

## 2

### Formulação Matemática

A seguir será apresentada toda a teoria que envolve o modelo proposto, a partir de uma descrição detalhada dos seguintes aspectos do problema: geometria, simplificações das equações de conservação de quantidade de movimento e massa através da teoria da lubrificação, abordagem utilizada para tratar o comportamento reológico do fluido, metodologia para obtenção da equação de pressão e a avaliação do campo de velocidade. Além disso, vale ressaltar as principais hipóteses utilizadas nesse modelo:

- Fluido Incompressível;
- Fluido Inelástico;
- Regime Permanente;
- Escoamento Laminar;
- Escoamento Isotérmico.

#### 2.1

##### Geometria

A descrição geométrica adotada permite que o cilindro interno tenha qualquer configuração possível em relação ao cilindro externo sem causar qualquer custo computacional adicional. A geometria do espaço anular com excentricidade variável ao longo da coordenada axial (comprimento do poço) onde ocorre o escoamento é ilustrada na figura 2.1.

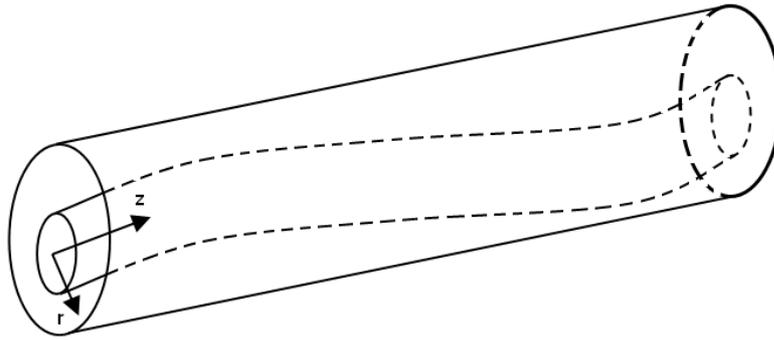


Figura 2.1 - Espaço Anular com Excentricidade Variável

Os raios do cilindro interno e externo são, respectivamente,  $R_i$  e  $R_o$ . O centro do cilindro interno é a origem do sistema de coordenadas em cada seção transversal e a posição do centro do cilindro externo em relação à origem do sistema de coordenadas é dada pela excentricidade resultante da seção que é uma função da coordenada axial (varia ao longo de todo o espaço anular), sendo representada pela eq. (2-1):

$$e(z) = \sqrt{e_1^2 + e_2^2} \quad (2-1)$$

onde  $e_1(z)$  e  $e_2(z)$  são funções ortogonais entre si que descrevem, respectivamente, a excentricidade horizontal e vertical de cada seção transversal do anular.

No presente trabalho, a função que descreve a excentricidade ao longo do comprimento do poço é um dado de entrada para solução do problema, mas em um modelo mais complexo a excentricidade poderia ser determinada a partir da iteração entre o cilindro interno e o fluido.

A coordenada radial da parede do cilindro externo  $R$ , em relação à origem do sistema de coordenadas, é uma função das coordenadas azimutal e axial. Observando uma dada seção transversal do espaço anular é possível determinar uma expressão para descrevê-la, de acordo com a figura 2.2:

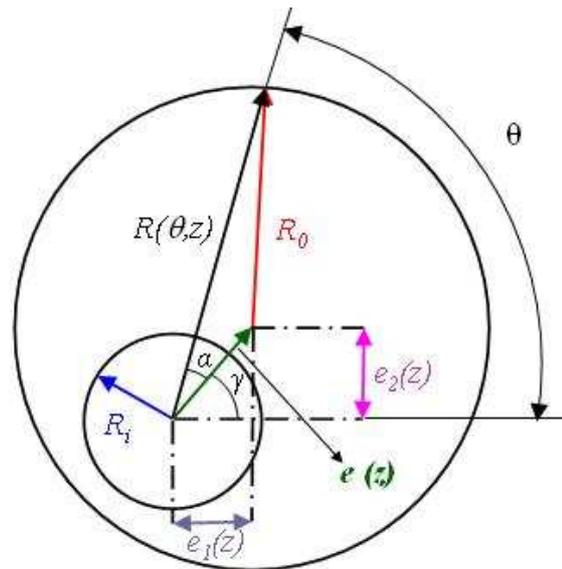


Figura 2.2 - Configuração da Seção Transversal

Analisando a seção transversal é possível notar que a coordenada radial da parede do cilindro externo  $R(\theta, z)$ , o raio externo  $R_o$  e a excentricidade resultante  $e(z)$  definem um triângulo, logo podemos desenvolver uma expressão para coordenada radial da parede do cilindro externo utilizando a lei dos cossenos [21]. A eq. (2-2) apresenta a lei dos cossenos escrita para o triângulo citado acima:

$$R_o^2 = R^2 + e^2 - 2eR \cos \alpha \quad (2-2)$$

onde  $\alpha$  é o ângulo formado entre o vetor que representa a excentricidade resultante  $e(z)$  e o vetor que representa a direção radial da parede do cilindro externo  $R(\theta, z)$ .

O ângulo formado entre a direção da excentricidade resultante  $e(z)$  e  $\theta = 0^\circ$  (linha horizontal da seção que passa pela origem do sistema de coordenadas) é dado pela expressão  $\gamma = \arctan(e_2/e_1)$ . A soma do ângulo  $\alpha$  com o ângulo  $\gamma$  resulta na coordenada azimutal  $\theta$ .

Resolvendo a equação do segundo grau dada pela eq. (2-2) com a lei dos cossenos, desenvolve-se uma expressão para coordenada radial da parede do cilindro externo  $R(\theta, z)$  como uma função da excentricidade resultante  $e(z)$ , do raio do cilindro externo  $R_o$ , da direção da excentricidade resultante  $\gamma$  e da coordenada azimutal  $\theta$  de acordo com a eq. (2-3):

$$R(\theta, z) = e(z)\cos(\theta - \gamma) + \sqrt{R_0^2 - e^2(z)\sin^2(\theta - \gamma)} \quad (2-3)$$

Importante observar que a folga radial  $\delta$ , definida como a diferença entre a coordenada radial da parede do cilindro externo  $R(\theta, z)$  e o raio do cilindro interno  $R_i$ , pode variar ao longo de todo o domínio do problema, caracterizando a geometria tridimensional do espaço anular.

