smoller (1995), Schwartz (1997, 1988), Laughton e Jacoby (1993) entre outros, sugerem que esse tipo de variável realmente tem um comportamento auto-regressivo e apontam para o fato de que ao utilizar um modelo estocástico de difusão do tipo de um MGB, pode-se estar aumentando de forma significativa a incerteza relacionada e, por conseguinte o valor da opção.

Este trabalho está organizado da seguinte forma. Após esta introdução, na seção 3.2, serão apresentadas duas aproximações binomiais para processos de reversão à média: o processo censurado de Nelson e Ramaswami (1990) e um modelo não censurado, além de uma discussão acerca da precisão de ambas as abordagens. Na seção 3.3 estes modelos são utilizados para modelar duas árvores binomiais bi-variáveis, primeiro para discretizar o modelo proposto por Schwartz e Smith (2000) composto de um processo MGB com um MRM, e o segundo para dois processos de MRM. Na seção 3.4 os modelos apresentados são usados para avaliar uma opção real hipotética, e comparados entre si. A seção 3.5 conclui e apresenta sugestões de melhorias futuras para as abordagens aqui desenvolvidas.

### 3.2.

#### **Aproximação binomial para movimento de reversão à média**

O MRM é um processo de Markov no qual o sentido e a intensidade do desvio são dependentes do preço corrente que deve reverter a uma média de equilíbrio de mercado que é assumida como sendo o preço médio de longo prazo. A lógica por trás de um movimento de reversão à média (MRM) vem da micro-economia: quando os preços estão deprimidos (ou abaixo de sua média de longo prazo), a demanda por esse produto tende a aumentar ao passo que sua produção tende a diminuir. Isso é devido ao fato que o consumo de uma *commodity* com preço baixo aumenta enquanto os baixos retornos para as empresas produtoras as levarão a postergar investimentos e fechar unidades menos eficientes, reduzindo assim a disponibilidade do produto. O oposto ocorrerá se os preços estiverem altos (ou acima da média de longo prazo). Estudos empíricos (Pindyck & Rubinfeld, 1991) demonstraram que com preços de petróleo, por exemplo, a lógica da micro-economia indica que o processo estocástico inclui um componente MRM. No entanto testes econométricos somente rejeitam o MGB para séries extremamente longas.

A aproximação por árvores binomiais para modelos de reversão à média (MRM) é menos conhecida do que a modelagem clássica de MGB de Cox, et al (1979). Por esta razão a simulação de Monte Carlo ou árvores discretas trinomiais e multi-nomiais (Hull, 1999) são geralmente usadas para modelar um MRM.

Por outro lado árvores trinomiais, tais como sugeridas por Tseng e Lin (2007), Clewlow e Strickland (1999), Hull e White (1994<sup>a</sup>, 1994<sup>b</sup>) e Hull (1999), são de difícil implementação, pois suas ramificações são dependentes de trajetória e as probabilidades ao longo destas condicionais aos passos anteriores, envolvendo programação complicada e grande intensidade computacional. A maior dificuldade do uso de árvores trinomiais está em programar modelos genéricos, que possam assumir diversos valores de parâmetros, permitindo a aplicação a uma ampla gama de projetos e casos específicos.

Métodos de simulação de Monte Carlos, desde a abordagem de Longstaff e Schwartz (2001) são capazes de acomodar praticamente qualquer processo estocástico, inclusive a combinação de vários processos, eliminado com a chamada “maldição da dimensionalidade e da modelagem”. Mas apesar de sua ampla gama de aplicações, estes modelos são computacionalmente intensivos, requerendo programação própria para a implementação principalmente no caso de se estar em presença de diversas opções concorrentes, como é frequentemente o caso em aplicações envolvendo opções reais.

Neste capítulo são propostas duas aproximações binomiais tentativas para MRM, a primeira baseada num modelo genérico desenvolvido por Nelson e Ramaswamy (1990) que implica em censurar as probabilidades ao longo da árvore, e a outra sem essa restrição de censura das probabilidades. Ambas fornecem resultados suficientemente precisos para a utilização em aplicações de opções reais, além de serem suficientemente robustas para utilização em modelos de dois fatores discretizados por árvores bi-variável. Também ambas supõem que o comportamento estocástico da variável modelada é homoscedástico, mas algumas adaptações podem modelar também comportamentos heteroscedásticos.

A forma mais simples de MRM é o processo de fator único de Ornstein-Uhlenbeck, também chamado de MRM Aritmético, o qual é definido pela Equação (3.1):

$$dx_t = \eta(\bar{x} - x_t)dt + \sigma dz_t \quad (3.1)$$

onde  $x_t$  é o ln (logaritmo neperiano) da variável modelada  $S_t$ ,  $\eta$  a velocidade de reversão a média,  $\bar{x}$  a média de longo prazo para a qual  $x_t$  reverte,  $\sigma$  a volatilidade do processo e  $dz$  um processo de Wiener. O ln da variável é utilizado, pois no caso de *commodities* é geralmente assumido que os preços destas são

distribuídos segundo uma log-normal. Isto é conveniente porque sendo  $x = \ln(S)$ , então  $S$  não pode ser negativo. Nesse caso estamos assumindo que  $S_t$  tem um comportamento de Ornstein-Uhlenbeck geométrico, com  $S_t = \exp(x_t)$ . No caso em que não se queira esse comportamento log-normal, usa-se diretamente a variável  $x_t$ . Assim O valor esperado e variância do processo de Ornstein-Uhlenbeck, são dados por Dixit e Pindyck (1994):

$$E[x_t] = \bar{x} + (x_0 - \bar{x})e^{-\eta t} \quad (3.2)$$

$$Var[x_t] = \frac{\sigma^2}{2\eta} (1 - e^{-2\eta t}) \quad (3.3)$$

Podemos observar que, se  $t \rightarrow \infty$ , então  $Var[x_t] \rightarrow \sigma^2/2\eta$ , e não para infinito, como é o caso com um MGB.

### 3.2.1.

#### Modelo de reversão à média censurado de Nelson e Ramaswamy (1990)

Nelson e Ramaswamy (1990) propuseram uma metodologia que pode ser utilizada sob uma ampla gama de condições, e como será mostrado mais à frente, é apropriada ao processo de Ornstein-Uhlenbeck. Seu modelo é uma sequência binomial simples de  $n$  períodos de duração  $\Delta t$ , com um horizonte de tempo  $T$ :  $T = n \Delta t$ , que permite então que uma árvore binomial recombinante possa então ser construída.

A forma geral de equação diferencial para um processo estocástico é dada por:

$dx = \mu(x,t)dt + \sigma(x,t)dz$ , e o modelo proposto é dado pelas seguintes equações:

$$\begin{aligned} x_t^+ &\equiv x + \sqrt{\Delta t} \sigma(x,t) && \text{(movimento de subida)} \\ x_t^- &\equiv x - \sqrt{\Delta t} \sigma(x,t) && \text{(movimento de descida)} \\ p_t &\equiv 1/2 + 1/2 \sqrt{\Delta t} \frac{\alpha(x,t)}{\sigma(x,t)} && \text{(probabilidade de subida)} \\ 1-p_t &&& \text{(probabilidade de descida)} \end{aligned} \quad (3.4)$$

No entanto, nesse modelo, a probabilidade  $p_t$  pode assumir valores negativos ou superiores a 1. Os autores sugerem censurar esses valores de  $p_t$  (e portanto de:  $1-p_t$ ), para a faixa de 0 a 1 da seguinte forma:

$$p \equiv \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\alpha(x,t)}{\sigma(x,t)} \sqrt{\Delta t} & \text{se } p \geq 0 \text{ e } p_t \leq 1 \\ 0 & \text{se } p_t < 0, p_t \text{ é censurado} \\ 1 & \text{se } p_t > 1, p_t \text{ é censurado} \end{cases}$$

Esse modelo é bastante abrangente e se aplica bem ao processo de reverão à média, como mostrado a seguir.

Comparando esta equação com a (3.1) temos:

$$\alpha(x,t) = \eta(\bar{x} - x_t), \text{ e}$$

$$\sigma(x,t) = \sigma$$

Mas podemos obter valores negativos ou superiores a 1 nos seguintes casos:

$$\text{Se } (\bar{x} - x_t) \sqrt{\Delta t} > \sigma, \text{ então } p_{x_t} > 1$$

$$\text{Se } (\bar{x} - x_t) \sqrt{\Delta t} < -\sigma, \text{ então } p_{x_t} < 0$$

Nesses casos o valor de  $p_t$  precisa ser censurado conforme o esquema mostrado abaixo:

$$p \equiv \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{\eta(\bar{x} - x) \sqrt{\Delta t}}{2\sigma} & \text{se } p \geq 0 \text{ e } p_t \leq 1 \\ 0 & \text{se } p_t < 0, p_t \text{ é censurado} \\ 1 & \text{se } p_t > 1, p_t \text{ é censurado} \end{cases}$$

Essas condições podem ser explicitadas pela fórmula (3.5):

$$p_{x_t} = \max \left( 0, \min \left( 1, \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\eta(\bar{x} - x_t)}{\sigma} \sqrt{\Delta t} \right) \right) \quad (3.5)$$

e ainda:

$$\Delta x^+ = \sigma \sqrt{\Delta t}; \quad \Delta x^- = -\sigma \sqrt{\Delta t} \quad (3.6)$$

Como  $x_t$  é o ln do preço  $S$ , então  $\Delta S^+ = e^{\sigma \sqrt{\Delta t}}$  e  $\Delta S^- = e^{-\sigma \sqrt{\Delta t}}$ . Essas são as expressões já conhecidas usadas na árvore recombinante do MGB. O resultado é então uma árvore binomial recombinante similar àquela obtida pelo MGB de Cox et al. (1979). O cálculo das probabilidades, e a censura destas, produzirão um modelo que converge de forma fraca para um MRM, como demonstrado por Hahn (2005). É importante notar que em cada nó da árvore de preços obtida, a

probabilidade de um movimento ascendente ( $p_t$ ) irá depender de  $x_t$ , gerando, segundo a equação (3.5), uma segunda árvore de probabilidades de subida  $p_{xt}$ , e uma outra correspondente de probabilidades de descida.

Uma vez montada a árvore binomial, para descontar esta à taxa de desconto sem risco, como se requer em cálculos de opções, é necessário levar em conta o prêmio de risco do processo  $x_t$  (DIXIT e PINDYCK, 1994):  $\lambda_x$ . Na sua forma neutra ao risco a equação (3.1) fica:

$$dx_t = \eta \left[ (\bar{x} - \lambda_x / \eta) - x_t \right] dt + \sigma dz_t \quad (3.6)$$

O ajuste para transformar um MRM em neutro a risco se dá na sua média de longo prazo  $\bar{x}$ , penalizando esta pelo prêmio de risco normalizado do processo:  $\bar{x} - \lambda_x / \eta$  (DIXIT e PINDYCK, 1994, BASTIAN-PINTO e BRANDÃO, 2007). Para a árvore binomial censurada neutra ao risco, o ajuste se dá então na equação (3.5):

$$p_x = \max \left( 0, \min \left( 1, \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\eta \left[ (\bar{x} - \lambda_x / \eta) - x \right]}{\sigma} \sqrt{\Delta t} \right) \right) \quad (3.7)$$

### 3.2.2.

#### Aproximação binomial para modelo não censurado de reversão à média

A abordagem para desenvolver um modelo binomial, parte do princípio de igualar o 1º e 2º momentos (valor esperado e variância) de um processo estocástico, com o resultado da árvore binomial.

