5
Formulação matemática e modelagem computacional de escoamento com pseudo-solidifição

Em geral, os processos de revestimento são necessariamente acompanhados por algum grau de solidificação. Antes da solidificação, o fluido de revestimento é caracterizado pelo estado líquido, onde ocorre escoamento por efeito capilar ou gravitacional. Após esta primeira etapa, começa um intervalo de transição no qual o fluido alcança altas viscosidades e apresenta um comportamento viscoelástico. Por último, após a solidificação, o material atinge um estado sólido elástico, onde aparecem as concentrações de tensões nas extremidades.

No processo de revestimento dos cilindros fotorreceptores o fluido utilizado consiste de uma solução composta por um soluto e um solvente, onde o soluto é um fluoroelastômero com um aditivo para incrementar a condutividade térmica [2]. Uma das principais características de revestimento com solventes é a utilização de solventes voláteis, sendo assim, o processo de revestimento é seguido por um processo de secagem. Em alguns casos, os dois processos ocorrem simultaneamente [68], como nos métodos de revestimento por imersão (*spin coating*), por espalhamento centrífugo (*dip coating*) e no processo analisado neste trabalho. Os trabalhos teóricos parcialmente confirmados com resultados experimentais de Drike & Wang [69], mostram que as propriedades líquidas mudam a medida que o solvente evapora. A figura 5.1a) apresenta a variação da viscosidade em função da fração de solvente na massa remanescente, de acordo com a equação apresentada por Bornside [68]:

$$\eta = \eta_o (1 - x_A)^4 + \eta_s, \tag{5-1}$$

onde $\eta_o = 10^6$cP e $\eta_s = 1$cP e x_A é a fração em massa do solvente A, quando o sistema é monosolvente. A figura 5.1b) apresenta a variação da concentração do solvente em função do tempo de um sistema com solvente volátil (tolueno) obtida por Drike & Wang [69]. Pode-se observar que a viscosidade aumenta exponencialmente em função do tempo.

No presente trabalho a solidificação será descrita por um modelo simples, sem perda de massa, i.e. sem evaporação. Será considerada a variação da

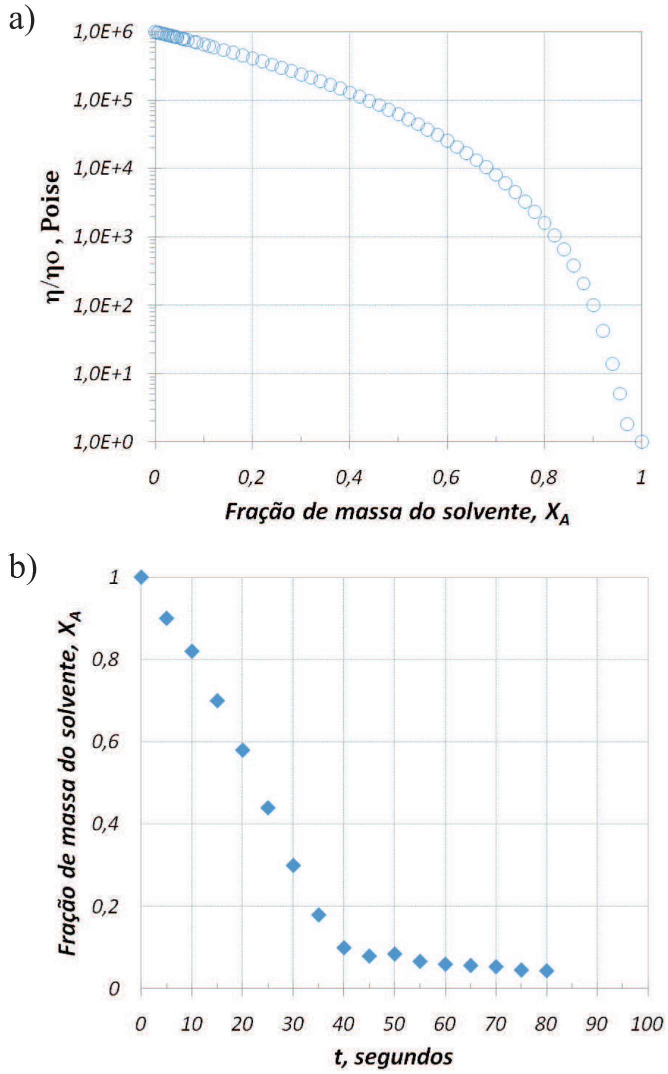

Figura 5.1: a) Viscosidade em função da concentração de massa do solvente. b) Variação da fração de massa de um sistema com solvente volátil (tolueno) obtida por Drike & Wang [69].

viscosidade do fluido em função do tempo e da posição $\eta(\theta, y, t)$. Este modelo é de pseudo-solidificação. O tempo de residência do fluido em cada posição do cilindro não é constante porque a viscosidade varia ao longo da superfície já revestida.

As hipóteses simplificadoras consideradas durante a formulação matemática do problema físico são:

1. Fluido incompressível.

2. Regime laminar.

3. Fluido Newtoniano.

4. Viscosidade do líquido em função do tempo.

5. Sem transferência de calor e massa.

5.1 Formulação

O objetivo aqui é representar o processo de pseudo-solidificação do líquido injetado na superfície de um cilindro circular de raio R, que experimenta uma taxa de rotação constante Ω ao redor do seu eixo orientado perpendicularmente com a gravidade. Apesar do fluido ser considerado newtoniano, a viscosidade varia com a posição na superfície do cilindro, já que o tempo de residência do fluido localizado em cada ponto não é constante. Quanto mais longe o líquido está da posição da porta injetora, maior será a viscosidade. Como no capítulo anterior, o movimento do fluido na superfície do cilindro, na direção polar, será expressado pela combinação da rotação de um corpo rígido $r\Omega$ e um escoamento adicional denotado por u, assim, o vetor velocidade é dado por:

$$\mathbf{u}(r,\theta,y,t) = w\mathbf{e}_r + (r\Omega + u)\mathbf{e}_\theta + \upsilon\mathbf{e}_y \tag{5-2}$$

onde $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$ e $\mathbf{e}_y$ são as coordenadas dos vetores unitários fixados num sistema de referência que não apresenta rotação e é independente do tempo; w, $(r\Omega{+}u)$ e υ são os componentes na direção radial, azimutal e axial, respectivamente. O vetor da aceleração da gravidade é $\mathbf{g} = g(-\sin\theta\mathbf{e}_r - \cos\theta\mathbf{e}_\theta)$.

A diferença desta formulação em relação à apresentada no capítulo anterior é que a viscosidade varia com a posição ao longo da superfície do cilindro. Esta diferença leva a uma nova formulação da equação de filme fino, não disponível na literatura. Por este motivo, a derivação da formulação da equação de evolução da espessura do filme é apresentada em detalhe neste capítulo.

As equações de conservação para um fluido incompressível em coordenadas cilíndricas são:

- Equação de continuidade:

$$\nabla\cdot\mathbf{u} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rw)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial(r\Omega+u)}{\partial\theta} + \frac{\partial(\upsilon)}{\partial y} = 0 \tag{5-3}$$

- Equação de conservação de quantidade de movimento:

$$\rho\left(\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}\right) = \nabla\cdot\left[-p\underline{\underline{I}} + \underline{\underline{\tau}}\right] + \rho\mathbf{g} \tag{5-4}$$

- As parcelas do componente do divergente do tensor das tensões na direção radial são:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\tau_{rr}) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r2\eta\frac{\partial u_r}{\partial r}\right] = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r2\frac{\partial u_r}{\partial r}\right]\eta + 2\frac{\partial u_r}{\partial r}\frac{\partial\eta}{\partial r} \tag{5-5}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}(\tau_{r\theta}) = \frac{1}{r}\eta\frac{\partial}{\partial\theta}\Big[r\frac{\partial}{\partial r}(\frac{u_\theta}{r}) + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}\Big] + \Big(\frac{\partial}{\partial r}(\frac{u_\theta}{r}) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}\Big)\frac{\partial\eta}{\partial\theta} \tag{5-6}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(\tau_{ry}) = \eta\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial u_y}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial y}\Big) + \Big(\frac{\partial u_y}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial y}\Big)\frac{\partial\eta}{\partial y} \tag{5-7}$$

- As parcelas do componente do divergente do tensor das tensões na direção polar são:

$$\begin{aligned}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\tau_{r\theta}) = &\frac{1}{r^2}\eta\frac{\partial}{\partial r}\Big(r^2\Big[r\frac{\partial}{\partial r}(\frac{u_\theta}{r}) + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial r}\Big]\Big)\\ &+ \Big(r\frac{\partial}{\partial r}(\frac{u_\theta}{r}) + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial r}\Big)\frac{\partial\eta}{\partial r}\end{aligned} \tag{5-8}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}(\tau_{\theta\theta}) = \frac{1}{r}2\eta\frac{\partial}{\partial\theta}\Big(\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta} + \frac{u_r}{r}\Big) + \frac{1}{r}2\Big(\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta} + \frac{u_r}{r}\Big)\frac{\partial\eta}{\partial\theta} \tag{5-9}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(\tau_{\theta y}) = \eta\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial u_\theta}{\partial y} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_y}{\partial\theta}\Big) + \Big(\frac{\partial u_\theta}{\partial y} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_y}{\partial\theta}\Big)\frac{\partial\eta}{\partial y} \tag{5-10}$$