## 2.2

### Conservação de Quantidade de Movimento

A equação de conservação de quantidade de movimento é representada pela eq. (2-4) e expressa o somatório das forças externas por unidade de volume que atua sobre um volume de controle aleatório.

$$\rho \frac{D\vec{v}}{dt} = \nabla \cdot T + \rho \vec{g} \quad (2-4)$$

onde  $\rho$  é a massa específica do fluido,  $\vec{v}$  é o vetor velocidade,  $\vec{g}$  é a aceleração da gravidade e  $T$  é o tensor das tensões, sendo esse definido pela eq. (2.5):

$$T = -pI + \tau \quad (2-5)$$

onde  $p$  é a pressão,  $I$  é a matriz identidade e  $\tau$  é o tensor das tensões viscosas.

A eq. (2-4) é sempre válida e independe do fluido utilizado, porém é necessária uma equação constitutiva que descreva o comportamento mecânico do fluido a fim de possibilitar a solução do campo de velocidades do escoamento (relacionando a tensão com a cinemática). Para um fluido Newtoniano a equação constitutiva é representada pela eq. (2-6):

$$\tau = \mu \dot{\gamma} \quad (2-6)$$

onde  $\dot{\gamma}$  é o tensor taxa de deformação e  $\mu$  representa a viscosidade do fluido que é constante e independente da taxa de deformação imposta ao fluido.

No presente trabalho, o fluido de perfuração é descrito pelo modelo de Fluido Newtoniano Generalizado [22], onde outra equação constitutiva é utilizada para descrever o comportamento reológico do fluido de interesse. O modelo citado apresenta ótimos resultados para diferentes tipos de problemas, sendo que sua utilização se torna inadequada apenas quando a resposta elástica do fluido é bastante relevante no problema estudado.

A viscosidade  $\mu$  do fluido é substituída por uma função viscosidade  $\eta(\dot{\gamma})$ , na equação constitutiva de fluido Newtoniano, que depende da intensidade da taxa de deformação imposta ao fluido, de acordo com a eq. (2-7):

$$\tau = \eta(\dot{\gamma})\dot{\gamma} \quad (2-7)$$

A função viscosidade é determinada através de experimentos realizados com os fluidos de interesse, tendo como objetivo descrever da melhor maneira possível o comportamento real do fluido. A tabela 2-1 apresenta algumas funções viscosidades amplamente utilizadas na literatura:

Tabela 2-1 - Funções Viscosidades

<b>Modelo</b>	<b>Função Viscosidade</b>
Newtoniano	$\mu$
<i>Power-Law</i>	$m \dot{\gamma} ^{n-1}$
<i>Bingham</i>	$\begin{cases} \infty & \tau \leq \tau_o \\ \mu_o + \frac{\tau_o}{\dot{\gamma}} & \tau \geq \tau_o \end{cases}$
<i>Carreau</i>	$\eta_\infty + (\eta_o - \eta_\infty) \left[ 1 + (\lambda\dot{\gamma})^2 \right]^{\frac{n-1}{2}}$
<i>Herschel-Bulkley</i>	$\begin{cases} \infty & \tau \leq \tau_o \\ m \dot{\gamma} ^{n-1} + \frac{\tau_o}{\dot{\gamma}} & \tau \geq \tau_o \end{cases}$

Uma vez determinada a função viscosidade é possível utilizá-la para obter uma aproximação do campo de velocidade, porém essa pequena modificação na equação constitutiva do fluido dificulta e até impossibilita, em alguns casos, a solução analítica das equações de conservação de quantidade de movimento.

No presente trabalho o comportamento não Newtoniano do fluido é descrito através do modelo da Viscosidade Newtoniana Equivalente [23] que será descrito mais a frente com detalhes.

É conveniente utilizar as equações de conservação de quantidade de movimento em coordenadas cilíndricas devido à geometria do problema. As equações de conservação de quantidade de movimento para um fluido Newtoniano em coordenadas cilíndricas no regime permanente são [24]:

Componente axial:

$$\rho \left\{ u \frac{\partial u}{\partial z} + v \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{w}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right\} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z + \mu \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right] \quad (2-8)$$

Componente radial:

$$\rho \left\{ u \frac{\partial v}{\partial z} + v \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{w}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{w^2}{r} \right\} = -\frac{\partial p}{\partial r} + \rho g_r + \mu \left[ \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right] \quad (2-9)$$

Componente azimutal:

$$\rho \left\{ u \frac{\partial w}{\partial z} + v \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{w}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{vw}{r} \right\} = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \rho g_\theta + \mu \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rw) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right] \quad (2-10)$$

onde  $u$ ,  $v$  e  $w$  são, respectivamente, as componentes axial, radial e azimutal da velocidade.

É importante ressaltar que a utilização das equações de conservação de quantidade de movimento em coordenadas cilíndricas é uma das grandes dificuldades encontradas na obtenção de uma solução para o problema, por isso diversos trabalhos desprezam a curvatura da folga radial e consideram apenas o escoamento entre placas paralelas. Porém esse modelo cartesiano pode gerar grande imprecisão nos resultados dependendo do parâmetro geométrico  $k$ , que representa a razão entre o raio interno e o externo do espaço anular.

A figura 2.3 representa a razão entre a vazão prevista utilizando coordenadas cilíndricas e a vazão prevista utilizando a aproximação de placas paralelas para um fluido Newtoniano [22], mostrando que essa aproximação só não apresenta erros consideráveis quando os raios são semelhantes, ou seja, a razão de raios tende para a unidade.

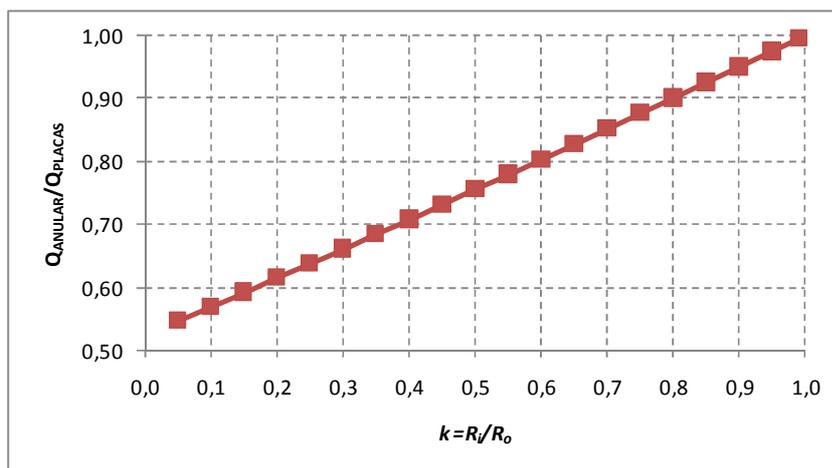


Figura 2.3 - Razão entre a Vazão para Coordenadas Cilíndricas e Placas Paralelas

A teoria da lubrificação será descrita adiante e utilizada para eliminar alguns termos do sistema de equações citado acima, a fim de possibilitar a solução de maneira mais simples e barata do ponto de vista computacional.