O problema está em encontrar uma sequência binomial que convirja para uma equação diferencial estocástica (EDE) na forma:

$$dx_t = \alpha(x, t) dt + \sigma(x, t) dz$$

Onde  $\alpha(x, t)$  e  $\sigma(x, t)$  são respectivamente as funções taxa de crescimento (*drift*) e volatilidade contínuas e instantâneas e  $dz$  é um incremento de Weiner padrão. As condições para que uma sequência binomial de  $x_t$  convirja para a EDE

acima é que  $x_t = x_0 + \int_0^t \alpha(x_s, s) ds + \int_0^t \sigma(x_s, s) dz$ , exista em  $0 < t < \infty$ , e que

$$|x_{\Delta t}^{\pm}(x, t) - x|, |\alpha_{\Delta t}(x, t) - \alpha(x, t)|, e |\sigma_{\Delta t}^2(x, t) - \sigma^2(x, t)| \rightarrow 0, \text{ quando } \Delta t \rightarrow 0$$

(HAHN, 2005).

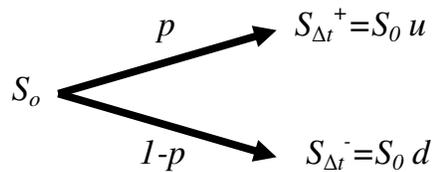
Usando a discretização:  $\Delta t = t - t_0$  podemos escrever as equações (3.2) e (3.3) assim:

$$E[x_t] = \bar{x} + (x_{t-1} - \bar{x})e^{-\eta\Delta t} \quad (3.8)$$

$$Var[x_t] = \frac{\sigma^2}{2\eta} (1 - e^{-2\eta\Delta t}) \quad (3.9)$$

Para um processo binomial de um período de um preço  $\underline{S}$ , temos a Figura 3.1:

**Figura 3.1. Nó binomial**



Neste modelo usamos a abordagem de Hull e White (1994<sup>a</sup>, 1994<sup>b</sup>) descrita em Clewlow e Strickland (1999) e em Hull (1999), com seu modelo de árvore trinomial para reversão à média. Primeiramente definimos uma árvore aditiva, que modela um processo aritmético de Ornstein Uhlenbeck de média de longo prazo igual à zero:  $\bar{x}^* = 0$ , e valor inicial também igual a zero:  $x_0^* = 0$ . Nesta árvore os nós terão os valores  $x_t^*$ . Aos valores dos nós de cada período desta árvore são adicionados os valores esperados determinísticos da modelagem de Ornstein Uhlenbeck, a partir da equação (3.8) usando a média real de longo prazo do processo:  $\bar{x}$ , e o valor inicial real deste:  $x_0$ . E então usa-se esta árvore de valores de  $x_t$  para obter a árvore de um processo de preço  $S_t$  com distribuição log-normal, definida por:  $S_t = e^{x_t}$ .

Chamando de:

$$\ln(u) = U, \text{ e:}$$

$$\ln(d) = D$$

Como estamos considerando  $x_t = \ln(S_t)$ , para estudar a dinâmica do efeito do nó binomial podemos considerar  $S_0$  como um valor unitário, ou seja:  $S_0 = 1$  de tal forma que as relações de grandeza no processo binomial permaneçam

inalteradas. Como temos:  $x_o^* = \bar{x}^* = 0$  podemos escrever a relação binomial para o processo, agora aritmético,  $x_o^*$  (Figura 3.2):

**Figura 3.2. Nó binomial do processo OU**

$$\begin{array}{l}
 \begin{array}{c}
 \nearrow^p \\
 \searrow^{1-p}
 \end{array}
 x_o^*
 \begin{array}{l}
 \rightarrow x_{\Delta t}^{*+} = \ln(S_0 u) = \ln(S_0) + \ln(u) = U \\
 \rightarrow x_{\Delta t}^{*-} = \ln(S_0 d) = \ln(S_0) + \ln(d) = D
 \end{array}
 \end{array}
 \quad (3.10)$$

Para aproximar esse processo binomial com as equações (3.8) e (3.9) do processo de Ornstein-Uhlbenbeck obtemos as seguintes relações:

$$x^{*+} = x^* + \sigma\sqrt{\Delta t} \quad (3.11)$$

$$x^{*-} = x^* - \sigma\sqrt{\Delta t} \quad (3.12)$$

$$p_{x_i} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\eta(-x_i^*)\sqrt{\Delta t}}{\sqrt{\eta^2(-x_i^*)^2 \Delta t + \sigma^2}} \quad (3.13)$$

O desenvolvimento e demonstração das equações (3.11), (3.12) e (3.13) acima, encontra-se no Anexo 3.1. Com estas podemos modelar a árvore binomial recombinante aditiva de média 0, e valor inicial também 0, para movimentos de reversão à média (MRM) aritméticos de  $x_t^*$ . Como em Clewlow e Strickland (1999) e em Hull (1999), a estes valores de nós deverão então ser adicionados os valores esperados obtidos com a equação (3.8), considerando agora  $x_o$  e  $\bar{x}$  (ambos não mais iguais a 0, mas com os valores dos parâmetros reais do processo MRM). O valor de  $x$  após  $i$  movimentos de subida, e  $j$  movimentos de descida:

$$\begin{aligned}
 t &= (i + j)\Delta t \\
 x_{(i,j)} &= \bar{x} + (x_0 - \bar{x}) e^{-\eta(i+j)\Delta t} + \underbrace{(i - j)\sigma\sqrt{\Delta t}}_{x^*}, \text{ ou:} \\
 x_{(i,j)} &= \bar{x} \left(1 - e^{-\eta(i+j)\Delta t}\right) + x_0 e^{-\eta(i+j)\Delta t} + \underbrace{(i - j)\sigma\sqrt{\Delta t}}_{x^*}
 \end{aligned}
 \quad (3.14)$$

A árvore binomial recombinante não censurada para o movimento de reversão à média geométrico, definida por:  $S_t = e^{x_t}$ , é obtida diretamente transformando os valores de  $x_{(i,j)}$  em  $S_{(i,j)}$ . Obtém-se assim a árvore binomial recombinante de reversão à média multiplicativa. A relação entre o modelo não

censurado e aquele censurado de Nelson e Ramaswami pode ser acompanhada no Anexo 3.2.

Neste modelo não censurado, o ajuste para neutralidade ao risco se dá na equação de valor esperado do processo, alterando o valor de  $x$  dado pela equação (3.14) para:

$$x_{(i,j)} = (\bar{x} - \lambda_x/\eta)(1 - e^{-\eta(i+j)\Delta t}) + x_0 e^{-\eta(i+j)\Delta t} + \underbrace{(i-j)\sigma\sqrt{\Delta t}}_{x^*} \quad (3.15)$$

### 3.2.3.

#### Convergência dos dois modelos de árvore binomial para reversão à média

Para se verificar a precisão dos dois modelos mostrados acima (censurado e não censurado) serão mostrados resultados da modelagem pelos dois modelos binomiais de um processo de reversão à média geométrico segundo o modelo 1 de Schwartz (1997) definido pela EDE (3.16) abaixo.

$$dS = \eta \left( \bar{x} + \frac{\sigma^2}{2\eta} - \ln[S] \right) S dt + \sigma S dz \quad (3.16)$$

Com:

$$x_t = \ln(S_t), \text{ e}$$

$$dx = \eta(\bar{x} - x) dt + \sigma dz$$

Para essa modelagem é necessário se ter especificados os valores das seguintes variáveis:

$S_0$  – valor inicial (em  $t = 0$ ) da variável estocástica  $S_t$

$$x_0 = \ln(S_0)$$

$\bar{x}$  – valor da média de longo prazo para a qual  $x_t = \ln(S_t)$  converge

$\eta$  – parâmetro de velocidade de reversão à média do processo (3.16)

$\sigma$  – parâmetro de volatilidade do processo (3.16)

$\Delta t$  – valor intervalo de discretização de tempo

É importante ressaltar que o modelo 1 de Schwartz definido por (3.16), converge a longo prazo para um valor  $\bar{S}^* = \exp(\bar{x} + \sigma^2/4\eta)$  (SCHWARTZ, 1997). Os modelos binomiais geométricos desenvolvidos, com  $S_t = \exp(x_t)$ ,

convergem para um valor  $\bar{S} = \exp(\bar{x})$ . Portanto se considerarmos  $\bar{S}^* = \exp(\bar{x} + \sigma^2/2\eta)$  a média de longo prazo que intuitivamente transformaria o processo definido por (3.16), em:

$$dS = \eta \left( \ln[\bar{S}^*] - \ln[S] \right) S dt + \sigma S dz$$

$$\text{Nesse caso teríamos: } \bar{S} = \bar{S}^* \exp(-\sigma^2/4\eta)$$

Na Figura 3.3, foram plotados dois exemplos de árvore binomial dos modelos censurado e não censurado, para valores:  $\sigma = 0,2$ ,  $\eta = 1,2$  e  $\bar{S} = 50$ ,  $S_0 = 75$ , com  $\Delta t = 1/4$ .