- As parcelas do componente do divergente do tensor das tensões na direção axial são:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\tau_{ry}) = \frac{1}{r}\eta\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\Big(\frac{\partial u_y}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial y}\Big)\Big) + \eta\Big(\frac{\partial u_y}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial y}\Big)\frac{\partial\eta}{\partial r} \tag{5-11}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}(\tau_{\theta y}) = \frac{1}{r}\eta\frac{\partial}{\partial\theta}\Big(\frac{\partial u_\theta}{\partial y} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_y}{\partial\theta}\Big) + \frac{1}{r}\Big(\frac{\partial u_\theta}{\partial y} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_y}{\partial\theta}\Big)\frac{\partial\eta}{\partial\theta} \tag{5-12}$$

Substituindo os componentes do vetor de velocidade $u = w\mathbf{e}_r + (r\Omega + u)\mathbf{e}_\theta + \upsilon\mathbf{e}_y$ na equação de conservação de quantidade de movimento, temos:

- Na direção radial:

$$\begin{aligned}\Bigg[\frac{\partial w}{\partial t} + w\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{u}{r}\frac{\partial w}{\partial\theta} + \upsilon\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{u^2}{r}\Bigg] + \Omega\Bigg(\frac{\partial w}{\partial\theta} - 2u\Bigg) - r\Omega^2 =\\ -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\eta}{\rho}\Bigg[\nabla^2 w - \frac{w}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial u}{\partial\theta}\Bigg] - g\sin\theta +\\ \frac{1}{\rho}\Bigg[2\frac{\partial w}{\partial r}\frac{\partial\eta}{\partial r} + \Big(\frac{\partial}{\partial r}(\frac{u}{r}) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial w}{\partial\theta}\Big)\frac{\partial\eta}{\partial\theta} + (\frac{\partial\upsilon}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y})\frac{\partial\eta}{\partial y}\Bigg]\end{aligned} \tag{5-13}$$

- Na direção polar:

$$\left[\frac{\partial u}{\partial t}+w\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{u}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}+\upsilon\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{uw}{r}\right]+\Omega\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}+2w\right)=$$
$$-\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial \theta}+\frac{\eta}{\rho}\left[\nabla^2 u-\frac{u}{r^2}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial w}{\partial \theta}\right]-g\cos\theta+$$
$$\frac{1}{\rho}\left[\left(r\frac{\partial}{\partial r}(\frac{u}{r})+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta}\right)\frac{\partial \eta}{\partial r}+\frac{2}{r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}+\frac{w}{r}\right)\frac{\partial \eta}{\partial \theta}+\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{r}\frac{\partial \upsilon}{\partial \theta}\right)\frac{\partial \eta}{\partial y}\right] \quad (5\text{-}14)$$

- Na direção axial:

$$\left[\frac{\partial \upsilon}{\partial t}+w\frac{\partial \upsilon}{\partial r}+\frac{u}{r}\frac{\partial \upsilon}{\partial \theta}+\upsilon\frac{\partial \upsilon}{\partial y}\right]+\Omega\frac{\partial \upsilon}{\partial \theta}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\eta}{\rho}\left[\nabla^2 \upsilon\right]+$$
$$\frac{1}{\rho}\left[(\frac{\partial \upsilon}{\partial r}+\frac{\partial w}{\partial y})\frac{\partial \eta}{\partial r}+\frac{1}{r}(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{r}\frac{\partial \upsilon}{\partial \theta})\frac{\partial \eta}{\partial \theta}+2\frac{\partial \upsilon}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right] \quad (5\text{-}15)$$

onde p, η e ρ são a pressão, a viscosidade e a densidade do líquido, respectivamente. As equações devem ser resolvidas no intervalo $0 < z < h$, onde z é a nova coordenada radial modificada $z = r - R$, e h é a espessura da camada de líquido na superfície do cilindro $h(\theta, y, t)$. Assim, as equações indicadas deverão ser resolvidas no intervalo de z, considerando as seguintes condições de contorno:

1. Na superfície do cilindro em movimento será aplicada a condição de contorno de não deslizamento, $z = 0$.

$$w = u = \upsilon = 0 \quad (5\text{-}16)$$

2. Na interface líquido-gás, i.e. na superfície livre $z = h$, a tensão de cisalhamento é desprezível porque o gás é considerado como sendo não viscoso e aparece a tensão normal no líquido devido aos efeitos da pressão e da tensão superficial, assim:

$$\hat{\mathbf{n}}.\underline{\underline{\tau}}.\hat{\mathbf{t}}_\alpha = 0, \quad para \quad \alpha = \{\theta, y\}; \quad (5\text{-}17)$$
$$-p + \eta(\hat{\mathbf{n}}.\underline{\underline{D}}.\hat{\mathbf{n}}) = -\sigma\kappa. \quad (5\text{-}18)$$

onde $\underline{\underline{D}} = 1/2(\nabla u + \nabla u^T)$ é o tensor taxa de deformação do líquido, e $\hat{\mathbf{n}}$, $\hat{\mathbf{t}}_\alpha$ são os vetores normal e tangente à superfície livre, respectivamente. A tensão superficial σ é assumida constante e κ é a curvatura da superfície livre.

3. A condição de contorno cinemática é imposta na superfície livre, assim

$DF/Dt = 0$; onde F é a função que define a superfície livre $F(\theta, y, z, t) = z - h(\theta, y, t) = 0$. Esta condição é usada para obter a equação de evolução da espessura do filme.

Para avaliar a condição de contorno da tensão de cisalhamento é necessário o cálculo dos vetores unitários normal e tangente à superfície. O vetor unitário normal à uma superfície cilíndrica é dado por:

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\nabla F}{|\nabla F|} = \frac{1}{N}\left(e_r - \frac{1}{r}\frac{\partial h}{\partial \theta}e_\theta - \frac{\partial h}{\partial y}e_y\right) \tag{5-19}$$

onde:

$$N = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial h}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2}$$

Os dois vetores tangentes à superfície livre são:

$$\hat{\mathbf{t}}_1 = \left(1 + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial h}{\partial \theta}\right)^2\right)^{-0,5}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial h}{\partial \theta}e_r + e_\theta\right),$$

$$\hat{\mathbf{t}}_2 = \left(1 + \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2\right)^{-0,5}\left(\frac{\partial h}{\partial y}e_r + e_y\right) \tag{5-20}$$

A curvatura média da superfície livre é dada por:

$$\kappa = \nabla \cdot \hat{\mathbf{n}} = \frac{1}{N^3}\left\{\frac{1}{r}\left[1 + 2\left(\frac{1}{r}\frac{\partial h}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2\right] - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 h}{\partial \theta^2}\left[1 + \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2\right] - \right.$$
$$\left. \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}\left[1 + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial h}{\partial \theta}\right)^2\right] + \frac{2}{r^2}\frac{\partial h}{\partial \theta}\frac{\partial h}{\partial y}\frac{\partial^2 h}{\partial y \partial \theta}\right\} \tag{5-21}$$

5.2 Teoria de lubrificação bi-dimensional

As equações de conservação mencionadas anteriormente junto com suas condições de contorno descrevem completamente o problema, porém são complicadas de serem resolvidas. Como indicado nos capítulos anteriores, a equação pode ser simplificada devido ao baixo valor da razão $\epsilon = H/R \ll 1$, onde H é a espessura característica de filme. As equações de conservação podem ser expandidas numa série de potência de ϵ, com o objetivo de se obter a chamada *thin film approximation* ou aproximação de filme fino. O objetivo é simplificar a formulação sem perda da precisão dos resultados obtidos.

As equações de conservação e suas respectivas condições de contorno são escritas na forma adimensional pela introdução de quantidades denotadas por barras, levando em consideração que a viscosidade η não é mais uma constante e tornando-se adimensional em função de uma viscosidade característica μ:

$$\bar{z} = \frac{z}{\epsilon R}; \quad \bar{h} = \frac{h}{\epsilon R}; \quad \bar{y} = \frac{y}{R}; \quad \bar{r} = \frac{r}{R}; \quad \bar{r} = 1 + \epsilon \bar{z}$$
$$\bar{u} = \frac{u}{U}; \quad \bar{\upsilon} = \frac{\upsilon}{U}; \quad \bar{w} = \frac{w}{\epsilon U}; \quad \bar{p} = \frac{p}{P}; \quad \bar{\eta} = \frac{\eta}{\mu}; \quad \bar{t} = \frac{t}{T} \tag{5-22}$$

A velocidade característica ao longo da superfície U é definida como:

$$U = \rho g H^2/\mu, \tag{5-23}$$

A pressão característica como:

$$P = \rho g H \tag{5-24}$$

e o tempo característico como:

$$T = R/U \tag{5-25}$$

O componente da velocidade radial é adimensionalizado por $(H/R)U$, para manter todos os termos da equação de continuidade na mesma ordem. A formulação adimensional é dada por:

$$\frac{1}{\bar{r}}\frac{\partial(\bar{r}\bar{w})}{\partial\bar{z}} + \frac{1}{\bar{r}}\frac{\partial(\bar{u})}{\partial\theta} + \frac{\partial(\bar{\upsilon})}{\partial\bar{y}} = 0, \tag{5-26}$$