## 2.3

### Conservação de Massa

Por definição, a equação de conservação de massa diz que para um dado volume de controle, a taxa líquida de fluxo de massa que cruza a superfície de controle é igual ao oposto da taxa de variação de massa dentro do volume de controle, sendo representada pela eq. (2-11):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -(\nabla \cdot \rho \vec{v}) \quad (2-11)$$

O modelo utilizado considera apenas fluidos incompressíveis, logo a equação acima pode ser simplificada de acordo com a eq. (2-12):

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (2-12)$$

Uma vez que a geometria do problema é um espaço anular, deve-se reescrever a eq. (2-12) em coordenadas cilíndricas de acordo com a eq. (2-13):

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv) + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad (2-13)$$

A partir da teoria da lubrificação a equação de conservação de massa citada também será simplificada.

## 2.4

### Teoria da Lubrificação

A teoria da lubrificação consiste na simplificação das equações que governam o problema baseada na análise e estimativa da ordem de grandeza de cada termo destas equações, com isso alguns termos são desprezados frente a outros mais relevantes e um sistema de equações mais simples é obtido [25].

No problema de interesse, o comprimento do poço é muito maior do que a folga radial existente e a circunferência das paredes dos cilindros também é tipicamente maior que a distância entre as paredes dos cilindros, ou seja:

$$\delta = R_o - R_i \ll L$$

Além disso, o escoamento principal ocorre na direção axial devido ao diferencial de pressão imposto, sendo a velocidade na direção radial muito menor que as outras duas componentes, logo a seguinte hipótese pode ser realizada:

$$v \ll u, w$$

As variações da velocidade na direção axial e azimutal são muito menores que na direção radial, logo é possível realizar a hipótese de que as derivadas em relação à direção radial são muito maiores do que em relação às outras direções:

$$\frac{\partial u}{\partial r} \gg \frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \gg \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$$

$$\frac{\partial w}{\partial r} \gg \frac{\partial w}{\partial z}, \frac{\partial w}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \gg \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}$$

Duas hipóteses adicionais muito importantes para solução do problema ainda devem ser realizadas, também baseadas na ordem de grandeza dos termos das equações de conservação de quantidade de movimento:

$$g_r \approx 0$$

$$\frac{w^2}{r} \approx 0$$

A primeira hipótese apresentada acima é bastante apropriada, uma vez que a componente da gravidade na direção radial só é diferente de zero se for considerado um trecho com inclinação e mesmo assim a coluna hidrostática de fluido na direção axial é muito maior do que na direção radial.

Já a segunda hipótese também pode ser realizada, uma vez que o termo desprezado na componente radial da equação de conservação de quantidade de movimento representa a força centrípeta que está atuando sobre o fluido ao longo do escoamento no anular, sendo que a magnitude desta força é consideravelmente inferior ao nível de pressão existente no poço (devido à coluna hidrostática).

Eliminando os termos apropriados das equações de conservação de quantidade de movimento de acordo com a análise descrita acima o sistema pode ser simplificado, sendo representado por:

Componente axial:

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z + \mu \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) \right] \quad (2-14)$$

Componente azimutal:

$$0 = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \rho g_{\theta} + \mu \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv) \right) \right] \quad (2-15)$$

Componente radial:

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial r} \quad (2-16)$$

Observando a eq. (2-16) do sistema obtido é possível verificar que o campo de pressão não varia com a coordenada radial, sendo uma função apenas das coordenadas azimutal e axial, ou seja,  $p = p(\theta, z)$ .

A conclusão realizada a partir da eq. (2-16) é bastante razoável, uma vez que no problema real o comprimento do poço tem a ordem de grandeza de dezenas ou até centenas de metros e a folga radial apenas poucos centímetros de ordem de grandeza, ou seja, a variação da pressão ao longo da coordenada radial é praticamente desprezível.

As componentes azimutal e axial das equações de conservação de quantidade de movimento simplificadas pela teoria da lubrificação, representadas pelas eq. (2-14) e eq. (2-15), estão desacopladas (pois os gradientes de pressão existentes em cada equação não dependem da coordenada radial) e podem ser integradas analiticamente ao longo da coordenada radial com as condições de contorno apropriadas para encontrar o campo de velocidades do escoamento de fluido Newtoniano, apresentado nas eq. (2-17) e a eq. (2-18):

Velocidade axial:

$$u(z, r, \theta) = \frac{R_i^2}{4\mu} \left( \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} \right) \left[ 1 - \left( \frac{r}{R_i} \right)^2 + \frac{\left( \frac{R}{R_i} \right)^2 - 1}{\ln \left( \frac{R}{R_i} \right)} \ln \left( \frac{r}{R_i} \right) \right] \quad (2-17)$$

onde  $g_z$  é a componente na direção axial da aceleração da gravidade e as condições de contorno para a componente axial da velocidade utilizadas na integração foram:

$$u(R_i) = 0$$

$$u(R(\theta, z)) = 0$$

Velocidade azimutal:

$$w(z, r, \theta) = \frac{\Omega_i R_i^2}{R^2 - R_i^2} \left( \frac{R^2}{r} - r \right) + \frac{\rho g_\theta R_i^2}{3\mu(R^2 - R_i^2)} \left\{ (R^3 - R_i^3) \left( \frac{r}{R_i} - \frac{1}{r} \right) + (R^2 - R_i^2) \left( \frac{R_i}{r} - \frac{r^2}{R_i^2} \right) \right\} +$$

$$\frac{R_i^2}{2\mu} \left( \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) \left\{ \frac{r}{R_i} \left( \ln r - \frac{1}{2} \right) - \frac{R_i}{r} \left( \ln R_i - \frac{1}{2} \right) + \left( \frac{r/R_i - R_i/r}{R^2 - R_i^2} \right) \left[ R_i^2 \left( \ln R_i - \frac{1}{2} \right) - R^2 \left( \ln R - \frac{1}{2} \right) \right] \right\}$$

(2-18)

onde  $g_\theta$  é a componente na direção azimutal da aceleração da gravidade e as condições de contorno para a componente azimutal da velocidade utilizadas na integração foram:

$$w(R_i) = \Omega R_i$$

$$w(R(\theta, z)) = 0$$

onde  $\Omega$  representa a rotação do cilindro interno.

