

4

Formulação matemática e modelagem computacional do escoamento de filmes finos em cilindros com rotação

Neste capítulo, vamos desenvolver um modelo numérico que represente o processo de revestimento de um cilindro fotorreceptor. O capítulo se inicia com uma revisão bibliográfica, segue com a formulação matemática e depois o esquema numérico usado para resolvê-la. Será apresentada em seguida a validação do método numérico e, finalmente, os resultados do modelo considerando valores apropriados para os parâmetros que governam a física do problema.

4.1

Cenário

Tudo começou com um questionamento de uma simples experiência: se uma faca é submergida no mel e logo retirada e mantida horizontalmente, o mel irá escorrer, mas aquele mel pode ser retido na faca pela simples rotação desta ao longo de sua longitude. Surge assim uma questão feita por Moffat [42]: qual é a maior quantidade, por unidade de comprimento da faca, de mel que pode ser carregado a uma dada taxa de rotação? Convenientemente, Moffat representou a faca como um cilindro girando com velocidade constante Ω . Ele indica que se $\Omega \neq 0$ o efeito da força gravitacional, pode ser anulado pela força de tensão viscosa gerada na camada líquida pela rotação. Nestas condições, uma solução em regime permanente da equação de Navier Stokes pode ser possível. A explicação é a seguinte: se a viscosidade cinemática tende a infinito, $\nu \rightarrow \infty$, (mantendo as outras variáveis fixas) obviamente o fluido se tornará rígido e a superfície livre formará um cilindro coaxial circular quando o sistema estiver em rotação. Portanto, o escoamento e a sua configuração são permanentes. Se ν é grande, porém finito, a solução estaria perto da configuração da rotação de corpo rígido, como analisado por Pukhnachev^a [43]. Moffat direcionou sua análise $1D$ para casos onde o líquido é muito viscoso e a espessura de filme, h , é muito menor comparado com o raio do cilindro, e com base nestas condições

^aA análise de Pukhnachev esteve mais centrada na existência de soluções da equação de Navier-Stokes em regime permanente com superfícies livres para filmes de espessura arbitrária, que poderia ser maior ao raio do cilindro

aplicou a teoria de lubrificação. Uma das principais conclusões da teoria de Moffat foi que o fluxo líquido ou vazão em qualquer ponto do domínio líquido é dado pela seguinte expressão:

$$Q(\theta) = R\Omega h - \frac{\rho g}{3\mu} h^3 \cos \theta \quad (4-1)$$

onde R é o raio do cilindro, θ é medido como mostrado na figura 4.1, g é a aceleração da gravidade e μ é a viscosidade do líquido. Em regime permanente, a condição para que a vazão seja uniforme (independente de θ) leva a uma equação cúbica em h . A máxima espessura de revestimento ocorre em $\theta = 0$, onde o escoamento devido a rotação é principalmente oposto ao da drenagem gravitacional. Moffat também chegou a uma outra conclusão: para um revestimento de espessura média h_m , este modelo permite soluções não permanentes para taxas de rotação menores que um valor crítico Ω_c .

$$\frac{\mu\Omega_c}{\rho g R} = \left(\frac{2\pi}{4,428} \right)^2 \left(\frac{h_m}{R} \right)^2 \quad (4-2)$$

A mesma teoria pode ser aplicada em revestimentos no interior de um cilindro.

Ruschak e Scriven [44] apresentaram uma teoria similar a de Moffat, considerando efeitos gravitacionais fracos como uma perturbação da rotação do corpo rígido. Eles obtiveram resultados para escoamentos de *rimming*^b para diferentes números de Reynolds, inclusive números altos $\mathfrak{R}_\Omega = \rho\Omega h_m^2/\mu \gg 1$. Eles descobriram que a maior espessura está localizada no intervalo de $0 < \theta < \pi/2$ de acordo com a figura 4.1. Em velocidades baixas, a situação é contrária, a rotação tem um efeito fraco como uma perturbação dos efeitos da força gravitacional.

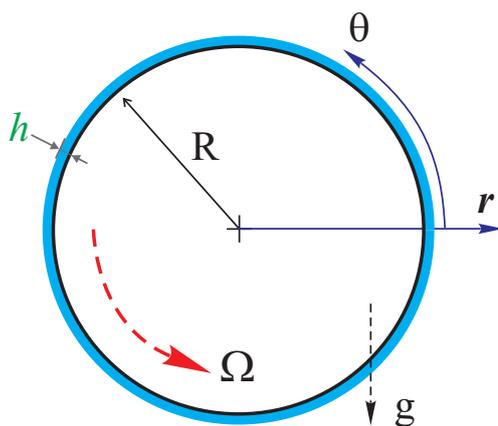


Figura 4.1: Esquema do sistema de coordenada fixa do cilindro, mostrando a direção da rotação do cilindro e a força gravitacional.