$$\begin{aligned} &\epsilon^2\mathfrak{R}\left[\epsilon\frac{R}{UT}\frac{\partial\bar{w}}{\partial\bar{t}} + \epsilon\bar{w}\frac{\partial\bar{w}}{\partial\bar{z}} + \epsilon\frac{\bar{u}}{\bar{r}}\frac{\partial\bar{w}}{\partial\theta} + \epsilon\upsilon\frac{\partial\bar{w}}{\partial\bar{y}} - \frac{\bar{u}^2}{\bar{r}}\right] \\ &\qquad + \epsilon^2\frac{W}{M}\left(\frac{\epsilon\partial\bar{w}}{\partial\theta} - 2\bar{u}\right) - W^2\bar{r} \\ &= -\frac{P}{\rho g H}\frac{\partial\bar{p}}{\partial\bar{z}} + \bar{\eta}\epsilon\left[\bar{\nabla}^2\bar{w} - \epsilon^2\frac{\bar{w}}{\bar{r}^2} - 2\frac{\epsilon}{r^2}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\theta}\right] - \sin\theta + \\ &\epsilon^2\left[\frac{2}{\epsilon}\frac{\partial\bar{w}}{\partial\bar{z}}\frac{\partial\bar{\eta}}{\partial\bar{z}} + \left(\frac{1}{\bar{r}}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{z}} - \frac{\bar{u}}{\bar{r}^2} + \frac{\epsilon}{\bar{r}^2}\frac{\partial\bar{w}}{\partial\theta}\right)\frac{\partial\bar{\eta}}{\partial\theta} + \left(\frac{1}{\epsilon}\frac{\partial\bar{\upsilon}}{\partial\bar{z}} + \epsilon\frac{\partial\bar{w}}{\partial\bar{y}}\right)\frac{\partial\bar{\eta}}{\partial\bar{y}}\right], \end{aligned} \tag{5-27}$$

$$\begin{aligned} &\epsilon^2\mathfrak{R}\left[\frac{R}{UT}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{t}} + \bar{w}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{z}} + \frac{\bar{u}}{\bar{r}}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\theta} + \bar{\upsilon}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{y}} + \epsilon\frac{\bar{u}\bar{w}}{\bar{r}}\right] \\ &\qquad + \epsilon^2\frac{W}{M}\left(\frac{\partial\bar{u}_\theta}{\partial\theta} + 2\epsilon\bar{w}\right) \\ &= -\frac{P}{\rho g R}\frac{1}{\bar{r}}\frac{\partial\bar{p}}{\partial\theta} + \bar{\nabla}^2\bar{u} - \epsilon^2\frac{\bar{u}}{\bar{r}^2} + \epsilon^3\frac{2}{\bar{r}^2}\frac{\partial\bar{w}}{\partial\theta} - \cos\theta + \\ &\left[\left(\bar{r}\frac{\partial}{\partial\bar{z}}(\frac{\bar{u}}{\bar{r}}) + \frac{\epsilon^2}{\bar{r}}\frac{\partial\bar{w}}{\partial\theta}\right)\frac{\partial\bar{\eta}}{\partial\bar{z}} + \frac{2\epsilon^2}{\bar{r}^2}\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial\theta} + \epsilon\bar{w}\right)\frac{\partial\bar{\eta}}{\partial\theta} + \epsilon^2\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{y}} + \frac{1}{\bar{r}}\frac{\partial\bar{\upsilon}}{\partial\theta}\right)\frac{\partial\bar{\eta}}{\partial\theta}\right], \end{aligned} \tag{5-28}$$

$$\epsilon^2\mathfrak{R}\left[\frac{R}{UT}\frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{t}}+\bar{w}\frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{z}}+\frac{\bar{u}}{\bar{r}}\frac{\partial\bar{v}}{\partial\theta}+\bar{v}\frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{y}}\right]+\epsilon^2\frac{W}{M}\frac{\partial\bar{v}}{\partial\theta}$$
$$=-\frac{P}{\rho gR}\frac{\partial\bar{p}}{\partial\bar{y}}+\bar{\nabla}^2\bar{v}$$
$$\left[\epsilon\Big(\frac{1}{\epsilon}\frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{z}}+\epsilon\frac{\partial\bar{w}}{\partial\bar{y}}\Big)\frac{\partial\bar{\eta}}{\partial\theta}+\epsilon^2\Big(\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{y}}+\frac{1}{\bar{r}}\frac{\partial\bar{v}}{\partial\theta}\Big)\frac{\partial\bar{\eta}}{\bar{r}\partial\theta}+2\epsilon^2\frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{y}}\frac{\partial\bar{\eta}}{\partial\bar{y}}\right]. \tag{5-29}$$

onde M, neste capítulo, representa o inverso do número de Galilei. A taxa de rotação adimensional W e o número de Reynolds $\mathfrak{R}$ são dados por:

$$M=\frac{\mu}{\rho\sqrt{gR^3}}, \tag{5-30}$$
$$W=\frac{\Omega}{\sqrt{g/R}}, \tag{5-31}$$
$$\mathfrak{R}=\frac{\rho UR}{\mu}=\frac{\rho^2 gH^2R}{\mu^2} \tag{5-32}$$

O termo $\mathfrak{R}$ define o número de Reynolds tradicional. No caso da aproximação de filme fino, a razão entre os termos inerciais e viscosos é dada por $\epsilon^2\mathfrak{R}$. Para desprezar os termos de inércia será preciso que o número de Reynolds reduzido $\epsilon^2\mathfrak{R}$ seja muito pequeno, o que é comum nos problemas de lubrificação.

O operador laplaciano $\bar{\nabla}^2$ é dado pela seguinte expressão:

$$\bar{\nabla}^2=R^2\nabla^2=\frac{1}{\bar{r}}\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\left(\bar{r}\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\right)+\frac{\epsilon^2}{\bar{r}^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\epsilon^2\frac{\partial^2}{\partial\bar{y}^2}, \tag{5-33}$$

Os termos de ordem $\mathcal{O}\{\epsilon^2\}$ e $\mathcal{O}\{\epsilon^2\mathfrak{R}\}$ e os de mais alta ordem são desprezados, assim as equações ficam reduzidas a:

$$-W^2(1+\epsilon\bar{z})=-\frac{\partial\bar{p}}{\partial\bar{z}}+\bar{\eta}\{\epsilon\frac{1}{\bar{r}}\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\left(\bar{r}\frac{\partial\bar{w}}{\partial\bar{z}}\right)\}-\sin\theta$$
$$+2\epsilon\frac{\partial\bar{w}}{\partial\bar{z}}\frac{\partial\bar{\eta}}{\partial\bar{z}}+\epsilon\frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{z}}\frac{\partial\bar{\eta}}{\partial\bar{y}}, \tag{5-34}$$
$$0=-\frac{\epsilon}{\bar{r}}\frac{\partial\bar{p}}{\partial\theta}+\bar{\eta}\{\frac{1}{\bar{r}}\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\left(\bar{r}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{z}}\right)\}-\cos\theta$$
$$+\left[\bar{r}\frac{\partial}{\partial\bar{z}}(\frac{\bar{u}}{\bar{r}})\right]\frac{\partial\bar{\eta}}{\partial\bar{z}}, \tag{5-35}$$
$$0=-\epsilon\frac{\partial\bar{p}}{\partial\bar{y}}+\bar{\eta}\{\frac{1}{\bar{r}}\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\left(\bar{r}\frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{z}}\right)\}+\frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{z}}\frac{\partial\bar{\eta}}{\partial\bar{z}} \tag{5-36}$$

As equações podem ser simplificadas ainda mais, ficando assim:

$$-W^2(1+\epsilon\bar{z}) = -\frac{\partial\bar{p}}{\partial\bar{z}} + \epsilon\bar{\eta}\frac{\partial^2\bar{w}}{\partial\bar{z}^2} - \sin\theta + \epsilon\frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{z}}\frac{\partial\bar{\eta}}{\partial\bar{y}}, \tag{5-37}$$

$$0 = -\frac{\epsilon}{\bar{r}}\frac{\partial\bar{p}}{\partial\theta} + \bar{\eta}\left(\frac{\partial^2}{\partial\bar{z}^2} + \frac{\epsilon}{\bar{r}}\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\right)\bar{u} - \cos\theta, \tag{5-38}$$

$$0 = -\epsilon\frac{\partial\bar{p}}{\partial\bar{y}} + \bar{\eta}\left(\frac{\partial^2}{\partial\bar{z}^2} + \frac{\epsilon}{\bar{r}}\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\right)\bar{v}. \tag{5-39}$$

multiplicando a eq.5-38 por $(1+\epsilon\bar{z})$, finalmente temos:

$$-W^2(1+\epsilon\bar{z}) = -\frac{\partial\bar{p}}{\partial\bar{z}} + \epsilon\bar{\eta}\frac{\partial^2\bar{w}}{\partial\bar{z}^2} - \sin\theta + \epsilon\frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{z}}\frac{\partial\bar{\eta}}{\partial\bar{y}}, \tag{5-40}$$

$$0 = -\epsilon\frac{\partial\bar{p}}{\partial\theta} + \epsilon\bar{\eta}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{z}} + (1+\epsilon\bar{z})\left(\bar{\eta}\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial\bar{z}^2} - \cos\theta\right), \tag{5-41}$$

$$0 = -\epsilon\frac{\partial\bar{p}}{\partial\bar{y}} + (1+\epsilon\bar{z})\bar{\eta}\frac{\partial^2}{\partial\bar{z}^2} + \bar{\eta}\epsilon\frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{z}}. \tag{5-42}$$

Analisando as expressões acima indicadas observamos que o termo da aceleração W (conhecido como aceleração centrípeta, $R\Omega^2$) e o termo da gravidade g são da mesma ordem de grandeza. Foi desprezado o termo da aceleração de Coriolis, proporcional a $\epsilon^2 W/M$, onde a quantidade $W/M = \rho\Omega R^2/\eta$, pode ser considerada como o número de Reynolds $\mathfrak{R}_\Omega$ em função da velocidade da parede $R\Omega$.