Vale ressaltar que se as equações para um fluido não Newtoniano fossem utilizadas não seria possível encontrar o campo de velocidades de maneira analítica, sendo necessário algum método numérico para obter expressões semelhantes a eq. (2-17) e a eq. (2-18).

Cada componente da velocidade é função das coordenadas axial, azimutal e radial, porém a dependência das coordenadas axial e azimutal é implicitamente definida através da coordenada radial da parede do cilindro externo  $R = R(\theta, z)$  que é representada pela eq. (2-3) e do gradiente de pressão que ainda é desconhecido e deve ser calculado.

Por último também é necessário aplicar a teoria da lubrificação na equação de conservação de massa resultando na eq. (2-19):

$$\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad (2-19)$$

Não é possível avaliar as derivadas parciais em relação às componentes axial e azimutal da velocidade na equação simplificada de conservação de massa descrita pela eq. (2-19), pois como foi dito anteriormente a dependência do campo de velocidades é implícita para essas coordenadas. Por isso para determinar o campo de pressão que é desconhecido e posteriormente avaliar o campo de velocidade através da eq. (2-17) e da eq. (2-18), a eq. (2-19) será integrada ao longo da coordenada radial, onde o limite inferior de integração é o raio interno  $R_i$  e o superior é a coordenada radial da parede do cilindro externo  $R = R(\theta, z)$ , de acordo com a eq. (2-20):

$$\int_{R_i}^R \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial z} \right\} dr = 0 \quad (2-20)$$

O teorema de Leibniz [26] para integração pode ser bastante útil se aplicado a eq. (2-20), sendo o teorema representado pela eq. (2-21):

$$\frac{d}{dy} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dx + f(b, y) \frac{\partial b}{\partial y} - f(a, y) \frac{\partial a}{\partial y} \quad (2-21)$$

Utilizando o teorema descrito acima é possível reescrever a expressão para equação de conservação de massa e integrar as componentes axial e azimutal da velocidade apresentadas na eq. (2-17) e eq. (2-18) ao longo da direção radial:

Componente axial:

$$\int_{R_i}^R \frac{\partial u}{\partial z} dr = \frac{\partial}{\partial z} \int_{R_i}^R u dr - \underbrace{u(R)}_0 \frac{\partial R}{\partial z} + \underbrace{u(R_i)}_0 \frac{\partial R_i}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \int_{R_i}^R u(z, r, \theta) dr \quad (2-22)$$

Componente azimutal:

$$\int_{R_i}^R \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} dr = \int_{R_i}^R \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{w}{r} \right] dr = \frac{\partial}{\partial \theta} \int_{R_i}^R \frac{w}{r} dr - \frac{1}{R} \underbrace{w(R)}_0 \frac{\partial R}{\partial \theta} + \frac{1}{R_i} w(R_i) \underbrace{\frac{\partial R_i}{\partial \theta}}_0 = \frac{\partial}{\partial \theta} \int_{R_i}^R \frac{w(z, r, \theta)}{r} dr \quad (2-23)$$

A pressão não é dependente da coordenada radial de acordo com a conclusão obtida a partir da eq. (2-16), logo a derivada parcial da pressão em relação à coordenada axial presente na componente axial da velocidade e a derivada parcial da pressão em relação à coordenada azimutal presente na componente azimutal da velocidade podem ser retiradas da integral ao longo da coordenada radial. Com isso a equação de conservação de massa pode ser reescrita de acordo com a eq. (2-24):

$$\int_{R_i}^R \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial z} \right\} dr = \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \left( \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) \int_{R_i}^R \frac{1}{\mu} \frac{g_1(r)}{r} dr + \int_{R_i}^R \frac{1}{\mu} \frac{g_3(r)}{r} + \frac{g_0(r)}{r} dr \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \left( \frac{\partial p}{\partial z} - \rho g_z \right) \int_{R_i}^R \frac{1}{\mu} g_2(r) dr \right] \quad (2-24)$$

onde as funções  $g_0$ ,  $g_1$ ,  $g_2$  e  $g_3$  dependem apenas da coordenada radial e podem ser integradas analiticamente para um fluido Newtoniano. Realizando a integração descrita acima, a equação diferencial para o campo de pressão é obtida de acordo com a eq. (2-25):

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \frac{G_1(\theta, z)}{\mu} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right\} + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{G_2(\theta, z)}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right\} = \frac{\partial}{\partial \theta} G_0(\theta, z) + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{\rho g_z G_2(\theta, z)}{\mu} \right\} - \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \frac{\rho g_\theta G_3(\theta, z)}{\mu} \right\} \quad (2-25)$$

onde as funções  $G_0$ ,  $G_1$ ,  $G_2$  e  $G_3$  dependem apenas de parâmetros geométricos do problema e são funções das coordenadas axial e azimutal, sendo conhecidas para um dado ponto do domínio de acordo com as expressões apresentadas a seguir:

$$G_0(\theta, z) = -\frac{\Omega R_i^2}{R^2 - R_i^2} \left[ R \left( 2 - \frac{R}{R_i} \right) - R_i \right] \quad (2-26)$$

$$G_1(\theta, z) = \frac{R_i}{2} \left\{ \frac{R}{R_i} \left( \ln R - \frac{3}{2} \right) - \left( \ln R_i - \frac{3}{2} \right) + \left( \ln R_i - \frac{1}{2} \right) \left( \frac{R_i}{R} - 1 \right) + \frac{R_i^2 \left( \ln R_i - \frac{1}{2} \right) - R^2 \left( \ln R - \frac{1}{2} \right)}{R^2 - R_i^2} \left( \frac{R}{R_i} + \frac{R_i}{R} - 2 \right) \right\} \quad (2-27)$$