^bEste tipo de escoamento encontra-se no interior de cilindros horizontais com rotação

O modelo de Moffat tem-se estendido a outras situações como nos trabalhos de Campanella e Cerro [45], onde o cilindro é parcialmente submerso numa banheira de líquido, que acontece naturalmente em *roll coating*. Eles afirmaram que os efeitos capilares poderiam ser desprezados na maior parte do domínio, porém são importantes em pequenas regiões. Portanto, efeitos capilares não podem ser ignorados totalmente.

Reisfeld e Bankoff [46] consideraram o escoamento sobre um cilindro estacionário, que é aquecido e resfriado. Nestes casos, os efeitos termocapilares, gravitacionais, viscosos e intermoleculares são todos importantes. Fizeram uma análise $1D$ e estimaram a estabilidade das soluções para pequenas perturbações axiais, descobrindo que as forças termocapilares podem ajudar a estabilizar o processo de resfriamento de um filme líquido.

Os escoamentos de *rimming* também tiveram importância. Nos problemas de *rimming*, se a taxa de rotação é menor que a rotação crítica dada pela solução de Moffat, o líquido tende a acumular-se na base do cilindro. Wilson e Williams [47] estudaram o problema do escoamento de *rimming* considerando efeitos de tensão superficial, porém ignorando variações axiais. Eles sugerem uma forma de onda de choque estacionária com baixas velocidades. O'Brien e Gath [48] conseguiram localizar o choque escolhendo cuidadosamente soluções da equação (4-1) sem precisar da tensão superficial, e indicam que isto corresponde ao líquido acumulado na superfície interna do cilindro. Estas soluções descontínuas aparecem nos trabalhos experimentais de Dieber & Cerro [49], ver Fig. 4.2. Para o caso de revestimento externo dos cilindros, a onda de choque corresponde às bordas das gotas suspensas por tensão superficial.

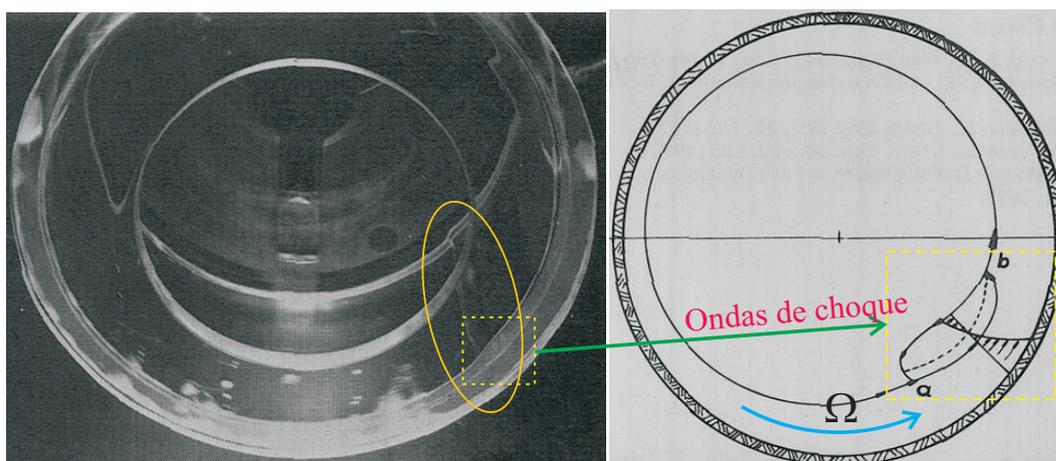


Figura 4.2: Escoamento laminar numa região de solução descontínua mostrada por Dieber & Cerro [49]. No desenho a espessura do filme não está em escala.

Orr e Scriven [50] utilizaram o problema de *rimming* como um caso de

teste para avaliar seus métodos de elementos finitos, resolvendo a equação de Navier-Stokes $2D$ em regime permanente, incluindo efeitos de tensão superficial. A superfície livre é localizada utilizando um método iterativo. O método de elementos finitos é utilizado para obter os campos do escoamento (velocidades, pressões) e este é utilizado para ajustar a posição da superfície livre enquanto se satisfaz adequadamente a condição de contorno da tensão normal no ponto em questão. Problemas de *rimming* para fluidos viscoelásticos em regime permanente $1D$ foram estudados por Rajagopalan et al. [51], utilizando métodos de elementos finitos. Eles concluem que quando o fluido é viscoelástico, soluções em regime permanente podem ser encontradas em baixas taxas de rotação.