Em relação às condições de contorno, também precisamos torná-las adimensionais para iniciar a análise de perturbação. Para isso, começamos com os vetores normais e tangenciais à superfície livre, obtendo:

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{n}} &= e_r - \epsilon\frac{\partial\bar{h}}{\partial\theta}e_\theta - \epsilon\frac{\partial\bar{h}}{\partial\bar{y}}e_y + \mathcal{O}\{\epsilon^2\},\\
\hat{\mathbf{t}}_1 &= \epsilon\frac{\partial\bar{h}}{\partial\theta}e_r + e_\theta + \mathcal{O}\{\epsilon^2\},\\
\hat{\mathbf{t}}_2 &= \epsilon\frac{\partial\bar{h}}{\partial\bar{y}}e_r + e_y + \mathcal{O}\{\epsilon^2\}.
\end{aligned} \tag{5-43}$$

Sendo que a curvatura média da superfície livre é dada por:

$$\bar{\kappa} = \bar{\nabla}\cdot\hat{\mathbf{n}} = 1 - \epsilon\bar{h} - \epsilon\bar{\nabla}^2\bar{h} + \mathcal{O}\{\epsilon^2\}, \tag{5-44}$$

As condições de contorno em forma adimensional são:

1. Não deslizamento na superfície do cilindro($\bar{z}=0$):

$$\bar{u} = \bar{w} = \bar{v} = 0 \tag{5-45}$$

2. Na superfície livre, $\bar{z} = \bar{h}$, as tensões de cisalhamento são desprezadas:

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \underline{\underline{\tau}} \cdot \hat{\mathbf{t}}_\alpha = 0 \quad ; \quad \alpha = (\theta, \bar{y}) \tag{5-46}$$

3. Balanço de forças na interface, $\bar{z} = \bar{h}$:

$$-\bar{p} + \epsilon \hat{\mathbf{n}}_i \cdot \underline{\underline{D}}_{ij} \cdot \hat{\mathbf{n}}_j = -\frac{1}{\epsilon Bo}\bar{\kappa}, \tag{5-47}$$

onde $\underline{\underline{D}}_{ij}$ representa os componentes do tensor deformação e $Bo = \rho g R^2/\sigma$ é o número de *Bond*.

As variáveis são expandidas em potências de ϵ, assim:

$$\bar{p} = \epsilon^{-1} p_0 + p^{(0)} + \epsilon p^{(1)} + ..., \tag{5-48}$$

$$\bar{u} = u^{(0)} + \epsilon u^{(1)} + ..., \tag{5-49}$$

$$\bar{v} = v^{(0)} + \epsilon v^{(1)} + ..., \tag{5-50}$$

$$\bar{w} = w^{(0)} + \epsilon w^{(1)} + ..., \tag{5-51}$$

Das equações (5-44) e (5-47) concluímos que p_0 é constante, $p_0 = Bo^{-1}$. De acordo com a eq.5-48, a pressão adicional é devido ao filme que é forçado a levar a forma do cilindro com raio de curvatura $1/R$. Em todo caso, não é seu valor absoluto que afeta o escoamento, e sim os gradientes de pressão. A seguinte ordem da pressão obtida das equações 5-44 e 5-47 é:

$p^{(0)} = -\frac{1}{Bo}(\bar{h} + \nabla^2 \bar{h})$ para $\bar{z} = \bar{h}$.

Assim, o sistema de equações para as variáveis de ordem (0) é:

– Equação de continuidade:

$$\frac{\partial w^{(0)}}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial u^{(0)}}{\partial \theta} + \frac{\partial v^{(0)}}{\partial \bar{y}} = 0. \tag{5-52}$$

– Equação de Conservação da Quantidade de Movimento linear:

$$-W^2 = -\frac{\partial p^{(0)}}{\partial \bar{z}} - \sin\theta, \tag{5-53}$$

$$0 = \eta \frac{\partial^2 u^{(0)}}{\partial \bar{z}^2} - \cos\theta, \tag{5-54}$$

$$0 = \eta \frac{\partial^2 v^{(0)}}{\partial \bar{z}^2}. \tag{5-55}$$

– Condições de contorno na mesma ordem 0:

$$
\begin{aligned}
u^{(0)} =& w^{(0)} = \upsilon^{(0)} = 0 \qquad \text{para} \qquad \bar{z} = 0, \\
p^{(0)} =& -\frac{1}{Bo}(\bar{h} + \nabla^2 \bar{h}) \qquad \text{para} \qquad \bar{z} = \bar{h}, \\
\frac{\partial u^{(0)}}{\partial \bar{z}} =& \frac{\partial \upsilon^{(0)}}{\partial \bar{z}} = 0 \qquad \text{para} \qquad \bar{z} = \bar{h}.
\end{aligned}
$$

Integrando a equação (5-53) podemos obter a expressão da pressão na ordem (0):

$$p_z^{(0)} = -\frac{1}{Bo}(\bar{h} + \nabla^2 \bar{h}) + (W^2 - \sin\theta)[\bar{z} - \bar{h}], \tag{5-56}$$

à partir da integração da equação (5-54), calculamos o componente u:

$$u^{(0)} = \frac{\cos\theta}{\eta}\Big[\frac{\bar{z}^2}{2} - \bar{h}\bar{z}\Big], \tag{5-57}$$

e da equação (5-55), calculamos o componente υ:

$$\upsilon^{(0)} = 0, \tag{5-58}$$

Por último, da equação (5-52), calculamos o componente w:

$$w^{(0)} = \frac{\cos\theta}{2\eta}\frac{\partial h}{\partial \theta}\bar{z}^2 + \frac{\sin\theta}{\eta}\Big(\frac{\bar{z}^3}{6} - \frac{\bar{h}\bar{z}^2}{2}\Big) + \frac{\cos\theta}{\eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial \theta}\Big(\frac{\bar{z}^3}{6} - \frac{\bar{h}\bar{z}^2}{2}\Big). \tag{5-59}$$

O sistema de equações para as variáveis de ordem (1) é:

– Equação de continuidade:

$$\frac{\partial w^{(1)}}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial (z w^{(0)})}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial u^{(1)}}{\partial \theta} + \frac{\partial \upsilon^{(1)}}{\partial \bar{y}} + z\frac{\partial \upsilon^{(0)}}{\partial \bar{y}} = 0, \tag{5-60}$$

– Equação de Conservação da Quantidade de Movimento:

$$-W^2 \bar{z} = -\frac{\partial p^{(1)}}{\partial \bar{z}} + \eta\frac{\partial^2 w^{(1)}}{\partial \bar{z}^2} + \frac{\partial \upsilon^{(1)}}{\partial \bar{z}}\frac{\partial \eta}{\partial \bar{y}}, \tag{5-61}$$

$$0 = -\frac{\partial p^{(0)}}{\partial \theta} + \eta\frac{\partial u^{(0)}}{\partial \bar{z}} + \bar{z}(\eta\frac{\partial^2 u^{(0)}}{\partial \bar{z}^2} - \cos\theta) + \eta\frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial \bar{z}^2}, \tag{5-62}$$

$$0 = -\frac{\partial p^{(0)}}{\partial \bar{y}} + \eta\frac{\partial^2 \upsilon^{(1)}}{\partial \bar{z}^2} + \eta\Big(\bar{z}\frac{\partial^2 \upsilon^{(0)}}{\partial \bar{z}^2} + \frac{\partial \upsilon^{(0)}}{\partial \bar{z}}\Big). \tag{5-63}$$

– Condições de contorno na mesma ordem 1:

$$
\begin{aligned}
u^{(1)} =& w^{(1)} = \upsilon^{(1)} = 0 \qquad \text{para} \qquad \bar{z} = 0 \\
\frac{\partial u^{(1)}}{\partial \bar{z}} =& u^0 = \frac{\cos\theta}{\eta}\Big[\frac{\bar{z}^2}{2} - \bar{h}\bar{z}\Big] \qquad \text{para} \qquad \bar{z} = \bar{h} \\
\frac{\partial \upsilon^{(1)}}{\partial \bar{z}} =& 0 \qquad \text{para} \qquad \bar{z} = \bar{h}.
\end{aligned}
$$

Das equações (5-62) e (5-63), obtemos os componentes das velocidades u e υ, respectivamente:

$$
\begin{aligned}
u^{(1)} =& \Big[\frac{1}{\eta Bo}\frac{\partial}{\partial\theta}(\bar{h}+\nabla^2\bar{h}) + \frac{(W^2-\sin\theta)}{\eta}\frac{\partial\bar{h}}{\partial\theta}\Big]\Big(\bar{h}\bar{z}-\frac{\bar{z}^2}{2}\Big)+ \\
& \frac{\cos\theta}{\eta}\Big(-\frac{\bar{z}^3}{3}+\bar{h}\bar{z}^2-3\frac{\bar{h}^2\bar{z}}{2}\Big) \qquad (5\text{-}64)\\
\upsilon^{(1)} =& -\Big[\frac{1}{\eta Bo}\frac{\partial}{\partial\bar{y}}(\bar{h}+\nabla^2\bar{h}) + \frac{(W^2-\sin\theta)}{\eta}\frac{\partial\bar{h}}{\partial\bar{y}}\Big]\Big(\frac{\bar{z}^2}{2}-\bar{h}\bar{z}\Big) \qquad (5\text{-}65)
\end{aligned}
$$

5.3 Equação da evolução da espessura do líquido injetado com o tempo

Como a localização da superfície livre é desconhecida, é preciso adicionar uma condição extra, a condição cinemática, que descreve fisicamente que o líquido não pode atravessar a superfície livre. Assim analisaremos esta condição para obter a variação da espessura do líquido com o tempo $\partial h/\partial t$, i.e. sua evolução através do tempo.

