

2

Processos Estocásticos de Reversão à Média para Aplicação em Opções Reais

Resumo

Este capítulo analisa alguns métodos usados na determinação da validade de diferentes processos estocásticos para modelar uma variável incerta e verificar se esta pode ter seu comportamento descrito por um caminho aleatório ou se os modelos de reversão à média descrevem melhor seu comportamento. São analisados os principais modelos de reversão à média passíveis de serem usados em avaliação por opções reais, sejam estes de fator único, aritmético e geométrico, ou de dois fatores. Para cada modelo analisado é demonstrada ou desenvolvida uma abordagem para determinar os parâmetros necessários à sua modelagem, sempre a partir de séries temporais existentes de valores da variável que se pretende modelar. Dessa forma é possível utilizar diversos modelos estocásticos em aplicações de opções reais, não se restringir a modelagem por movimento geométrico browniano. As abordagens desenvolvidas são então aplicadas a séries temporais de preços *spot* de etanol e açúcar no mercado brasileiro. Em seguida, os parâmetros de cada modelo desenvolvido são levantados e comparados, mostrando que para preços deflacionados os modelos auto-regressivos são mais adequados, enquanto que nas séries nominais o processo de caminho aleatório é mais apropriado. Também é mostrado que ambos processos podem ser integrados num modelo de dois fatores, mais complexo, porém que melhor descreve o comportamento dessas variáveis.

2.1.

Introdução

As incertezas responsáveis pela volatilidade dos projetos geralmente são modeladas como um Movimento Geométrico Browniano (MGB) para fins de avaliação pela teoria das opções reais. Isso simplifica sua modelagem e também

permite que a estimação dos parâmetros necessários para essa modelagem seja feita a partir de séries temporais de valores da variável incerta. Mas em determinado tipos de variáveis incertas, essa simplificação excessiva que pode levar a erros de superestimação do valor das opções reais, gerando uma decisão de investimento não ótima.

Os modelos estocásticos de reversão à média de fator único, como os de Dixit e Pindyck (1994) e Schwartz (1997) ou de dois ou mais fatores, como os de Gibson e Schwartz (1990), ainda Schwartz (1997), Baker, Mayfield e Parsons (1998) e Schwartz e Smith (2000) podem aproximar de forma mais realista o comportamento de diversas variáveis incertas. Por outro lado além de serem muitos, os modelos de reversão à média, principalmente os geométricos, têm a estimação de parâmetros mais complicada que no caso do MGB. Muitos destes modelos foram desenvolvidos para descrever o comportamento de *commodities* que dispõe de contratos futuros negociados em bolsas de mercadorias. Quando é este o caso, a estimação dos parâmetros pode ser feita por ferramentas como filtro de *Kalman* ou o filtro de partículas (AIUBE, BAYDIA e TITO, 2006). Quando não se dispõe de preços futuros, ou quando estes não têm liquidez, ou mesmo quando a variável incerta não é um preço de mercadoria, essas ferramentas não fornecem estimativas precisa (SCHWARTZ e SMITH, 2000, p. 902) e é necessário recorrer a estimações econométricas para obter os parâmetros necessários dos modelos de reversão à média.

Este capítulo se propõe a analisar os métodos geralmente usados para avaliar se uma variável pode ter seu comportamento descrito por um MGB ou se os modelos de reversão à média descrevem melhor seu comportamento, e propor uma abordagem complementar. Também serão explicados os principais modelos de reversão à média passíveis de serem usados em avaliação por opções reais. Para cada um destes será mostrado como estimar os parâmetros que o compõe à partir de série histórica, assim como proceder à modelagem de sua simulação, tanto real quanto neutra ao risco, necessária para o cálculo do valor de opções reais. Finalmente serão usadas séries de preços *spot* de açúcar e etanol para estimar os parâmetros de cada modelo descrito. Os resultados mostram que os processos de reversão à média se aplicam com muita precisão às séries de preços deflacionadas, mas no caso de preços nominais o modelo de dois fatores, que

considera parte do processo como um MGB e parte como uma reversão à média, é mais adequado apesar de sua maior complexidade.

O capítulo está estruturado da seguinte forma. Após esta introdução, é explicado o comportamento das variáveis estocásticas usadas em opções reais. Na seção 2.3 é proposta uma metodologia de determinação de validade do processo, seja MGB ou de reversão à média. Na seção 2.4 são descritos os processos de reversão à média de um fator assim como a estimação de parâmetros para estes, e na 2.5 um processo de dois fatores. Os resultados da aplicação desses modelos a séries de preços de etanol e açúcar são mostrados na seção 2.6 e conclusões e sugestões de outras pesquisas na seção 2.7.

2.2.

Processos Estocásticos e seu Uso em Aplicações de Opções Reais

Para que opções reais tenham valor são necessárias três condições com relação ao valor do ativo subjacente: *incerteza* do seu valor futuro, *irreversibilidade*, pelo menos parcial em relação ao investimento uma vez este realizado e *flexibilidade* quanto à capacidade da gestão em agir, alterando o caminho futuro do valor do projeto em resposta a resolução das *incertezas* (DIXIT e PINDYCK, 1994).

Quanto à *incerteza*, esta está presente na grande maioria dos projetos e é a principal fonte de riscos, tanto privados quanto públicos, associados ao projeto. A origem desta são as variáveis que compõe o projeto e cujo valor futuro é geralmente apenas estimado por uma projeção determinística. Essas variáveis incertas podem ser de diversas origens e tipos: preço de uma *commodity*, quantidade de um mercado (como quantidade de veículos trafegando, demanda futura por um serviço, etc.), fatia a ser capturada desse mercado, incerteza tecnológica, etc. A correta modelagem do comportamento futuro dessas incertezas é de fundamental importância para a avaliação das opções reais porventura existentes. Negligenciar esse aspecto da modelagem numa avaliação por opções reais pode levar a resultados enganosos, seja super-dimensionando ou negligenciando o seu real valor.

Frequentemente é usado o Movimento Geométrico Browniano (MGB) como o fazem Paddock, Siegel, e Smith (1988), como modelo estocástico para modelar as variáveis incertas de um projeto, sem maiores questionamentos quanto a sua validade para as incertezas mapeadas. Este é fácil de modelar e, a rigor, é um ótimo processo estocástico para modelagem de preços de ações, *commodities* financeiras como ouro, índices de mercado como Ibovespa, e ativos financeiros em geral, mas também para demanda de novos produtos, terrenos, etc.

Muitas vezes, no entanto, a incerteza a ser modelada não segue um processo estocástico similar a um MGB (LUND, 1993), e é frequentemente o caso quando é proporcional a preços que dependem de nível de equilíbrio de longo prazo, como é o caso de *commodities* não financeiras (AL-HARTHY, 2007, GEMAN, 2005, PINDYCK, 2001, 1999, METCALF e HASSET, 1995, SMITH e MCCARDLE, 1998, BRENNAM e SCHWARTZ, 1985, BHATTACHARYA, 1978). Alguns autores como Lo e MacKinlay (1988) afirmam que mesmo preços de ações não são corretamente descritos por um MGB. Nesse caso, geralmente um Modelo de Reversão à Média (MRM) é considerado o mais adequado. A lógica por trás de um MRM vem da microeconomia: quando os preços estão deprimidos (ou abaixo de sua média de longo prazo), a demanda desse produto tende a aumentar, ao passo que sua produção tende a diminuir. Isso é devido ao fato que o consumo de uma *commodity* com preço baixo aumenta enquanto os baixos retornos para as empresas produtoras as levarão a postergar investimentos e fechar unidades menos eficientes, reduzindo assim a disponibilidade do produto. O oposto ocorrerá se os preços estiverem altos (ou acima da média de longo prazo).

No entanto a reversão pura de fator único pode ser demais previsível e, dependendo da variável modelada, poderia até ser uma escolha de modelagem pior que o MGB. Em determinados casos seria mais realista então combinar um processo de MRM com um MGB modelando o nível de equilíbrio, ou então adicionar um processo de saltos. Dias (2008) classifica os processos estocásticos para modelagem de preços de petróleo em três categorias mostradas na Tabela 2.1.

Tabela 2.1. Processos estotásticos mais usuais

Tipo de Modelo Estocástico	Nome do Modelo	Referências
Modelo Imprevisível	Movimento Geométrico Browniano (MGB)	Paddock, Siegel e Smith (1988)
Modelo Previsível	Reversão à Média Pura (MRM)	Dixit e Pindyck (1994), Schwartz (1997, modelo 1)
Modelos mais Realistas	Modelo de dois ou três fatores, e de reversão para nível incerto de longo prazo	Gibson e Schwartz (1990), Schwartz (1997, modelos 2 & 3), Baker, Mayfield e Parsons (1998), Schwartz e Smith (2000)
	Reversão à média com saltos	Dias e Rocha (1999, 2001), Aiube, Baidya e Tito (2006)

Fonte: Dias (2008)²

Os processos de reversão à média geralmente utilizados são baseados em modelos desenvolvidos para descrever o comportamento de *commodities* e alguns destes usam o conceito da *taxa de conveniência* (GIBSON e SCHWARTZ, 1990, SCHWARTZ, 1997, CASASSUS e COLLIN-DUFRESNE, 2005) para descrever esse comportamento como expõe Pindyck (2001). Para isso precisam de séries temporais de preços de contratos futuros da *commodity* modelada, os parâmetros do modelo (ou a calibragem deste) são então levantados com a técnica de filtro de Kalman ou até de filtro de partículas (AIUBE, BAIDYA e TITO, 2006). No entanto as *commodities* que dispõe de séries de preços futuros com liquidez suficiente para corretamente aplicar essa técnica são relativamente poucas, como preços de petróleo, gás natural nos Estados Unidos, e alguns produtos negociados em bolsas de mercadorias. Além desse ponto muitas *commodities* não dispõem de séries de preços *spot* e é então usado o primeiro contrato futuro como *proxy* do preço *spot*.

Nas aplicações de opções reais frequentemente as variáveis incertas não são somente preços de *commodities* transacionados em bolsas de mercadorias, mas variáveis do próprio projeto e até preços de produtos dos quais não se dispõe de séries de preços futuro. O que se pode observar dessas variáveis são valores históricos dos quais se tem séries temporais.

² <http://www.puc-rio.br/marco.ind/stochast.html>

2.3. Determinação da Validade do Processo Estocástico

Para se determinar qual modelo pode ser utilizado na modelagem de uma variável estocástica podemos, num primeiro passo, testar a validade do modelo MGB a partir de uma série temporal desta. Como o MGB é um caso de um processo chamado de raiz unitária, ou seja, uma série temporal altamente persistente na qual o valor corrente é igual ao valor do período anterior mais uma perturbação fracamente dependente, essa série pode ser testada para a presença de raiz unitária, através de uma regressão linear por mínimos quadrados e aplicando-se um teste de Dickey-Fuller. Isto é, fazendo a regressão sobre a equação: $x_t = a + b x_{t-1} + \varepsilon_t$, e verificando-se a hipótese nula de que $b=1$, em qual caso a série terá uma raiz unitária e segue um caminho aleatório. Em outras palavras, ela pode ser modelada por um MGB. A forma mais usual é de reescrever essa equação, subtraindo-se x_{t-1} de ambos os lados como na equação (2.1):

$$x_t - x_{t-1} = a + (b-1) x_{t-1} + \varepsilon_t \quad (2.1)$$

A seguir verifica-se a hipótese nula de que $(b-1) = 0$, o que equivale a $b=1$. Como o estimador por mínimos quadrados possui viés para zero, o teste t padrão não pode ser utilizado, e precisaremos usar as estatísticas de valores dos testes de Raiz Unitária (Dickey-Fuller). Estas são tabeladas e conhecidas, e podem ser vistas na Tabela 2.2.

Tabela 2.2. Valores críticos assintóticos de teste t de Raiz Unitária. Sem tendência temporal

Nível de Significância	1%	2,5%	5%	10%
Valores Críticos	-3,43	-3,12	-2,86	-2,57

Fonte: Wooldridge, 2000, p. 580

Para séries com evidente tendência temporal, a equação (2.2) precisa ser modificada na seguinte forma, para levar em consideração essa tendência:

$$x_t - x_{t-1} = a + (b-1) x_{t-1} + ct + \varepsilon_t \quad (2.2)$$

Nesse caso os valores críticos do teste mudam, uma vez que ao retirar a tendência de uma série com raiz unitária, esta passa a ter características de um processo $I(0)$. Portanto é necessário também usar uma magnitude maior para as estatísticas t de forma a rejeitar a presença de raiz unitária. Nesse caso usa-se um teste expandido de Dickey-Fuller cujos valores estão na Tabela 2.3.

Tabela 2.3. Valores críticos assintóticos de teste t de Raiz Unitária. Com tendência temporal

2.4.Nível de Significância	2.5.1%	2.6.2,5%	2.7.5%	2.8.10%
2.9.Valores Críticos	2.10.-3,96	2.11.-3,66	2.12.-3,41	2.13.-3,12

Fonte: Wooldridge, 2000, p. 583

É importante resaltar que é muito difícil rejeitar a hipótese nula de Raiz Unitária, ou seja, que a série segue um caminho aleatório (MGB). Dixit e Pindyck (1994) e Pindyck (1999) conseguem comprovar que os preços de petróleo não seguem um MGB, mas apenas para uma série de 120 anos. Ao analisar séries mais curtas, de 30 e 40 anos, estes autores não conseguem rejeitar a hipótese nula.

Outra informação também é obtida dessa regressão: a H_1 , é que $b < 1$ ($b > 1$ não é geralmente considerado, pois significaria que a série tem comportamento explosivo (WOOLDRIDGE, 2000). Ainda que não rejeitando a H_0 , quando obtemos valores de $b < 1$, podemos assegurar que temos indícios de reversão à média. Veremos abaixo que inclusive esse valor de b é proporcional ao parâmetro conhecido como “velocidade de reversão” da série, e que no caso de $b = 1$, essa velocidade seria nula. A não rejeição de um caminho aleatório (MGB), ainda pode permitir a existência de algum nível de auto-regressão (reversão à média) na variável estudada. Portanto, como sugerem Dixit e Pindyck, a escolha do processo estocástico poderá depender tanto de considerações estatísticas quanto teóricas, por exemplo intuição com relação aos mecanismos de equilíbrio do ativo modelado (DIXIT e PINDYCK, 1994, DIAS, 2008).

Como alternativa Pindyck (1999) sugere que a verificação de até qual nível os choques de preços são permanentes pode ser mais informativo do que a pesquisa sobre raiz unitária na investigação de caminho aleatório ou reversão à média. Num processo auto-regressivo, os choques de preço tendem a dissipar-se

sob a permanente força de reversão, enquanto que caso de um MGB os choques de preço tendem a ser permanentes. Para testar essa condição, Pindyck utiliza um teste de razão de variância que mede o nível para o qual a variância de uma série cresce com o “retardo” ou *lag* do teste. O teste da razão da variância pode ser descrito pela equação (2.3).

$$R_k = \frac{1}{k} \frac{\text{Var}(P_{t+k} - P_t)}{\text{Var}(P_{t+1} - P_t)} \quad (2.3)$$

O termo $\text{Var}(\cdot)$ na formula representa a variância das séries de diferenças entre preços, com retardo (*lag*) de k períodos, nas séries de preços P . No caso de um MGB, à medida que a variância cresce linearmente com k , a razão R_k deveria convergir para 1 quando k cresce. Na presença de reversão à média, por outro lado, a variância é delimitada a um certo nível com o crescimento de k . Ou seja, para valores altos do retardo k , ou *lag*, a razão da variância R_k deveria cair indicando que os choques de preço não são permanentes e que os preços reverterem para algum nível de equilíbrio. Lo e MacKinlay (1988) também usam um teste semelhante para comprovar que preços de ações também não seguem um MGB.

Enquanto os processos estocásticos aritméticos e geométricos brownianos (MAB, MGB) têm cada um, um único modelo estocástico, os processos regressivos conhecidos como Movimentos de Reversão à Média (MRM) são inúmeros, variando em grau de complexidade. Os mais simples são, evidentemente, os de fator único, que possuem somente uma fonte de incerteza. O capítulo analisa quatro desses modelos: o conhecido como processo de Ornstein-Uhlenbeck, sendo este um MRM aritmético, e os modelos geométricos conhecidos como modelos de Pindyck (1994), modelo 1 de Schwartz (1997) e de Dias/Marlim (1999). A seguir são analisados três modelos de dois fatores sendo que um deste, o modelo de Schwartz e Smith (2000) é analisado em maior profundidade.

2.4. Modelos de Reversão à Média de Fator Único

Serão discutidos e apresentados quatro modelos de reversão à média de um fator: um aritmético (modelo de Ornstein Uhlenbeck) e outros três geométricos (modelo de Pindyck, modelo 1 de Schwartz, e modelo de Dias/Marlim). Apenas o primeiro é de fato referenciado na literatura por esses nomes, e outros foram assim chamados neste capítulo referenciando seus autores, apesar de frequentemente serem assim denominados. Os modelos estocásticos geométricos diferem-se dos aritméticos, não somente por não retornarem valores negativos, mas também por terem seus retornos proporcionais ao valor da variável.