Fica aparente que a precisão dos modelos será função dos parâmetros:  $\eta$ ,  $\sigma$ ,  $S_0$ ,  $\bar{S}$  e  $\Delta t$ . Comparamos o valor esperado (a média) e a variância dos processos com o das expressões analíticas destes, dadas pelas equações (3.2) e (3.3). Para obter a estimativa da precisão dos modelos para a média e a variância, estas foram estimadas dos modelos da seguinte forma:

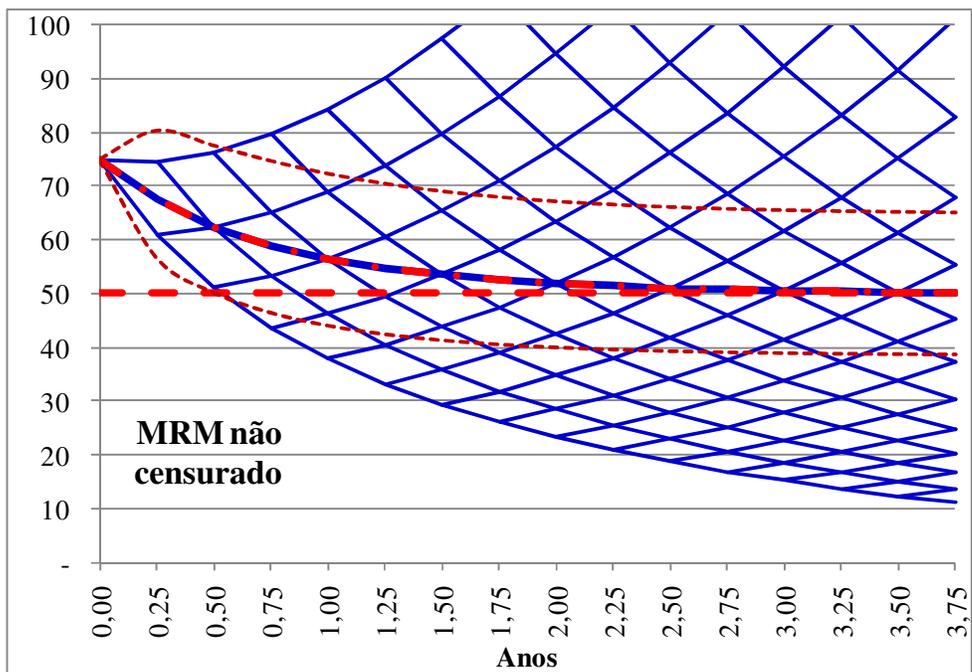
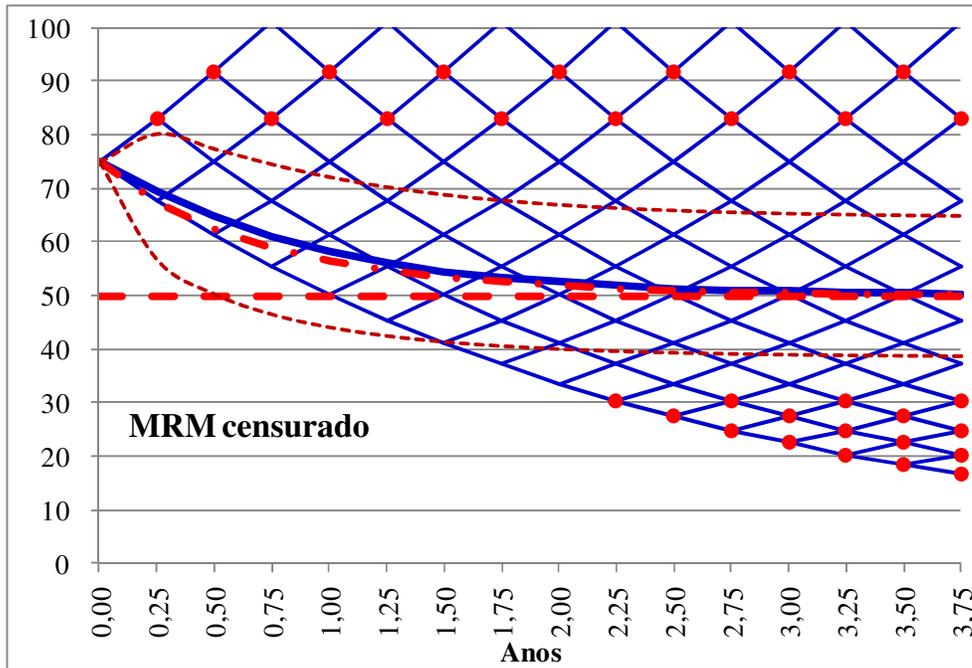
Para o valor esperado num determinado passo  $n$  (significando um tempo  $T = n\Delta t$ ) foi feito o seguinte calculo:

$$E[x_n] = \sum_{i=1}^{i=n+1} q_i x_{i,n}$$

Onde  $x_{i,n}$  e  $q_{i,n}$  são o valor do nó  $i$  no passo  $n$  e sua correspondente probabilidade acumulada de ocorrência. Esta última é calculada a partir dos valores acumulados da probabilidade de subida  $p_{i,t}$  (e da de descida  $1 - p_{i,t}$ ) por uma árvore binomial correspondente a de valores  $x_{i,t}$ . Da mesma foram a variância no passo  $n$ :

$$Var[x_n] = \sum_{i=1}^{i=n+1} q_i (x_{i,n} - E[x_n])^2$$

Figura 3.3. Árvores binomiais modelos censurado e não censurado, com  $S_0 = 75$



<b>Legenda:</b>		$\sigma$ :	20%	$S_0$ :	75
Intervalo 95% confiança:	-----	$\eta$ :	1,2	$S_1$ :	50
Valor esperado analítico:	- . - . -	$\Delta t$ :	0,25		
Nós censurados ( $prob = 0$ ):	●	Valor esperado árvore:	—————		

Como temos cinco variáveis para medir a sensibilidade da precisão, serão mostrados somente os resultados mais significativos, e comentadas sensibilidades encontradas.

Considerando  $\sigma = 0,2$ ,  $\eta = 0,8$  e  $\bar{S} = 50$ , foi feita uma análise sobre a sensibilidade a  $\Delta t$ , em passos inferiores a um ano ( $\Delta t < 1$ ). Foram considerados valores de  $S_0$  inferiores e superiores à média de longo prazo  $\bar{S}$ , sendo  $S_0 = 25$  e 100, ou seja a metade e o dobro da média de longo prazo.

Os resultados estão na Tabela 3.1.

**Tabela 3.1. Sensibilidade para os dois modelos em erro % ( $\Delta\%$ ) de  $E[x]$  e  $\sigma^2[x]$**

$\Delta t = 1 / 2$		$S_0 = 100$						
Modelos:	Passo n	1	2	3	4	6	8	12
Censurado	$\Delta\% E[x]$	2,0%	2,3%	1,5%	0,5%	0,1%	0,2%	0,1%
	$\Delta\% \sigma^2[x]$	45,3%	20,3%	9,1%	7,1%	4,0%	3,4%	3,2%
Não	$\Delta\% E[x]$	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
	$\Delta\% \sigma^2[x]$	45,3%	26,0%	17,6%	18,3%	14,6%	14,7%	14,8%
$\Delta t = 1 / 4$		$S_0 = 100$						
Modelos:	Passo n	1	2	3	4	6	8	12
Censurado	$\Delta\% E[x]$	0,6%	0,7%	0,3%	0,1%	0,2%	0,3%	0,2%
	$\Delta\% \sigma^2[x]$	21,3%	16,2%	12,2%	9,1%	4,8%	2,5%	0,6%
Não	$\Delta\% E[x]$	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
	$\Delta\% \sigma^2[x]$	21,3%	16,8%	14,5%	12,1%	9,5%	8,1%	7,2%
$\Delta t = 1 / 8$		$S_0 = 100$						
Modelos:	Passo n	1	2	3	4	6	8	12
Censurado	$\Delta\% E[x]$	0,1%	0,1%	0,2%	0,2%	0,3%	0,3%	0,3%
	$\Delta\% \sigma^2[x]$	10,3%	9,2%	8,2%	7,2%	5,6%	4,3%	2,4%
Não	$\Delta\% E[x]$	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
	$\Delta\% \sigma^2[x]$	10,3%	9,3%	8,7%	7,9%	6,8%	5,8%	4,7%

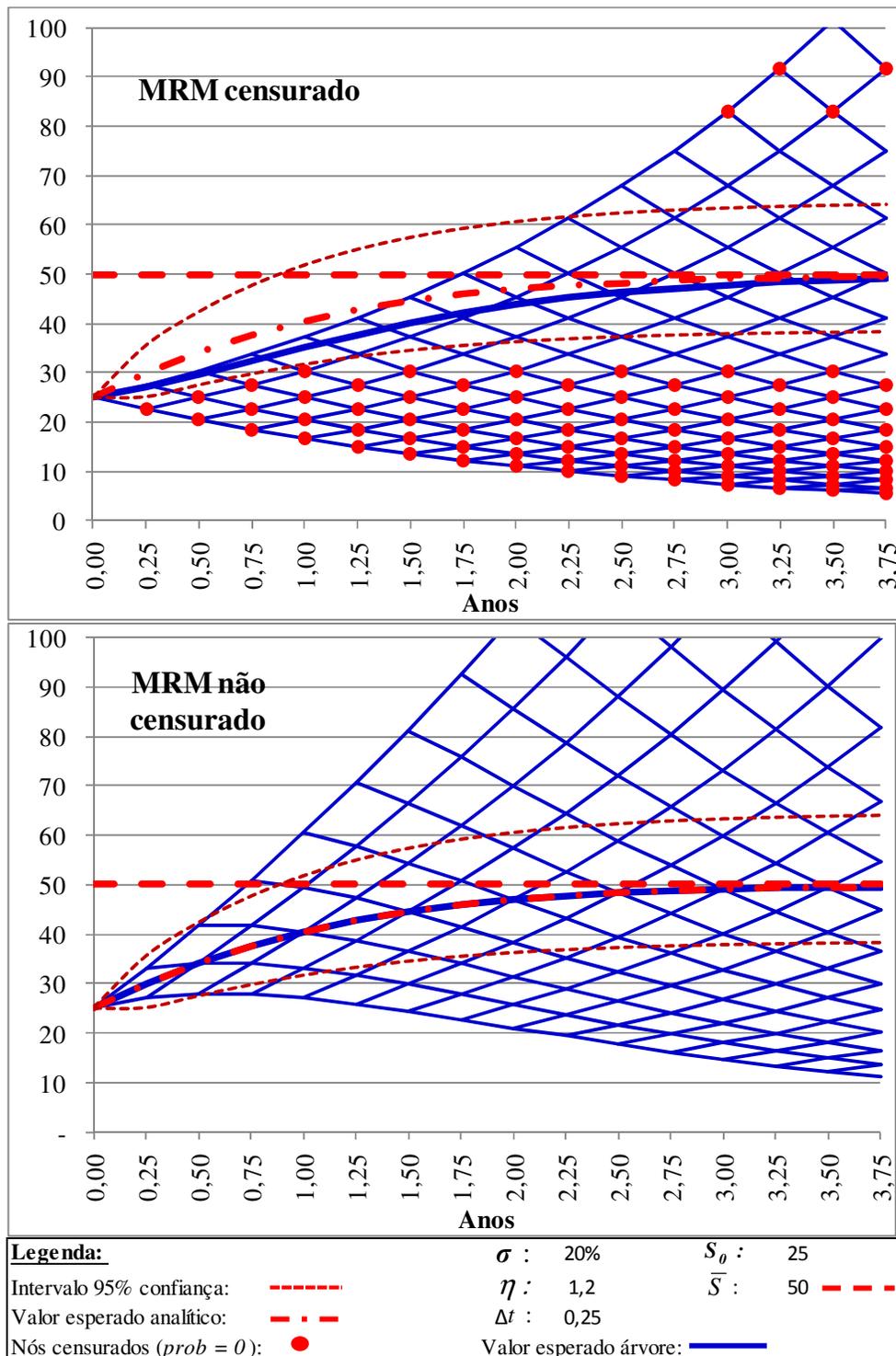
(continuação)

$\Delta t = 1 / 2$		$S_0 = 25$						
Modelos:	Passo n	1	2	3	4	6	8	12
Censurado	$\Delta\% E[x]$	2,5%	2,7%	1,6%	0,6%	0,1%	0,2%	0,1%
	$\Delta\% \sigma^2[x]$	45,3%	20,3%	9,1%	7,1%	4,0%	3,4%	3,2%
Não censurado	$\Delta\% E[x]$	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
	$\Delta\% \sigma^2[x]$	45,3%	26,0%	17,6%	18,3%	14,6%	14,7%	14,8%
$\Delta t = 1 / 4$		$S_0 = 25$						
Modelos:	Passo n	1	2	3	4	6	8	12
Censurado	$\Delta\% E[x]$	0,8%	0,8%	0,4%	0,1%	0,2%	0,3%	0,3%
	$\Delta\% \sigma^2[x]$	21,3%	16,2%	12,2%	9,1%	4,8%	2,5%	0,6%
Não censurado	$\Delta\% E[x]$	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
	$\Delta\% \sigma^2[x]$	21,3%	16,8%	14,5%	12,1%	9,5%	8,1%	7,2%
$\Delta t = 1 / 8$		$S_0 = 25$						
Modelos:	Passo n	1	2	3	4	6	8	12
Censurado	$\Delta\% E[x]$	0,1%	0,2%	0,2%	0,3%	0,3%	0,4%	0,4%
	$\Delta\% \sigma^2[x]$	10,3%	9,2%	8,2%	7,2%	5,6%	4,3%	2,4%
Não censurado	$\Delta\% E[x]$	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
	$\Delta\% \sigma^2[x]$	10,3%	9,3%	8,7%	7,9%	6,8%	5,8%	4,7%

Dos resultados acima podemos concluir que a diminuição do intervalo  $\Delta t$  aumenta a precisão dos dois modelos quanto à variância, mas somente do valor esperado do modelo censurado. A posição do valor inicial (acima ou abaixo da média de longo prazo) também é importante para o modelo censurado, mas não influi no valor esperado do não censurado.