O escoamento consiste de um líquido injetado através de uma porta de injeção, como indicado no capítulo anterior, que escorre sobre a superfície do cilindro. O líquido deve descrever um movimento de corpo rígido $r\Omega$ e um outro de drenagem u. Integrando a equação de continuidade através da espessura de revestimento e considerando a injeção de líquido representada por Φ, obtemos:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{r\Omega+u}{r}\frac{\partial h}{\partial\theta} + \upsilon\frac{\partial h}{\partial y} - w = \Phi(\theta, y), \qquad (5\text{-}66)$$

em $z = h$, $w = 0$. A equação anterior pode ser expressa em função das vazões:

$$r\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial Q_\theta}{\partial\theta} + R\frac{\partial Q_y}{\partial y} = r\Phi(\theta, y), \qquad (5\text{-}67)$$

onde, Q_θ é o componente da vazão na direção θ e sendo dado por:

$$Q_\theta = \int_0^h [(R+z)\Omega + u]dz, \qquad (5\text{-}68)$$

Usando a equação (5-49), temos:

$$
\begin{aligned}
Q_\theta =& \int_0^h (R+z)\Omega dz + \int_0^h u dz \\
=& \Big(Rh + \frac{1}{2}h^2\Big)\Omega + UH\int_0^{\bar{h}} (u^{(0)} + \epsilon u^{(1)})d\bar{z} \qquad (5\text{-}69)
\end{aligned}
$$

com $u^{(0)}$ e $u^{(1)}$ dados pelas equações (5-57) e (5-64)

$$\begin{aligned}\frac{Q_\theta}{UH} =&\frac{\Omega R}{U}\Big(\bar{h}+\epsilon\frac{\bar{h}^2}{2}\Big)+\frac{\cos}{\eta}\Big(\frac{\bar{h}^3}{6}-\frac{\bar{h}^3}{2}\Big)+\\ &-\epsilon\Big[\frac{1}{\eta Bo}\frac{\partial}{\partial\theta}(\bar{h}+\nabla_s^2\bar{h})+\frac{(W^2-\sin\theta)}{\eta}\frac{\partial\bar{h}}{\partial\theta}\Big]\int_0^{\bar{h}}\Big(\bar{h}\bar{z}-\frac{\bar{z}^2}{2}\Big)d\bar{z}+\\ &-\epsilon\int_0^{\bar{h}}\frac{\cos}{\eta}\Big(\frac{\bar{z}^3}{3}-\bar{h}\bar{z}^2+\frac{3\bar{h}^2\bar{z}}{2}\Big)d\bar{z}\end{aligned}$$

Definindo $U_\Omega = \Omega R/U$ como a relação das velocidades de rotação da parede do cilindro e a velocidade característica do líquido, assim:

$$\begin{aligned}\frac{Q_\theta}{UH} =&U_\Omega\Big(\bar{h}+\epsilon\frac{\bar{h}^2}{2}\Big)-\frac{\cos}{\eta}\Big(\frac{\bar{h}^3}{3}+\epsilon\frac{\bar{h}^4}{4}\Big)\\ &+\epsilon\frac{\bar{h}^3}{3}\Big[\frac{1}{\eta Bo}\frac{\partial}{\partial\theta}(\bar{h}+\nabla_s^2\bar{h})+\frac{(W^2-\sin\theta)}{\eta}\frac{\partial\bar{h}}{\partial\theta}\Big]\end{aligned} \tag{5-70}$$

Procedendo da mesma forma análoga para a direção y:

$$Q_y =\frac{1}{R}\int_0^h \upsilon(R+z)dz. \tag{5-71}$$

E usando as definições dadas pelas equações (5-50), obtém-se:

$$Q_y = UH\int_0^{\bar{h}}(\upsilon^{(0)}+\epsilon\upsilon^{(1)})(1+\epsilon\bar{z})d\bar{z} \tag{5-72}$$

com $\upsilon^{(0)}$ e $\upsilon^{(1)}$ dados pelas equações (5-58) e (5-65):

$$\begin{aligned}\frac{Q_y}{UH} &= \int_0^{\bar{h}}(\upsilon^{(0)}+\epsilon\upsilon^{(1)})(1+\epsilon\bar{z})d\bar{z} = \int_0^{\bar{h}}\epsilon\upsilon^{(1)}d\bar{z} =\\ &=-\epsilon\Big[\frac{1}{\eta Bo}\frac{\partial}{\partial y}(\bar{h}+\nabla_s^2\bar{h})+\frac{(W^2-\sin\theta)}{\eta}\frac{\partial\bar{h}}{\partial y}\Big]\int_0^{\bar{h}}\Big(\frac{\bar{z}^2}{2}-\bar{h}\bar{z}\Big)=\\ &=\epsilon\frac{\bar{h}^3}{3}\Big[\frac{1}{\eta Bo}\frac{\partial}{\partial y}(\bar{h}+\nabla_s^2\bar{h})+\frac{(W^2-\sin\theta)}{\eta}\frac{\partial\bar{h}}{\partial y}\Big].\end{aligned} \tag{5-73}$$

Substituindo os resultados das equações (5-70) e (5-73) em (5-67) e tornando-a adimensional, obtemos:

$$\begin{aligned}(1+\epsilon\bar{h})\frac{\partial\bar{h}}{\partial t}&+U_\Omega\frac{\partial}{\partial\theta}\Big(\bar{h}+\epsilon\frac{\bar{h}^2}{2}\Big)-\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\Big(\frac{\bar{h}^3}{3}+\epsilon\frac{\bar{h}^4}{4}\Big)\frac{\cos\theta}{\eta}\right]+\\ &+\epsilon\frac{\partial}{\partial\theta}\left\{\frac{\bar{h}^3}{3}\Big[\frac{1}{\eta Bo}\frac{\partial}{\partial\theta}(\bar{h}+\nabla_s^2\bar{h})+\frac{(W^2-\sin\theta)}{\eta}\frac{\partial\bar{h}}{\partial\theta}\Big]\right\}+\\ &+\epsilon\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{\bar{h}^3}{3}\Big[\frac{1}{\eta Bo}\frac{\partial}{\partial y}(\bar{h}+\nabla_s^2\bar{h})+\frac{(W^2-\sin\theta)}{\eta}\frac{\partial\bar{h}}{\partial y}\Big]\right\}= (1+\epsilon\bar{h})\frac{R}{UH}\Phi(\theta,y)\end{aligned}$$

O termo fonte $\Phi(\theta, y)$, como mostrado na figura 4.6, é função da taxa de injeção Γ. A equação da evolução de forma adimensional é:

$$
\begin{aligned}
(1+\epsilon\bar{h})\frac{\partial\bar{h}}{\partial\bar{t}} = & -U_\Omega\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\bar{h}+\epsilon\frac{\bar{h}^2}{2}\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\left(\frac{\bar{h}^3}{3}+\epsilon\frac{\bar{h}^4}{2}\right)\cos\theta\right] \\
& -\epsilon\bar{\nabla}_s\cdot\left\{\frac{\bar{h}^3}{3Bo}\bar{\nabla}_s(\bar{h}+\bar{\nabla}_s^2\bar{h})+\frac{\bar{h}^3}{3}[W^2-\sin\theta]\bar{\nabla}_s\bar{h}\right\} \\
& +\frac{(1+\epsilon\bar{h})}{\epsilon^3}M\bar{\Phi},
\end{aligned} \tag{5-74}
$$

onde, $\bar{\nabla}_s = R\nabla_s = e_\theta(\frac{\partial}{\partial\theta}) + e_y(\frac{\partial}{\partial\bar{y}})$ e $\bar{\nabla}_s^2 = R^2\nabla_s^2 = \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial\bar{y}^2}$.

A taxa de injeção é adimensionalizada com:

$$
\bar{\Gamma} = \Gamma/\sqrt{gR^5} \tag{5-75}
$$

Assim, a parcela do termo fonte se torna adimensional com ajuda das equações (5-23), (5-30) e (5-75):

$$
\begin{aligned}
\frac{R\Phi}{UH} = \frac{R}{UH}\frac{2\Gamma}{\pi R^2\bar{R}_f^2}\left[1-\left(\frac{\bar{r}_\phi}{\bar{R}_f}\right)^2\right] &= \\
\frac{R\mu}{\rho g H^3 R^2}\frac{2\Gamma}{\pi\bar{R}_f^2}\left[1-\left(\frac{\bar{r}_\phi}{\bar{R}_f}\right)^2\right] &= \\
\frac{\mu}{\rho g H^3 R}\frac{2\sqrt{gR}R^2\bar{\Gamma}}{\pi\bar{R}_f^2}\left[1-\left(\frac{\bar{r}_\phi}{\bar{R}_f}\right)^2\right] &= \\
\overbrace{\frac{\mu}{\rho\sqrt{gR^3}}}^{M}\frac{\sqrt{gR^3}}{gH^3R}\sqrt{gR}R^2\overbrace{\frac{2\bar{\Gamma}}{\pi\bar{R}_f^2}\left[1-\left(\frac{\bar{r}_\phi}{\bar{R}_f}\right)^2\right]}^{\bar{\Phi}} &= \frac{M\bar{\Phi}}{\epsilon^3}
\end{aligned} \tag{5-76}
$$

Os termos acima indicados contêm todos os mecanismos físicos responsáveis pelo escoamento: convecção do fluido pela rotação, drenagem devido aos componentes da gravidade, efeitos de tensão superficial, injeção contínua de fluido e a variação da viscosidade em função do tempo e do espaço. Considerando a viscosidade constante, esta equação pode ser simplificada, obtendo a equação da evolução analisada no capítulo anterior.