Para cada modelo discutido é apresentado seu valor esperado e variância, ou no caso dos geométricos, a variância do logaritmo de sua variável, sua discretização real e neutra ao risco para efeito de uso em simulação, e a estimação de parâmetros a partir de séries históricas empíricas.

2.4.1. Modelo Aritmético de Ornstein-Uhlenbeck

A forma mais simples de reversão à média (MRM) é o processo de fator único conhecido por processo de Ornstein-Uhlenbeck (OU), também chamado de MRM Aritmético, e definido pela equação (2.4):

$$dx = \eta(\bar{x} - x)dt + \sigma dz \quad (2.4)$$

onde:

x é a variável estocástica,

$\bar{x}$ é a média de longo prazo da variável estocástica, ou seja o nível de equilíbrio de longo prazo desta,

η é a velocidade de reversão, ou a medida de intensidade com a qual os choques estocásticos são dissipados pelo efeito de reversão à média,

σ é a volatilidade do processo, ou a medida de intensidade das perturbações estocásticas da variável,

dz é o processo padrão de *Weiner*, com distribuição normal: $dz = \varepsilon\sqrt{dt}$, e:

$\varepsilon \sim N(0,1)$, e

dt o incremento de tempo do processo.

2.4.1.1. Média e Variância

As expressões da Média e da Variância de um processo estocástico são importantes para efeito de seu uso em avaliação, e elas traduzem o comportamento da variável, por uma ótica financeira, do Retorno Esperado (Média) e do Risco (Variância).

O processo de Ornstein-Uhlenbeck (Dixit & Pindyck, 1994) definido em (2.4), tem o valor esperado e a variância conhecidos e dados por Dixit e Pindyck (1994, p. 76-77). Estes são

$$E(x_t) = \bar{x} + (x_0 - \bar{x}).e^{-\eta(t-t_0)} \quad (2.5)$$

e:

$$\text{var}(x_t) = \frac{\sigma^2}{2\eta} (1 - e^{-2\eta(t-t_0)}) \quad (2.6)$$

2.4.1.2. Discretização do Modelo

Para podermos simular o processo em questão, precisamos da equação tempo discreto deste. Esta é obtida somando a parcela determinística da media (2.5) com a estocástica (2.6), a qual é então multiplicada pela distribuição normal com média 0:

$$x_t = x_{t-1}e^{-\eta\Delta t} + \bar{x}(1 - e^{-\eta\Delta t}) + \sigma\sqrt{\frac{1 - e^{-2\eta\Delta t}}{2\eta}}N(0,1) \quad (2.7)$$

Podemos proceder assim, pois x_t possui distribuição normal. Essa discretização é exata e independe do tamanho de Δt (KLOEDEN e PLATEN, 1992, p. 118).

2.4.1.3. Estimação de Parâmetros

Para determinar os valores dos parâmetros para o MRM Aritmético (OU), escrevemos esse processo a partir da equação (2.5) em termos do intervalo temporal discreto Δt :

$$\begin{aligned}x_t &= \bar{x} + (x_{t-1} - \bar{x})e^{-\eta\Delta t} \\x_t &= \bar{x}(1 - e^{-\eta\Delta t}) + e^{-\eta\Delta t}x_{t-1} \\x_t - x_{t-1} &= \bar{x}(1 - e^{-\eta\Delta t}) + (e^{-\eta\Delta t} - 1)x_{t-1}\end{aligned}\quad (2.8)$$

A equação (2.7) é a expressão para tempo contínuo do processo autoregressivo de primeira ordem da seguinte expressão

$$x_t - x_{t-1} = \bar{x}(1 - e^{-\eta\Delta t}) + (e^{-\eta\Delta t} - 1)x_{t-1} + \varepsilon_t$$

onde o erro ε é normalmente distribuído com media 0 e variância σ_ε^2 .

Se escrevermos a equação (2.8) na forma:

$$x_t - x_{t-1} = \underbrace{\bar{x}(1 - e^{-\eta\Delta t})}_a + \underbrace{(e^{-\eta\Delta t} - 1)}_{b-1}x_{t-1}$$

Ou, considerando o erro da série:

$$x_t - x_{t-1} = a + (b-1)x_{t-1} + \varepsilon_t, \quad (2.9)$$

então podemos estimar os parâmetros do processo em questão fazendo uma regressão linear sobre as séries x_t . Vale notar que a equação (2.9) é igual a (2.1), portanto estaremos procedendo à mesma regressão executada para fim de testar a Raiz Unitária da série em questão. A partir dos estimadores obtidos da regressão podemos calcular os parâmetros a partir das equações (2.8) e (2.9).

A partir destas temos $b-1 = e^{-\eta\Delta t} - 1$ e

$$\eta = -\ln(b) / \Delta t \quad (2.10)$$

Também temos: $a = \bar{x}(1 - e^{-\eta\Delta t})$, e com (2.10)

$$\bar{x} = -\frac{a}{(b-1)} \quad (2.11)$$

O parâmetro de volatilidade σ pode ser determinado a partir da variância σ_ε^2 dos erros da regressão, a qual é dada pela expressão $\sigma_\varepsilon^2 = \frac{\sigma^2}{2\eta} (1 - e^{-2\eta\Delta t})$, derivada da equação (2.6).

Reescrevendo esta utilizando a relação $b^2 = e^{-2\eta\Delta t}$ e (2.9), obtemos

$$\sigma_\varepsilon^2 = -\sigma^2 \Delta t \frac{1-b^2}{2\ln b}, \quad \text{ou}$$

$$\sigma = \sigma_\varepsilon \sqrt{\frac{2\ln b}{(b^2-1)\Delta t}} \quad (2.12)$$

onde σ_ε é o erro padrão da regressão.

Podemos notar que o parâmetro de velocidade de reversão, η , obtido pela regressão na equação (2.10), é inversamente proporcional à chamada “meia vida” do processo. Esta é o tempo no qual o valor esperado da variável auto-regressiva diminui a distância até seu nível de equilíbrio, pela metade, de onde o nome “meia vida” (SCHWARTZ e SMITH, 2000). A meia vida em anos correspondente a um valor b , de uma série x_t seria calculada assim:

$$T_{1/2} = -\frac{\ln 2}{\ln b} \Delta t$$

Para se ter uma idéia de ordem de grandeza, para uma série de preços semanais ($\Delta t = 1/52$) um valor de $b = 0,99$ (que dificilmente rejeitaria a hipótese nula de raiz unitária num teste de Dickey Fuller), daria uma meia vida $T_{1/2}$ de 1,33 anos, que pode ser considerada baixa, com um valor anual de $\eta = 0,523$, considerado alto. Dias (2005) considera que a meia vida de preços de petróleo seja superior a três anos. Portanto podemos agora entender com mais clareza porque a não rejeição da H_0 de Raiz Unitária, não significa que não haja indícios de reversão à média numa série x_t . A estimação da meia vida do processo, inversamente proporcional ao logaritmo natural da velocidade de reversão, é um indicador mais consistente da presença de auto-reversão. Portanto valores de $b < 1$, mesmo que muito próximos de 1, já são indícios suficientes de auto-regressão

2.4.1.4. Simulação Neutra ao Risco

Hull (1999, p. 244) considera a avaliação neutra ao risco a ferramenta mais importante na análise de derivativos. Isso significa que para o apreçamento de derivativos, opções e opções reais, é necessária a forma neutra ao risco do processo estocástico usado na modelagem da incerteza, pois num mundo neutro a risco utiliza-se a taxa livre de risco como fator de desconto do processo. Portanto é necessário que se possa derivar a sua forma neutra ao risco. No caso de um o MRM (OU), da mesma forma que com o MGB, este é convertido em neutro ao risco alterando-se o parâmetro de crescimento (*drift*) (DIXIT, PINDYCK, 1994).

Sendo:

μ - a taxa de desconto ajustada ao risco

α - a taxa de crescimento do processo (*drift*)

δ - a taxa de dividendos do processo, ou no caso de commodity: taxa de conveniência, e

r - a taxa livre de risco

No caso de um processo ajustado ao risco (ou processo real), temos: $\mu = \alpha + \delta$ ou $\alpha = \mu - \delta$. Na forma neutral ao risco, o crescimento α do processo é substituído por: $r - \delta$. Como no caso de reversão à média o crescimento real é $\alpha = \eta(\bar{x} - x)$, e, contrariamente ao caso do MGB, a taxa de dividendos não é constante, mas é uma função de x : $\delta = \mu - \alpha = \mu - \eta(\bar{x} - x)$

Com essa expressão obtemos o crescimento neutro a risco para o processo de reversão à média:

$$r - \delta = r - \mu + \eta(\bar{x} - x)$$

$$r - \delta = \eta(\bar{x} - x) - (\mu - r)$$

$$r - \delta = \eta \left\{ \left(\bar{x} - \frac{(\mu - r)}{\eta} \right) - x \right\}$$

Podemos notar que: $(\mu - r)$ é o prêmio de risco. Comparando ambos os crescimentos (ajustado ao risco, ou real, e neutro ao risco) podemos ver que a passagem do processo real para o neutro ao risco, envolve a subtração do prêmio de risco normalizado $(\mu - r)/\eta$ da média de longo prazo $\bar{x}$. Ou seja, no processo

neutro ao risco os valores reverterem para um nível inferior aquele do processo real, e a diferença entre estes é o prêmio de risco normalizado.

Dessa forma obtemos uma equação ajustada para a simulação neutral ao risco de $x(t)$. A expressão em tempo contínuo desta é:

$$dx = \eta \left(\left[\bar{x} - \frac{\mu - r}{\eta} \right] - x \right) dt + \sigma dz$$

Na forma neutral ao risco, o processo $x(t)$ é simulado (válido também para Δt grande) pela equação em tempo discreto (2.13).

$$x_t = x_{t-1} e^{-\eta \Delta t} + \left[\bar{x} - \frac{\mu - r}{\eta} \right] (1 - e^{-\eta \Delta t}) + \sigma \sqrt{\frac{1 - e^{-2\eta \Delta t}}{2\eta}} N(0,1) \quad (2.13)$$

O termo $(\mu - r)/\eta$, o prêmio de risco normalizado, é a diferença entre esta e a simulação real.

2.4.2. Modelos Geométricos de Reversão à Média

Como já explicitado, a principal limitação envolvendo o Movimento de Reversão à Média Aritmético (OU), ou mesmo outros processos aritméticos como o MAB, é que este pode produzir valores negativos para $x(t)$ os quais apesar de serem aceitáveis para algumas variáveis (tais como taxas de retorno ou taxas de conveniência de commodities) de uma forma geral são um problema quanto estamos considerando uma vasta gama de variáveis incertas, tais como preços de commodities por exemplo, mais não se restringindo a estes.

2.4.2.1. O Modelo de Dixit & Pindyck (1994)

O modelo de Dixit & Pindyck é definido como um MRM geométrico de fator único, no qual aparece uma variável P adicional em cada termo do lado direito da equação (2.14), do processo de OU. É conhecido como modelo de Dixit

& Pindyck (D&P) (DIXIT e PINDYCK, 1994, p. 161), e a sua forma matemática está na equação (2.14).

$$dP = \eta(\bar{P} - P)Pdt + \sigma Pdz \quad (2.14)$$

Por essa expressão tem-se um processo geométrico, no qual o incremento de valor da variável (dP) passa a ser proporcional ao nível da variável em si (P).

2.4.2.1.1. Média e Variância

Inicialmente devemos escrever o MRM Aritmético correspondente, para, a partir das expressões de valor esperado e variância deste, podermos determinar valor esperado, discretização, real e neutra ao risco, e parâmetros do processo geométrico. Para isso definimos uma variável $x = \ln P$ com:

$$dx = \eta^*(\bar{x} - x)dt + \sigma^* dz^*$$

A vantagem de utilizar o logaritmo natural dos preços P é que é geralmente assumido que as commodities possuem uma distribuição log-normal de preços (o que fica garantido por ter dz^* uma distribuição normal) e também porque se $x = \ln P$ então $P = \exp(x)$ e este não pode ser negativo.

Aplicando o lema de Itô:

$$dx = \left[\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial P} \eta(\bar{P} - P)P + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 x}{\partial P^2} \sigma^2 P^2 \right] dt + \frac{\partial x}{\partial P} \sigma P dz$$

$$\frac{\partial x}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial x}{\partial P} = \frac{1}{P}, \quad \frac{\partial^2 x}{\partial P^2} = -\frac{1}{P^2}$$

$$dx = \left[0 + \frac{1}{P} \eta(\bar{P} - P)P - \frac{1}{2} \frac{1}{P^2} \sigma^2 P^2 \right] dt + \frac{1}{P} \sigma P dz$$

$$dx = \eta \left(\bar{P} - \frac{\sigma^2}{2\eta} - P \right) dt + \sigma dz \quad \text{ou}$$

$$dx = \eta \frac{P}{\ln P} \left[\left(\bar{P} - \frac{\sigma^2}{2\eta} \right) \frac{\ln P}{P} - \ln P \right] dt + \sigma dz$$

$$\text{Temos então: } \eta^* = \eta \frac{P}{\ln P}, \quad \sigma^* = \sigma, \quad \text{e } \bar{x} = \left(\bar{P} - \frac{\sigma^2}{2\eta} \right) \frac{\ln P}{P}$$

Podemos observar que o modelo de D&P tem a desvantagem de que a transformação pelo lema de Itô retorna valores de η^* e $\bar{x}$ dependentes do nível de preços P . Esta limitação faz com que esse modelo não seja prático em aplicações reais, pois o cálculo tanto do valor esperado quanto do processo discreto se tornam significativamente mais complexos.

Dias (2008) sugere que esta limitação pode ser contornada em termos práticos considerando um valor médio para P . Se for assumido $\bar{P}$ como sendo essa média (a própria media de longo prazo para a qual o processo deve reverter), e considerando que $P(t)$ possui distribuição log-normal, o que requer que a metade da variância seja adicionada para a passagem de $E(x)$ para $E(P)$, utilizando as equações (3) e (5) do processo OU, temos então:

$$\text{Seja, então } \eta^* = \eta \bar{P} / \ln \bar{P} \text{ e } \bar{x} = \left(\bar{P} - \frac{\sigma^2}{2\eta} \right) \frac{\ln \bar{P}}{\bar{P}} = \left(\ln \bar{P} - \frac{\sigma^2}{2\eta} \frac{\ln \bar{P}}{\bar{P}} \right) \text{ (os quais}$$

são assumidos constantes), então:

$$E(x_t) = \left(\ln \bar{P} - \frac{\sigma^2}{2\eta} \frac{\ln \bar{P}}{\bar{P}} \right) \left(1 - \exp \left(-\eta \frac{\bar{P}}{\ln \bar{P}} (t - t_0) \right) \right) + \ln P \exp \left(-\eta \frac{\bar{P}}{\ln \bar{P}} (t - t_0) \right) \quad (2.15)$$

$$\text{var}(x_t) = \frac{\sigma^2}{2\eta} \frac{\ln \bar{P}}{\bar{P}} \left[1 - \exp \left(-2\eta \frac{\bar{P}}{\ln \bar{P}} (t - t_0) \right) \right] \quad (2.16)$$

e, pela propriedade da log-normalidade (SCHWARTZ e SMITH, 2000, SCHWARTZ, 1997):

$$E(P_t) = \exp \left[E(x_t) + \frac{\text{var}(x_t)}{2} \right]$$

Chamando de $A = \frac{\bar{P}}{\ln \bar{P}}$, obtemos a partir de (2.15)

$$E(x_t) = \left(\ln \bar{P} - \frac{\sigma^2}{2\eta A} \right) \left(1 - \exp(-\eta A(t - t_0)) \right) + \ln P \exp(-\eta A(t - t_0))$$

Como temos, de (2.16):

$$\text{var}[\ln(P_t)] = \text{var}(x_t) = \frac{\sigma^2}{2\eta A} \left[1 - \exp(-2\eta A(t - t_0)) \right]$$

Assim:

$$E(P_t) = \exp \left\{ \left(\ln \bar{P} - \frac{\sigma^2}{2\eta A} \right) (1 - \exp[-\eta A(t - t_0)]) + \ln P \exp(-\eta A(t - t_0)) + \frac{\sigma^2}{4\eta A} [1 - \exp(-2\eta A(t - t_0))] \right\} \quad (2.17)$$

2.4.2.1.2. Discretização do Modelo

Como temos: $P_t = \exp(x_t)$ e x_t tem distribuição normal, podemos obter diretamente P_t à partir das expressões de $E(x_t)$ e $\text{Var}(x_t)$:

$$P_t = \exp \left\{ \left(\ln \bar{P} - \frac{\sigma^2}{2\eta A} \right) (1 - e^{-\eta A \Delta t}) + \ln P_{t-1} e^{-\eta A \Delta t} + \sigma \sqrt{\frac{1 - e^{-2\eta A \Delta t}}{2\eta A}} N(0,1) \right\} \quad (2.18)$$

2.4.2.1.3. Estimação de Parâmetros

De forma similar ao modelo aritmético de OU, podemos escrever a equação (2.5) da variável x , com os parâmetros obtidos pelo lema de Ito, a partir do modelo de D & P:

$$x_t - x_{t-1} = \bar{x}(1 - e^{-\eta^* \Delta t}) + (e^{-\eta^* \Delta t} - 1)x_{t-1}$$

Substituindo $x_t = \ln S_t$, $\eta^* = \eta A$ e $\bar{x} = \left(\ln \bar{P} - \frac{\sigma^2}{2\eta A} \right)$ e re-arrumando:

$$\ln(P_t/P_{t-1}) = \underbrace{(1 - e^{-\eta A \Delta t}) \left(\ln \bar{P} - \frac{\sigma^2}{2\eta A} \right)}_a + \underbrace{(e^{-\eta A \Delta t} - 1)}_{b-1} \ln P_{t-1} \quad (2.19)$$

$$\ln(P_t/P_{t-1}) = a + (b-1) \ln P_{t-1} \quad (2.20)$$

Da mesma forma que com o modelo OU, podemos estimar os parâmetros do processo por uma simples regressão linear sobre as séries de preços P_t . Dos resultados da regressão, obtemos os parâmetros requeridos a partir das equações (2.19) e (2.20).