Além dessas relações, foi constatado que a precisão dos dois modelos é praticamente independente do parâmetro de volatilidade, mas no modelo censurado, diminui rapidamente na medida em que este passa para cima de um patamar. Este valor depende da relação tanto de grandeza quanto de posição do valor inicial e da média de longo prazo. A razão para isso pode ser observada na Figura 3.4, onde aparece a limitação do modelo censurado quanto ao valor esperado nos passos iniciais, quando a distancia entre  $S_0$  e  $\bar{S}$  é significativa, e a velocidade de reaproximação  $\eta$  alta: a curva de valor esperado do modelo censurado pode ser restrita pelo cone da sua árvore binomial distanciando esta da curva real do valor esperado. Esse fenômeno não ocorre no modelo não censurado, pela própria característica de sua construção.

Figura 3.4. Exemplo de árvore MRM com os dois modelos com  $S_0 = 25$



Em função do acima exposto o modelo não censurado parece mais robusto que o censurado de Nelson e Ramaswami (1990), apesar deste último apresentar menores desvios no valor obtido da variância de sua árvore.

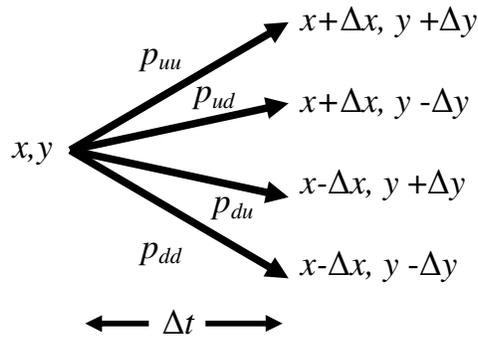
### 3.3. Modelos de árvore bi-variável com reversão à média

O uso de processos estocásticos de dois fatores tem ampla utilização, apesar de aumentar significativamente a complexidade das soluções para aplicações baseadas nele. O conceito de árvore bi-variável foi introduzido por Boyle (1988) e posteriormente discutido por Copeland e Antikarov (2003), os quais propuseram um modelo de árvore “quadrinomial” com duas incertezas correlacionadas, cada uma seguindo um MGB.

Hahn (2005) usa um modelo envolvendo dois fatores do preço de petróleo (oscilações de curto prazo e tendência de longo prazo) para calcular o valor de uma opção de abandono de um poço de petróleo. Bastian-Pinto e Brandão (2007) modelam a opção de conversão em usinas de açúcar e etanol modelando os preços desses dois produtos como incertezas independentes e correlacionadas. Também Brandão e Dyer (2009) modelam os riscos privado e de mercado de um projeto por dois processos MGB distintos, porém correlacionados. Todas essas aplicações envolvem o uso de árvores de decisão binomiais e bi-variáveis.

Na árvore bi-variável as variáveis  $x$  e  $y$ , seguem processos estocásticos independentes e correlacionados. Para se construir uma árvore bi-variável, as probabilidades conjuntas de subida de cada uma das quatro ramificações de saída do nó precisam ser determinadas. Estas probabilidades representam as quatro possíveis combinações de subida e descida das duas variáveis, com os primeiro e segundo caracteres subscritos de cada probabilidade  $p$  denotando a direção do movimento para as variáveis  $x$  e  $y$ , respectivamente, como mostrado na Figura 3.5.

**Figura 3.5. Nó da ramificação bi-variável**



Para este processo bi-variável, seguindo a convenção mostrada na Figura 3.5, e conforme demonstrado por Hahn (2005) e Brandão e Dyer (2009), podemos determinar as probabilidades conjuntas para  $x$  e  $y$  como nas equações (3.17).

$$\begin{cases} p_{uu} = \frac{\Delta x \Delta y + \Delta y v_x \Delta t + \Delta x v_y \Delta t + \rho_{xy} \sigma_x \sigma_y \Delta t}{4 \Delta x \Delta y} \\ p_{ud} = \frac{\Delta x \Delta y + \Delta y v_x \Delta t - \Delta x v_y \Delta t - \rho_{xy} \sigma_x \sigma_y \Delta t}{4 \Delta x \Delta y} \\ p_{du} = \frac{\Delta x \Delta x - \Delta y v_x \Delta t + \Delta x v_y \Delta t - \rho_{xy} \sigma_x \sigma_y \Delta t}{4 \Delta x \Delta y} \\ p_{dd} = \frac{\Delta x \Delta y - \Delta y v_x \Delta t - \Delta x v_y \Delta t + \rho_{xy} \sigma_x \sigma_y \Delta t}{4 \Delta x \Delta y} \end{cases} \quad (3.17)$$

onde  $p_{uu} + p_{ud} + p_{du} + p_{dd} = 1$  (HAHN e DYER, 2008). Essas probabilidades também dependem da taxa de crescimento (*drift*) de cada processo  $v_x$ ,  $v_y$ , assim como da correlação  $\rho_{xy}$  entre os incrementos destes.

### 3.3.1.

#### Modelo bi-variável composto de um MGB e um MRM

Schwartz e Smith (2000) modelam um processo estocástico de dois fatores, um de longo prazo – modelado como um MGB, e outro de curto prazo – modelado como um MRM, correlacionados entre si. O modelo é assim definido:

Seja a variável incerta  $S_t$  tal que:  $S_t = \exp(s_t)$ , ou:  $s_t = \ln(S_t)$ , e:

$$s_t = x_t + y_t \quad (3.18)$$

onde:

$$dx = -\eta x dt + \sigma_x dz_x \quad (3.19)$$

$x_t$  segue um processo de Ornstein Uhlenbeck com:  $\bar{x} = 0$ .

e:

$$dy = \alpha dt + \sigma_y dz_y \quad (3.20)$$

$y_t$  segue um Movimento Aritmético Browniano (MAB), e portanto:

ainda com:

$$dz_x dz_y = \rho_{xy} dt$$

Então temos  $x$ ,  $y$  e  $S$ , normalmente distribuídos.  $S_t$  terá uma distribuição log-normal e será o resultado de um processo MGB:  $\exp(y_t)$ , multiplicado por uma reversão à média geométrica:  $\exp(x_t)$ .

$$S = \exp(x+y) = \exp(x) \exp(y)$$

Hahn (2005) modela o modelo de Schwartz e Smith numa árvore bi-variável. O fator  $y$  é modelado conforme uma árvore binomial de Cox et al (1979), e o fator  $x$  segundo o modelo binomial de reversão à média de Nelson e Ramaswami. O modelo não censurado descrito na seção 3.2.2, não pode ser diretamente aplicado a esse processo bi-variável porque as equações (3.17) requerem que a probabilidade de subida do modelo binomial seja na forma de Nelson e Ramaswami como no conjunto de equações (3.4) (BRANDÃO e DYER, 2009). As probabilidades do processo não censurado não estão nesse formato (ver equação (3.13)), portanto é necessária a utilização do modelo censurado pois é o único dos dois que se adéqua a composição bi-variável. Mas um nó com quatro ramificações de saída, como na Figura 3.5, não pode ser diretamente censurado quando necessário como requer o modelo de reversão à média. Hahn (2005) resolve esse problema aplicando a regra de Bayes para decompor as probabilidades conjuntas no produto das probabilidades marginal e condicional. Para obter as probabilidades condicionais, as probabilidades conjuntas são divididas pela probabilidade marginal para  $y$ :

$$\begin{cases} p_u = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{v_y \Delta t}{\Delta y} \\ p_d = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{v_y \Delta t}{\Delta y} \end{cases} \quad (3.21)$$

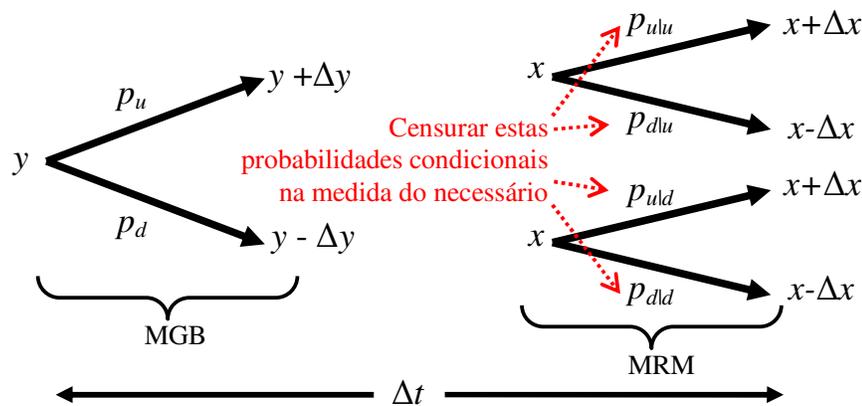
Conforme:

$$p(x_t \cap y_t) = p(x_t | y_t) p(y_t) \quad (\text{regra de Bayes})$$

Portanto dividindo as probabilidades das equações (3.17), pelas equações correspondentes (3.21), leva às seguintes probabilidades condicionais para  $x$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} p_{ulu} = \frac{\Delta x (\Delta y + v_y \Delta t) + \Delta t (\Delta y v_x + \rho_{xy} \sigma_x \sigma_y)}{2\Delta y (\Delta x + v_x \Delta t)} \\ p_{dlu} = \frac{\Delta x (\Delta y - v_y \Delta t) + \Delta t (\Delta y v_x - \rho_{xy} \sigma_x \sigma_y)}{2\Delta y (\Delta x + v_x \Delta t)} \\ p_{uld} = \frac{\Delta x (\Delta y + v_y \Delta t) - \Delta t (\Delta y v_x + \rho_{xy} \sigma_x \sigma_y)}{2\Delta y (\Delta x + v_x \Delta t)} \\ p_{dld} = \frac{\Delta x (\Delta y - v_y \Delta t) - \Delta t (\Delta y v_x - \rho_{xy} \sigma_x \sigma_y)}{2\Delta y (\Delta x + v_x \Delta t)} \end{array} \right. \quad (3.22)$$