5.4 Solução numérica

Para o desenvolvimento de um modelo numérico é conveniente ter todos os comprimentos medidos numa escala em comum. Redimensionando todos os comprimentos, incluindo a espessura do filme, como sendo medidos em unidades de R e definindo $MW = -U_\Omega\epsilon^2$, a equação da evolução se torna assim:

$$\begin{aligned}\frac{\partial h^*}{\partial t} =& - MW\frac{\partial h^*}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial \theta}\left[\left(\frac{h^{*3}}{3}\right)\frac{\cos\theta}{\eta}\right]+\\ &- \nabla_s \cdot \left\{\frac{h^{*3}}{3}\left[\frac{1}{\eta Bo}\frac{\partial}{\partial \theta}(h^* + \nabla_s^2 h^*)\frac{(W^2-\sin\theta)}{\eta}\frac{\partial h^*}{\partial \theta}\right]\right\}+\\ &+ \Phi(\theta, y)\end{aligned} \tag{5-77}$$

A partir de agora, as estrelas (*) e as barras (-) das quantidades adimensionais serão retiradas para simplificar a notação. A presença do número inverso de Galilei, M, junto com o valor da velocidade de injeção $\bar{\Phi}$, estava prevista como na equação (2-14) da seção (2.2). A combinação deles representa a força de injeção de líquido, i.e., quanto mais viscoso o líquido é, maior será a pressão de injeção.

A quantidade $U_\Omega = MW\epsilon^{-2}$ define a razão entre a velocidade da parede do cilindro $R\Omega$ e a velocidade característica U. Os parâmetros de operação para o cilindro fotorreceptor, considerando a pseudo-solidificação, são determinados por: $Bo, M, W, \Gamma, V_{inj}, \epsilon$ e η, sendo que a presença do parâmetro η dentro da equação acima permite descrever a variação da viscosidade em função da posição θ, y e do tempo.

A equação resultante é uma equação de quarta ordem no espaço e de primeira ordem no tempo. Ela foi revolvida utilizando o Método de Diferenças Finitas. Sendo um caso similar ao tratado na seção 2.4

As condições iniciais são prescritas por uma espessura: $h(x, y, 0) = h^0 = \epsilon$. No início, a superfície encontra-se sem fluido e como estamos utilizando o modelo de filme precursor, o valor de h^0 ao longo do domínio irá se tornar o valor da espessura do filme precursor H_f. De acordo com a física do problema, é necessário a utilização da condição de contorno periódica na direção θ e na direção y é necessário uma condição de reflexão simétrica que é a imposição de fluxo zero.

A discretização espacial e temporal utilizada é igual a mencionada no capítulo anterior, que resulta num sistema de $Ntot$ equações algébricas não-lineares. O método usado com frequência para resolver este tipo de equações e aplicado neste trabalho é o método de Newton (ou Newton Rhapson) como já comentado na seção 2.4.6. O critério de convergência adotado foi de $\xi = 10^{-11}$, isto é:

$$\|\vec{R}\|_2 \leq \xi, \tag{5-78}$$

onde $\vec{R}$ é o vetor resíduo.

5.4.1 Mapeamento temporal e espacial de η

A viscosidade η do líquido injetado na superfície do cilindro se altera em função do tempo de residência, denotado por t_{res}. Inicia-se o processo de solidificação em $t_{res} = t_{\eta_{Ini}}$, da Fig. 5.2, e após este tempo a viscosidade se incrementará em forma linear ou exponencial dependendo da taxa de solidificação do fluido a ser modelado. O gráfico destes tipos de funções é mostrado na Fig. 5.2. Variáveis adicionais são utilizadas para realizar o mapeamento da variação da viscosidade do líquido no domínio (θ, y). A cada passo de tempo Δt, a nova posição do filme revestido é mapeada e a variável t_{res} é atualizada de acordo com essa nova posição, como mostrado na Fig. 5.3. Como a viscosidade é em função do tempo de residência, também tem que ser atualizada a cada passo do tempo. O critério do mapeamento também é dado em função do filme precursor H_f, sendo assim, o tempo de residência foi atualizado nas regiões que apresentaram espessuras maiores a 10 % H_f.

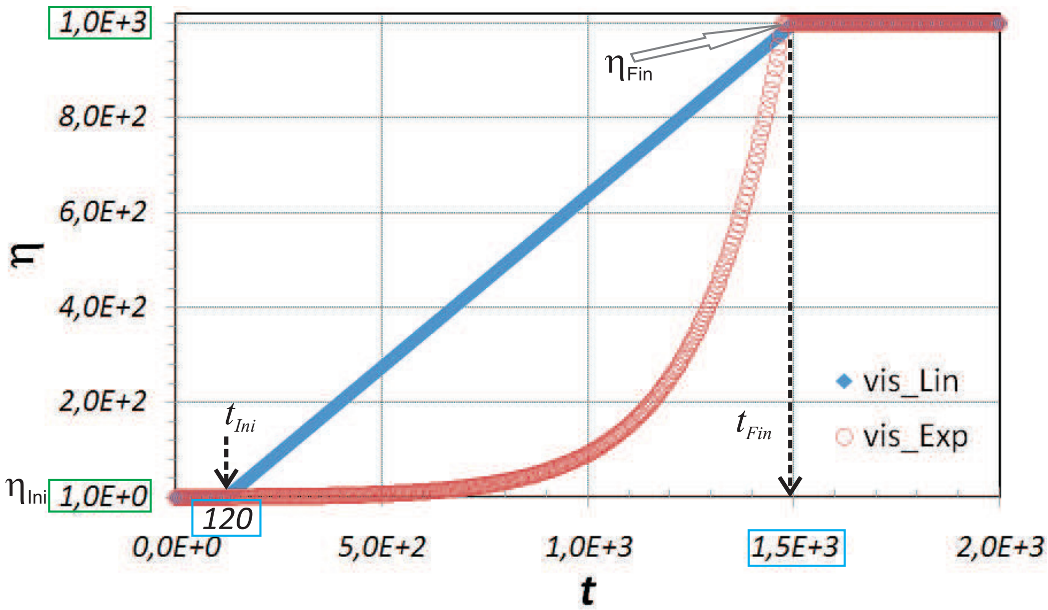

Figura 5.2: Viscosidade como uma função do tempo. $\eta_{Ini} = 1,0$ e $\eta_{Fin} = 1000$ para um $t_{\eta_{Ini}} = 120$ e $t_{\eta_{Fin}} = 1500$.

5.5 Resultados

O parâmetro de interesse neste capítulo é a viscosidade que simula o processo de pseudo-solidificação. A variação deste em função do tempo será de forma exponencial. Para tal efeito irá configurar-se a viscosidade em

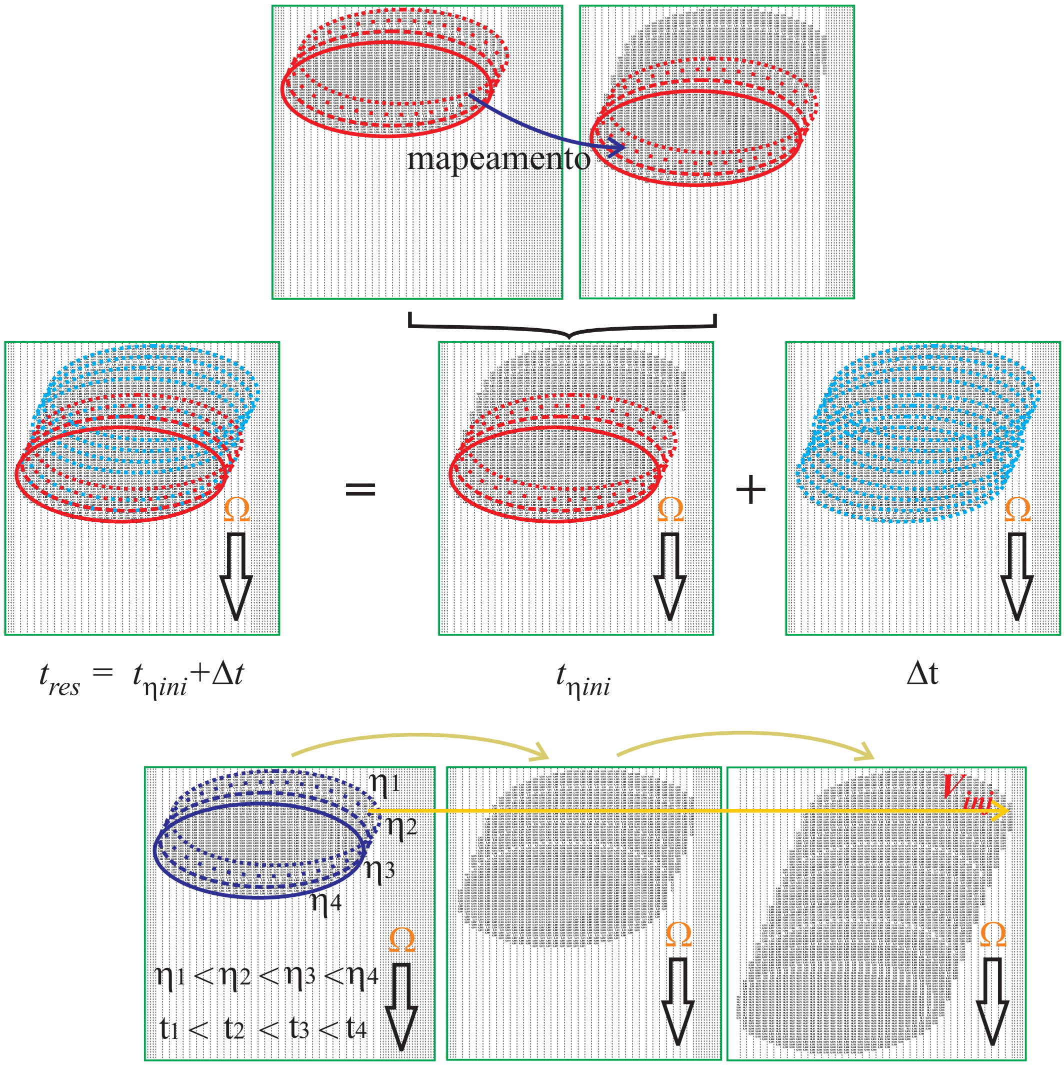

Figura 5.3: Mapeamento de η.

concordância ao seu valor inicial e final, i.e. η_{Ini} e η_{Fin} para um $t_{\eta_{Ini}}$ e $t_{\eta_{Fin}}$, respectivamente, como mostrado na Fig. 5.2.