Da equação (2.19) temos $b - 1 = e^{-\eta A \Delta t} - 1$ e

$$\eta A = -\ln(b)/\Delta t$$

ou:

$$\eta = -\ln(b)/A\Delta t \quad (2.21)$$

Como com o modelo OU, o parâmetro de volatilidade σ pode ser determinado a partir da variância σ_ε^2 dos erros ε da regressão, a qual é dada pela expressão $\sigma_\varepsilon^2 = \frac{\sigma^2}{2\eta A} (1 - e^{-2\eta A\Delta t})$, derivada da equação (2.6), ou re-escrevendo esta utilizando a relação $b^2 = e^{-2\eta A\Delta t}$ e (2.21) obtemos

$$\sigma_\varepsilon^2 = -\sigma^2 \Delta t \frac{1-b^2}{2\ln b}, \quad \text{ou:}$$

$$\sigma = \sigma_\varepsilon \sqrt{\frac{2\ln b}{(b^2 - 1)\Delta t}} \quad (2.22)$$

Pode ser observado que o parâmetro de volatilidade é independente de $A = \bar{P}/\ln \bar{P}$, e somente uma função de resultados da regressão.

Das equações (2.19) e (2.20), $a = [\ln \bar{P} - \sigma^2/2\eta A] (1 - e^{-\eta A\Delta t})$. Com a relação já obtida $1 - b = 1 - e^{-\eta A\Delta t}$, temos:

$$\frac{a}{(1-b)} = \ln \bar{P} - \frac{\sigma^2}{2\eta A}$$

e:

$$\bar{P} = \exp \left[\frac{a}{(1-b)} + \frac{\sigma^2}{2\eta A} \right] \quad (2.23)$$

Aqui também pode ser observado então que o nível de reversão de longo prazo depende tanto da volatilidade do processo quanto de sua velocidade de reversão. Mas ainda temos o valor de $\bar{P}$ dependente de A o qual é também uma função de $\bar{P}$ ($A = \bar{P}/\ln \bar{P}$). Como queremos determinar os parâmetros diretamente das estimações da regressão, substituímos o valor de ηA de (2.21):

$$\bar{P} = \exp \left[\frac{a}{(1-b)} + \frac{\sigma^2 \Delta t}{2(-\ln b)} \right]$$

e de σ a partir de (2.22):

$$\bar{P} = \exp \left[\frac{a}{(1-b)} + \sigma_\varepsilon^2 \frac{2\Delta t \ln b}{2\Delta t (-\ln b)(b^2 - 1)} \right]$$

Finalmente:

$$\bar{P} = \exp \left[\frac{a}{(1-b)} + \frac{\sigma_\varepsilon^2}{(1-b^2)} \right]$$

Ou:

$$\bar{P} = \exp \left[\left(a + \frac{\sigma_\varepsilon^2}{(1+b)} \right) / (1-b) \right] \quad (2.24)$$

É interessante notar que esse nível de média de longo prazo já não é mais dependente de A , e é somente uma função dos resultados obtidos da regressão. Ou seja, ao pressupormos que A é constante, ou que $P_t / \ln P_t$ tem variação insignificante, podemos calcular uma média de longo prazo para o modelo de D & P independente do nível de P .

Essa expressão permite agora calcular valor de $A = \frac{\bar{P}}{\ln \bar{P}}$, e de η por (2.21).

2.4.2.1.4. Simulação Neutra ao Risco

Como $P(t) = e^{x(t)}$, de forma a obter a equação de simulação neutra ao risco para o modelo MRM geométrico de D&P precisamos subtrair do logaritmo da média de longo prazo ($\bar{x} = \ln \bar{P} - \sigma^2 / 2\eta A$), o prêmio de risco normalizado do processo (ver equação (2.13)) que no caso do modelo de D & P é: $(\mu - r) / \eta A$, na equação (2.30).

$$P_t = \exp \left\{ \ln P_{t-1} e^{-\eta A \Delta t} + \left(\ln \bar{P} - \frac{\sigma^2}{2\eta A} - \frac{\mu - r}{\eta A} \right) (1 - e^{-\eta A \Delta t}) + \sigma \sqrt{\frac{1 - e^{-2\eta A \Delta t}}{2\eta A}} N(0,1) \right\} \quad (2.25)$$

Na forma neutra ao risco, o processo P_t pode ser simulado pela equação em tempo discreto (2.25).

Mas para os resultados de parâmetros, média e discretização, tanto real quanto neutra ao risco, obtidos acima para o modelo de D&P, é importante

lembrar que partimos de uma suposição de que os valores assumidos por P têm baixa variação, de tal forma que $\frac{P}{\ln P}$ possa ser considerado constante, e substituído por $A = \frac{\bar{P}}{\ln \bar{P}}$. Essa restrição do modelo de D&P faz com que essa abordagem nem sempre seja válida e dependerá do valor de σ .

2.4.2.2.

O Modelo 1 de Schwartz (1997)

Schwartz (1997) propõe um modelo de MRM geométrico similar ao de Dixit & Pinkyck, mostrado pela Equação (2.26):

$$dS = \eta [\alpha - \ln S] S dt + \sigma S dz \quad (2.26)$$

Geralmente é considerado que $\alpha = \ln(\bar{S})$ (DIAS, 2008), pois o modelo se torna intuitivo com essa consideração. Embora isso possa parecer evidente, Schwartz (1997) não faz essa premissa e deduz diretamente o valor de α a partir de séries de preços futuros usando a técnica de filtro de Kalman. Neste estudo vamos considerar que $\alpha = \ln(\bar{S})$ e, portanto, a equação (2.26) ficará:

$$dS = \eta [\ln \bar{S} - \ln S] S dt + \sigma S dz \quad (2.27)$$

A diferença para o modelo de D&P está na componente de reversão do *drift* a qual é função de $\ln S$ e não mais de S (para diferenciar os resultados com o modelo de Schwartz daqueles obtidos com o de D&P, denominamos aqui a variável estocástica log-normalmente distribuída de: S , em vez de: P). Da mesma forma que com o modelo de D&P, tem-se um processo geométrico, no qual o incremento de valor da variável (dS) passa a ser proporcional ao nível da variável estocástica (S).

2.4.2.2.1.

Média e Variância

Da mesma forma que com o modelo de D&P se assumirmos que $x = \ln S$, pelo lema de Ito teremos o processo estocástico de dx :

$$\begin{aligned}
dx &= \left[\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial S} \eta (\ln \bar{S} - \ln S) S + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 x}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right] dt + \frac{\partial x}{\partial S} \sigma S dz \\
\frac{\partial x}{\partial t} &= 0, \quad \frac{\partial x}{\partial S} = \frac{1}{S}, \quad \frac{\partial^2 x}{\partial S^2} = -\frac{1}{S^2}, \\
dx &= \left[0 + \frac{1}{S} \eta (\ln \bar{S} - \ln S) S - \frac{1}{2} \frac{1}{S^2} \sigma^2 S^2 \right] dt + \frac{1}{S} \sigma S dz \\
dx &= \left[\eta (\ln \bar{S} - \ln S) - \frac{\sigma^2}{2} \right] dt + \sigma dz \\
dx &= \eta \left[\left(\ln \bar{S} - \frac{\sigma^2}{2\eta} \right) - \ln S \right] dt + \sigma dz \tag{2.28}
\end{aligned}$$

Como $x = \ln S$ e $\bar{x} = \ln \bar{S} - \frac{\sigma^2}{2\eta}$, podemos ver que a Equação (2.28) é o mesmo modelo aritmético de fator único da Equação (2.4), ou seja o modelo de Ornstein Uhlenbeck. Novamente a vantagem de se utilizar o logaritmo natural dos preços $x = \ln S$ é porque geralmente é assumido que os preços de commodities têm distribuição log-normal, o que é conveniente porque se $x = \ln S$, então S não pode ser negativo. Neste modelo a vantagem sobre o de D&P é que $\bar{x}$ não depende do nível de preços S .

Substituindo em (2.5) e (2.6) os resultados obtidos acima:

$$\begin{aligned}
E[x_t] &= \ln[S_{t_0}] e^{-\eta(t-t_0)} + \left[\ln(\bar{S}) - \frac{\sigma^2}{2\eta} \right] (1 - e^{-\eta(t-t_0)}), \quad \text{e:} \\
\text{var}[\ln(S_t)] &= \text{var}[x_t] = \frac{\sigma^2}{2\eta} (1 - e^{-2\eta(t-t_0)})
\end{aligned}$$

Novamente, pela propriedade de log-normalidade do processo de S_t podemos escrever:

$$\begin{aligned}
E(S_t) &= \exp \left[E(x_t) + \frac{\text{var}(x_t)}{2} \right], \quad \text{portanto:} \\
E[S_t] &= \exp \left\{ \ln(S_{t_0}) e^{-\eta(t-t_0)} + \left[\ln(\bar{S}) - \frac{\sigma^2}{2\eta} \right] (1 - e^{-\eta(t-t_0)}) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\sigma^2}{4\eta} (1 - e^{-2\eta(t-t_0)}) \right\} \tag{2.29}
\end{aligned}$$

2.4.2.2.2. Discretização do Modelo

Como temos de (2.5) e (2.6):

$$x_t = x_{t-1}e^{-\eta\Delta t} + \bar{x}(1-e^{-\eta\Delta t}) + \sqrt{\frac{\sigma^2}{2\eta}(1-e^{-2\eta\Delta t})}N(0,1), \text{ e}$$

$$x(t) = \ln[S(t)] \text{ ou } S(t) = e^{x(t)}, \text{ e } \bar{x} = \ln \bar{S} - \frac{\sigma^2}{2\eta}$$

Então:

$$\begin{aligned} x_t &= \ln[S_{t-1}]e^{-\eta\Delta t} + \left[\ln(\bar{S}) - \frac{\sigma^2}{2\eta} \right] (1-e^{-\eta\Delta t}) + \sigma \sqrt{\frac{1-e^{-2\eta\Delta t}}{2\eta}} N(0,1), \text{ e:} \\ S_t &= \exp \left\{ \ln[S_{t-1}]e^{-\eta\Delta t} + \left[\ln(\bar{S}) - \frac{\sigma^2}{2\eta} \right] (1-e^{-\eta\Delta t}) + \right. \\ &\quad \left. \sigma \sqrt{\frac{1-e^{-2\eta\Delta t}}{2\eta}} N(0,1) \right\} \end{aligned} \quad (2.30)$$

A equação de simulação do modelo de Schwartz é dada por (2.30) a qual fornece uma discretização exata, permitindo o uso de valores altos de Δt . Para simular amostras aleatórias de caminhos basta simular valores de $N(0,1)$.

Da equação (2.29) podemos ver que quando $T = t - t_0 \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} E[S_{T \rightarrow \infty}] &\rightarrow \exp \left\{ \left[\ln(\bar{S}) - \frac{\sigma^2}{2\eta} \right] + \frac{\sigma^2}{4\eta} \right\} \\ E[S_{T \rightarrow \infty}] &\rightarrow \exp \left[\ln(\bar{S}) - \frac{\sigma^2}{4\eta} \right] = \bar{S} \exp \left[-\frac{\sigma^2}{4\eta} \right] \end{aligned} \quad (2.31)$$

Portanto o valor esperado de $S(t)$ não converge para $\bar{S}$ como era de se esperar, mas para $\bar{S} \exp[-\sigma^2/4\eta]$, o que se constitui numa limitação do modelo de Schwartz.

2.4.2.2.3. Estimação de Parâmetros

De forma similar ao modelo OU, podemos escrever a equação (8) da variável x :

$$x_t - x_{t-1} = \bar{x}(1 - e^{-\eta\Delta t}) + (e^{-\eta\Delta t} - 1)x_{t-1}$$

Substituindo $x_t = \ln S_t$ e $\bar{x} = \ln \bar{S} - \sigma^2/2\eta$ e re-arrumando:

$$\ln(S_t/S_{t-1}) = \underbrace{(1 - e^{-\eta\Delta t})(\ln \bar{S} - \sigma^2/2\eta)}_a + \underbrace{(e^{-\eta\Delta t} - 1)}_{b-1} \ln S_{t-1} \quad (2.32)$$

$$\ln(S_t/S_{t-1}) = a + (b-1) \ln S_{t-1} \quad (2.33)$$

Como com o modelo OU, podemos estimar os parâmetros do processo por uma simples regressão linear sobre as séries de preços S_t . Dos resultados da regressão, obtemos os parâmetros requeridos a partir das equações (2.32) e (2.33).

Da equação (2.32) temos $b-1 = e^{-\eta\Delta t} - 1$ e

$$\eta = -\ln(b) / \Delta t \quad (\text{similar a (2.10)}) \quad (2.34)$$

Como com o modelo OU, o parâmetro de volatilidade σ pode ser determinado a partir da variância σ_ε^2 dos erros ε da regressão, a qual é dada pela

expressão $\sigma_\varepsilon^2 = \frac{\sigma^2}{2\eta} (1 - e^{-2\eta\Delta t})$, derivada da equação (2.6), ou reescrevendo esta

utilizando a relação $b^2 = e^{-2\eta\Delta t}$ e (2.9), obtemos:

$$\sigma = \sigma_\varepsilon \sqrt{\frac{2 \ln b}{(b^2 - 1)\Delta t}} \quad (\text{similar a (2.12)}) \quad (2.35)$$

Essas expressões de η e σ são similares aquelas do modelo OU, como esperado. A diferença para com aquele modelo estará na media de longo prazo $\bar{S}$.

Das equações (2.32) e (2.33), $a = [\ln \bar{S} - \sigma^2/2\eta](1 - e^{-\eta\Delta t})$. Com a relação já obtida $1 - b = 1 - e^{-\eta\Delta t}$ temos:

$$\frac{a}{(1-b)} = [\ln \bar{S} - \sigma^2/2\eta]$$

$$\text{e:} \quad \bar{S} = \exp \left[\frac{a}{(1-b)} + \frac{\sigma^2}{2\eta} \right] \quad (2.36)$$

Podemos ver então que o nível de reversão de longo prazo depende tanto da volatilidade do processo quanto de sua velocidade de reversão. Como queremos determinar os parâmetros diretamente das estimações da regressão, substituímos o valor de η de (2.34):

$$\bar{S} = \exp \left[\frac{a}{(1-b)} + \frac{\sigma^2 \Delta t}{2(-\ln b)} \right]$$

e de σ de (2.35):

$$\bar{S} = \exp \left[\frac{a}{(1-b)} + \sigma^2 \frac{2\Delta t \ln b}{2\Delta t (-\ln b)(b^2 - 1)} \right]$$

Finalmente:
$$\bar{S} = \exp \left[\frac{a}{(1-b)} + \frac{\sigma^2}{(1-b^2)} \right]$$

Ou:
$$\bar{S} = \exp \left[\left(a + \frac{\sigma^2}{(1+b)} \right) / (1-b) \right] \quad (2.37)$$

2.4.2.2.4. Simulação Neutra ao Risco

Como $S(t) = e^{x(t)}$, de forma a ter o obter a equação de simulação neutra ao risco para o modelo MRM geométrico de Schwartz precisamos subtrair o prêmio de risco normalizado $(\mu - r)/\eta$ (ver equação (2.13)) da média de longo prazo $\bar{x} = \ln(\bar{S}) - \sigma^2/2\eta$ na equação (2.30).

$$S_t = \exp \left\{ \ln[S_{t-1}] e^{-\eta \Delta t} + \left[\ln(\bar{S}) - \frac{\sigma^2}{2\eta} - \frac{\mu - r}{\eta} \right] (1 - e^{-\eta \Delta t}) + \sigma \sqrt{\frac{1 - e^{-2\eta \Delta t}}{2\eta}} N(0,1) \right\} \quad (2.38)$$

Aqui novamente o termo $(\mu - r)/\eta$ é a única diferença comparando-se com a equação de simulação real (2.30), ou seja, ajustada ao risco.