**Figura 3.6.** Nó bi-variável censurado de um MAB seguido de um MRM



Nesta formulação teremos:  $p_{ulu} + p_{dlu} = 1$  e  $p_{uld} + p_{dld} = 1$ . Estas probabilidades permitem que o nó de quatro ramificações com probabilidades conjuntas possa ser separado numa sequência (Figura 3.6) na qual as probabilidades condicionais da variável  $x$  podem ser novamente censuradas na forma da equação (3.5). Usando para a modelagem do processo de reversão à média  $x_t$  as relações do processo binomial censurado das equações (3.5) e (3.6) com o processo dado pela equação (2.56), para o MAB  $y_t$  os resultados das equações (3.21) com o processo da equação (2.58) temos:

$$\Delta x = \sigma_x \sqrt{\Delta t}$$

$$v_x = \eta(-x_t)$$

$$\Delta y = \sigma_y \sqrt{\Delta t}$$

$$v_y = \alpha$$

Para descontar essa árvore bi-variável à taxa de desconto sem risco, como ser requer em cálculos de opções, é necessário levar em conta os prêmios de risco dos dois fatores do processo  $S_t$  (BRANDÃO e DYER, 2009):  $\lambda_x$ , e  $\lambda_y$ . Estes irão penalizar os *drifts* dos dois fatores do processo da seguinte forma:

$$v_x^* = \eta(-\lambda_x/\eta - x_t)$$

$$v_y^* = \alpha - \lambda_y$$

Portanto as equações (3.22) ficarão:

$$\left\{ \begin{array}{l} p_{uu} = \frac{1}{2} \frac{\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sqrt{\Delta t} \eta(-\lambda_x/\eta - x_t) + \sigma_y \sqrt{\Delta t} (\alpha - \lambda_y) + \rho_{xy} \sigma_x \sigma_y}{\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sqrt{\Delta t} (\alpha - \lambda_y)} \\ p_{du} = \frac{1}{2} \frac{\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sqrt{\Delta t} \eta(-\lambda_x/\eta - x_t) - \sigma_y \sqrt{\Delta t} (\alpha - \lambda_y) - \rho_{xy} \sigma_x \sigma_y}{\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sqrt{\Delta t} (\alpha - \lambda_y)} \\ p_{ud} = \frac{1}{2} \frac{\sigma_x \sigma_y - \sigma_y \sqrt{\Delta t} \eta(-\lambda_x/\eta - x_t) + \sigma_y \sqrt{\Delta t} (\alpha - \lambda_y) - \rho_{xy} \sigma_x \sigma_y}{\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sqrt{\Delta t} (\alpha - \lambda_y)} \\ p_{dd} = \frac{1}{2} \frac{\sigma_x \sigma_y - \sigma_y \sqrt{\Delta t} \eta(-\lambda_x/\eta - x_t) - \sigma_y \sqrt{\Delta t} (\alpha - \lambda_y) + \rho_{xy} \sigma_x \sigma_y}{\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sqrt{\Delta t} (\alpha - \lambda_y)} \end{array} \right. \quad (3.23)$$

Estas podem ser diretamente censuradas na mesma forma que a equação (3.5) sendo depois multiplicadas pelas probabilidades marginais de subida e descida do processo MAB ( $y_t$ ) as quais ficam assim, já na forma neutra ao risco:

$$\left\{ \begin{array}{l} p_u = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{(\alpha - \lambda_y) \sqrt{\Delta t}}{\sigma_y} \\ p_d = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{(\alpha - \lambda_y) \sqrt{\Delta t}}{\sigma_y} \end{array} \right.$$

No modelo de Schwartz e Smith (2000)  $x_t$  e  $y_t$  compõe-se da seguinte forma:  $s_t = x_t + y_t$ , e:  $S_t = \exp(s_t)$ . Portanto são dois fatores diferentes de um mesmo processo, como as oscilações de curto prazo e a tendência de longo prazo do preço de uma *commodity*. Mas outras composições de  $x_t$  e  $y_t$  também podem ser modeladas como em Brandão e Dyer (2009) onde os dois fatores referem-se aos riscos privados e de mercado de um projeto.

### 3.3.2.

#### Modelo bi-variável composto de dois processos MRM

A abordagem bi-variável para o modelo de Schwartz e Smith (2000) descrita na seção 3.3.1 é facilmente modificável para modelar uma árvore bi-variável combinando dois processos MRM, ambos segundo o modelo censurado de Nelson e Ramaswami. Essa abordagem é usada por Bastian-Pinto e Brandão (2007) e por Hahn e Dyer (2008). No lugar do processo MAB da equação (2.58), teremos outro MRM, portanto os processos  $x$  e  $y$  terão a seguinte forma:

$$dx = \eta_x (\bar{x} - x) dt + \sigma_x dz_x$$

$$dy = \eta_y (\bar{y} - y) dt + \sigma_y dz_y$$

ainda com:

$$dz_x dz_y = \rho_{xy} dt$$

Neste modelo teremos:  $x_t = \ln(S_x)$ , com:  $\bar{x} = \ln(\bar{S}_x)$ , e:  $y_t = \ln(S_y)$ , com:  $\bar{y} = \ln(\bar{S}_y)$ .  $S_x$  e  $S_y$  podem ser dois processos inteiramente independentes, correlacionados, os quais compõem a decisão envolvida na opção existente. Os movimentos de subida e descida, assim como os *drifts* já considerando os prêmios de risco  $\lambda_x$ , e  $\lambda_y$  serão estes:

$$\Delta x = \sigma_x \sqrt{\Delta t}$$

$$v_x^* = \eta_x (\bar{x} - \lambda_x / \eta_x - x_t)$$

$$\Delta y = \sigma_y \sqrt{\Delta t}$$

$$v_y^* = \eta_y (\bar{y} - \lambda_y / \eta_y - y_t)$$

As probabilidades condicionais (3.23), neste modelo, já neutro a risco ficarão:

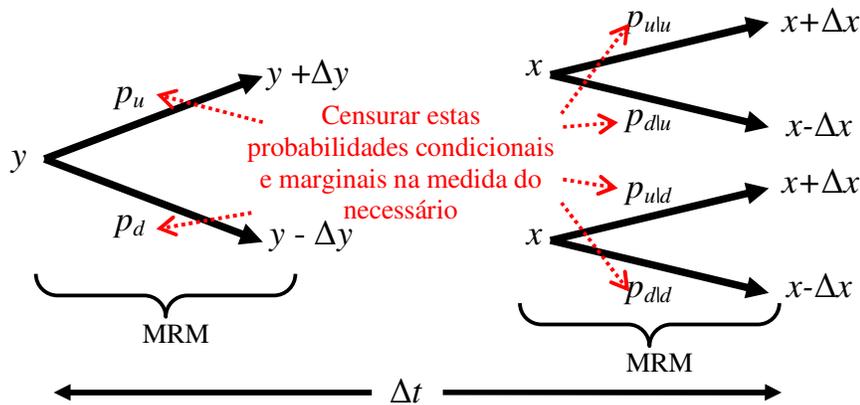
$$\left\{ \begin{aligned}
 p_{ulu} &= \frac{1}{2} \frac{\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sqrt{\Delta t} \eta_x (\bar{x} - \lambda_x / \eta_x - x_t) + \sigma_y \sqrt{\Delta t} \eta_y (\bar{y} - \lambda_y / \eta_y - y_t) + \rho_{xy} \sigma_x \sigma_y}{\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sqrt{\Delta t} \eta_y (\bar{y} - \lambda_y / \eta_y - y_t)} \\
 p_{dlu} &= \frac{1}{2} \frac{\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sqrt{\Delta t} \eta_x (\bar{x} - \lambda_x / \eta_x - x_t) - \sigma_y \sqrt{\Delta t} \eta_y (\bar{y} - \lambda_y / \eta_y - y_t) - \rho_{xy} \sigma_x \sigma_y}{\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sqrt{\Delta t} \eta_y (\bar{y} - \lambda_y / \eta_y - y_t)} \\
 p_{uld} &= \frac{1}{2} \frac{\sigma_x \sigma_y - \sigma_y \sqrt{\Delta t} \eta_x (\bar{x} - \lambda_x / \eta_x - x_t) + \sigma_y \sqrt{\Delta t} \eta_y (\bar{y} - \lambda_y / \eta_y - y_t) - \rho_{xy} \sigma_x \sigma_y}{\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sqrt{\Delta t} \eta_y (\bar{y} - \lambda_y / \eta_y - y_t)} \\
 p_{dld} &= \frac{1}{2} \frac{\sigma_x \sigma_y - \sigma_y \sqrt{\Delta t} \eta_x (\bar{x} - \lambda_x / \eta_x - x_t) - \sigma_y \sqrt{\Delta t} \eta_y (\bar{y} - \lambda_y / \eta_y - y_t) + \rho_{xy} \sigma_x \sigma_y}{\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sqrt{\Delta t} \eta_y (\bar{y} - \lambda_y / \eta_y - y_t)}
 \end{aligned} \right. \quad (3.24)$$

Novamente, estas podem ser diretamente censuradas se foram acima de 1 ou inferiores a 0. As probabilidades marginais de subida e descida do processo  $y_t$  ficam assim:

$$\left\{ \begin{aligned}
 p_u &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\eta_y (\bar{y} - \lambda_y / \eta_y - y_t) \sqrt{\Delta t}}{\sigma_y} \\
 p_d &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{\eta_y (\bar{y} - \lambda_y / \eta_y - y_t) \sqrt{\Delta t}}{\sigma_y}
 \end{aligned} \right.$$

Mas neste modelo essas probabilidades marginais de  $y$  também devem ser censuradas conforme a Figura 3.7, porque modelam um processo MRM segundo a abordagem de Nelson e Ramaswami.

**Figura 3.7. Nó bi-variável censurado de dois MRMs**



### 3.4.

#### **Avaliação de opção de expansão de usina refinadora de açúcar em destilaria flexível de etanol**

O setor de bio-combustíveis, especialmente o brasileiro, é conhecido por dispor de diversas flexibilidades gerenciais que devem ser avaliadas como opções reais, como mostram Brandão, Penedo e Bastian-Pinto (2009), Bastian-Pinto e Brandão (2007) e Goncalves, Neto e Brasil (2006), entre outros autores. Neste capítulo avaliamos uma opção real disponível para as usinas refinadoras de açúcar que já produzem essa *commodity*, de passarem a produzir etanol a partir do mesmo produto de origem, a cana de açúcar. Para isso precisam pagar o preço de exercício dessa opção, que neste caso é o custo de implantação da usina de etanol. O investimento nas usinas de processamento de cana de açúcar é precedido de investimentos vultosos no preparo dos canaviais, os quais demoram até três anos para atingirem o nível de produção nominal de cana. Os investimentos industriais na usina refinadora de açúcar, são substancialmente maiores que aqueles relativos a uma usina produtora de etanol. A usina processadora de cana pode ser unicamente refinadora de açúcar, destiladora de etanol, ou flexível, capaz de produzir qualquer mix destas duas *commodities*.