$$G_2(\theta, z) = \left( -\frac{R_i^2}{4} \right) \left\{ \left( R - R_i \right) - \frac{R^3 - R_i^3}{3R_i^2} + \frac{\left( \frac{R}{R_i} \right)^2 - 1}{\ln \left( \frac{R}{R_i} \right)} \left[ R_i + R \left( \ln \left( \frac{R}{R_i} \right) - 1 \right) \right] \right\} \quad (2-28)$$

$$G_3(\theta, z) = \left( \frac{R_i^2}{3(R^2 - R_i^2)} \right) \left\{ \left( R^3 - R_i^3 \right) \left( \frac{R - R_i}{R_i^2} + \frac{1}{R} - \frac{1}{R_i} \right) + \left( R^2 - R_i^2 \right) \left( -\frac{R_i}{R} + 1 - \frac{R^2 - R_i^2}{2R_i^2} \right) \right\} \quad (2-29)$$

A equação diferencial, representada pela eq. (2-25), é definida no seguinte domínio:  $0 \leq z \leq L$  e  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ , onde  $L$  é o comprimento do poço. As condições de contorno e periodicidade apropriadas são apresentadas abaixo:

Condição de contorno na entrada:

$$p(z = 0) = P_{ENT} \text{ ou } Q(z = 0) = Q_{ENT}$$

onde  $P_{ENT}$  é a pressão na seção de entrada e  $Q_{ENT}$  é a vazão imposta na seção de entrada, sendo dados conhecidos do problema.

Condição de contorno na saída:

$$p(z = L) = P_{SAIDA}$$

onde  $P_{SAIDA}$  é a pressão na seção de saída, sendo um dado conhecido do problema.

Condições de periodicidade no domínio:

$$p(\theta = 0) = p(\theta = 2\pi) \text{ e } \frac{\partial p}{\partial \theta}(\theta = 0) = \frac{\partial p}{\partial \theta}(\theta = 2\pi)$$

A equação diferencial obtida permite avaliar o campo de pressão em espaço anular com excentricidade variável para o escoamento de um fluido Newtoniano. Como também é desejado que o modelo proposto possa descrever o caráter não Newtoniano dos fluidos, a eq. (2-25) será modificada através do método da Viscosidade Newtoniana Equivalente que será descrito a seguir.

## 2.5

### Método da Viscosidade Newtoniana Equivalente

No caso de fluidos não Newtonianos, a viscosidade varia com a coordenada radial e aparece dentro do operador diferencial na eq. (2-14) e na eq. (2-15). Desta forma, mesmo para as funções viscosidades mais simples, não é possível obter uma solução analítica para o campo de velocidade. Sem o conhecimento da velocidade, a obtenção da equação diferencial que descreve o campo de pressão torna-se bem mais complexa.

A fim de descrever o comportamento não Newtoniano do fluido através da equação para o campo de pressão de um fluido Newtoniano no espaço anular com excentricidade variável, de acordo com a eq. (2-25), o método da Viscosidade Newtoniana Equivalente considerando coordenadas cilíndricas foi utilizado. A idéia básica do método é utilizar para cada ponto do domínio um valor diferente para a viscosidade do fluido, sendo o cálculo dessa viscosidade realizado a partir do estado de tensões aplicado ao fluido, do modelo reológico adotado e da geometria na região avaliada do domínio. As diferentes viscosidades encontradas através do método proposto são então utilizadas na equação diferencial para obter a solução do campo de pressão.

O presente trabalho modifica o método da Viscosidade Newtoniana Equivalente apresentado por Broyer [23], uma vez que no modelo original o desenvolvimento teórico para avaliar o caráter não Newtoniano dos fluidos ocorre em coordenadas cartesianas (dedução matemática se torna bem mais simples).

Posteriormente, Gomes [20] acopla o método da Viscosidade Newtoniana Equivalente em coordenadas cartesianas com a solução das equações de conservação de quantidade de movimento, conservação de massa e conservação de concentração de espécie a fim de acompanhar a evolução da interface formada por dois fluidos no espaço anular excêntrico. Porém em ambos os trabalhos existe grande imprecisão no modelo quando a razão de raios do espaço anular se afasta da unidade devido à utilização das coordenadas cartesianas.

O estado de tensões que será utilizado para calcular a viscosidade depende do campo de pressão que por sua vez é função da viscosidade do fluido, ou seja, a solução desse problema é não linear e será necessário um processo iterativo para obter a Viscosidade Equivalente Newtoniana e posteriormente o campo de pressão. A geometria e o campo de pressão são funções das coordenadas axial e azimutal, logo a Viscosidade Equivalente Newtoniana também será, variando ao longo de todo o domínio. A seguir o método utilizado para avaliar a viscosidade em cada ponto do domínio será apresentado para um espaço anular concêntrico e posteriormente extrapolado para um espaço anular excêntrico.

A vazão volumétrica para um dado setor  $\Delta\theta$  de um espaço anular concêntrico para um fluido com qualquer comportamento reológico é representada pela eq. (2-30):

$$Q = \Delta\theta \int_{R_i}^{R_o} \underbrace{u(r)}_u \underbrace{r dr}_{r'} \quad (2-30)$$

É possível integrar por partes a eq. (2-30), obtendo com isso uma nova expressão para vazão volumétrica que é apresentada na eq. (2-31):

$$Q = \Delta\theta \left[ \underbrace{u(r)}_0 \frac{r^2}{2} \Big|_{R_i}^{R_o} - \int_{R_i}^{R_o} \frac{r^2}{2} \frac{du}{dr} dr \right] \quad (2-31)$$

Uma vez que a velocidade axial é nula no raio interno e externo do espaço anular, a expressão pode ser simplificada, sendo o resultado obtido uma função apenas da coordenada radial e da taxa de deformação imposta ao fluido, de acordo com a eq. (2-32):

$$Q = -\frac{\Delta\theta}{2} \int_{R_i}^{R_o} r^2 \dot{\gamma} dr \quad (2-32)$$

É possível escrever a equação de conservação de quantidade de movimento em termos de tensão cisalhante para o escoamento no espaço anular, como mostrado na eq. (2-33):

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r\tau) = \frac{dp}{dz} - \rho g_z = \frac{d\bar{p}}{dz} \quad (2-33)$$

onde  $d\bar{p}/dz$  é o gradiente de pressão modificado.