2.4.2.3. O Modelo Dias/Marlim (1999)

O principal problema do modelo de Schwartz é o fato de que seu valor esperado $E[P(t)]$ não convergir para $\bar{P}$ conforme seria de se esperar, mas para $\bar{P} \exp[-\sigma^2/4\eta]$, apesar de $\bar{P}$ ser o resultado obtido da regressão linear sobre a série de preços P_t . Esse resultado controverso, apesar de correto matematicamente, pode suscitar confusão e levantar dúvidas sobre a robustez do modelo. Além disso, é possível que a média de longo prazo da variável que se deseja modelar seja um dado já determinado por outros métodos ou gerências, por exemplo, e o modelo estocástico deva se adequar a essa premissa.

Dias (1999, 2005) propõe um modelo de reversão à média geométrico com as seguintes características diferenciadas do modelo de Schwartz descrito do item anterior.

- Em primeiro lugar o modelo define a média de equilíbrio de longo prazo do preço de uma *commodity* como uma referência de grande importância e, portanto, que este preço P tem uma distribuição log-normal e segue um processo de geométrico de reversão a uma média $\bar{P}$ cujo valor é definido pela equação:

$$\bar{P} = \exp(\bar{x}) \quad (2.39)$$

- Em segundo lugar o modelo assume que os preços tem um valor esperado, ou seja uma média por simulação, de

$$E[P(t)] = \exp\{E[x(t)]\}. \quad (2.40)$$

2.4.2.3.1. Média e Variância

Isso implica que a relação entre as variáveis x_t e P_t , faz com que se obtenha o seguinte valor esperado em simulação no instante t :

$$\begin{aligned} E[P_t] &= \exp\{x_{t-1}e^{-\eta\Delta t} + \bar{x}(1 - e^{-\eta\Delta t})\} \quad \text{ou} \\ E[P_t] &= \exp\{x_{t-1}e^{-\eta\Delta t} + \ln \bar{S}(1 - e^{-\eta\Delta t})\} \end{aligned} \quad (2.41)$$

o que é mais simples do que a equação (2.29) do modelo de Schwartz.

$$\text{e} \quad \text{var}[P(T)] = E[P^2(T)] - E[P(T)]^2$$

2.4.2.3.2. Discretização do Modelo

Mas a transformação direta: $P(t) = \exp[x(t)]$, como no modelo de Schwartz, não é mais válida porque o exponencial de uma distribuição normal irá adicionar metade da variância à média. Para se chegar à expressão $(E[P(t)] = \exp\{E[x(t)]\})$, essa metade da variância é compensada utilizando-se a equação (2.42):

$$P(t) = \exp\{x(t) - \text{var}[x(t)]/2\} \quad (2.42)$$

onde $\text{var}[x(t)]$ é uma função determinística do tempo, dada pela equação (2.6).

$$\text{Então} \quad x_t = \ln(P)_t + (1 - e^{-2\eta t}) \frac{\sigma^2}{4\eta}$$

Apesar de não termos uma expressão de dP , é fácil simular as amostragens reais de $P(t)$ pelo modelo geométrico de reversão à média de Dias/Marlim. Basta simular $x(t)$ como na discretização por Schwartz, mas usando $\bar{x} = \ln(\bar{P})$, e então calcular $\text{var}[x(t)]$ com a equação (2.6), e usar a equação (2.42) dada acima para calcular os valores simulados de $P(t)$. Cabe notar que o termo de correção de convexidade calculado a partir de (2.6) é uma função

de t , e não de Δt . Portanto a simulação pode ser feita em dois tempos: primeiro calcular os valores de $x(t)$, depois os de $P(t)$. As equações para isso são:

$$x_t = x_{t-1}e^{-\eta\Delta t} + \ln(\bar{P})(1 - e^{-\eta\Delta t}) + \sigma\sqrt{\frac{1 - e^{-2\eta\Delta t}}{2\eta}}N(0,1) \quad (2.43)$$

$$e \quad P_t = \exp\left\{x_t - (1 - e^{-2\eta t})\frac{\sigma^2}{4\eta}\right\} \quad (2.44)$$

Uma outra alternativa é a forma direta de cálculo:

$$P_t = \exp\left\{\ln(P_{t-1})e^{-\eta\Delta t} + \ln(\bar{P})(1 - e^{-\eta\Delta t}) - (1 - e^{-2\eta t})\frac{\sigma^2}{4\eta} + \sigma\sqrt{\frac{1 - e^{-2\eta\Delta t}}{2\eta}}N(0,1)\right\} \quad (2.45)$$

mas como esta requer que seja somado e depois subtraído o termo da variância, pode se tornar mais complexo de programar e mais sujeito a erros.

2.4.2.3.3. Estimação de Parâmetros

Também aqui podemos escrever a equação (8) da variável x :

$$x_t - x_{t-1} = \bar{x}(1 - e^{-\eta\Delta t}) + (e^{-\eta\Delta t} - 1)x_{t-1}$$

Como o que temos são as séries de preços P_t , e não x_t , precisamos essa equação para as séries de preços. Pela definição do modelo, temos $\bar{x} = \ln \bar{P}$ e da equação (2.42) $x_t = \ln(P_t) + \text{var}(x_t)/2$. Então:

$$\begin{aligned} \ln(P_t/P_{t-1}) + \frac{\text{var}(x_t) - \text{var}(x_{t-1})}{2} = \\ (1 - e^{-\eta\Delta t})(\ln \bar{P}) + (e^{-\eta\Delta t} - 1)\left(\ln P_{t-1} + \frac{\text{var}(x_{t-1})}{2}\right), \quad \text{ou:} \\ \ln(P_t/P_{t-1}) = (1 - e^{-\eta\Delta t})\ln \bar{P} + \left[e^{-\eta\Delta t}\frac{\text{var}(x_{t-1})}{2} - \frac{\text{var}(x_t)}{2}\right] + (e^{-\eta\Delta t} - 1)\ln P_{t-1} \end{aligned} \quad (2.46)$$

Utilizando a equação (2.6) $\text{var}(x_t) = \frac{\sigma^2}{2\eta}(1 - e^{-2\eta t})$ e chamando de: $B(t)$, o

termo da variância, temos:

$$B(t) = e^{-\eta\Delta t} \frac{\text{var}(x_{t-1})}{2} - \frac{\text{var}(x_t)}{2}$$

$$B(t) = \frac{\sigma^2}{4\eta} \left(e^{-\eta\Delta t} (1 - e^{-2\eta(t-\Delta t)}) - 1 + e^{-2\eta t} \right)$$

$$B(t) = \frac{\sigma^2}{4\eta} \left(e^{-\eta\Delta t} - e^{-2\eta t + \eta\Delta t} - 1 + e^{-2\eta t} \right)$$

ou:

$$B(t) = \frac{\sigma^2}{4\eta} \left(e^{-2\eta t} (1 - e^{\eta\Delta t}) + e^{-\eta\Delta t} - 1 \right)$$

que não é constante, mas uma função de t . Substituindo em (2.46)

$$\ln(P_t/P_{t-1}) = \underbrace{(1 - e^{-\eta\Delta t}) \ln \bar{P} + B(t)}_a + \underbrace{(e^{-\eta\Delta t} - 1) \ln P_{t-1}}_{b-1} \quad (2.47)$$

Como a não é constante, mas uma função de t , não podemos rodar diretamente a regressão linear para estimar diretamente os valores dos parâmetros como feito no modelo de Schwartz. No entanto é fácil verificar numericamente que na expressão de $B(t)$, o termo $e^{-2\eta t} (1 - e^{\eta\Delta t})$ vai rapidamente para 0 na medida que t cresce. Nesse caso podemos aproximar o valor de $B(t)$ por $(\sigma^2/4\eta)(e^{-\eta\Delta t} - 1)$, o qual é constante. Substituindo na equação (2.47) acima:

$$\ln(P_t/P_{t-1}) = \underbrace{(1 - e^{-\eta\Delta t}) \left(\ln \bar{P} - \frac{\sigma^2}{4\eta} \right)}_a + \underbrace{(e^{-\eta\Delta t} - 1) \ln P_{t-1}}_{b-1} \quad (2.48)$$

Rodando a regressão sobre os valores de P_t obtemos os seguintes resultados:

$$\eta = -\log(b)/\Delta t \quad (\text{similar a (2.10)} \quad \text{e (2.34)})$$

$$\sigma = \sigma_\epsilon \sqrt{\frac{2 \ln b}{(b^2 - 1)\Delta t}} \quad (\text{similar a (2.12) e (2.35)), \quad \text{e}$$

$$\bar{P} = \exp \left[\frac{a}{(1-b)} + \frac{\sigma^2}{4\eta} \right] \quad (2.49)$$

Este é a mesma expressão que temos para a média de longo prazo para a qual o modelo de Schwartz converge. A equação (2.49) também pode ser escrita da seguinte forma:

$$\bar{P} = \exp \left[\frac{a}{(1-b)} - \frac{\sigma_\varepsilon^2 2 \ln(b) \Delta t}{4 \ln(b) (b^2 - 1) \Delta t} \right]$$

$$\bar{P} = \exp \left[\left(a + \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2(b+1)} \right) / (1-b) \right] \quad (2.50)$$

2.4.2.3.4. Simulação Neutra ao Risco

Como fizemos no modelo de Schwartz, para termos a equação de simulação neutra ao risco, precisamos subtrair o prêmio de risco normalizado $(\mu - r)/\eta$ (ver equação (2.13)) da média de longo prazo a qual é $\bar{P} = \exp(\bar{x})$. As equações de simulação neutra ao risco são:

$$\tilde{x}_t = \tilde{x}_{t-1} e^{-\eta \Delta t} + \left[\ln(\bar{P}) - \frac{\mu - r}{\eta} \right] (1 - e^{-\eta \Delta t}) + \sigma \sqrt{\frac{1 - e^{-2\eta \Delta t}}{2\eta}} N(0,1) \quad (2.51)$$

$$P_t = \exp \left\{ \tilde{x}_t - (1 - e^{-2\eta t}) \frac{\sigma^2}{4\eta} \right\} \quad (2.52)$$

Aqui novamente o termo $(\mu - r)/\eta$ é o prêmio de risco normalizado e a única diferença comparando-se com a equação de simulação real.

2.4.3. Discussão acerca das limitações dos Modelos apresentados de Reversão à Média de Fator Único

Como mencionado anteriormente, a principal limitação dos processos aritméticos, entre eles o de reversão à média, está em que estes podem retornar valores negativos da variável e, portanto, estarem limitados a um número restrito de variáveis. Além desta limitação esta a de que os retornos da variável assim modelada são independentes no nível de valor desta. Mas mesmo variáveis que podem ter retornos negativos, como taxas de inflação, de variação de PIB, taxa de conveniência de *commodities* não financeiras, frequentemente apresentam

oscilações proporcionais aos seus níveis de valor. Os processos estocásticos geométricos de reversão à média contornam estas limitações dos processos aritméticos, como o de Ornstein-Uhlenbeck. No entanto devido à crescente complexidade na modelagem e parametrização destes surgem novas limitações específicas de cada modelo.

Foram analisados três modelos geométricos de reversão à média. Destes, o modelo geométrico de D&P parece mais intuitivo, pois lida com valores de P e $\bar{P}$ em vez de logaritmos destes, como no caso dos modelos de Schwartz ou Dias/Marlim. Mas ele possui a limitação de ter o valor de seus parâmetros dependentes do nível de P .

Como vimos acima, Dias (2008) sugere que essa limitação não é crítica em termos práticos, pois estes parâmetros (η^* e x^*) poderiam ser estimados considerando um valor médio para $\bar{P}$. No entanto, o modelo de D&P ainda apresenta outra limitação: caso a unidade de P não seja um valor sem unidade dimensional (como uma taxa de retorno ou uma taxa de conveniência, as quais são dadas em %), então dP não fará sentido. Por exemplo, se P for um preço \$, ou uma medida de tráfego, como veículos/ano, então dP seria $\2 ou $(\text{veículos/ano})^2$, o que não tem significado físico ou econômico. Isso é devido à expressão matemática da parte determinística do modelo, e como visto para as variáveis acima mencionadas, o modelo não faz sentido. Portanto a aplicação do modelo de D&P é limitada a um tipo específico de variáveis.

Quando comparamos o modelo de Schwartz ao de Dias/Marlim, o primeiro parece mais robusto, pois é baseado numa equação diferencial a qual permite a dedução de seus parâmetros aplicando o lema de Ito à equação, enquanto o modelo de Dias/Marlim se baseia diretamente na determinação do modelo (tal como $\bar{x} = \ln \bar{P}$ e $E[P_t] = \exp[x_t]$). No entanto este modelo também aparenta ser mais intuitivo por um critério de especificação de parâmetros, visto que converge para uma média de longo prazo especificada, ao contrario do modelo de Schwartz. Ainda quando simulando este último modelo com o valor de $\bar{P}$ estimado pela equação (2.37), e o de Dias/Marlim usando o valor de equilíbrio de longo prazo $\bar{P}$ a partir da equação (2.50), ambos usando a mesma série de valores históricos, obtemos os mesmos valores para tiragens e para valores esperados. Isso é devido ao fato de que o valor de $\bar{P}$ quando estimado para o modelo Dias/Marlim pela

equação (2.50) é o mesmo para o qual o valor esperado do modelo de Schwartz converge (equação (2.31)).

Quanto ao modelo de Schwartz, Dias (2008) sugere ainda que uma forma de lidar com sua limitação relativa à média de longo prazo obtida da regressão de séries de preços é considerar o valor da verdadeira média para a qual o modelo converge, como a média real $\bar{S}^*$. Portanto de (2.31):

$$\bar{S}^* = \bar{S} \exp\left(-\frac{\sigma^2}{4\eta}\right) = \exp\left(\frac{a}{1-b} + \frac{\sigma^2}{4\eta}\right)$$

E fazendo os ajustes necessários nas equações de simulação real (2.30):

$$S_t = \exp\left\{\ln[S_{t-1}]e^{-\eta\Delta t} + \left[\ln(\bar{S}^*) - \frac{\sigma^2}{4\eta}\right](1 - e^{-\eta\Delta t}) + \sigma\sqrt{\frac{1 - e^{-2\eta\Delta t}}{2\eta}}N(0,1)\right\} \quad (2.53)$$

e neutra a risco (2.38):

$$S_t = \exp\left\{\ln[S_{t-1}]e^{-\eta\Delta t} + \left[\ln(\bar{S}^*) - \frac{\sigma^2}{4\eta} - \frac{\mu - r}{\eta}\right](1 - e^{-\eta\Delta t}) + \sigma\sqrt{\frac{1 - e^{-2\eta\Delta t}}{2\eta}}N(0,1)\right\} \quad (2.54)$$

O modelo de Schwartz aplica-se melhor a modelos teóricos especificados a partir de equações diferenciais, enquanto o de Dias/Marlim tem uma equação de simulação mais adequada a modelos onde o nível de equilíbrio é uma referência importante e frequentemente especificada de forma exógena. Portanto ambos os modelos são bastante similares e cada um tem suas próprias vantagens.

2.5. Modelos de dois Fatores com Reversão à Média

No capítulo anterior tratamos de modelos de fator único, ou de apenas uma incerteza estocástica. Esses modelos podem ser considerados relativamente simples (DIAS, 2008), portanto alguns autores sugerem o uso, em avaliação por opções reais assim como em derivativos, de modelos mais complexos os quais

consideram mais do que apenas uma incerteza estocástica, ou fatores. Os principais modelos de processos estocásticos de dois fatores (duas fontes de incerteza estocásticas) com reversão à média são o de Gibson e Schwartz (1990), e modelo 2 de Schwartz (1997) e o de Schwartz e Smith (2000). Estes três modelos podem ser descritos como a evolução do mesmo modelo em que cada versão representa a sofisticação do anterior e este pode ser modelado na nova versão. Schwartz e Smith (2000) inclusive fornecem uma tabela com a correspondência entre os parâmetros desse modelo e o modelo 2 de Schwartz (1997) assim como uma seção comparando seus resultados aos de Gibson e Schwartz (1990), para as mesmas séries temporais. Todos os três modelos exigem a existência de séries de preços futuros para sua calibragem, ou estimação de parâmetros, o que nos faz recair no mesmo problema de modelos de um fator, dependentes destes.