Para avaliar a opção de expansão da usina de açúcar em usina flexível, consideramos os possíveis fluxos de caixa do modelo: o da produção de açúcar, a qual também produz obrigatoriamente uma parcela de etanol e o da produção de etanol puro, ambos a partir da mesma capacidade processadora de cana de açúcar.

Como o investimento industrial da usina produtora de açúcar é superior ao da usina de etanol, é coerente considerar que uma usina de açúcar já em operação considere o investimento na capacidade de produção de etanol como uma opção real. Neste caso seria uma *call* sobre valor presente dos fluxos de caixa da produção de etanol, subtraídos dos fluxos de caixa da produção de açúcar, quando esta diferença for positiva.

### 3.4.1. Metodologia de avaliação da opção real de expansão

Os fluxos de caixa da refinadora de açúcar (com etanol como subproduto) e da destilaria de etanol são proporcionais aos preços dessas duas *commodities* pagos aos produtores. Essas séries de preço estão disponíveis online no site do CEPEA (2008). Ambas as séries nominais foram convertidas para médias mensais (também nominais) no período de maio de 1998 a setembro de 2009. Para o etanol a série usada é uma média entre álcool anidro (70%), e hidratado (30%), ambos produzidos nas usinas, aproximadamente nessas proporções (GONÇAVES ET AL, 2006 EPE, 2008). Para cada tonelada de cana processada, a refinadora de açúcar produzirá 107 kg de açúcar e mais 12 litros de etanol enquanto a destiladora de etanol produzirá 80 litros da mesma tonelada de cana. Os tributos diretos são da ordem de 16% para o açúcar e 4% para o etanol, mas a produção de açúcar envolve custos variáveis significativamente superiores aos de etanol, entre outras razões pelo maior consumo de energia desse processo. Foi considerada uma usina típica de porte grande com capacidade de processamento de 2,6 milhões de toneladas de cana de açúcar anual. Para esse porte os custos variáveis da produção de açúcar foram considerados de 4 R\$ milhões/ano acima da produção de etanol. Alíquota de imposto de renda é de 34% (já considerando a CSSL) e o investimento necessário na expansão é de 83.200 R\$ mil, já capitalizado de forma a considerar que precisará de 1,5 anos de antecedência ao fluxo de caixa que poderá gerar.

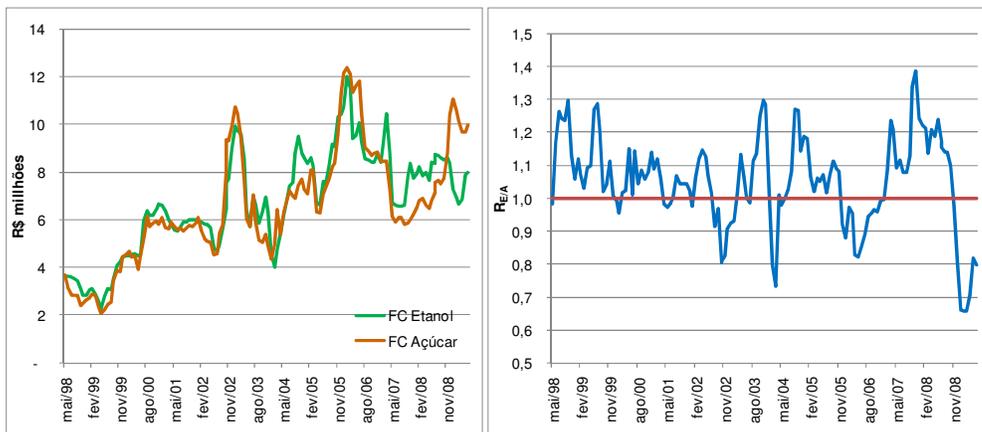
A variável incerta modelada para a avaliação da opção real é a razão dos Fluxos de Caixa Livres (já considerando todos os impostos, custos variáveis e efeito da depreciação de investimentos) dos dois modos de produção, ou seja:

$$R_{E/A} = \frac{\text{Fluxo de caixa livre produção etanol}}{\text{Fluxo de caixa livre produção açúcar}}$$

Essa abordagem permite reduzir as incertezas de duas para apenas uma variável estocástica, retratando a incerteza associada à opção real a ser avaliada. Poderia ter sido escolhida também a diferença entre os fluxos de caixa mencionados a qual serviria da mesma forma para avaliar o comportamento da incerteza sobre o retorno do investimento na capacidade de produção de etanol. Mas ao utilizar a diferença entre os fluxos de caixa poderíamos valores negativos

dessa variável sempre que o fluxo de caixa livre resultante da produção de açúcar resultasse em valor superior ao de etanol. Seria então necessário modelar essa incerteza por um processo aritmético que permitisse retornar valores negativos. No entanto o objetivo desta avaliação é demonstrar a aplicação dos processos de árvores binomiais de uma e duas variáveis na avaliação de um caso prático de opções reais. Os modelos desenvolvidos nas seções 3.2 e 3.3 deste trabalho se adéquam com mais clareza a processos geométricos e aos parâmetros levantados para essa classe de processos. Os parâmetros de processos aritméticos devem ser especificados na mesma unidade da variável estocástica. Neste caso foi utilizado a variável  $R_{EA}$  acima mencionada: razão entre o fluxo de caixa da produção de etanol e do fluxo de caixa históricos (reais) da produção de açúcar, cujo comportamento histórico pode ser acompanhado na Figura 3.8, assim como os valores históricos dos fluxos de caixa usados para calcular essa razão. Os fluxos de caixa foram estimados a partir das séries de preços reais de açúcar e etanol disponíveis.

**Figura 3.8. Fluxos de Caixa Mensais e Razão dos Fluxos de Caixa Etanol/Açúcar**



A opção analisada é calculada da seguinte forma: assumimos um prazo de exercício de 5 anos, em períodos semestrais ( $\Delta t = 0,5$ ), após o qual é considerada perpetuidade sem crescimento do fluxo de caixa mais alto (etanol ou açúcar). Essa consideração supõe que a opção tem vencimento em 5 anos, o que é uma limitação do exemplo. No entanto é bastante razoável supor que após esse período o valor presente da opção seria bastante menor do que durante o período

considerado. Em cada nó da árvore binomial modelada se tem o múltiplo  $R_{EA}$  : caso seja inferior a 1, indica que o fluxo de caixa da produção de açúcar é superior ao da opção de produzir etanol a partir da mesma quantidade de cana de açúcar processada. Caso seja superior a 1, então o fluxo de caixa da produção de etanol será equivalente ao do açúcar, multiplicado por essa razão  $R_{EA}$ . O próprio fluxo de caixa da produção de açúcar tem apresentado ao longo da série levantada um crescimento nominal de 8,83% em termos anuais, ou 4,32% semestral. Esse fato pode ser observado na Figura 3.8. O valor do fluxo de caixa semestral inicial de açúcar é de 32,804 milhões de R\$, e o valor da variável estocástica  $R_{EA}$  : 0,80082, indicando que o início da projeção o fluxo de caixa livre da produção de etanol é inferior ao equivalente de açúcar. Esse valor é um dos mais baixos de toda a série analisada e seria um inibidor do investimento na expansão para produção de etanol. No entanto, a alta volatilidade da variável  $R_{EA}$  certamente deverá atribuir valor a opção de expansão.

Num primeiro passo é construída uma primeira árvore binomial de valores de  $R_{EA}$  segundo o processo estocástico escolhido para modelar esta variável, com 10 passos semestrais. A partir desta é calculada uma segunda árvore binomial, desta vez de valores presentes do projeto de expansão, a partir do fim do período de 5 anos (10 passos semestrais) onde se calcula o valor presente naquele nó da produção de etanol a partir de seus fluxos de caixa em perpetuidade. Este é obtido multiplicando o fluxo de caixa determinístico da produção de açúcar nesse período, pela razão  $R_{EA}$  nesse nó correspondente da primeira árvore (de valores de  $R_{EA}$ ). No passo anterior calcula-se o valor presente em cada nó multiplicando os valores dos nós subseqüentes por suas probabilidades neutras a risco, descontando a taxa livre de risco e adicionando o fluxo de caixa (calculado acima) nesse nó. Procede-se assim até o período inicial.

Passa-se ao passo anterior (passo 9), onde se calcula o valor do nó da seguinte forma: o máximo entre o valor dos passos posteriores, ponderados pelas probabilidades neutras ao risco e descontados pela taxa livre de risco somado ao fluxo de caixa nesse período (este é calculado multiplicando-se o fluxo de caixa do açúcar neste período multiplicado pelo valor de  $R_{EA}$  nesse nó) e subtraído do custo da expansão, ou somente o valor presente dos próximos nós calculado da mesma forma. Procede-se assim até o passo 0 onde se obtém o valor presente da opção de expansão.

Para obter o valor da opção de expansão, sobre a árvore acima se calcula em cada nó o valor máximo entre o exercício da opção nesse nó: valor presente da expansão já calculado subtraído do custo da expansão, o valor presente da produção de açúcar, e o valor da continuação: valor presente dos nós subsequentes ponderados pelas suas probabilidades neutras ao risco e descontados a taxa livre de risco. Novamente procede-se assim até o início da árvore onde se obtêm o valor da empresa com a opção de expansão.

### 3.4.2. Modelagem e resultados

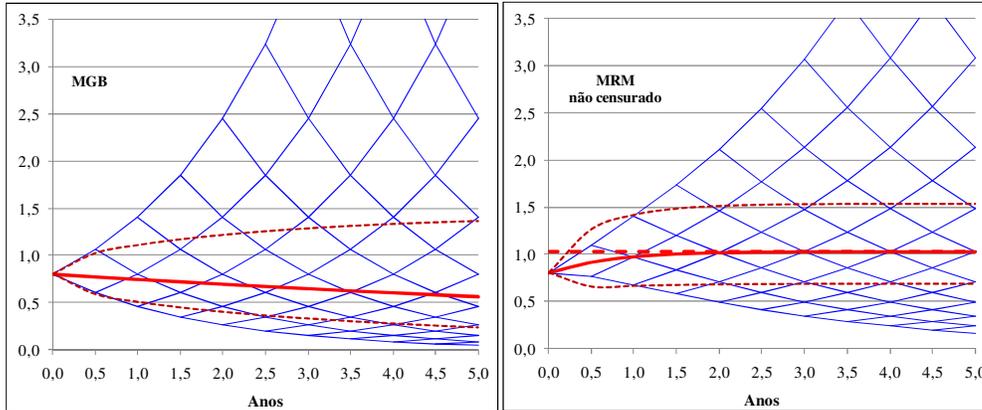
São utilizadas três abordagens por árvores binomiais para modelar a incerteza da razão  $R_{EA}$ . Inicialmente esta é modelada como um MGB. Os parâmetros (todos em bases anuais) foram levantados para a série de  $R_{EA}$  calculada a partir dos fluxos de caixa históricos (reais) e mostrada na Figura 3.8. Para o modelo MGB estes foram: volatilidade:  $\sigma_R = 39,54\%$ , taxa de crescimento (*drift*)  $\alpha_R = 3,96\%$ . O primeiro é o desvio padrão dos log-retornos da série, o segundo a média desses mesmos log-retornos aumentada da metade da variância encontrada.

