

3

Método Numérico

O presente capítulo apresenta a discretização da equação diferencial para o campo de pressão e a integração numérica da expressão obtida anteriormente para a Viscosidade Newtoniana Equivalente, possibilitando a avaliação do campo de velocidade no espaço anular com excentricidade variável para um fluido com comportamento reológico não Newtoniano. Além disso, o processo iterativo que acopla a solução da equação diferencial e o método da viscosidade Newtoniana equivalente também será descrito com detalhes, permitindo a compreensão completa do modelo proposto.

3.1

Discretização da Equação Diferencial

A equação diferencial modificada pelo método da Viscosidade Newtoniana Equivalente que descreve o campo de pressão de um fluido com comportamento não Newtoniano foi resolvida numericamente utilizando o método das diferenças finitas (diferença central) [27]. Foi utilizada uma malha bidimensional retangular com NZ nós na direção axial do escoamento e $N\theta$ nós na direção azimutal para discretizar o domínio da equação (definido no capítulo anterior) de acordo com a figura 3.1. É importante observar que a configuração tridimensional do espaço anular, responsável pela existência do escoamento azimutal, é descrita pela folga radial δ que varia ao longo de todo o domínio.

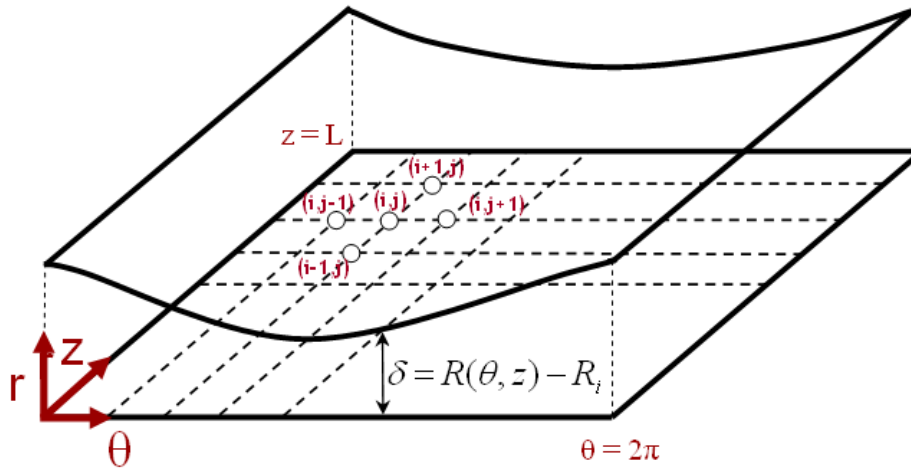


Figura 3.1 - Domínio da Equação do Campo de Pressão

A discretização permite obter equações algébricas para cada nó (i,j) do domínio (resultando em um sistema de equações), relacionando a pressão $P_{i,j}$ do nó em questão com os nós adjacentes, onde o índice i representa a direção axial e o índice j representa a direção azimutal. Cada termo da equação diferencial modificada para o campo de pressão, representada pela eq. (2-25), é discretizado conforme é mostrado a seguir:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \frac{G_1(\theta, z)}{\bar{\mu}} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right\} = \left(\frac{G_1(j+1, i) + G_1(j, i)}{\bar{\mu}(j+1, i) + \bar{\mu}(j, i)} \right) \frac{P_{i, j+1}}{\Delta \theta^2} + \left(\frac{G_1(j-1, i) + G_1(j, i)}{\bar{\mu}(j-1, i) + \bar{\mu}(j, i)} \right) \frac{P_{i, j-1}}{\Delta \theta^2} - \left[\left(\frac{G_1(j+1, i) + G_1(j, i)}{\bar{\mu}(j+1, i) + \bar{\mu}(j, i)} \right) + \left(\frac{G_1(j-1, i) + G_1(j, i)}{\bar{\mu}(j-1, i) + \bar{\mu}(j, i)} \right) \right] \frac{P_{i, j}}{\Delta \theta^2} \quad (3-1)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{G_2(\theta, z)}{\bar{\mu}} \frac{\partial p}{\partial z} \right\} = \left(\frac{G_2(j, i+1) + G_2(j, i)}{\bar{\mu}(j, i+1) + \bar{\mu}(j, i)} \right) \frac{P_{i+1, j}}{\Delta z^2} + \left(\frac{G_2(j, i-1) + G_2(j, i)}{\bar{\mu}(j, i-1) + \bar{\mu}(j, i)} \right) \frac{P_{i-1, j}}{\Delta z^2} - \left[\left(\frac{G_2(j, i+1) + G_2(j, i)}{\bar{\mu}(j, i+1) + \bar{\mu}(j, i)} \right) + \left(\frac{G_2(j, i-1) + G_2(j, i)}{\bar{\mu}(j, i-1) + \bar{\mu}(j, i)} \right) \right] \frac{P_{i, j}}{\Delta z^2} \quad (3-2)$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} G_0(\theta, z) = \frac{G_0(j+1, i) - G_0(j-1, i)}{2\Delta \theta} \quad (3-3)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{\rho g_z G_2(\theta, z)}{\bar{\mu}} \right\} = \frac{1}{2\Delta z} \left[\frac{\rho g_z(i+1)G_2(j, i+1)}{\bar{\mu}(j, i+1)} - \frac{\rho g_z(i-1)G_2(j, i-1)}{\bar{\mu}(j, i-1)} \right] \quad (3-4)$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \frac{\rho g_{\theta} G_3(\theta, z)}{\bar{\mu}} \right\} = \frac{1}{2\Delta\theta} \left[\frac{\rho g_{\theta}(j+1, i) G_3(j+1, i)}{\bar{\mu}(j+1, i)} - \frac{\rho g_{\theta}(j-1, i) G_3(j-1, i)}{\bar{\mu}(j-1, i)} \right] \quad (3-5)$$