O modelo de Gibson e Schwartz (1990) consiste das seguintes equações:

$$\begin{aligned} dS / S &= \mu dt + \sigma_S dz_S \\ d\delta &= \eta(\alpha - \delta) dt + \sigma_\delta dz_\delta \end{aligned}$$

Onde S é o preço *spot* de uma *commodity* e δ sua taxa de conveniência instantânea (o fluxo de benefícios líquidos, que são gerados ao detentor físico de uma *commodity*). Esses autores então assumem que S segue um MGB (com *drift* μ volatilidade σ_S) e δ uma reversão à média aritmética (OU, com média α , velocidade de reversão η e volatilidade σ_δ). Esta última variável pode de fato assumir valores negativos, portanto a escolha desse processo é coerente. Eles então usam a equação fundamental que liga os preços futuros F ao preço *spot* S :

$$F(S, \tau) = S e^{(r-\delta)\tau} \quad (2.55)$$

Onde:

r – taxa de juros livre de risco,

$\tau = (T - t)$ – tempo entre a maturidade do contrato futuro T , e t atual.

O modelo 2 de Schwartz (1997) que representa uma sofisticação deste acima consiste das seguintes equações:

$$\begin{aligned} dS / S &= (\mu - \delta) dt + \sigma_S dz_S \\ d\delta &= \eta(\alpha - \delta) dt + \sigma_\delta dz_\delta \end{aligned}$$

com:

$$dz_S dz_\delta = \rho_{S\delta} dt$$

Onde $\rho_{S\delta}$ é a correlação entre os retornos das variáveis, ou fatores, S e δ . Aqui também é assumido que S segue um MGB e δ uma reversão à média aritmética (OU). O modelo 2 de Schwartz não faz diretamente uso da relação entre preços futuros e *spot* porque ele modela diretamente o preço *spot* S com a taxa de conveniência dentro da equação do preço (uma variável *nested* na outra). No entanto a própria definição da taxa líquida de conveniência supõe a existência de preços futuros, e Schwartz utiliza estes para estimar os parâmetros do modelo usando a técnica de filtro de *Kalman*, como no seu modelo 1.

Schwartz (1997) também propõe um modelo (3) de três fatores, semelhante ao modelo 2, mas no qual substitui o *drift* μ na equação do preço S , por: r (a taxa de juros), e modela este como uma reversão à média aritmética (OU). Ainda supõe que os três incrementos de Wiener do modelo são correlacionados dois a dois. Mas nos próprios resultados Schwartz ressalta que estes não representam grande melhoria frente ao modelo 2, principalmente em face a maior complexidade e maior intensidade computacional do modelo 3. Por este motivo não iremos analisar neste capítulo o modelo 3 de Schwartz.

O terceiro modelo de dois fatores analisado é o de Schwartz e Smith (2000), o qual além de ser o mais recente e englobar os outros dois, também tem características que o tornam mais interessante para a modelagem e aplicações de opções reais. Entre outras, ele não faz uso do conceito de taxa de conveniência na sua formulação.

A taxa de conveniência é um conceito amplamente aceito e descrito como: o fluxo de benefícios, líquidos de custo de estocagem, que são gerados ao detentor físico de uma *commodity*, mas não ao detentor de um contrato futuro ou para entrega futura (CASASSUS, et al, 2005, BRENNAN e SCHWARTZ, 1995, COX, INGERSOLL e ROSS, 1985^{a, b}) e são comparáveis a um fluxo de dividendos por uma ótica financeira. A evidência empírica da existência da taxa de conveniência vem da equação (2.55) que liga os preços futuros entre si e ao preço *spot* e que permite então a estimação desta a partir de séries de preços futuros. No entanto os próprios Schwartz e Smith (2000) ressaltam que além de não ser observada a taxa

de conveniência é um conceito de entendimento difícil e que a proposta de um modelo que não seja dependente dela tem vantagens:

“While many find the notion of convenience yield elusive, the idea of stochastically evolving short-term deviations and equilibrium prices seems more natural and intuitive” (SCHWARTZ e SMITH, 2000, p. 894).

2.5.1.

O modelo de dois fatores de Schwartz e Smith (2000)

O modelo de Schwartz e Smith (2000) considera que o preço *spot* S possui dois fatores distintos: 1) o primeiro é o nível de equilíbrio deste preço o qual assume-se evolui seguindo um MGB com *drift* refletindo, por exemplo, expectativas de exaustão de reservas, melhorias tecnológicas na exploração de uma *commodity*, inflação, evolução do PIB, até incertezas políticas e regulatórias. 2) o segundo são os desvios de curto prazo cuja variação o modelo assume que seguem uma reversão à média aritmética (OU) para um nível zero. Estes desvios, definidos como a diferença entre o preço *spot* e o nível de equilíbrio, podem refletir, por exemplo, mudanças de curto prazo na oferta devido a variações climáticas, ou interrupções de suprimento, etc. Estes também são atenuados em geral pela capacidade dos *players* de ajustar estoques em resposta a mudanças das condições mercadológicas e, portanto caracterizando um comportamento de reversão à média. Apesar de não observados esses dois fatores retratam a percepção natural de que os preços têm dinâmicas diferentes no curto e no longo prazo, o que torna o modelo útil para a aplicação em opções reais. Os autores usam a técnica de filtro de Kalman para determinar os parâmetros do processo, mas é possível estimar estes, com algumas restrições, a partir de uma série temporal de valores da variável S_t , conforme será mostrado nesta seção.

Esse modelo aplica-se muito bem a diversos casos de opções reais, pois cada diferente opção é mais sensível a um tipo de comportamento estocástico. Por exemplo, opções estratégicas, como de expansão, escalonamento ou postergação de investimentos ou abandono, são dependentes de patamares de atividade econômica e, portanto do comportamento de longo prazo das variáveis incertas das quais dependem. A característica de caminho aleatório destas, quando

presente, permite modelar com mais precisão essas opções reais do que o comportamento dos modelos estocásticos auto-regressivos. Já opções operacionais tais como capacidade de alternância de suprimento ou produção (BASTIAN-PINTO e BRANDÃO, 2007), adaptação de nível de atividade, otimização dinâmica de dispêndios e produção (FORTUNATO, 2009), redução ou interrupção temporária de produção, entre outras, são relacionadas a condições temporárias de atividade econômica e, portanto, do comportamento de mais curto prazo das variáveis incertas das quais dependem. Neste caso a característica de reversão a um nível de longo prazo quando associada às variáveis incertas que influem no projeto, é mais significativa para essas categorias de opções reais e, portanto mais importante de modelar.

As equações que descrevem o modelo são estas:

Seja a variável incerta S_t tal que: $S_t = \exp(s_t)$, ou: $s_t = \ln(S_t)$, e:

$$s_t = x_t + y_t, \quad (2.56)$$

onde:

$$dx = -\eta x dt + \sigma_x dz_x \quad (2.57)$$

x_t segue um processo de Ornstein Uhlenbeck, sendo um caso particular deste:

$$dx = -\eta(\bar{x} - x)dt + \sigma_x dz_x, \text{ com: } \bar{x} = 0$$

$$\text{e temos de (2.7): } x_t = x_{t-1}e^{-\eta\Delta t} + \varepsilon_t;$$

e:

$$dy = \alpha dt + \sigma_y dz_y \quad (2.58)$$

y_t segue um Movimento Aritmético Browniano (MAB), e portanto:

$$y_t = y_{t-1} + \alpha\Delta t + \varepsilon_t$$

ainda com:

$$dz_x dz_y = \rho_{xy} dt$$

Então temos x , y e s , normalmente distribuídos. É interessante notar que nesse caso S terá uma distribuição log-normal e será o resultado de um processo MGB: $\exp(y_t)$, multiplicado por uma reversão à média geométrica: $\exp(x_t)$, do tipo Schwartz (modelo 1):

$$S = \exp(x+y) = \exp(x) \exp(y)$$

2.5.1.1.

Equação diferencial do modelo

Aplicando o lema de Itô em (2.56) com (2.57) e (2.58), obtemos:

$$ds = (\alpha - \eta x)dt + \sigma_x dz_x + \sigma_y dz_y$$

Como: $S_t = \exp(s_t)$, então, aplicando novamente o lema de Itô:

$$dS = \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial x} dx + \frac{\partial S}{\partial y} dy + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} dy^2 + 2 \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y} dx dy \right)$$

$$\frac{\partial S}{\partial x} = \exp(x) \exp(y) = \frac{\partial S}{\partial y} = \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y} = S, \quad \text{e: } \frac{\partial S}{\partial t} = 0,$$

então:

$$\frac{dS}{S} = dx + dy + \frac{1}{2} (dx^2 + dy^2 + 2dx dy)$$

$$dx^2 = (-\eta x dt)^2 + 2(-\eta x dt)(\sigma_x dz_x) + (\sigma_x dz_x)^2 = \sigma_x^2 dt$$

e:

$$dy^2 = (\alpha dt)^2 + 2(\alpha dt)(\sigma_y dz_y) + (\sigma_y dz_y)^2 = \sigma_y^2 dt$$

ainda:

$$dx dy = -\eta x \mu dt^2 + (-\eta x \sigma_y) dt dz_y + \alpha \sigma_x dt dz_x + \sigma_x \sigma_y dz_x dz_y = \sigma_x \sigma_y \rho_{xy} dt$$

obtemos então a equação diferencial que descreve o modelo:

$$\frac{dS}{S} = \left[(\alpha - \eta x) + \frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}{2} + \rho_{xy} \sigma_x \sigma_y \right] dt + \sigma_x dz_x + \sigma_y dz_y \quad (2.59)$$

2.5.1.2.

Média e Variância

Os autores fornecem as seguintes equações, às quais chegam pela matriz de covariância dos dois fatores:

$$Var[\ln(S_t)] = (1 - e^{-2\eta t}) \frac{\sigma_x^2}{2\eta} + \sigma_y^2 t + 2(1 - e^{-2\eta t}) \frac{\rho_{xy} \sigma_x \sigma_y}{\eta} \quad (2.60)$$

Podemos verificar que, quando $t \rightarrow \infty$, então:

$$Var[\ln(S_{t \rightarrow \infty})] \rightarrow \underbrace{\frac{\sigma_x^2}{2\eta}}_{const} + 2 \frac{\rho_{xy} \sigma_x \sigma_y}{\eta} + \underbrace{\sigma_y^2}_{const} t$$

Este resultado acima será importante para a estimação de parâmetros do modelo. Como x_t e y_t ambos tem distribuição normal podemos escrever:

$$E[\ln(S_t)] = x_0 e^{-\eta t} + y_0 + \alpha t$$

e pela propriedade de log-normalidade:

$$\begin{aligned} E[S_t] &= \exp\left(E[\ln(S_t)] + \frac{1}{2} \text{Var}[\ln(S_t)]\right) \\ E[S_t] &= \exp\left(x_0 e^{-\eta t} + y_0 + \alpha t + (1 - e^{-2\eta t}) \frac{\sigma_x^2}{4\eta} + \frac{\sigma_y^2}{2} t + \right. \\ &\quad \left. (1 - e^{-2\eta t}) \frac{\rho_{xy} \sigma_x \sigma_y}{\eta}\right) \end{aligned} \quad (2.61)$$

Também podemos verificar que quando $t \rightarrow \infty$, então:

$$E[S_{t \rightarrow \infty}] \rightarrow \exp\left(\underbrace{y_0 + \frac{\sigma_x^2}{4\eta} + \frac{\rho_{xy} \sigma_x \sigma_y}{\eta}}_{const} + \underbrace{\left(\alpha + \frac{\sigma_y^2}{2}\right)}_{const} t\right)$$

2.5.1.3.

Discretização do modelo

Para discretizar o modelo começa-se com os valores de y_0 e x_0 , e simula-se independentemente as séries:

$$x_t = x_{t-1} e^{-\eta \Delta t} + \sigma_x \sqrt{\frac{1 - e^{-2\eta \Delta t}}{2\eta}} N_x(0,1), \text{ e:}$$

$$y_t = y_{t-1} + \alpha \Delta t + \sigma_y \sqrt{\Delta t} N_y(0,1), \text{ e finalmente:}$$

$$S_t = \exp(x_t + y_t)$$

Sendo que $N_x(0,1)$ e $N_y(0,1)$ devem ser simulados levando em conta a correlação ρ_{xy} entre os processos.

Os valores iniciais da simulação, y_0 e x_0 , não são os mesmos levantados na estimação de parâmetros do modelo na seção 2.5.1.4, mas os valores obtidos no final da série de dados disponíveis: y_n e x_n .

Nas Figura 2.1 e Figura 2.2, podem ser vistos duas plotagens do modelo de Schwartz e Smith (2000), para os valores de parâmetros listados abaixo delas.

Figura 2.1. Plotagem modelo Schwartz e Smith, com $x_0 > 0$

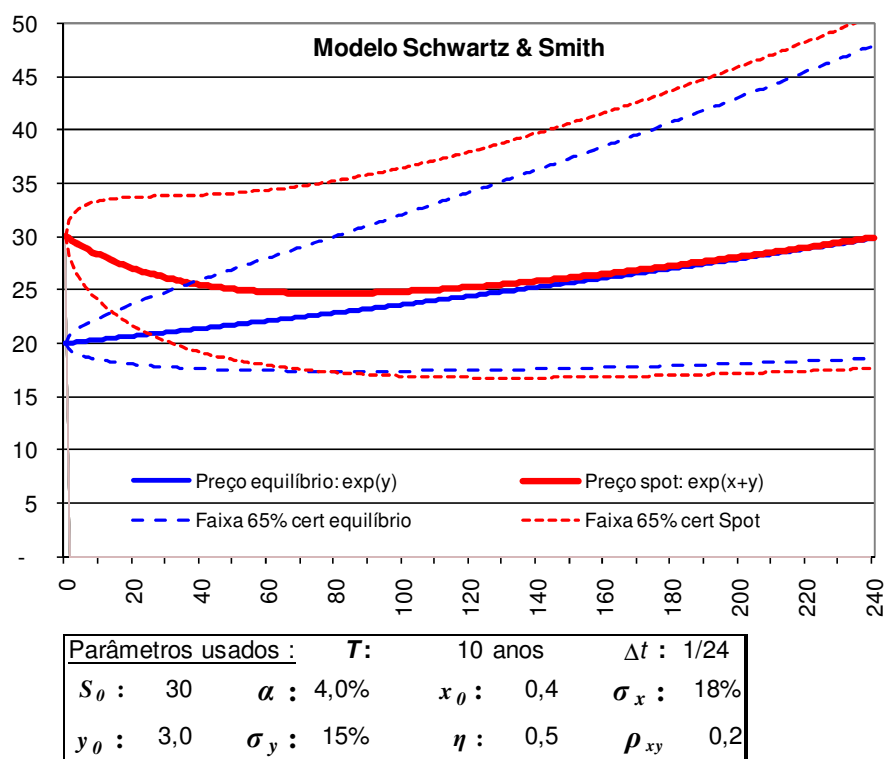
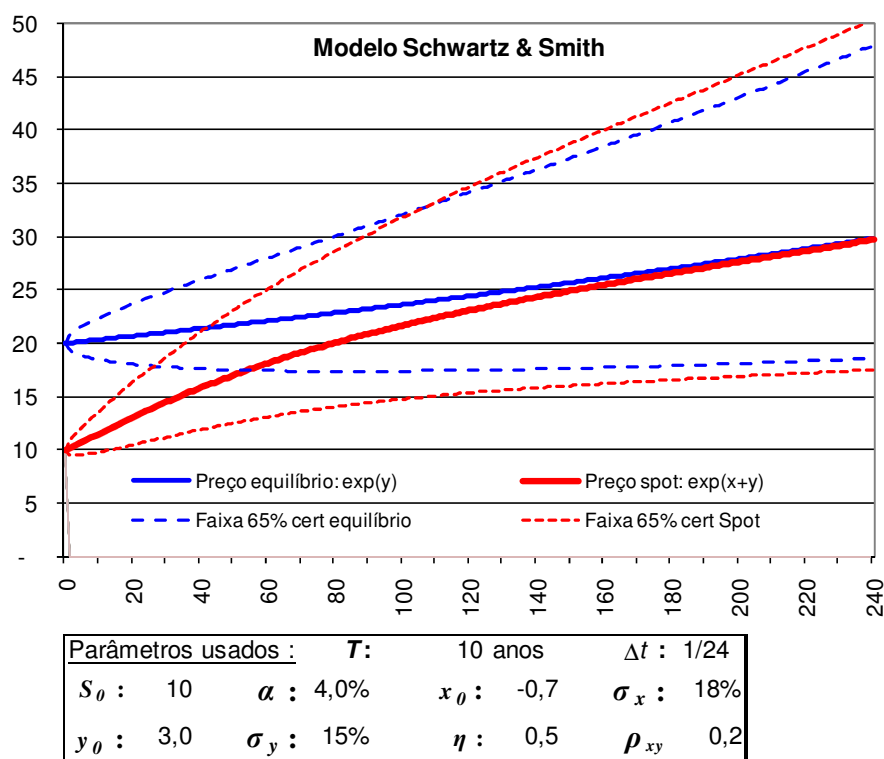


Figura 2.2. Plotagem modelo Schwartz e Smith, com $x_0 < 0$



2.5.1.4. Estimação de Parâmetros

Esta é sem dúvida a maior dificuldade do modelo, pois temos dois fatores não observados (a tendência de longo prazo y_t , e os desvios de curto prazo x_t) os quais precisam ser separados e ter seus parâmetros estimados individualmente. Para isso é feita inicialmente uma análise de dois casos particulares, que em muito simplificam essa “separação” e depois a estimação do caso geral o qual irá utilizar os resultados dos casos particulares em sua solução.