A distribuição da tensão cisalhante no espaço anular concêntrico para um fluido qualquer pode ser obtida através da integração da eq. (2-33) ao longo da coordenada radial e da utilização de uma condição de contorno apropriada, de acordo com a eq. (2-34):

$$\tau(r) = \frac{d\bar{p}}{dz} \frac{R_o}{2} \left( \frac{r}{R_o} - \frac{R_o}{r} \right) + \frac{\tau_o R_o}{r} \quad (2-34)$$

onde a condição de contorno utilizada foi que no raio externo  $R_o$  do anular a tensão cisalhante vale  $\tau_o$ .

É importante ressaltar que a tensão cisalhante na parede externa ainda não é conhecida e será calculada posteriormente através de um balanço de forças no espaço anular.

A equação acima pode ser reescrita como uma equação do segundo grau para a coordenada radial em função do raio externo  $R_o$ , da tensão cisalhante na parede externa  $\tau_o$ , da tensão cisalhante  $\tau$  em uma dada coordenada radial e do gradiente de pressão modificado  $d\bar{p}/dz$ , de acordo com a eq. (2-35):

$$\frac{1}{2} \frac{d\bar{p}}{dz} r^2 - \tau r + \left[ \frac{1}{2} \frac{d\bar{p}}{dz} R_o^2 + \tau_o R_o \right] = 0 \quad (2-35)$$

Obtendo a raiz da equação do segundo grau apresentada acima é possível obter uma expressão para coordenada radial em função da tensão cisalhante

naquele ponto, do gradiente de pressão modificado, do raio do cilindro externo e da tensão cisalhante na parede do anular, que é apresentada na eq. (2-36):

$$r = \left( \tau - \sqrt{\tau^2 + A} \right) \left( \frac{d\bar{p}}{dz} \right)^{-1} \quad (2-36)$$

onde apenas a raiz com sinal negativo satisfaz a condição de contorno utilizada na integração da equação de conservação de quantidade de movimento e é válida, sendo  $A$  uma variável auxiliar definida de acordo com a eq. (2-37):

$$A = \left[ \frac{d\bar{p}^2}{dz} R_o^2 - 2\tau_o R_o \frac{d\bar{p}}{dz} \right] \quad (2-37)$$

Nesse momento, a expressão para vazão volumétrica no anular encontrada anteriormente e representada pela eq. (2-32) pode ser reescrita a partir dos seguintes passos:

- Escrever a taxa de deformação como uma função da tensão cisalhante e da função viscosidade do fluido;
- Substituir a coordenada radial  $r$  pela expressão apresentada na eq. (2-36);
- Modificar a variável de integração (variável de integração será  $\tau$ ).

Sendo o resultado obtido com a manipulação algébrica descrita acima apresentado na eq. (2-38):

$$Q = -\frac{\Delta\theta}{2} \int_{\tau_i}^{\tau_o} \underbrace{\frac{\tau}{\eta(\tau)}}_{\dot{\gamma}} \left\{ \underbrace{\left( \tau - \sqrt{\tau^2 + A} \right) \left( \frac{d\bar{p}}{dz} \right)^{-1}}_r \right\}^2 \underbrace{\left( \tau \left( \tau^2 + A \right)^{-\frac{1}{2}} - 1 \right) \left( \frac{d\bar{p}}{dz} \right)^{-1}}_{dr} d\tau \quad (2-38)$$

onde os limites de integração ainda devem ser determinados.

Para determinar a tensão cisalhante na parede externa  $\tau_o$ , será realizado um balanço de forças no espaço anular, de acordo com a figura 2.4.

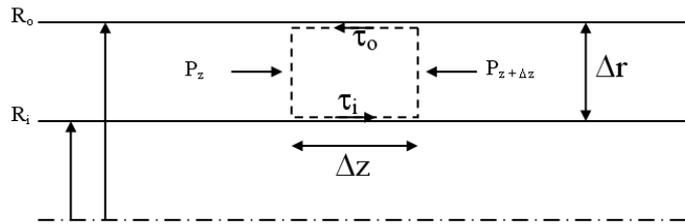


Figura 2.4 - Balanço de Força no Espaço Anular

O balanço de força mostra que a força resultante devido ao diferencial de pressão deve ser igual à força resultante devido à tensão cisalhante, como mostrado na eq. (2-39):

$$2\pi R_o \Delta z \tau_o - 2\pi R_i \Delta z \tau_i = (\bar{p}_z - \bar{p}_{z+\Delta z}) \pi (R_o^2 - R_i^2) \quad (2-39)$$

Reescrevendo a equação obtida acima na sua forma diferencial é possível obter a eq. (2-40):

$$\frac{d\bar{p}}{dz} = \frac{2(R_o \tau_o - R_i \tau_i)}{(R_o^2 - R_i^2)} \quad (2-40)$$

As tensões cisalhantes nas paredes não são conhecidas e desse modo não é possível obter uma expressão que relacione apenas a tensão na parede externa  $\tau_o$  com o gradiente de pressão modificado  $d\bar{p}/dz$ . Com objetivo de conseguir simplificar a eq. (2-40) será realizada a hipótese de que a tensão cisalhante na parede interna apresenta aproximadamente o mesmo módulo que a tensão na parede externa, ou seja:

$$\tau_o \approx -\tau_i \quad (2-41)$$

A hipótese acima foi verificada a partir de resultados existentes na literatura para um fluido *Power-law* [22] e os maiores erros não ultrapassaram 5% do valor previsto para vazão volumétrica no anular concêntrico, mostrando que a hipótese pode ser utilizada sem problemas no modelo proposto. Com isso é possível obter uma expressão que relaciona apenas a tensão na parede externa  $\tau_o$  e o gradiente de pressão modificado  $d\bar{p}/dz$ , de acordo com a eq. (2-42):

$$\frac{d\bar{p}}{dz} = \frac{2\tau_o}{R_o - R_i} \quad (2-42)$$

A partir da hipótese realizada acima é permitido reescrever a expressão para vazão volumétrica, representada pela eq. (2-38), de acordo com a eq. (2-43):

$$Q = -\frac{\Delta\theta}{2} \int_{-\tau_o}^{\tau_o} -\frac{\tau}{\eta(\tau)} \left\{ \left( \tau - \sqrt{\tau^2 + A} \right) \left( \frac{2\tau_o}{R_o - R_i} \right)^{-1} \right\}^2 \left( \tau (\tau^2 + A)^{\frac{1}{2}} - 1 \right) \left( \frac{2\tau_o}{R_o - R_i} \right)^{-1} d\tau \quad (2-43)$$

onde o limite inferior de integração agora é  $-\tau_o$  e o integrando é função apenas da tensão cisalhante para um dado gradiente de pressão modificado. A expressão acima representa a vazão volumétrica no espaço anular concêntrico para um fluido com qualquer caráter reológico, definido pela função  $\eta(\tau)$ .