Depois a variável  $R_{EA}$  é modelada como uma reversão à média geométrica, usando a abordagem desenvolvida na seção 3.2.2, ou seja por árvore binomial de reversão à média não censurada. Os parâmetros também foram levantados a partir da série disponível usando a abordagem de Bastian-Pinto e Brandão (2007). Estes foram: a velocidade de reversão,  $\eta = 1,51$ ; parâmetro de volatilidade:  $\sigma_R = 35,81\%$  e média de longo prazo:  $\bar{R} = 1,0323$ .

Ambas as abordagens usaram os seguintes parâmetros em bases anuais e nominais: taxa de desconto ajustada ao risco:  $k = 20\%$ ; taxa livre de risco:  $rf = 8\%$ ; prêmio de risco da variável  $R_{EA} = 10,25\%$ . Com essas taxas de desconto e os valores dos fluxos de caixa da usina produtora somente de açúcar obtém-se um valor presente para esta de R\$ 493,382 milhões. O *drift* do processo MGB neutro ao risco:  $\alpha_{Rnr} = -1,04\%$ , e a média do processo MRM ajustada para o processo

neutro ao risco:  $\bar{R}_{nr} = 1,0211$ . As árvores binomiais modelando a variável  $R_{EA}$  por esses dois processos podem ser vistas na Figura 3.9.

**Figura 3.9. Árvores da variável  $R_{EA}$  para processos MGB e MRM**



Os resultados do cálculo do valor da opção de expansão por essas duas árvores binomiais são os seguintes:

Considerando que a variável estocástica tem um comportamento seguindo um Movimento Geométrico Browniano mostrado na primeira árvore da Figura 3.9, com os parâmetros levantados acima, o valor da opção de expansão obtido no passo inicial da árvore subtraído do valor presente dos fluxos de caixa da produção de açúcar, é R\$ 16,607 milhões, ou 3,4% do valor da usina sem flexibilidade.

Considerando agora que a variável estocástica tem um comportamento seguindo um Movimento de Reversão à Média mostrado na segunda árvore da Figura 3.9, com os parâmetros também levantados acima, o valor da opção de expansão obtido da mesma forma é R\$ 88,165 milhões, ou 17,4% do valor da usina sem flexibilidade. Fica aparente que a opção de expansão tem valor bastante superior ao caso MGB quando a variável estocástica é modelada como um MRM. Isso é explicado pelo *drift* neutro a risco negativo ( $\alpha_{Rnr} = -1,04\%$ ) estimado para o MGB, enquanto que a média de longo prazo neutra ao risco no MRM é ainda superior a 1 ( $\bar{R}_{nr} = 1,0211$ ).

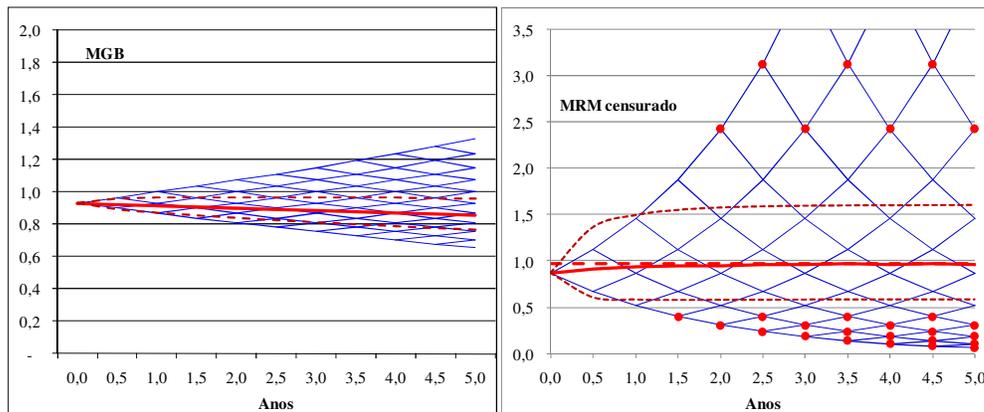
A mesma opção de expansão também foi modelada considerando que a variável estocástica segue um processo segundo o modelo de Schwartz e Smith (2000) portanto com características de caminho aleatório e de reversão à média.

Os parâmetros do processo correspondente mostrado na Figura 3.7, foram levantados segundo a abordagem descrita na seção 2.5.1.4.4. Estes são:

$$\begin{array}{lll} \alpha : & -1,6\% & \eta_x : 1,030 & \rho_{xy} : 0,150 \\ \sigma_y : & 5,0\% & \sigma_x : 36,0\% \end{array}$$

Foi considerado o mesmo prêmio de risco usado nas modelagens anteriores, e este foi inteiramente atribuído ao fator de curto prazo do processo (MRM), através da média do processo. As duas árvores independentes de MGB e de MRM dos dois fatores do processo podem ser vistas na Figura 3.10. Pode ser observada a baixa volatilidade encontrada no fator de longo prazo que segue um MGB.

**Figura 3.10. Árvores da variável  $R_{E/A}$  para processo conjunto MGB e MRM**



Esta modelagem, mais complexa, considera as diferentes características do processo e o valor da opção de expansão obtido no passo inicial da árvore é R\$ 33,291 milhões, ou 6,7% do valor da usina sem flexibilidade. Nota-se que este valor se situa entre os dois achados anteriormente com as diferentes modelagens, e portanto confirma que o valor da opção tem forte influência do processo estocástico escolhido na modelagem.

Este exemplo de cálculo de uma opção real hipotética, apesar de baseado em dados reais, tem como finalidade demonstrar a aplicabilidade das metodologias de árvores binomiais desenvolvidas neste capítulo, e expor o quanto diferentes modelagens podem afetar o valor de uma opção real. Mas é um caso simplificado que não considera restrições reais existentes em usinas, como contratos de fornecimento e limitações logísticas.

### 3.5. Conclusões

Neste capítulo foi mostrado que a abordagem por árvores binomiais recombinantes (*lattices* ou treliças) não precisa ser restrita a modelagem de ativos contingentes escritos somente sobre variáveis cujo comportamento estocástico seja semelhante a um MGB. Foram propostas duas formas de aproximação binomial para reversão à média, uma censurada e outra não censurada, que aproximam um MRM geométrico permitindo a avaliação de opções americanas sobre ativos que tenham esse tipo de comportamento. Foi mostrado que a abordagem por árvore censurada pode ser composta num modelo bi-variável seja com um MGB ou com outro MRM permitindo utilizar não somente o modelo de dois fatores conhecido como modelo de Schwartz e Smith (2000), mas também processos dependentes de duas variáveis estocásticas independentes e correlacionadas. A abordagem por árvores binomiais é uma ferramenta precisa, notavelmente robusta, e intuitivamente atraente para a avaliação de opções, e ao propor uma aproximação para MRM este capítulo da tese expande a aplicação dessa metodologia a opções americanas que geralmente são tratadas por métodos muito mais intensivos em programação como árvores trinomiais ou métodos de simulação por mínimos quadrados ordinários.

### 3.6. Referências bibliográficas

BASTIAN-PINTO, C. L.; BRANDÃO, L. E. T. Modelando Opções de Conversão com Movimento de Reversão à Média. **Revista Brasileira de Finanças**, v. 5, n. 2, p.p. 97-124, Dez , 2007.

BESSEMBINDER, H. COUGHENOUR, J.SEQUIN, P.SMOLLER, M. Mean Reversion in Equilibrium Asset Prices: Evidence from Futures Term Structure. **The Journal of Finance**, v. 50, n.1, p.p. 361-375, 1995.

BLACK, F.; SCHOLES M. The Pricing of Options and Corporate Liabilities. **Journal of Political Economy**, n. 81, p.p. 637 – 654, May-Jun, 1973.

BOYLE, P. A. A Lattice Framework for Option Pricing with Two State Variables. **Journal of Financial and Quantitative Analysis**, n. 23, n. 1, p.p. 1 – 12, 1988.

BRANDÃO, L. E. T.; DYER, J. S. Projetos de Opções Reais com Incertezas Correlacionadas. **Base-Revista de Administração e Contabilidade da Unisinos**, v. 6, n. 1, p.p. 19-26, Jan/Abr, 2009.

BRANDÃO, L. E. T.; HAHN, W.J.; DYER, J.S. Using Binomial Decision Trees to solve Real Options Valuation Problems. **Decision Analysis**, v. 2, n. 2, p.p. 69-88, June , 2005.

BRANDÃO, L. E. T.; PENEDO, G. M C.; BASTIAN-PINTO, C. L. **The Value of Switching Inputs in a Biodiesel Plant in Brazil**. in annals: 13th Annual International Conference on Real Options at University of Minho, Portugal & University of Santiago de Compostela, Spain, 17-20 June, 2009.

CLEWLOW, L; STRICKLAND, C. **Valuing Energy Options in a One Factor Model Fitted to Forward Prices**. Working paper, School of Finance and Economics, University of Technology, Sydney, Australia, April, 1999, disponível em: <[http://www.qfrc.uts.edu.au/research/research\\_papers/rp10.pdf](http://www.qfrc.uts.edu.au/research/research_papers/rp10.pdf)> , acessado em: 19 de setembro, 2009.

COPELAND, T.; ANTIKAROV, V., A. **Real Options: A Practitioner's Guide**. Texere , New York, 2003.

COX, J, C.; ROSS, S. A.; RUBINSTEIN, M. Option pricing: A simplified approach. **Journal of Financial Economics**, n. 7, p.p. 229–263, September, 1979.

DIAS, M. A. G. **Stochastic Processes with Focus in Petroleum Applications**, disponível em: <<http://www.puc-rio.br/marco.ind/stochast.html>>, acessado em: 29 de setembro, 2009.

DIXIT, A., K.; PINDICK, R., S. **Investment under Uncertainty**. Princeton University Press, Princeton, 1994.

EPE - Empresa de Pesquisa Energética, 2008. Perspectivas para o Etanol no Brasil. disponível em: <[http://www.epe.gov.br/Petroleo/Paginas/Estudos\\_28.aspx](http://www.epe.gov.br/Petroleo/Paginas/Estudos_28.aspx)>; acessado em: 16/12/2008.

GONCALVES, D., NETO, J., BRASIL, H. **The option of switching an investment project into an agribusiness project**. in annals: 10th International Conference on Real Options. New York, 2006.

HAHN, W. J. **A Discrete-Time Approach for Valuing Real Options with Underlying Mean-Reverting Stochastic Processes**. PhD Dissertation, The University of Texas, Austin, May, 2005.

HAHN, W. J.; DYER, J.S. Discrete Time Modeling of Mean-Reverting Stochastic Processes for Real Option Valuation. **European Journal of Operational Research**, v. 183, n. 2, p.p. 534-548, Jan, 2008.