São necessários de serem estimados:

- x_0 - ln (logaritmo neperiano, ou natural) do valor inicial do desvio de curto prazo da variável: $s_t = \ln(S_t)$;
- σ_x - parâmetro da volatilidade do processo de desvio de curto prazo x_t da variável s_t (o qual segue uma reversão à média aritmética, processo de Ornstein-Uhlenbeck);
- η - parâmetro da velocidade de reversão à média do processo de desvio de curto prazo da variável s_t ;
- y_0 - ln (logaritmo neperiano) do valor inicial da tendência de longo prazo da variável s_t ;
- σ_y - parâmetro da volatilidade da tendência de longo prazo y_t da variável s_t (o qual segue um movimento aritmético Browniano);
- α - parâmetro de crescimento da tendência de longo prazo y_t da variável s_t ;
- ρ_{xy} - parâmetro de correlação entre as variações da tendência de curto prazo x_t e do desvio de longo prazo y_t da variável s_t .

Pela definição do processo:

$$\begin{aligned} s_t &= x_t + y_t = x_{t-1}e^{-\eta\Delta t} + y_{t-1} + \alpha\Delta t + \varepsilon_t \\ s_t &= s_{t-1} + x_{t-1}(e^{-\eta\Delta t} - 1) + \alpha\Delta t + \varepsilon_t \\ s_t - s_{t-1} &= x_{t-1}(e^{-\eta\Delta t} - 1) + \alpha\Delta t + \varepsilon_t \end{aligned} \quad (2.62)$$

2.5.1.4.1.

Derivação dos valores iniciais dos dois fatores do processo

Para derivar y_0 e x_0 , inicialmente consideramos: $y_0 = 0$ e calculamos a série x_t . Isso é feito considerando que:

$$y_t = \alpha t + y_0,$$

e:

$$x_t = s_t - y_t$$

Estima-se a seguinte regressão linear: $x_t - x_{t-1} = a^* + b^* x_{t-1} + \varepsilon_t$. Como estamos considerando que x_t segue um processo de Ornstein-Uhlenbeck, podemos escrever: $x_t - x_{t-1} = \underbrace{\bar{x}(1 - e^{-\eta\Delta t})}_{a^*} + \underbrace{(e^{-\eta\Delta t} - 1)}_{b^*} x_{t-1} + \varepsilon_t$

Através de métodos numéricos pode-se procurar o valor de y_0 que retorna o estimador a^* mais próximo de 0 (por exemplo, usando a função de Excel: “INTERCEPÇÃO” para encontrar o estimador a^* , e com o recurso “Atingir Meta”, aproximar o valor de y_0 que retorna a^* mais próximo de 0). Com este obtemos então também: x_0 que será o valor inicial de x_t para que a série tenha uma média de longo prazo: $\bar{x} = 0$.

2.5.1.4.2.

Primeiro caso: considera-se que $\sigma_y = 0$

Nesse caso o processo de s_t é uma reversão á média com tendência temporal: $\alpha\Delta t$. Ou uma reversão à média com *drift*.

Para uma amostra suficientemente grande n , de forma que $\sum_1^n x_t / n \approx 0$, obtemos o parâmetro de crescimento α , ou *drift*, diretamente da série s_t como se estivéssemos considerando unicamente um MAB:

$$\alpha = \frac{1}{n\Delta t} \sum_1^n (s_t - s_{t-1}) \quad (2.63)$$

Com y_0 e x_0 definidos, obtemos a série y_t e podemos escrever a equação (2.62) como:

$$s_t - s_{t-1} = \underbrace{(s_{t-1} - y_{t-1})}_{(b-1)} \underbrace{(e^{-\eta\Delta t} - 1)}_a + \underbrace{\alpha\Delta t}_a + \varepsilon_t \quad (2.64)$$

Podemos então rodar uma nova regressão linear sobre as séries $s_t - s_{t-1}$ e $s_{t-1} - y_{t-1}$:

$$s_t - s_{t-1} = (s_{t-1} - y_{t-1})(b-1) + a + \varepsilon_t \quad (2.65)$$

da qual obteremos os estimadores: a , b e σ_ε^2 (este último sendo o erro padrão da regressão). A partir destes, pela própria equação (2.64) obtemos:

$$\eta = -\frac{\ln(b)}{\Delta t} \quad (\text{similar a (2.10)})$$

e como: $\sigma_y = 0$ (e portanto $\rho_{xy} = 0$) de (2.60):

$$\sigma_\varepsilon^2 = (1 - e^{-2\eta\Delta t}) \frac{\sigma_x^2}{2\eta}$$

$$\sigma_x = \sigma_\varepsilon \sqrt{\frac{2\ln(b)}{(b^2 - 1)\Delta t}} \quad (\text{similar a (2.12)})$$

O processo obtido é determinado pela equação diferencial (2.66):

$$\frac{dS}{S} = \eta \left(\frac{\alpha}{\eta} + \frac{\sigma_x^2}{2\eta} - x \right) dt + \sigma_x dz_x \quad (2.66)$$

com:

$$dx = -\eta x dt + \sigma_x dz_x$$

$$\text{var}[\ln(S_t)] = (1 - e^{-2\eta t}) \frac{\sigma_x^2}{2\eta},$$

quando $t \rightarrow \infty$, então:

$$\text{var}[\ln(S_{t \rightarrow \infty})] \rightarrow \frac{\sigma_x^2}{2\eta} \quad (\text{semelhante ao modelo 1 de Schwartz, 1997})$$

$$E[S_t] = \exp \left(x_0 e^{-\eta t} + y_0 + \alpha t + (1 - e^{-2\eta t}) \frac{\sigma_x^2}{4\eta} \right)$$

$$\text{Quando } t \rightarrow \infty, \text{ então: } E[S_t] \rightarrow \exp \left(\underbrace{y_0 + \frac{\sigma_x^2}{4\eta}}_{const} + \underbrace{\alpha}_{const} t \right)$$

2.5.1.4.3.

Segundo caso: o processo MAB é conhecido

Frequentemente uma variável é resultante de suas próprias oscilações em torno de outra variável exógena (ou sua variação) como é o caso de preços dependentes de inflação (valores nominais), níveis de mercado dependentes de variações do PIB, etc. Nesses casos o processo exógeno é observado (índice de inflação, PIB, etc.) e pode ser diretamente medido assim como seus parâmetros se considerarmos que ele evolui conforme um MGB (ou seu ln, como um MAB). Portanto observando Y_t temos: $y_t = \ln(Y_t)$, e: α , σ_y .

Os valores de y_0 e x_0 podem ser estimados como no Caso 1 acima, e também de (2.64) obtemos os outros parâmetros necessários rodando a mesma regressão linear (2.65):

$$\eta = -\frac{\ln(b)}{\Delta t} \quad (\text{similar a (2.10)})$$

e de (2.60):

$$\sigma_\varepsilon^2 = (1 - e^{-2\eta\Delta t}) \frac{\sigma_x^2}{2\eta} + \sigma_y^2 \Delta t + 2(1 - e^{-2\eta\Delta t}) \frac{\rho_{xy} \sigma_x \sigma_y}{\eta}$$

Re-arrumando (com: $b^2 = e^{-2\eta\Delta t}$),:

$$0 = \frac{b^2 - 1}{2\ln(b)} \Delta t \sigma_x^2 + 2 \frac{b^2 - 1}{\ln(b)} \Delta t \rho_{xy} \sigma_y \sigma_x + \sigma_y^2 \Delta t - \sigma_\varepsilon^2 \quad (2.67)$$

Trata-se de um polinômio de 2º grau em σ_x .

i) Se considerarmos: $\rho_{xy} = 0$, nesse caso:

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{2(\sigma_\varepsilon^2 - \sigma_y^2 \Delta t)}{(b^2 - 1)\Delta t} \ln(b)} \quad (2.68)$$

Essa consideração é muito plausível se estivermos considerando um processo exógeno (y_t) independente e não correlacionado às variações de curto prazo (x_t) da variável de interesse.

ii) Se considerarmos: $\rho_{xy} \neq 0$, mas conhecido: a correlação ρ_{xy} pode ser estimada com as séries y_t e x_t , pois caso tenhamos s_t e y_t

podemos calcular a série histórica x_t . Nesse caso ρ_{xy} é o fator de correlação entre as séries: $x_t - x_{t-1}$, e $y_t - y_{t-1}$.

Nesse caso (2.67) tem duas raízes. Chamando:

$$\theta = \frac{(b^2 - 1)}{\ln(b)} \Delta t,$$

Assim (2.67):

$$0 = \sigma_x^2 + 4\rho_{xy}\sigma_y\sigma_x + 2\frac{(\sigma_y^2\Delta t - \sigma_\varepsilon^2)}{\theta}$$

como: $0 < b < 1$ (como visto na seção 3, pois: $b > 1$ significaria que a série tem comportamento explosivo (WOOLDRIDGE, 2000), então: $\theta > 0$.

$$\sigma_x = -2\rho_{xy}\sigma_y \pm \sqrt{(2\rho_{xy}\sigma_y)^2 - 2\frac{(\sigma_y^2\Delta t - \sigma_\varepsilon^2)}{\theta}}$$

e como: $(\sigma_y^2\Delta t - \sigma_\varepsilon^2) < 0$, sempre existirão duas raízes para (2.67), das quais uma é sempre positiva e a outra negativa, pois o termo da raiz quadrada é superior em valor absoluto ao que o precede. O parâmetro da volatilidade de x (σ_x) será a raiz positiva de (2.67):

$$\sigma_x = -2\rho_{xy}\sigma_y + \sqrt{(2\rho_{xy}\sigma_y)^2 - 2\frac{(\sigma_y^2\Delta t - \sigma_\varepsilon^2)}{\theta}} \quad (2.69)$$

Podemos verificar que (2.68) é um caso particular de (2.69) para $\rho_{xy} = 0$, e (2.12) é um caso particular de (2.68) para $\sigma_y = 0$.

2.5.1.4.4.

Terceiro caso: Caso geral, apenas S_t é observado

Nesse caso teríamos infinitas soluções possíveis para diferenciar os dois fatores x_t e y_t do processo s_t . Portanto precisamos alguma característica de diferenciação dos dois fatores do processo que permita a separação destes. Como sabemos uma das principais diferenças entre os dois processos (reversão à média e MGB) é que a variância deste último cresce de forma proporcional a t enquanto no primeiro ela é limitada a um valor máximo na medida em que $t \rightarrow \infty$. Analisando a equação (2.60), conforme citado, nota-se que, quando $t \rightarrow \infty$, então:

$$Var(s_{t \rightarrow \infty}) \rightarrow \underbrace{\frac{\sigma_x^2}{2\eta} + 2 \frac{\rho_{xy} \sigma_x \sigma_y}{\eta}}_{const} + \underbrace{\sigma_y^2}_{const} t \quad (2.70)$$

Isso ocorre porque os termos em: $(1 - e^{-2\eta t})$, na equação (2.60) tendem rapidamente para 1 na medida em que t cresce. Vimos na seção 2.3, ao procurar determinar a validade do processo estocástico de uma série temporal, que a razão da variância, calculada pela equação (2.3), deve tender a estabilizar num valor específico, inferior a 1, caso haja presença de reversão à média. O atraso, ou *lag*, k usado na razão da variância após o qual ocorre essa estabilização é aquele tempo T no qual a variância deixa de crescer pelo efeito da reversão à média e passa a crescer somente em função da presença de caminho aleatório. No caso da série não apresentar nenhuma característica de caminho aleatório (ou de MGB) então a razão da variância deveria cair a 0. Schwartz e Smith (2000) demonstram esse efeito na variância de seus resultados. Podemos usar esse “tempo” T com a equação (2.70) para estimar σ_y : estimamos o fator de inclinação da equação linear (2.70) para $Var[s(t)]$ por métodos numéricos (isso pode ser feito, por exemplo, com a função: “INCLINAÇÃO” do Excel) a partir do tempo T no qual a razão da variância demonstra comportamento estabilizado, até n , último valor da série temporal S_t . Obtém-se então σ_y , calculando a raiz quadrada dos valores médios da inclinação de $Var[s(t)]$ entre T , e n .

Para o parâmetro de crescimento, ou *drift* α , de y_t é usada a mesma abordagem dos casos 1 e 2 acima, porque o modelo considera que a média do fator de reversão x_t é 0. Portanto com a equação (2.63) obtém-se o segundo parâmetro do fator de caminho aleatório do modelo. Com estes estimados, estamos de volta no caso 2 visto acima: o processo MAB é conhecido. Em principio poderíamos aplicar o mesmo procedimento acima para estimar os parâmetros restantes do fator de reversão à média.

Mas neste ponto será necessário fazer alguma suposição sobre o parâmetro de correlação ρ_{xy} entre os dois fatores, sendo esta uma das limitações de metodologia proposta. Contrariamente ao caso 2, quando $\rho_{xy} \neq 0$ e podia-se estimar uma amostra de x_t para calcular ρ_{xy} , agora não temos uma série y_t para derivar x_t . Neste caso precisaremos fazer alguma suposição sobre o valor da

correlação dos dois fatores do processo. Geralmente é razoável supor que $\rho_{xy} = 0$, e assim utilizar os resultados das equações (2.10) e (2.68). Ou mesmo assumindo $\rho_{xy} \neq 0$, fazer uma análise de sensibilidade de σ_x aos valores de ρ_{xy} com a equação (2.69).

Na seção 6 são mostrados resultados da aplicação dessa abordagem a séries temporais de preços de duas *commodities* (açúcar e etanol) e é feita essa análise de sensibilidade.

2.5.1.5. Simulação Neutra ao Risco

A simulação neutra ao risco do processo de Schwartz e Smith envolve também os prêmios de risco dos dois fatores do processo. Chamando estes de:

λ_x : prêmio de risco do fator de curto prazo do processo, e

λ_y : prêmio de risco do fator de longo prazo do processo;

as equações de simulação dadas na seção 2.5.1.3, passam a ser:

$$x_t = x_{t-1}e^{-\eta\Delta t} - \left[\frac{\lambda_x}{\eta} \right] (1 - e^{-\eta\Delta t}) + \sigma \sqrt{\frac{1 - e^{-2\eta\Delta t}}{2\eta}} N_x(0,1)$$

e:

$$y_t = y_{t-1} + (\alpha - \lambda_y) \Delta t + \sigma_y \sqrt{\Delta t} N_y(0,1)$$

ainda com:

$$S_t = \exp(x_t + y_t)$$

e sendo que $N_x(0,1)$ e $N_y(0,1)$ devem ser simulados levando em conta a correlação ρ_{xy} entre os processos.

Neste caso confrontamo-nos com o mesmo problema de separação dos dois fatores do processo, agora quanto ao seu prêmio de risco. Como estamos supondo que não se dispõe de preços futuros, principalmente em diferentes vencimentos o que permitiria diferenciar pela técnica do filtro de Kalman, a separação do prêmio de risco em seus dois fatores só poderá ser feita a partir de suposições sobre os diferentes fatores considerados no processo.

Uma dessas alternativas, que fica aparente quando se está supondo que o fator de longo prazo, ou MAB y_t , configura-se no caso 1 (seção 2.5.1.4.2) ou caso

2 (seção 2.5.1.4.3), como se esse fator fosse o índice de inflação ou o PIB da economia, é que o prêmio de risco deste é nulo: $\lambda_y = 0$. Então teríamos todo o prêmio de risco do processo: $\mu - r$, atribuído a: λ_x .

2.6.

Resultados da modelagem de preços de açúcar e etanol com os modelos descritos

2.6.1.

Dados utilizados

Como teste empírico das abordagens mostradas nas seções anteriores, foram usadas séries de preços da indústria sucro-alcooleira brasileira. Estas estão disponíveis on-line no CEPEA³ (Centro de Estudos Avançados em Economia Aplicada, da Escola Superior de Agricultura). Eles são resultado de levantamento diário no caso do açúcar e semanal no caso do etanol, realizado por técnicos num convênio entre a CEPEA, a ÚNICA (União da Agroindústria Canavieira de São Paulo) e a ORPLANA (Organização dos Plantadores de Cana do Estado de SP). Para os preços de álcool, foi usada uma média entre álcool hidratado (30%) e anidro (70%). Ambos são produzidos nas usinas e essa proporção corresponde à média histórica da demanda destas (Gonçalves et al., 2006). Ambas foram convertidas em séries de médias mensais de maio de 1998 a agosto de 2009. O escopo de tempo pode ser considerado relativamente curto (pouco mais de onze anos), no entanto as séries de preços de etanol só estão disponíveis a partir dessa data inicial. A razão para isso está em que os preços até então sofriam forte influência do governo. Além de o mercado de etanol ser muito reduzido anteriormente ao início da série. Foi usada também a série mensal do IGP-DI (Índice Geral de Preços – Disponibilidade Interna, da Fundação Getúlio Vargas), como deflator para se obter as séries de preços em valores atuais (deflacionadas, valor atual de agosto de 2009). Apesar de ter sido usado para isso o IGP-DI como índice de inflação, por ser composto de vários outros índices, qualquer outro (IPCA, ICC, etc.) poderia ser usado e no escopo de prazo analisado, não deveria

³ <<http://www.cepea.esalq.usp.br>>

apresentar muita diferença final. Os preços históricos (ou nominais) e deflacionados (valores de agosto de 2009) podem ser vistos nas Figura 2.3 e Figura 2.4.