Para um fluido Newtoniano a vazão volumétrica em um espaço anular concêntrico é dada pela eq. (2-44) [22]:

$$Q_N = \frac{\Delta\theta}{2} R_o^2 \left[ 1 - \frac{R_i^2}{R_o^2} \right] \left( -\frac{d\bar{p}}{dz} \right) \frac{R_o^2}{8\mu} \underbrace{\left[ \frac{1 - \left( \frac{R_i}{R_o} \right)^4}{1 - \left( \frac{R_i}{R_o} \right)^2} - \frac{1 - \left( \frac{R_i}{R_o} \right)^2}{\ln \left( \frac{R_o}{R_i} \right)} \right]}_{\lambda} \quad (2-44)$$

onde  $\lambda$  é uma variável auxiliar que depende apenas da geometria (razão de raios do espaço anular).

A expressão para a viscosidade newtoniana equivalente é então obtida através da combinação da eq. (2-43) e da eq. (2-44), já que ambas descrevem a vazão volumétrica para um espaço anular concêntrico considerando fluido com qualquer comportamento reológico e Newtoniano, respectivamente. A viscosidade Newtoniana equivalente é apresentada na eq. (2-45):

$$\bar{\mu} = \frac{(R_o + R_i)}{(R_o - R_i)^3} \frac{2\lambda R_o^2 \tau_o^4}{\int_{-\tau_o}^{\tau_o} f(\tau) d\tau} \quad (2-45)$$

onde  $f(\tau)$  é uma função apenas da tensão cisalhante de acordo com a eq. (2-46):

$$f(\tau) = -\frac{\tau}{\eta(\tau)} \frac{\left(\tau - \sqrt{\tau^2 + A}\right)^3}{\sqrt{\tau^2 + A}} \quad (2-46)$$

A expressão da viscosidade Newtoniana equivalente permite adotar qualquer modelo reológico para o fluido, sendo necessário utilizar apenas a função viscosidade adequada escrita em função da tensão cisalhante. No presente trabalho será utilizado o modelo *Power-law*, pois este apresenta um maior número de soluções existentes na literatura para comparação. Porém nenhuma dificuldade ou custo computacional seriam adicionados caso um modelo reológico mais complexo fosse utilizado. A função viscosidade utilizada em função da tensão cisalhante para um fluido *Power-law* é apresentada na eq. (2-47):

$$\eta(\tau) = m \frac{1}{n} \left| \tau \right|^{\frac{n-1}{n}} \quad (2-47)$$

onde  $m$  é chamado de índice de consistência do fluido e  $n$  é chamado de índice de comportamento do fluido, sendo definidos a partir de experimentos realizados com o fluido de interesse.

Para calcular a viscosidade newtoniana equivalente será necessário realizar uma integração numérica da eq. (2-45), sendo o procedimento utilizado nesse trabalho descrito no próximo capítulo.

## 2.6

### Avaliação do Campo de Velocidade

Dado que o campo de pressão é conhecido após a solução numérica da equação diferencial modificada (método numérico utilizado será apresentado no próximo capítulo), é necessário avaliar o campo de velocidade do escoamento a partir das componentes médias da velocidade na direção axial e azimutal que serão independentes da coordenada radial.

Considerando uma dada seção transversal do anular com excentricidade variável e um pequeno elemento de tamanho  $\Delta\theta$ , de acordo com a figura 2.4, a velocidade média axial para esse elemento é definida como a razão entre a vazão

volumétrica que escoia pela área do elemento em destaque na figura e a área transversal desse mesmo elemento.

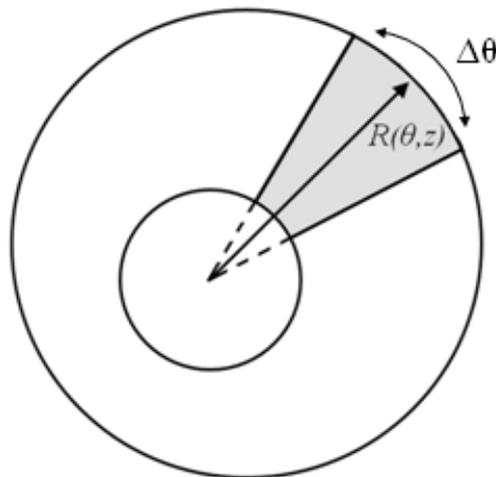


Figura 2.5 - Seção Transversal do Anular

A vazão volumétrica axial  $Q$  de um dado elemento  $\Delta\theta$  da seção transversal é calculada a partir da integração da componente axial da velocidade, dada pela eq. (2-17), ao longo da direção azimutal do ângulo  $\theta_i$  até  $\theta_{i+1}$  e ao longo da direção radial do raio interno  $R_i$  até a coordenada radial da parede do cilindro externo  $R(\theta, z)$ . Sendo a velocidade média axial obtida a partir da eq. (2-48):

$$U(\theta, z) = \frac{Q}{A} = \frac{\int_0^{\Delta\theta} \int_{R_i}^R u(z, r, \theta) r dr d\theta}{\frac{\Delta\theta}{2} (R^2 - R_i^2)} = \frac{\Delta\theta \int_{R_i}^R u(z, r, \theta) r dr}{\frac{\Delta\theta}{2} (R^2 - R_i^2)} \quad (2-48)$$