onde Δz e $\Delta\theta$ são os tamanhos dos elementos na direção axial e azimutal, respectivamente. Apenas a pressão $P_{i,j}$ para um dado nó do domínio é desconhecida para uma dada equação algébrica.

O erro numérico da discretização realizada acima depende do tamanho dos elementos utilizados na direção axial e azimutal [27], onde o tamanho de cada elemento é uma função do número de nós na respectiva direção, de acordo com a eq. (3-6) e a eq. (3-7):

$$\Delta z = \frac{L}{NZ - 1} \quad (3-6)$$

$$\Delta\theta = \frac{2\pi}{N\theta - 1} \quad (3-7)$$

A fim de avaliar o erro numérico da solução e o número de nós que deve ser utilizado na discretização, foi realizado um estudo durante a fase de validação do modelo proposto. Isso permitiu verificar que para os casos com excentricidade constante ao longo do comprimento do poço a solução é praticamente independente da discretização utilizada na direção axial, uma vez que o escoamento é completamente desenvolvido nessa direção. Porém o aumento do número de nós na direção azimutal provoca uma melhora na qualidade dos resultados, sendo que a solução parece convergir para $N\theta \geq 61$ e com isso o aumento do número de nós provocaria apenas aumento no custo computacional.

Já para os casos estudados com excentricidade variável ao longo do comprimento do poço, a discretização na direção axial é extremamente importante e dependente da magnitude da derivada da função excentricidade em relação à coordenada axial. Quanto maior a variação da excentricidade entre duas seções do espaço anular, maior o número de nós necessários para se obter uma boa solução. Diversos casos foram estudados e foi verificado que para um poço com $L = 50\text{m}$ é necessário utilizar $NZ = 201$ para o caso totalmente excêntrico (amplitude da função excentricidade vale $R_o - R_i$ para esse caso), sendo que a diminuição da

amplitude da função excentricidade permite utilizar um menor número de nós na direção axial. A discretização necessária nesse caso na direção azimutal é semelhante ao caso com excentricidade constante ao longo do comprimento do poço que já foi descrito anteriormente.

A utilização das discretizações citadas acima obtém uma solução para o problema com precisão compatível com outros modelos mais complexos disponíveis na literatura, sendo que a utilização de elementos menores tende a gerar praticamente o mesmo resultado com custo computacional superior. No presente trabalho, todos os resultados utilizaram a discretização citada acima para a equação diferencial ($NZ = 201$ e $N\theta = 61$).

O sistema linear de equações obtido a partir da discretização da equação diferencial modificada pelo método da Viscosidade Newtoniana Equivalente descrita acima pode ser representado na forma matricial pela eq. (3-8) e deve então ser resolvido para que a pressão em cada nó do domínio possa ser encontrada, determinando o campo de pressão do escoamento no espaço anular.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{NN} \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_N \end{bmatrix}}_X = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_N \end{bmatrix}}_B \quad (3-8)$$

Na equação acima, N representa o número total de nós utilizados no domínio e é dada pelo produto do número de nós na direção axial NZ e o número de nós na direção azimutal $N\theta$, a matriz X com a pressão em cada nó é a incógnita do problema e os coeficientes das matrizes A e B são conhecidos e determinados a partir das eq. (3-1), eq. (3-2), eq. (3-3), eq. (3-4) e eq. (3-5).