Figura 2.3. Preços etanol e açúcar CEPEA

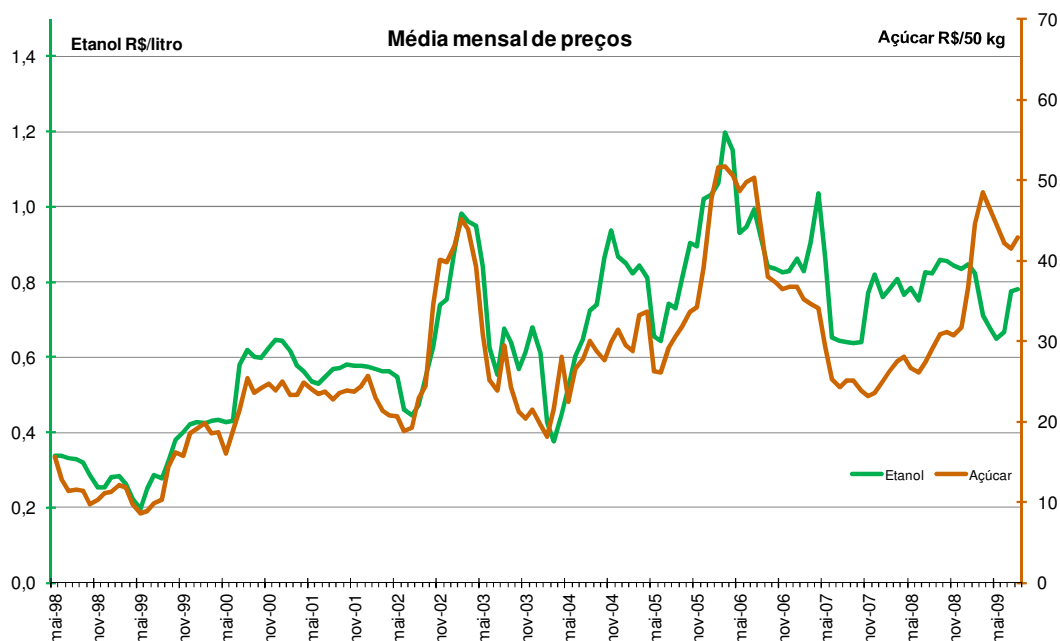
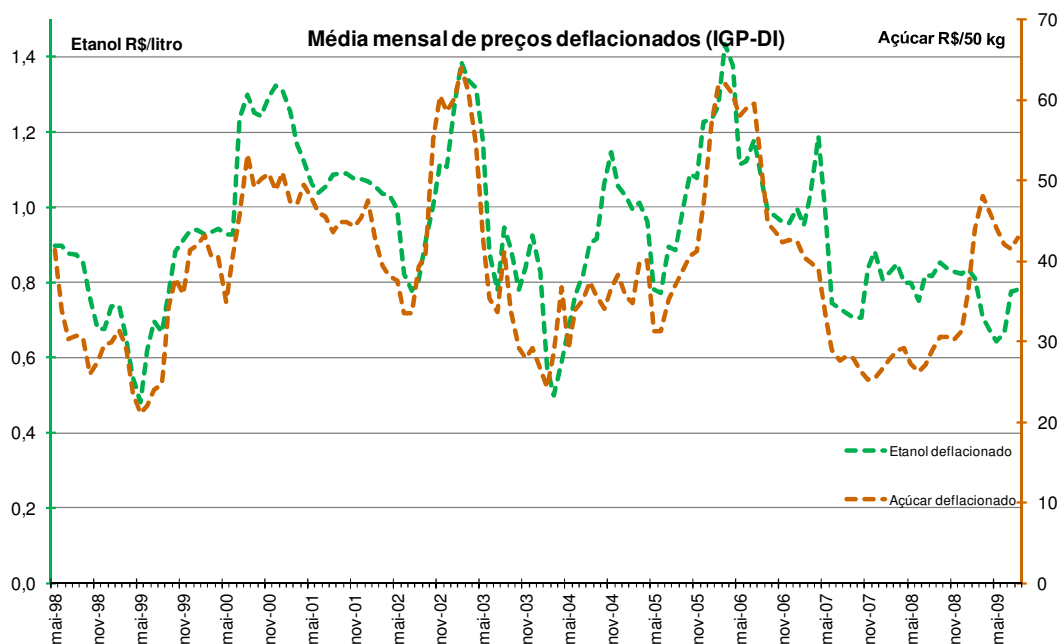


Figura 2.4. Preços etanol e açúcar deflacionados pelo IGP-DI, Base: AGO 2009 - CEPEA



Pode-se observar que as séries de preços nominais apresentam crescimento ao longo do período e aparentam ter variância crescente, enquanto as deflacionadas (trazidas a valores de Agosto 2009 pela variação do IGP-DI, apresentam comportamento de reversão à média.

2.6.2.

Determinação da Validade do Processo Estocástico

Foi num primeiro momento realizado um teste de raiz unitária em todas as séries, para verificar a adequabilidade se uma modelagem como um MGB. Os resultados foram os seguintes:

Para as séries de preços nominais, ou seja os valores históricos que apresentam clara tendência temporal, deve ser usada a versão expandida do teste de Dickey-Fuller. Esta foi realizada no software *EViews* e os resultados da estatística-*t* encontrados foram:

Preços de Etanol : -2,28382

Preços de Açúcar: -2,13979

Em ambos os casos a presença de raiz unitária não é rejeitada em nenhum nível de significância, indicando, portanto a adequabilidade do MGB para a modelagem dessas séries.

No caso das séries deflacionadas é usada a versão padrão do teste, sem tendência temporal. Esta análise também foi realizada no software *EViews*, que retornou os seguintes resultados da estatística-*t*:

Preços de Etanol deflacionados: -3,01202

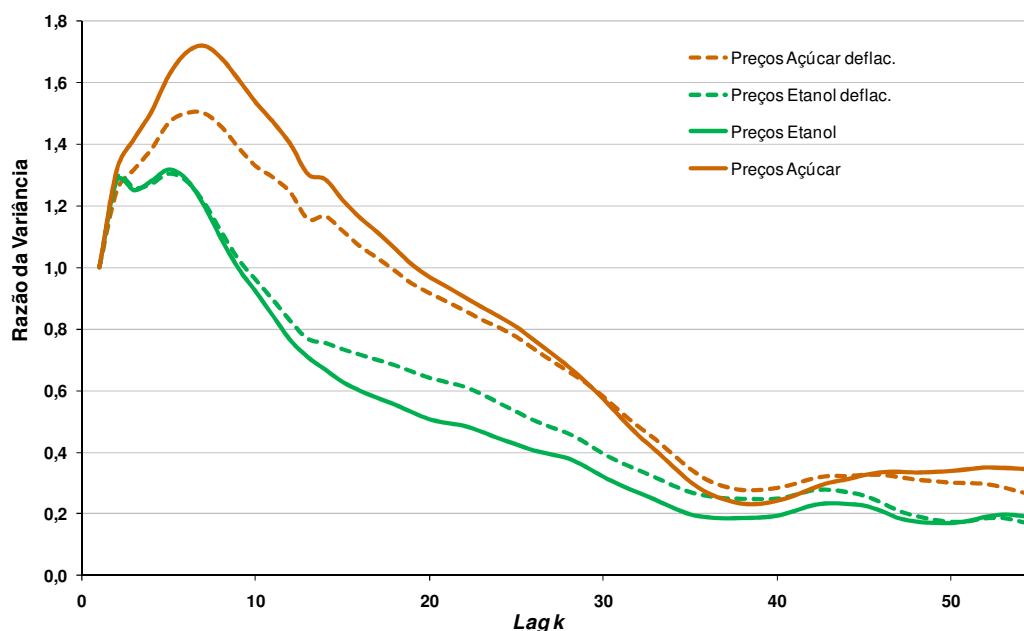
Preços de Açúcar deflacionados: -2,21346

Podemos observar que no caso do açúcar a presença de raiz unitária continua não sendo rejeitada, mas que o valor da estatística *t* começa a aproximar-se do valor crítico de 10% do teste padrão: -2,578, indicando que possivelmente em algum nível próximo (como 15%) já haveria rejeição. Quanto ao preço deflacionado do etanol este é claramente rejeitado a um nível de significância de 5%, e já próximo ao de 2,5%. Aparentemente obtemos resultados contraditórios, e

podemos inferir que as séries apresentam comportamentos de ambos os modelos: caminho aleatório (MGB) e auto regressão (MRM).

Conforme a abordagem descrita na seção 2.3, foi então estimada a razão da variância para as quatro séries de preços (nominais e deflacionadas). A plotagem destas está na Figura 2.5. Da mesma forma que com as séries analisadas por Pindyck (1999), as razões R_k inicialmente crescem com o retardo (*Lag*) k , o que é consistente com ambos os processos: MGB e reversão à média (neste último caso a variância cresce inicialmente e se estabiliza ao atingir um patamar superior), mas então começam a cair, estabilizando-se num nível de 0,18 para o etanol e 0,30 para o açúcar, para valores de k por volta de 38 meses.

Figura 2.5. Razão da variância R_k para diferentes valores de *lag* k – etanol e açúcar



Esse padrão ocorre tanto para as séries de preços nominais quanto deflacionadas. Mais relevante é o baixo valor no qual a razão da variância das quatro séries de preços (duas nominais e as mesmas deflacionadas) se estabilizam, o que permite pré-supor a presença de reversão à média para todas as séries.

Portanto serão levantados para essas quatro séries os parâmetros considerando que estes se comportam conforme três diferentes processos:

- MGB ou caminho aleatório,

- Reversão à média geométrica conforme o modelo 1 de Schwartz descrito na seção 2.4.2.2,
- Composto parcialmente de um MGB e de uma reversão à média geométrica, conforme o modelo de Schwartz e Smith (seção 2.5.1).

2.6.3. Resultados

Inicialmente as séries de preços foram tratadas como se tivessem um comportamento segundo um MGB. Para levantar os parâmetros destas, sendo estes o *drift* α , e volatilidade σ , foi calculada a série do log-retorno de cada preço: o parâmetro de volatilidade sendo o desvio padrão dessas séries e o *drift* a média da mesma série, a qual é acrescentada metade da variância encontrada. Isso foi feito para as quatro séries de preços: históricos e deflacionados. Como para se obter essas últimas, os preços nominais de etanol e açúcar foram deflacionados usando o IGP-DI, a série desse índice também foi tratada como um MGB e seus parâmetros levantados. Apesar de ter sido usado para isso o IGP-DI como índice de inflação, por ser composto de vários outros índices, qualquer outro (IPCA, ICC, etc.) poderia ser usado e no escopo de prazo analisado (Maio 1998 a Agosto 2009), não deveria apresentar muita diferença final.

Num segundo passo as mesmas séries de preços foram tratadas como se comportando como reversões à média geométricas segundo o modelo 1 de Schwartz, e os parâmetros correspondentes estimados pelo procedimento desenvolvido na seção 2.4.2.2.3. Os resultados de ambas as estimações estão na Tabela 2.4.

Tabela 2.4. Modelagem como MGB e como MRM

	Parâmetros				
	MGB		MRM (Schwartz 1)		
	α	σ	η	σ	$\bar{S}^*$
IGP - DI	8,75%	3,28%			
Etanol nominal	13,62%	35,10%	0,525	35,68%	0,80
Açúcar nominal	15,38%	35,70%	0,422	36,34%	38,44
Etanol deflacionado	4,71%	34,49%	1,265	35,82%	0,95
Açúcar deflacionado	6,43%	34,99%	0,946	35,82%	40,50

*: média de longo prazo da variável

Os parâmetros em todas as tabelas de resultados estão em valores anuais (taxas de crescimento, volatilidade, variância, velocidade de reversão à média). Os valores de preços (médias de longo prazo, e valores iniciais) estão em R\$/litro para etanol e R\$/50 kg para açúcar.

Nota-se que as volatilidades em geral diminuem levemente nas séries deflacionadas, e as velocidades de reversão aumentam significativamente. Nestes casos de modelos de um fator, o MGB parece mais adequado às séries nominais ou de preços históricos enquanto a reversão à média geométrica descreve melhor o comportamento nas séries deflacionadas. Esse comportamento permite pressupor que as séries nominais apresentam componentes de reversão à média como também de caminho aleatório, o que já havia sido sugerido pelo resultado da análise da razão da variância em todas as séries.

Então passamos a modelar as séries de preços nominais segundo o modelo de Schwartz e Smith (2000). Inicialmente apenas as séries nominais foram modeladas por essa abordagem, pois como elas apresentam tendência temporal (*drift*) bem aparente, se adéquam melhor a um processo que modela separadamente as tendências de longo e curto prazo.

Num primeiro momento foi considerado que as séries nominais comportam-se como reversão à média geométrica com tendência temporal determinística. Os parâmetros desse modelo foram levantados segundo a abordagem desenvolvida para o caso 1, na seção 2.5.1.4.2. Os resultados obtidos estão listados na Tabela 2.5.

Tabela 2.5. Modelagem como reversão à média com *drift* (caso 1 - Schwartz & Smith)

	Parâmetros						Preço
	MAB (y_t)			Reversão à Média (x_t)			Inicial*
	α	σ_y	y_0	η	σ_x	x_0	S_0
Etanol nominal	7,46%	0,00%	-0,0694	1,0054	36,11%	-0,1774	0,781
Açúcar nominal	9,01%	0,00%	3,736	0,8441	36,61%	0,0221	42,85

* O preço inicial para simulação, é igual do último valor da série modelada, e é obtido aqui, pelos parâmetros levantados: $S_0 = \exp(x_0 + y_0)$.

Os valores de *drift* α encontrados neste modelo não podem ser diretamente comparados aos dos MGB da Tabela 2.4, pois correspondem ao MAB do modelo de Schwartz e Smith. Para igualar estes precisamos diminuir daqueles do MGB a metade da variância encontrada.

Quando comparando os parâmetros de reversão à média obtidos neste caso 1 com aqueles do modelo 1 de Schwartz percebe-se um pequeno aumento da volatilidade neste caso, em função de estarmos considerando a tendência temporal como determinística, e portanto incorporando a volatilidade da inflação na do processo de reversão à média. Nota-se também uma redução nos valores das velocidades de reversão, o que também pode ser atribuído ao efeito de retirada da tendência temporal no processo de reversão à média.

Como o caso 1 está incorporando a incerteza da inflação na volatilidade da reversão à média, foram levantados os parâmetros seguindo agora a abordagem desenvolvida para o caso 2, na seção 2.5.1.4.3, considerando então que o ln do índice IGP-DI segue um comportamento conforme um MAB e que estes parâmetros são conhecidos. Os resultados estão na Tabela 2.6.

Tabela 2.6. Modelagem como reversão à média com IGP-DI (caso 2 - Schwartz & Smith)

	Parâmetros							Preço
	ln(IGP-DI) - MAB (y_t)			Reversão à Média (x_t)			ρ_{xy}	Inicial
	α	σ_y	y_0	η	σ_x	x_0		S_0
Etanol nominal	8,70%	3,29%	-0,0973	1,2981	35,73%	-0,1496	0,1402	0,781
Açúcar nominal	8,70%	3,29%	3,634	0,9504	35,87%	0,1241	0,2126	42,85

O *drift* α do ln do IGP-DI é levemente inferior ao caso do MGB: dele se subtrai a metade da variância encontrada. A volatilidade dos processos de

reversão à média agora diminuiu pela “retirada” da volatilidade da inflação, quando comparada ao caso 1, mas as velocidades de reversão pouco se alteram. Nesta abordagem é possível calcular o parâmetro de correlação entre os fatores do processo assim modelado, porque obtemos as séries y_t (ln do IGP-DI) e x_t . Os resultados obtidos neste caso para os parâmetros de reversão à média das séries deflacionadas, são muito próximos da modelagem como reversão à média geométrica do modelo 1 de Schwartz (Tabela 2.4) o que permite validar aquele primeiro modelo para estas séries de dados. Isso é devido à baixa volatilidade do fator de longo prazo, neste caso a inflação pelo IGP-DI. Mas pode-se observar que nos parâmetros levantados pelo caso 1 (Tabela 2.5) que os *drifts* α de cada série (etanol e açúcar) são levemente diferentes um do outro, indicando comportamentos de longo prazo distintos entre si e da inflação também. Para o setor sucro-alcooleiro, altamente dependente destas variáveis, a incorreta modelagem de uma tendência de longo prazo pode levar a resultados e tomadas de decisão errôneas.