Para realização da integração descrita acima é necessária a hipótese de que o elemento  $\Delta\theta$  é suficientemente pequeno para considerar  $u = u(z, r)$  para o elemento em questão. De acordo com a definição realizada acima, para cada elemento  $\Delta\theta$  de uma dada seção transversal do espaço anular existirá uma velocidade média axial correspondente. O resultado da integração ao longo da coordenada radial realizada na eq. (2-48) é apresentado na eq. (2-49):

$$U(\theta, z) = \frac{G_4(\theta, z)}{\bar{\mu}(R^2 - R_i^2)} \left( \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} \right) \quad (2-49)$$

onde a função  $G_4$  depende apenas de parâmetros geométricos do problema e é uma função das coordenadas axial e azimutal, sendo representada pela eq. (2-50):

$$G_4(\theta, z) = \frac{R_i^2}{4} \left\{ \frac{R^2 - R_i^2}{2} - \frac{R^4 - R_i^4}{4R_i^2} + \frac{\left(\frac{R}{R_i}\right)^2 - 1}{4 \ln\left(\frac{R}{R_i}\right)} \left[ R^2 \left( 2 \ln\left(\frac{R}{R_i}\right) - 1 \right) + R_i^2 \right] \right\} \quad (2-50)$$

Uma análise semelhante pode ser realizada para calcular a velocidade média azimutal, porém agora é necessário analisar um dado plano  $rz$  do espaço anular de acordo com a figura 2.5. A velocidade média azimutal para um pequeno elemento de tamanho  $\Delta z$  do plano  $rz$  é definida como a razão entre a vazão volumétrica que escoou pela área do elemento em destaque na figura e a área transversal desse mesmo elemento.

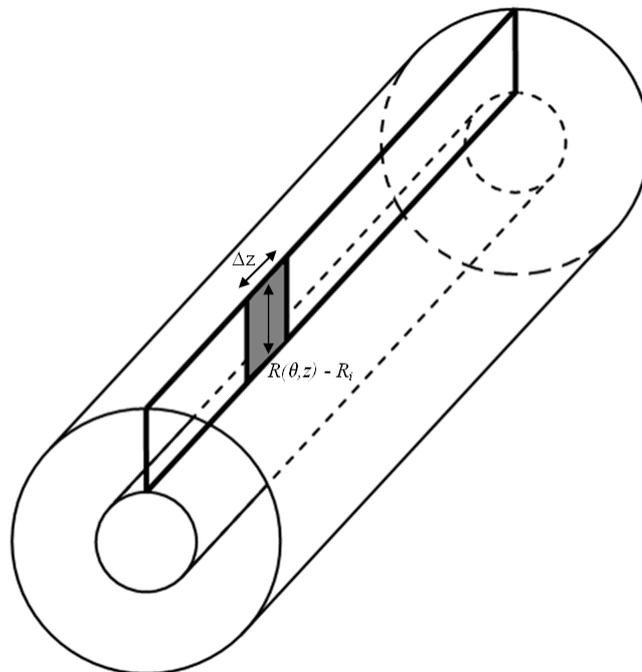


Figura 2.6 - Plano  $rz$  do Espaço Anular

A vazão volumétrica azimutal  $Q_\theta$  para um dado elemento  $\Delta z$  do plano  $rz$  é calculada a partir da integração da componente azimutal da velocidade, dada pela eq. (2-18), ao longo da direção axial da posição  $z_i$  até  $z_{i+1}$  e ao longo da direção radial do raio interno  $R_i$  até a coordenada radial da parede do cilindro externo  $R(\theta, z)$ . Sendo a velocidade média azimutal obtida a partir da eq. (2-51):

$$W(\theta, z) = \frac{Q_\theta}{A} = \frac{\int_0^{\Delta z} \int_{R_i}^R w(z, r, \theta) dr dz}{\Delta z (R - R_i)} = \frac{\Delta z \int_{R_i}^R w(z, r, \theta) dr}{\Delta z (R - R_i)} \quad (2-51)$$

Para realização da integração descrita acima é necessária a hipótese de que o elemento  $\Delta z$  é suficientemente pequeno para considerar  $w = w(\theta, r)$  para o elemento em questão. De acordo com a definição, para cada elemento  $\Delta z$  de um dado plano  $rz$  do espaço anular existirá uma velocidade média azimutal correspondente. O resultado da integração ao longo da direção radial, descrita pela eq. (2-51), é apresentado na eq. (2-52):

$$W(\theta, z) = \frac{1}{R - R_i} \left\{ G_5(\theta, z) + \frac{\rho g_\theta G_6(\theta, z)}{\bar{\mu}} + \frac{\partial p}{\partial \theta} \frac{G_7(\theta, z)}{\bar{\mu}} \right\} \quad (2-52)$$

onde as funções  $G_5$ ,  $G_6$  e  $G_7$  dependem apenas de parâmetros geométricos do problema e são funções das coordenadas axial e azimutal, sendo representadas pelas expressões a seguir:

$$G_5(\theta, z) = \frac{\Omega R_i}{(R^2 - R_i^2)} \left[ R^2 \ln\left(\frac{R}{R_i}\right) - \frac{(R^2 - R_i^2)}{2} \right] \quad (2-53)$$

$$G_6(\theta, z) = \frac{R_i^2}{3} \left[ (R^3 - R_i^3) \left( \frac{1}{2R_i^2} - \frac{\ln\left(\frac{R}{R_i}\right)}{(R^2 - R_i^2)} \right) + \left( R_i \ln\left(\frac{R}{R_i}\right) - \frac{(R^3 - R_i^3)}{3R_i^2} \right) \right] \quad (2-54)$$

$$G_7(\theta, z) = \frac{R_i}{2} \left[ \frac{(R^2 - R_i^2)}{2R_i} \left( \ln\left(\frac{R}{R_i}\right) - 1 \right) - R_i \left( \ln R_i - \frac{1}{2} \right) \ln\left(\frac{R}{R_i}\right) + \frac{R_i^2 \left( \ln R_i - \frac{1}{2} \right) - R^2 \left( \ln R - \frac{1}{2} \right)}{R^2 - R_i^2} \left( \frac{(R^2 - R_i^2)}{2R_i} - R_i \ln\left(\frac{R}{R_i}\right) \right) \right] \quad (2-55)$$

A análise descrita acima para obter o campo médio de velocidade elimina a dependência com a coordenada radial, já que as componentes da velocidade são integradas ao longo da direção radial. O procedimento é bastante coerente, uma vez que o interesse do trabalho é identificar zonas com presença de velocidade azimutal e zonas de baixa velocidade axial (canalização) devido à presença da excentricidade, por exemplo. Ou seja, é desejado analisar o comportamento global do escoamento nas direções axial e azimutal, abandonando as variações existentes da velocidade na direção radial.