Em $t = t_{res} = t_{\eta_{Ini}}$ inicia-se o processo de solidificação, e após este tempo, a viscosidade irá incrementar-se exponencialmente de acordo com a seguinte equação:

$$\eta = C_1 e^{b(t - t_{\eta_{Ini}})}, \tag{5-79}$$

onde $C_1 = 1$ e $b = \ln(\eta_{Fin}/\eta_{Ini})/(t_{\eta_{Fin}} - t_{\eta_{Ini}})$

Os valores dos casos analisados apresentam-se na tabela 5.1:

Os parâmetros adimensionais foram fixados nos seguintes valores $M = 0,007, R_f = 0,25, H_f = 3 \times 10^{-5}, \Gamma = 0,001$ e $\eta_{Fin} = 1000, \eta_{Ini} = 1,0, t_{\eta_{Fin}} = 1500, t_{\eta_{Ini}} = 120$. A porta de injeção, neste caso, foi colocada na posição $(\theta_{cp,t}; y_{cp,0}) = (\pi/3; 1,05 \times R_f)$ alterando-se a uma velocidade $V_{inj} = 0,001$ até atingir um valor de $y_{cp,t} = L_Y - 1.05 \times R_f$. Sendo que os valores de W e de V_{inj} serão indicados nas seções seguintes.

Tabela 5.1: Valores dos parâmetros utilizados.

	Bo1	Bo3	Bo4	Bo5
a	0,1	1,0	0,3162	10,0
R_o	1,0	1,0	1,0	1,0
Bo	100	1,0	0,1	0,01

5.5.1 Efeito de nivelamento

Como indicado na seção 4.6.4, a análise foi realizada investigando a solução em dois instantes de tempo, como no capítulo anterior. A figura 5.4a representa o primeiro intervalo, caracterizado pelo momento em que a porta de injeção atinge a distância final axial, definida por ($y_{cp,0} = L_y - 1,25 \times R_f$). Este gráfico apresenta o perfil da espessura do filme ao longo da direção axial, y, para diferentes números de $Bo = 100; 1,0; 0,1; 0,01$ e $W = 3,0$ no tempo $t = 1,6 \times 10^3$ (igual ao tempo alcançado nos casos do capítulo anterior pelo fato de estar utilizando os mesmos valores dos parâmetros operacionais W e V_{inj}). Este perfil foi medido em um dos quadrantes do cilindro, neste caso em $\theta = \pi/2$. Para $Bo = 100$ o efeito de nivelamento é fraco e portanto o padrão de onda mantém-se constante. O efeito de solidificação não teve uma contribuição importante. Para valores de $Bo = 0,1$ e $Bo = 0,01$, pode-se apreciar no intervalo $y[0,24; 0,64]$, correspondente à interação das duas primeiras tiras de líquido depositadas, que o efeito da pseudo-solidificação ajuda a reduzir o efeito *heavy edge* mencionado no capítulo anterior, pelo incremento do valor da viscosidade nesta região.

O gráfico 5.4b mostra o perfil da espessura do filme revestido no segundo instante de tempo, como já descrito no capítulo anterior, em $t = 1,6 \times 10^4$ para $Bo = 100$, $Bo = 1,0$, para $Bo = 0,1$ e para $Bo = 0,01$, medido na mesma posição $\theta = \pi/2$. Pode-se notar um melhor controle do efeito de borda como mostrados nos casos sem considerar solidificação (ver Fig. 4.17c). Isso acontece pelo fato que o termo viscoso, da equação de evolução do filme, é dominante. Também se pode observar que o padrão ondulado não é suavizado.

A Figura 5.5 mostra os resultados da comparação do caso base sem considerar solidificação e os casos obtidos neste capítulo mantendo obviamente os mesmos parâmetros de operação. A figura mostra os perfis de espessura de filme revestido para $t = 1,6 \times 10^3$ para $Bo = 1,0$ e $Bo = 0,01$. Esta figura mostra algumas evidências da pseudo-solidificação, indo contra o efeito da força de tensão superficial pelo aumento constante do valor da viscosidade. O comportamento do perfil está diretamente relacionado com os dados de entrada da função da viscosidade. Os resultados mostrados neste capítulo estão

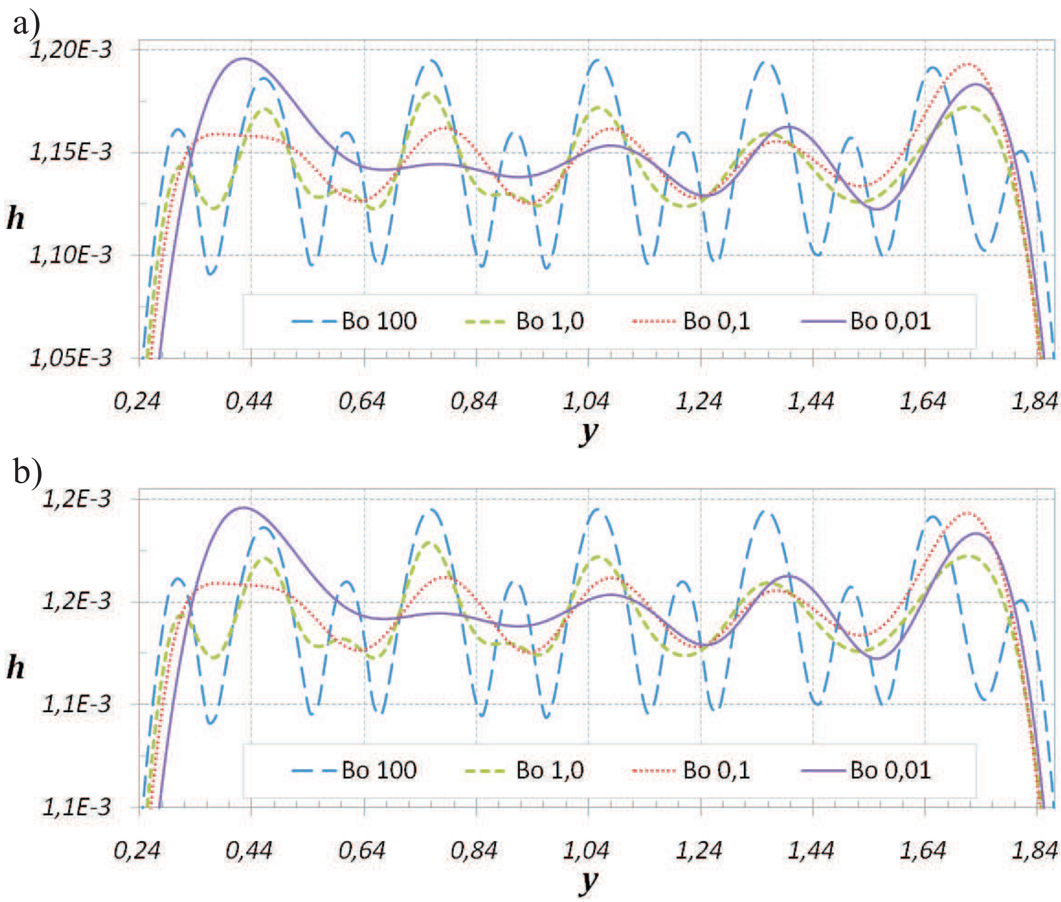

Figura 5.4: Gráfico do perfil da espessura do filme depositado em $\theta = \pi/2$ (Corte (A-A)): a) no instante no qual a porta de injeção atinge a distância final axial. b) No seguinte intervalo de tempo t com o cilindro estacionário.

limitados a um caso particular da variação da viscosidade de forma exponencial com $t_{\eta_{Fin}}$ escolhido arbitrariamente com a finalidade de testar a equação de evolução considerando o efeito de pseudo-solidificação.

Uma comparação, no segundo instante de tempo $t = 1,6 \times 10^4$, dos perfis de espessura com $Bo = 0,1$ é mostrada na Fig. 5.6. Pode-se apreciar um melhor controle do efeito *heavy edge* pelo incremento substancial do valor da viscosidade ao longo da camada. O perfil do filme revestido para o caso base muda ao longo do tempo. No caso de pseudo-solidificação, na situação em que a porção do líquido atinge o tempo $t_{\eta_{Fin}}$, o perfil nessa região não mudará, porque o termo viscoso da equação de evolução é dominante.