Thoroddsen & Mahadevan [52] observaram experimentalmente, nos problemas de *rimming*, formações tipo dentes de tubarão (*Shark teeth*) ao longo do eixo axial do cilindro. O espaçamento entre esses dentes, definido por λ , inicialmente cresce e logo decresce enquanto a velocidade de rotação Ω vai aumentando. Eles concluem que o mecanismo da instabilidade axial ainda não é bem compreendido, porém indicam que este mecanismo é similar ao caso de instabilidade de *fingering* observado em escoamento num plano inclinado (Hupper, [3]). Eles também encontraram estruturas suspensas estacionárias e oscilantes atribuídas ao balanço entre forças gravitacionais e viscosas, as quais nem sempre estão igualmente espaçadas. Modelos numéricos, considerando instabilidade axial, têm sido estudados por Hosoi & Mahadevan [53], que utilizando um modelo simplificado da equação da evolução de superfície livre mostram características similares ao *shark teeth* reportados por Thoroddsen & Mahadevan [52], como visualizadas na Fig. 4.3. Em alguns casos as variações axiais podem ser tão extremas que se formam estruturas tipo disco concêntricos, quase estáveis, que ocorrem a intervalos regulares, como evidenciado no trabalho experimental de Karweit & Corrsin [54].

São numerosos os trabalhos referidos às instabilidades em cilindros de líquido. Por exemplo, Rayleigh [55] observou que o jato cilíndrico de raio R de um líquido ideal (sem viscosidade) é instável a perturbações axiais. Sendo que o comprimento de onda cresce em função de $\lambda = (0,696)2\pi R$. Um líquido viscoso se comporta similarmente. Goren [56] percebeu que dada uma perturbação crescente no filme fino localizado num fio de metal estacionário tem um comprimento de onda de $\lambda = (0,707)2\pi R$. Para um cilindro grande estacionário mantido horizontalmente, a instabilidade Rayleigh-Taylor desestabiliza o filme revestido na base do cilindro por efeitos gravitacionais. Dependendo do diâmetro do cilindro essas instabilidades podem afetar o revestimento. Simulações numéricas de instabilidades em revestimentos de cilindros esta-

cionários, de diferentes diâmetros, foram realizadas inicialmente por Weidner et al. [57].

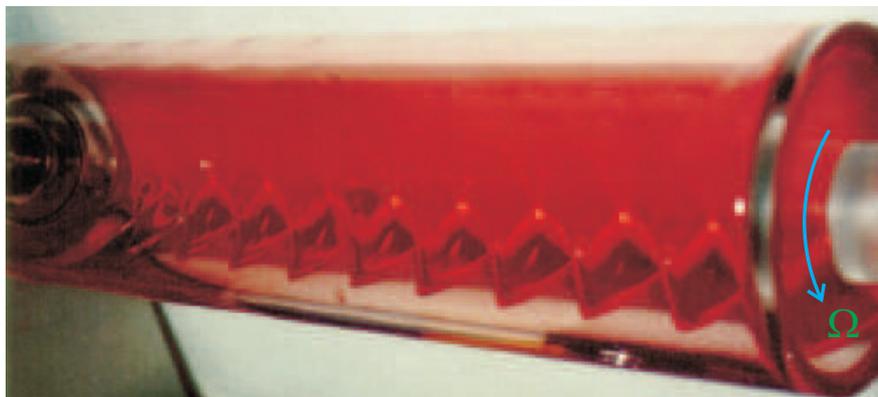


Figura 4.3: Formações tipo dentes de tubarão (*shark teeth*) ao longo do eixo axial do cilindro. Para um fluido com $\mu = 49$ cP, $\Omega = 3,2$ c/s e uma relação de volume de líquido com volume total do cilindro $\eta V = 6,0\%$. Retirado do trabalho experimental de Thoroddsen & Mahadevan [52].

Nas observações de grandes variações axiais em revestimentos, incluindo as bandas ou cortinas radiais mostradas por Kovac & Balmer [58], denominadas por eles como *hygrocists* (ver Fig. 4.4), observa-se que o número de bandas por unidade de comprimento do cilindro incrementa-se quase linearmente com a taxa de rotação. Preziosi & Joseph [59] incorporaram o fluxo axial dentro dos seus modelos de soluções do escoamento de lubrificação de Moffat nas seções do cilindro. A quantidade de líquido em cada plano foi determinada pela solução do problema axisimétrico. Seus resultados experimentais mostraram boa concordância com o critério da máxima carga dada por Moffat para um filme suficientemente fino. Eles sugeriram que as variações axiais são resultados da competição entre forças de tensão superficial e aceleração centrípeta, tendo a força gravitacional um menor efeito. Porém, quando o cilindro é quase estacionário, i.e. com baixas taxas de rotação, a instabilidade Rayleigh-Taylor poderia levar a um apreciável escoamento axial. Evans et al. [60] apresentaram simulações numéricas utilizando um modelo de lubrificação para revestimento em cilindros, de diferentes diâmetros, com rotação constante, considerando variações axiais dentro de limites de operação apropriados. A faixa de parâmetros analisada cobre desde casos de formações de gotas na base do cilindro com baixas taxas de rotação até estruturas alongadas, tipo *fingers* em cilindros grandes, as quais poderiam estender-se ao longo do cilindro à altas taxas de rotação. Para validar os resultados, eles compararam com resultados experimentais e conseguiram exibir estes tipos de estruturas ao longo do eixo axial do cilindro, tendo uma boa concordância qualitativa.