HULL, J., C. **Options, Futures and Other Derivatives**. Prentice Hall 4th ed, Upper Saddle River, 1999.

HULL, J.; WHITE, A. – a. Numerical Procedures for Implementing Term Structure Models I: Single-Factor Models. **The Journal of Derivatives**, v. 2, n. 1, p.p. 7 -16, Fall, 1994.

HULL, J.; WHITE, A. – b. Numerical Procedures for Implementing Term Structure Models II: Two-Factor Models. **The Journal of Derivatives**, v. 2, n. 2, p.p. 37 - 48, Winter, 1995.

LONGSTAFF, F.A.; SCHWARTZ, E.S. Valuing American Options By Simulation: A Simple Least-Square Approach. **Review of Financial Studies**, v. 14, n. 1, p.p. 113-147, 2001.

NELSON, D. B.; RAMASWAMY, K. Simple Binomial Processes as Diffusion Approximations in Financial Models. **The Review of Financial Studies**, v. 3, n. 3, p.p. 393-430, 1990.

PINDYCK, R. S.; RUBINFELD, D. L. **Econometric Models and Economic Forecasts**. McGraw-Hill, Inc 3rd edition, New York, 1991.

SCHWARTZ, E. S. The Stochastic Behavior of Commodity Prices: Implications for Valuation and Hedging. **The Journal of Finance**, v. 52, n. 3, p.p. 923-973, 1997.

SCHWARTZ, E. S.; Valuing Long Term Commodity Assets. **Financial Management**, n. 27, p.p. 57-66, 1988.

SCHWARTZ, E. S. ; SMITH, J. E. Short-term Variations and Long-term Dynamics in Commodity Prices. **Management Science**, v. 7, n. 46, p.p. 893-911, Jul, 2000.

### Anexo 3.1

#### Derivação dos valores de subida e descida e probabilidade de subida no modelo binomial para MRM não censurado

Ao escrevermos o termo  $e^{-\eta\Delta t}$  como uma série de Taylor, temos:

$$e^{-\eta\Delta t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\eta\Delta t)^n}{n!} = 1 + (-\eta\Delta t) + \frac{(-\eta\Delta t)^2}{2!} + \frac{(-\eta\Delta t)^3}{3!} + \dots \quad (3.25)$$

A aproximação binomial pressupõe a utilização de intervalos de tempo curtos. Dessa forma podemos considerar os termos  $\Delta t$  cuja potência for superior ou igual a dois, como convergindo para 0. Então podemos aproximar:

$$e^{-\eta\Delta t} \approx 1 - \eta\Delta t \quad (3.26)$$

Com esta relação podemos escrever as equações (3.8) e (3.9):

$$E[x_t] \approx \bar{x} + (x_0 - \bar{x})(1 - \eta\Delta t) = x_0 + (\bar{x} - x_0)\eta\Delta t \quad (3.27)$$

$$Var[x_t] \approx \frac{\sigma^2}{2\eta} (1 - 1 + 2\eta\Delta t) = \sigma^2 \Delta t \quad (3.28)$$

Com:  $\Delta t = t - t_0$ , da relação do processo binomial (3.10), obtém-se:

$$E[x_t] = pU + (1 - p)D \quad (3.29)$$

Também temos:

$$Var[x_t] = E[x_t^2] + E[x_t]^2 \quad (3.30)$$

Da equação com o processo binomial (3.10):

$$Var[x_t] = pU^2(1 - p)D^2 - (pU + (1 - p)D)^2$$

Expandindo:

$$Var[x_t] = pU^2 + (1 - p)D^2 - p^2U^2 - (1 - p)^2D^2 - 2p(1 - p)UD$$

$$Var[x_t] = pU^2 + D^2 - pD^2 - p^2U^2 - D^2 - p^2D^2 + 2pD^2 - 2pUD + 2p^2UD$$

$$Var[x_t] = pU^2 - p^2U^2 - p^2D^2 + pD^2 - 2pUD + 2p^2UD$$

$$Var[x_t] = p(U^2 + D^2 - 2UD) - p^2(U^2 + D^2 - 2UD)$$

$$Var[x_t] = p(1 - p)(U - D)^2 \quad (3.31)$$

Com as relações e obtidas do processo binomial (3.10), e as aproximações do processo aritmético de reversão à média e , podemos fazer:

$$(3.27) \equiv (3.29), \text{ e}$$

$$(3.28) \equiv (3.31)$$

Da primeira relação, e considerando:  $x_t^* = \bar{x}^* = 0$ , como já explicado, obtemos :

$$(-x_t^*)\eta\Delta t \equiv pU + (1-p)D$$

E da segunda:

$$\sigma^2\Delta t \equiv p(1-p)(U-D)^2$$

Temos assim duas equações com três incógnitas:  $p$ ,  $U$  e  $D$ . Para reduzir o número de incógnitas, fazemos a consideração que tornará a árvore binomial recombinante:  $D = -U$ . Dessa forma as equações acima ficam:

$$\eta(-x_t^*)\Delta t \equiv (2p-1)U \quad (3.32)$$

$$\sigma^2\Delta t \equiv 4p(1-p)U^2 \quad (3.33)$$

Com:  $(3.32)^2 + (3.33)$ :

$$\eta^2(-x_t^*)^2 \Delta t^2 + \sigma^2\Delta t = U^2$$

Substituindo em (3.32)<sup>2</sup>:

$$\eta^2(-x_t^*)^2 \Delta t^2 = (2p-1)^2 \left( \eta^2(-x_t^*)^2 \Delta t^2 + \sigma^2\Delta t \right)$$

$$2p-1 = \frac{\eta(-x_t^*)\Delta t}{\sqrt{\eta^2(-x_t^*)^2 \Delta t^2 + \sigma^2\Delta t}} \quad (3.34)$$

$$p_{x_t} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\eta(-x_t^*)\sqrt{\Delta t}}{\sqrt{\eta^2(-x_t^*)^2 \Delta t + \sigma^2}} \quad (3.35)$$

Obtém-se uma expressão para  $p$ , em função dos parâmetros do processo ( $\eta$ ,  $\sigma$ ), do intervalo de discretização  $\Delta t$ , mas ainda do valor de  $x_t^*$ . É fácil verificar que a expressão de  $p$  sempre estará entre 0 e 1, portanto não havendo a necessidade de censurar esta, como no modelo de Nelson e Ramaswamy (1990). Chamando:

$$\alpha(x_t^*) = -x_t^*\eta\sqrt{\Delta t}$$

$$p = 0,5 \left( 1 + \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \sigma^2}} \right)$$

Para que:  $p > 1$ , então é preciso que:  $\alpha > \sqrt{\alpha^2 + \sigma^2}$ , o que não é possível, independentemente do sinal de  $\theta$ .

Para que:  $p < 0$ , é preciso que:  $-\alpha > \sqrt{\alpha^2 + \sigma^2}$ , o que também não é possível. Neste modelo não é necessário censurar o valor da probabilidade como no modelo de Nelson e Ramaswamy (1990), mas ainda depende-se de uma árvore de probabilidades de subida:  $p_{(i,j)}$  a qual é dependente dos valores de  $x_{(i,j)}^*$ . Os índices  $i$  e  $j$  indicam a quantidade de movimentos de subida ( $i$ ) e de descida ( $j$ ) que a trajetória levando ao ponto  $x_{(i,j)}^*$  sofreu desde o ponto de partida:  $x_0^* = 0$ .

Para derivar a magnitude dos movimentos de subida e descida, de (3.32) temos:

$$U = \frac{-x_t^* \eta \Delta t}{(2p-1)}$$

Com (3.34):

$$U = \frac{\eta(-x_t^*) \Delta t \sqrt{\eta^2 (-x_t^*)^2 \Delta t^2 + \sigma^2 \Delta t}}{\eta(-x_t^*) \Delta t}$$

$$U = \sqrt{\eta^2 (-x_t^*)^2 \Delta t^2 + \sigma^2 \Delta t} = -D$$

No entanto o termo  $\eta^2 (-x_t^*)^2 \Delta t^2$  impede a árvore de ser recombinante, porque, mesmo usando  $U = -D$ , ele é função de  $x_t$  e, portanto não permite que o cálculo a partir de um nó superior iguale aquele a partir de um nó inferior. Mas podemos considerar que  $\Delta t^2 \rightarrow 0$ , na medida em que escolhermos intervalos de tempo  $\Delta t$  pequenos. Então usaremos:

$$U = -D \equiv \sigma \sqrt{\Delta t}$$

Portanto obtemos para o modelo não censurado de reversão á média, de média 0 e valor inicial 0:

$$x^{*+} = x^* + \sigma \sqrt{\Delta t}$$

$$x^{*-} = x^* - \sigma \sqrt{\Delta t}$$

$$p_{x_t} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\eta(-x_t^*) \sqrt{\Delta t}}{\sqrt{\eta^2 (-x_t^*)^2 \Delta t + \sigma^2}}$$

### Anexo 3.2

#### Derivação do modelo censurado de Nelson e Ramaswamy (1990) para reversão à média

Para chegar ao modelo censurado de Nelson e Ramaswamy (1990), a partir da equação (3.35), em primeiro lugar precisamos considerar que para este outro modelo o valor da média de longo prazo é a média real  $\bar{x}$ :

$$p = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\frac{\eta^2 (\bar{x} - x_t)^2 \Delta t^2 + \sigma^2 \Delta t}{\eta^2 (\bar{x} - x_t)^2 \Delta t^2}}}$$

$$p = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\eta^2 (\bar{x} - x_t)^2 \Delta t}}}$$

Considerando que se está escolhendo valores de  $\Delta t$  pequenos, o termo  $\frac{\sigma^2}{\eta^2 (\bar{x} - x_t)^2 \Delta t}$  passa a ser grande frente a 1 e simplificamos a equação acima

retirando o 1 da raiz no denominador:

$$p \equiv \frac{1}{2} + \frac{\eta(\bar{x} - x_t)\sqrt{\Delta t}}{2\sigma}$$

Comparando esta equação com a (3.4) temos:

$$\alpha(x, t) = \eta(\bar{x} - x_t), e$$

$$\sigma(x, t) = \sigma$$

Mas em função da simplificação feita acima podemos obter valores negativos ou superiores a 1:

$$\text{Se } (\bar{x} - x_t)\sqrt{\Delta t} > \sigma, \text{ então } p_{x_t} > 1$$

$$\text{Se } (\bar{x} - x_t)\sqrt{\Delta t} < -\sigma, \text{ então } p_{x_t} < 0$$

Nesses casos o valor de  $p_t$  precisa ser censurado conforme o esquema mostrado abaixo:

$$p \equiv \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{\eta(\bar{x} - x)\sqrt{\Delta t}}{2\sigma} & \text{se } p \geq 0 \text{ e } p_t \leq 1 \\ 0 & \text{se } p_t < 0, p_t \text{ é censurado} \\ 1 & \text{se } p_t > 1, p_t \text{ é censurado} \end{cases}$$

Essas condições são aquelas já explicitadas pela fórmula (3.5).