No capítulo anterior foi discutida a situação de um prolongado tempo de nivelamento que pode acarretar no efeito de drenagem do líquido revestido pela força gravitacional. Foram realizadas medições de espessura média em $\theta = \pi/2$ e $\theta = 3\pi/2$, para $Bo = 1,0$, ao longo do tempo e comparadas com o caso do capítulo anterior. A figura 5.7 visualiza os resultados comparativos destes

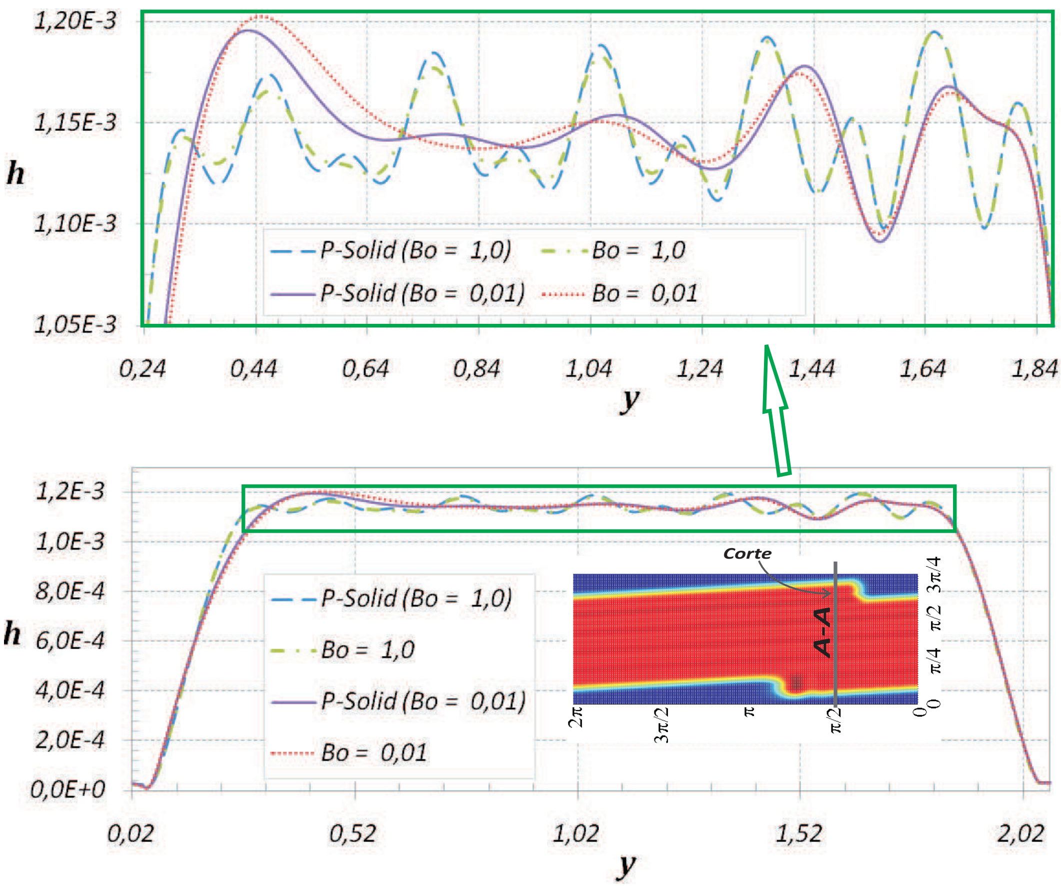

Figura 5.5: Perfis de espessura obtidos para os casos $Bo = 1,0$ e $Bo = 0,01$ para $t = 1,6 \times 10^3$. Comparação do caso base sem considerar solidificação e os casos obtidos neste capítulo, para os mesmos parâmetros de operação.

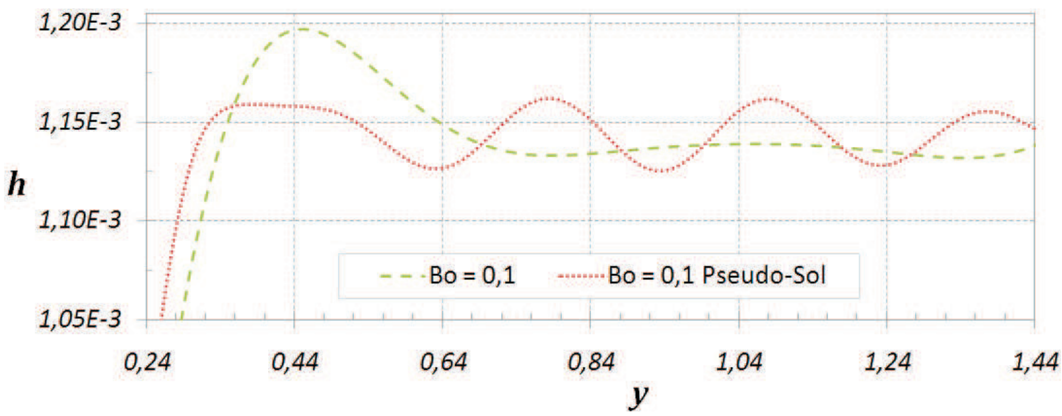

Figura 5.6: Comparação dos perfis de espessura obtidos em $t = 1,45 \times 10^4$ medida em $\theta = \pi/2$. Com pseudo-solidificação representada com linha tracejada e sem pseudo-solidificação com linha pontilhada.

resultados e claramente mostra o controle do efeito da força gravitacional.

Na figura 5.8, visualiza-se o resultado do modelo quando é testado em baixas velocidades de rotação W (descrito no final do capítulo anterior),

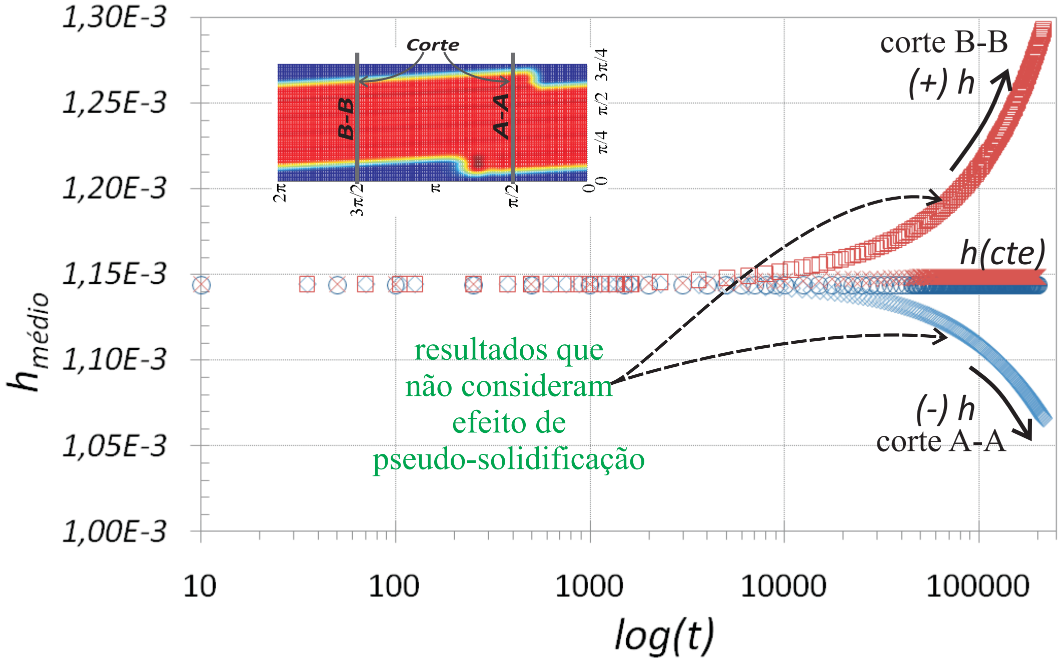

Figura 5.7: Comparação da espessura média ao longo do tempo, medida em $\theta = \pi/2$ e $\theta = 3\pi/2$ para $Bo = 1,0$, obtidas pela analise do capítulo 4 e 5.

para $Bo = 1,0$, mostrando em ambos os casos o controle do efeito da força gravitacional.

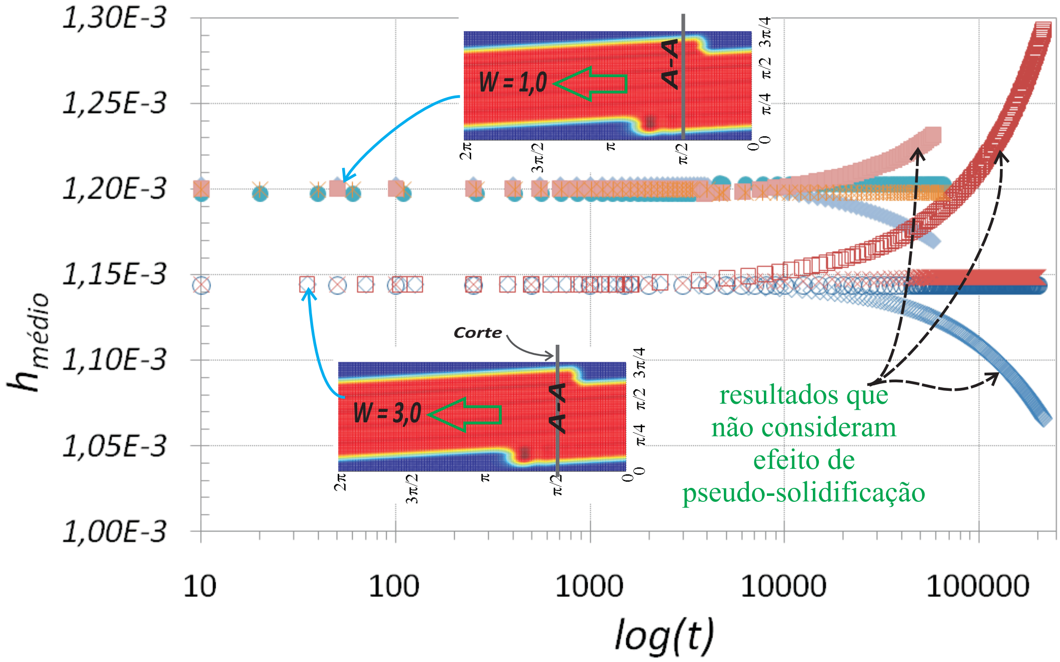

Figura 5.8: Espessura média ao longo do tempo, medida em $\theta = \pi/2$ e $\theta = 3\pi/2$ para $Bo = 1,0$. Com $W = 1,0$ (superior) e com $W = 3,0$ (inferior).