A variação do índice K de 1 até N nas matrizes acima representa a numeração global dos nós do domínio, sendo relacionada com o índice i na direção axial e o índice j na direção azimutal através da eq. (3-9):

$$K = (j - 1) * NZ + i \quad (3-9)$$

O método utilizado para obter a solução do sistema linear de equações foi a decomposição LU da matriz A , sendo o problema reduzido a solução de dois sistemas triangulares [28], de acordo com o apresentado abaixo na eq. (3-10):

$$AX = B \rightarrow L\underbrace{UX}_Y = B \quad (3-10)$$

onde $LY = B$ é um sistema triangular inferior que pode ser facilmente resolvido, sendo o sistema triangular superior $UX = Y$ resolvido posteriormente.

Após a resolução dos dois sistemas triangulares, a pressão em cada nó do domínio é conhecida, sendo possível avaliar o campo de velocidade do escoamento no espaço anular com excentricidade variável.

3.2 Integração Numérica

O método da Viscosidade Newtoniana Equivalente permitiu obter uma expressão que descreve o caráter não Newtoniano do fluido durante o escoamento no anular, porém a viscosidade Newtoniana equivalente obtida, de acordo com a eq. (2-45), não pode ser avaliada analiticamente devido à integral que se encontra no denominador.

Para que a viscosidade Newtoniana Equivalente possa ser calculada é necessário avaliar a integral, representada pela eq. (3-11), numericamente através da regra do trapézio [29].

$$I = \int_{-\tau_o}^{\tau_o} f(\tau) d\tau \quad (3-11)$$

onde o resultado obtido com a integral acima representa a área abaixo da curva descrita por $f(\tau)$, de acordo com a figura 3.2, que é representada pela eq. (2-46).

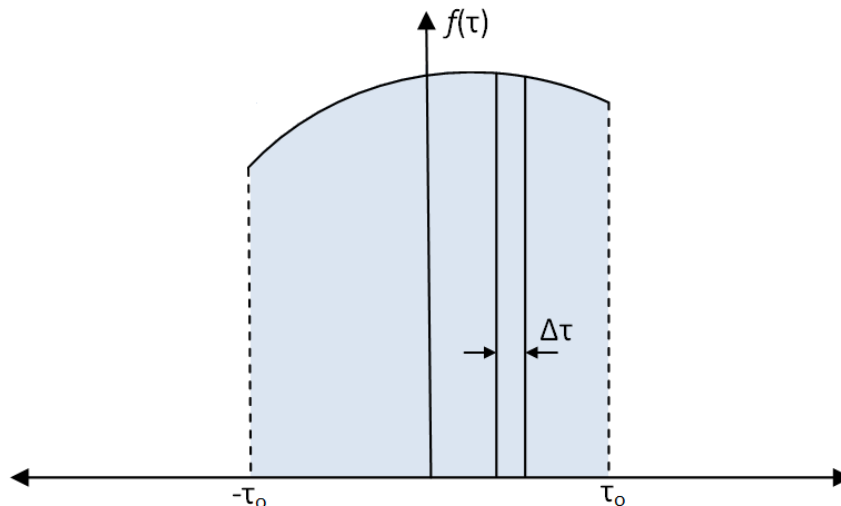


Figura 3.2 - Representação Geométrica da Integral

A faixa de integração é dividida em NI intervalos com tamanho $\Delta\tau$, como é mostrado na eq. (3-12):

$$\Delta\tau = \frac{2\tau_o}{NI} \quad (3-12)$$

A integral é calculada através de um somatório dos valores do integrando em cada ponto do intervalo de integração, sendo que a regra do trapézio realiza uma interpolação linear em cada intervalo, de acordo com a eq. (3-13):

$$I = \sum_{i=1}^{NI} \frac{[f(-\tau_o + (i-1)\Delta\tau) + f(-\tau_o + i\Delta\tau)]}{2} \Delta\tau \quad (3-13)$$

onde a função $f(\tau)$ é avaliada apenas nos pontos de integração.