Então foram levantados os mesmos parâmetros agora para as séries deflacionadas também, sem fazer nenhuma restrição ao fator de longo prazo (ou MAB) presente no processo, somente considerando que o fator de correlação dos dois fatores é nulo ($\rho_{xy} = 0$). Isso é feito pela abordagem do caso 3, descrito na seção 2.5.1.4.4. Para estimar o valor do primeiro parâmetros segundo a média da inclinação da curva da variância foi considerado um T superior a: 50. Os resultados estão na Tabela 2.7.

Tabela 2.7. Modelagem como reversão à média e MAB (caso 3 - Schwartz & Smith)

	Parâmetros					
	MAB (y_t)			Reversão à Média (x_t)		
	α	σ_y	y_0	η	σ_x	x_0
Etanol nominal	7,46%	9,04%	-0,0677	1,011	35,00%	-0,1791
Açúcar nominal	9,01%	5,82%	3,758	0,839	35,67%	-0,0004
Etanol deflacionado	-1,24%	8,26%	-1,0389	1,280	34,74%	0,7920
Açúcar deflacionado	0,31%	3,74%	2,787	0,918	35,19%	0,9707

Como comentários a estes valores, podemos ver não somente que a volatilidade dos fatores de reversão à média diminui relativamente ao caso 1, ou seja, a volatilidade da inflação deixou de estar incorporada nesta, mas também e

principalmente que o fator de longo prazo (y_t) dos processos possui volatilidade significativa, tanto para as séries nominais quanto para as deflacionadas. Isso indica que a tendência de longo prazo dessas variáveis possui dinâmica própria a qual deve ser considerada e não somente associada ao comportamento inflacionário. Também é de interesse notar que o valor inicial do desvio de curto prazo, x_0 , tem sinal trocado entre as séries de preços nominais e as deflacionadas.

Para ilustrar a aproximação do processo real, plotamos nas Figura 2.6 e Figura 2.7 as variâncias em função de t ($\text{Var}(t)$) dos processos de preços nominais de etanol e açúcar, destacando a série usada para estimar σ_y ($\text{Var}(t > T)$) conforme descrito na seção 2.5.1.4.4, e o resultado da variância segundo as equações (2.60) e (2.70) ou seja em função dos parâmetros estimados para descrever o processo.

Figura 2.6. Variância verificada e estimada para Etanol nominal

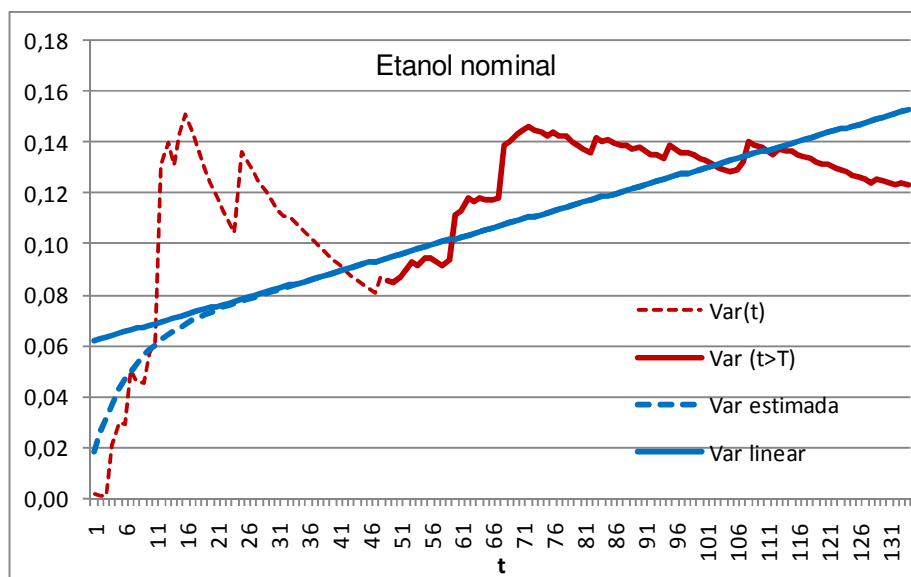
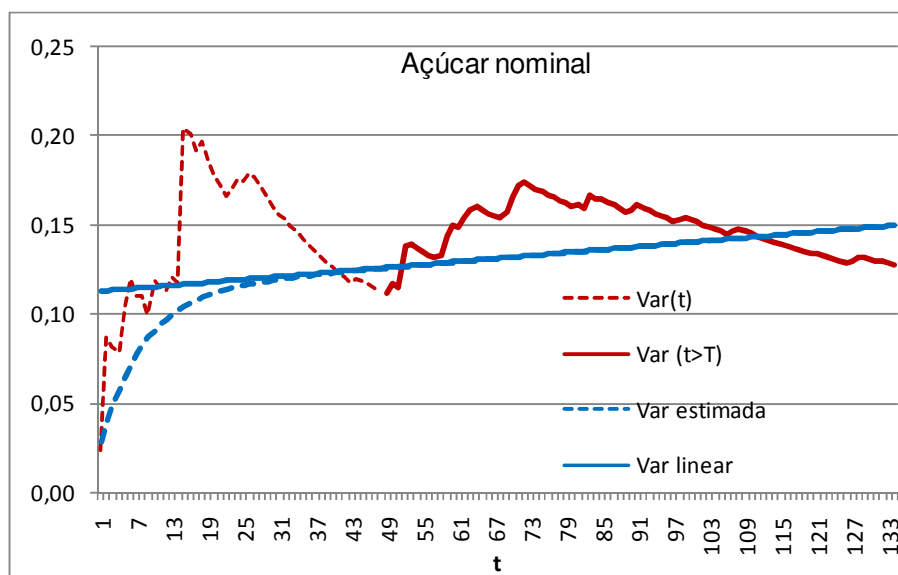


Figura 2.7. Variância verificada e estimada para Açúcar nominal

Na abordagem usada, o único dos parâmetros levantados que é dependente do fator de correlação entre os fatores é a volatilidade do fator de reversão à média σ_x . Conforme sugerido, foi calculada a sensibilidade desse parâmetro ao fator de correlação ρ_{xy} . Os resultados podem ser vistos na Tabela 2.8.

Tabela 2.8. Sensibilidade da volatilidade σ_x , a correlação ρ_{xy} entre os fatores x e y

σ_x	ρ_{xy}								
	-1,00	-0,75	-0,50	-0,25	0,00	0,25	0,50	0,75	1,00
Etanol nominal	45,2%	42,4%	39,8%	37,3%	35,0%	32,8%	30,8%	28,9%	27,1%
Açúcar nominal	42,0%	40,3%	38,7%	37,2%	35,7%	34,2%	32,9%	31,6%	30,3%
Etanol deflacionado	44,0%	41,5%	39,1%	36,9%	34,7%	32,7%	30,9%	29,1%	27,4%
Açúcar deflacionado	39,1%	38,1%	37,1%	36,1%	35,2%	34,3%	33,4%	32,5%	31,6%

Pode ser observada a alta sensibilidade de σ_x ao fator de correlação dos dois fatores. No caso do preço histórico de etanol esta vai de 27% ($\rho_{xy} = 1$) para mais 45% ($\rho_{xy} = -1$). Neste caso a abordagem usada não permite encontrar o valor da correlação e, portanto, constitui-se numa limitação dessa modelagem, conforme explicado na seção 2.5.1.4.4.

Mas como pode ser observado na Tabela 2.6 onde se obtêm os valores de correlação entre o comportamento de curto prazo da variável e aquele da inflação,

esta correlação deve ser baixa, portanto os valores extremos da Tabela 2.8 dificilmente ocorreriam em um caso real.

2.7. Conclusões e sugestões

Neste capítulo foi visto que variáveis estocásticas usadas em opções reais não precisam ser sempre modeladas por um MGB, e que é possível determinar se estas incorporam elementos de reversão à média e ainda estimar os parâmetros destes processos a partir de séries temporais. O processo estocástico usado na modelagem de variáveis estocásticas pode influir significativamente no valor das opções reais como mostra Kerr (2008). Foi visto que uma variável pode também ser a composição de um processo de caminho aleatório e de uma reversão à média e que esta pode ser modelada incluindo esses dois processos, mas a principal dificuldade está na correta estimação dos parâmetros desse modelo.

Nos exemplos mostrados de séries de preços de açúcar e etanol levantados junto à indústria sucro-alcooleira do Brasil, foi visto que estes podem ser modelados segundo um processo de reversão à média geométrico com maior precisão desde que deflacionados. No entanto as séries históricas apresentam elementos de caminho um aleatório muito próximo a inflação, mas não exatamente iguais. Portanto a modelagem pelo modelo composto de Schwartz e Smith é mais precisa e nesse caso permitirá a separação das duas tendências, ou fatores do processo. No entanto somente a série temporal desses preços não permite levantar com precisão todos os parâmetros do processo, como a correlação entre os fatores do processo e a separação entre os prêmios de risco destes fatores.

Como sugestões para futuros trabalhos na mesma linha de pesquisa, ou seja a modelagem de processo estocásticos de fator único e multi-fatores para uso em opções reais e a calibragem destes, podemos citar as seguintes:

O desenvolvimento e pesquisa de uma abordagem para determinação dos parâmetros do modelo de Schwartz e Smith (2000) levantando estes de forma integrada, seja por um processo de otimização ou econométrico, sem precisar separar os dois fatores como feito neste trabalho.

Incluir processos com saltos de *Poisson* num modelo de dois fatores, em conjunto com caminho aleatório e ou reversão à média, semelhante ao utilizado por Dias e Rocha (1999), e desenvolver abordagem para determinação dos parâmetros necessários, a partir de séries temporais, na mesma forma desenvolvida neste trabalho. A inclusão de processos com saltos nessa abordagem completaria este trabalho e se torna muito interessante na modelagem de opções reais. No entanto pesquisa nessa linha deverá encontrar dificuldades principalmente na parametrização correta dos processos isoladamente, em função da dificuldade em separar processos contínuos como a reversão à média de descontinuidades como são os saltos de *Poisson*, a partir de uma única série temporal de valores.

2.8. Referências Bibliográficas

AIUBE, F. A. L.; BAIDYA, T. K. N.; TITO, E. A. H. Processos Estocásticos dos Preços das Commodities: uma abordagem através do filtro de partículas. **Revista Brasileira de Economia**, v. 60, n. 3, Jul-Set, 2006.

AL-HARTHY, M. H. Stochastic Oil Price Models: comparison and impact. **The Engineering Economist**, v. 52, n. 3, p.p. 269-284, 2007.

BAKER, M.; MAYFIELD, E.; PARSONS, J. Alternative Models of Uncertain Commodity Prices for Use with Modern Asset Pricing Models. **The Energy Journal**, v. 19, n. 1, p.p. 115-148, 1998.

BASTIAN-PINTO, C. L.; BRANDÃO, L. E. T. Modelando Opções de Conversão com Movimento de Reversão à Média. **Revista Brasileira de Finanças**, v. 5, n. 2, p.p. 97-124, Dez, 2007.

BHATTACHARYA, S. Project Valuation with Mean-Reverting Cash Flow Streams. **The Journal of Finance**, n. 33, p.p. 1317-1331, 1978.

BRANDÃO, L. E. T. Capítulos Dixit & Pindyck, desenvolvimento de equações; disponível em: <<http://www.iag.puc-rio.br/~brandao>> ; acessado em: 20/05/2009.

BRENNAN, M.J.; SCHWARTZ, E.S. Evaluating Natural Resource Investment. **Journal of Business**, v. 58, n. 2, p.p. 135-157, 1985.

CASASSUS, J.; COLLIN-DUFRESNE, P. Stochastic Convenience Yield Implied from Commodity Futures and Interest Rates. **The Journal of Finance**, v. 60, n. 5, Oct, 2005.

CEPEA - Centro de Estudos Avançados em Economia Aplicada, disponível em: <<http://www.cepea.esalq.usp.br>> , acessado em: 29 de Abril, 2008.

COX, J, C.; INGERSOLL, J. E.; ROSS, S. A. An Intertemporal General Equilibrium Model of Asset Prices. **Econometrica**, v. 53, n. 2, p.p. 363-384, Jan., 1985^a.

COX, J, C.; INGERSOLL, J. E.; ROSS, S. A. A Theory of the Term Structure of Interest Rates. **Econometrica**, v. 53, n. 2, p.p. 385-407, Jan., 1985^b.

DIAS, M. A. G. **Stochastic Processes with Focus in Petroleum Applications**; disponível em: <<http://www.puc-rio.br/marco.ind/stochast.html>> ; acessado em: 20/09/2008.

DIAS, M. A. G.; **Opções Reais Híbridas com Aplicações em Petróleo**; Tese de Doutorado; PUC-Rio, Rio de Janeiro, RJ; Janeiro 2005.

DIAS, M. A. G.; ROCHA, K. **Petroleum Concessions With Extendible Options using Mean Reversion with Jumps to model Oil Prices**. 3rd Real Option Conference, Anals, Wassenaar/Leiden, 1999.

DIXIT, A. K., PINDICK, R. S. **Investment under Uncertainty**. Princeton: Princeton University Press, 1994.

FORTUNATO, G. X. **Otimização dos Dispendios de Publicidade sob Incerteza dos Ciclos Econômicos**. Tese de Doutorado, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro/ Departamento de Administração, RJ, 2009.

GEMAN, H. **Commodities and Commodity Derivatives: Modeling and Pricing for Agriculturals, Metals and Energy**. Wiley Finance , New York, 2005.

GIBSON, R.; SCHWARTZ, E. S. Stochastic Convenience Yield and the Pricing of Oil Contingent Claims. **The Journal of Finance**, v. 45, n. 3, p.p. 959-976, 1990.

GONCALVES, D., NETO, J., BRASIL, H. **The option of switching an investment project into an agribusiness project**. 10th International Conference on Real Options, New York, 2006.

HULL, J., C. **Options, Futures and Other Derivatives**. Prentice Hall 4th ed, Upper Saddle River, 1999.

KERR, R. B. **Decisão Ótima de Corte de uma Floresta de Eucalipto, usando Diferenças Finitas Totalmente Implícitas com Algoritmo SPOR**. Tese de Doutorado, Universidade Presbiteriana Mckenzie , SP, 2008.

KLOEDEN, P.E.; PLATEN, E. **Numerical solution of stochastic differential equations**. Springer-Verlag, Berlin-NewYork, 1992.

LO, A. W.; Mc KINLAY, A. C. Stock market prices do not follow random walks: Evidence from a simple specification test. **The Review of Financial Studies**, v. 1, n. 1, p.p. 41-66, Spring, 1988.

LUND, D. The Lognormal diffusion is hardly an equilibrium price process for exhaustible resources. **Journal of Environment Economics and Management**, v. 25, n. 3, p.p. 235-241, 1993.

METCALF, G. E.; HASSET, K. A. Investment under Alternative Return Assumptions Comparing Random Walks and Mean Reversion. **Journal of Economic Dynamics and Control**, v. 19, n. 8, p.p. 1471-1488, November , 1995.

PADDOCK, J. L.; SIEGEL, D. R.; SMITH, J. L. Option Valuation of Claims on Real Assets: The Case of Offshore Petroleum Leases. **Quarterly Journal of Economics**, v. 103, n. 3, p.p. 479-508, August , 1988.

PINDYCK, R. S. The Dynamics of Commodity Spot and Futures Markets: A Primer. **The Energy Journal**, v. 22, n. 3, p.p. 1-29, August, 2001.

PINDYCK, R. S. The Long Run Evolution of Energy Prices. *The Energy Journal*, v. 20, n. 2, p.p. 1 - 27, 1999.

ROSS, S. M. **An Introduction to Mathematical Finance** - Cambridge University Press, 1999.

SCHWARTZ, E. S.; SMITH, J. E. Short-term Variations and Long-term Dynamics in Commodity Prices. **Management Science**. v. 7, n. 46, p.p. 893-911, Jul, 2000.

SCHWARTZ, E. S. The Stochastic Behavior of Commodity Prices: Implications for Valuation and Hedging. **The Journal of Finance**. v. 52, n. 3, p. 923-973, 1997.

SMITH, J. E.; MC. CARDLE, K. F. Valuing oil properties: integrating option pricing and decision analysis approaches. **Operations Research**. v. 46, n. 2, p.p. 198-217, Mar/Apr, 1998.

UNICA, disponível em: <<http://www.unica.com.br>>; acessado em: 01/12/2008.

WOOLDRIDGE, J. M.; **Introductory Econometrics: A Modern Approach**; South-Western College Publishing, 2000.