A precisão da aproximação descrita acima é uma função do número de intervalos utilizados na faixa de integração, sendo necessária uma investigação do número de intervalos para obter baixo custo computacional e pequeno erro numérico. Um estudo foi realizado durante a fase de validação do modelo e foi possível verificar que se a faixa de integração for dividida em mais de 50 intervalos o erro não tende a diminuir, porém o custo computacional continuará a aumentar por isso todos os resultados foram obtidos considerando $NI = 50$.

3.3

Processo Iterativo

Para calcular o campo de pressão no anular através da discretização da equação diferencial é necessário conhecer a viscosidade em cada nó do domínio, porém a viscosidade é uma função do gradiente de pressão na direção axial e não é constante ao longo do domínio, ou seja, o problema estudado é não linear para um fluido com comportamento não Newtoniano.

É necessária a utilização de um processo iterativo que acople a solução da equação diferencial com o método da Viscosidade Newtoniana Equivalente até a convergência para uma única solução para o campo de pressão. Cada passo do processo iterativo será descrito com detalhes a seguir.

O primeiro passo do processo iterativo é calcular o campo de pressão no espaço anular para um fluido Newtoniano, sendo o gradiente de pressão na direção axial obtido utilizado para calcular a Viscosidade Newtoniana Equivalente através do método proposto. A partir da nova viscosidade obtida é possível calcular um novo campo de pressão para o escoamento, sendo que este já considera o comportamento não Newtoniano do fluido.

O novo campo de pressão encontrado pode ser comparado com a solução obtida anteriormente, sendo a convergência do processo analisada através do resíduo que é definido de acordo com a eq. (3-14):

$$\text{Residuo} = \|X - X_{\text{Antes}}\| \quad (3-14)$$

onde X representa a atual solução do campo de pressão e X_{Antes} representa a solução obtida na iteração anterior.

Se o resíduo encontrado for maior que o máximo erro admissível para a solução do campo de pressão (dado de entrada do problema) o método da Viscosidade Newtoniana Equivalente é utilizado novamente e posteriormente um novo campo de pressão é calculado, sendo esse processo repetido até que o resíduo encontrado seja menor que o erro admissível (convergência do método é alcançada). O processo iterativo descrito acima é representado pela figura 3.3.

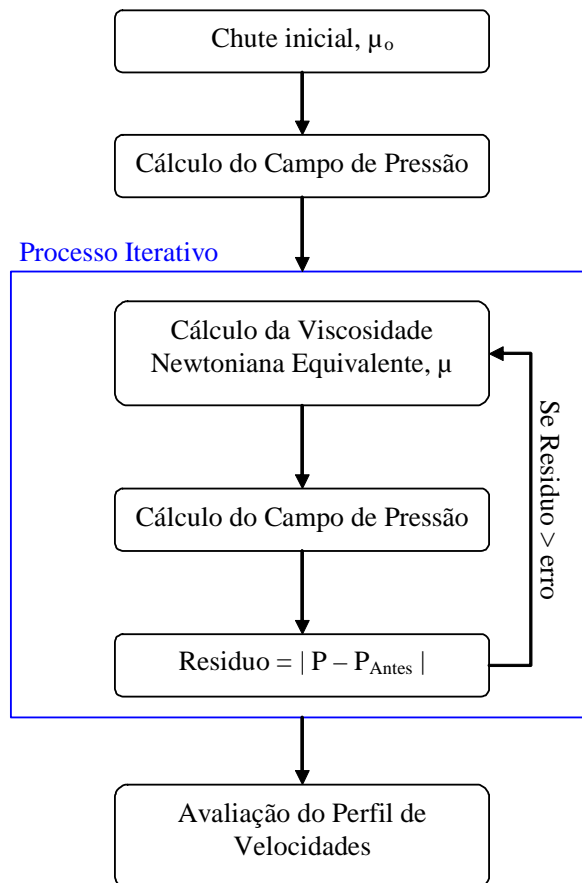


Figura 3.3 - Processo Iterativo do Modelo Proposto

Ao final do processo iterativo a solução do sistema de equações algébricas convergirá para o campo de pressão do escoamento de um fluido não newtoniano no espaço anular com excentricidade variável, permitindo a avaliação do campo de velocidade do escoamento. Também será possível analisar o comportamento reológico do fluido ao longo do espaço anular, a partir das viscosidades obtidas com o método da viscosidade Newtoniana Equivalente.