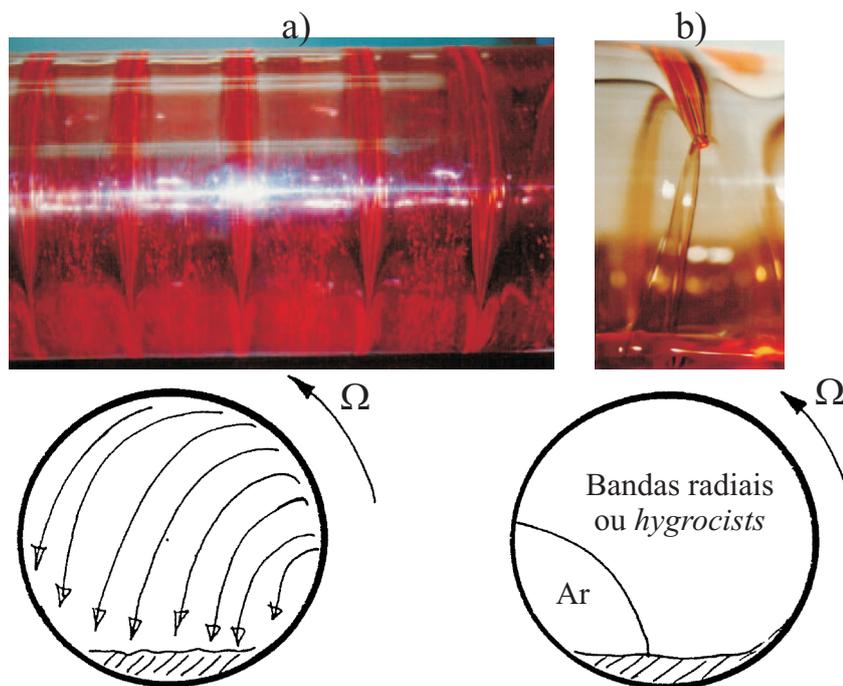


Figura 4.4: Formação de paredes ou cortinas radiais no interior de um cilindro. Para um fluido com a) $\mu = 120$ cP, $\Omega = 4,9$ c/s e uma relação de volume de líquido com o volume total do cilindro $\eta_V = 18,2$ e b) $\mu = 28$ cP, $\Omega = 7,2$ c/s e uma relação de volume de líquido com o volume total do cilindro $\eta_V = 32,7\%$. Retirados do trabalho experimental de Thoroddsen & Mahadevan [52].

Alguns dos trabalhos discutidos nesta seção serão utilizados para validar o presente modelo numérico e assim poder adaptá-lo ao caso de processo de revestimento por injeção contínua seguindo um padrão helicoidal como será explicado na seguinte subseção.

4.2 Formulação

Assume-se que o líquido de revestimento é aplicado na superfície de um cilindro circular de raio R , que experimenta uma taxa de rotação constante Ω ao redor do seu eixo orientado perpendicularmente com a gravidade, a partir de um bocal que se translada na direção paralela ao eixo longitudinal do cilindro, como mostrado na Fig. 4.5. A combinação da rotação do cilindro e da translação do bocal leva a um padrão helicoidal do líquido sobre a superfície do cilindro. O fluido de revestimento é assumido ser Newtoniano e incompressível e a superfície do cilindro como completamente molhada pelo fluido. Com o objetivo de aplicar a condição de não deslizamento na parede do cilindro em movimento é conveniente aplicar a abordagem de Ruschak & Scriven [44] e Preziosi & Joseph [59], expressando a cinemática do fluido como sendo o

somatório da rotação do corpo rígido e um adicional escoamento independente da rotação, sendo que os dois termos podem ter ordem de grandeza similares. Portanto, o vetor velocidade escrito em coordenadas cilíndricas (r, θ, y) é dado por:

$$\mathbf{u}(r, \theta, y, t) = w\mathbf{e}_r + (r\Omega + u)\mathbf{e}_\theta + v\mathbf{e}_y, \quad (4-3)$$

onde \mathbf{e}_r , \mathbf{e}_θ e \mathbf{e}_y são as coordenadas dos vetores unitários fixos num sistema de referência, que não apresenta rotação e é independente do tempo; w e v são os componentes na direção radial e axial, respectivamente. O vetor da aceleração da gravidade é dado por: $\mathbf{g} = g(-\sin\theta\mathbf{e}_r - \cos\theta\mathbf{e}_\theta)$.

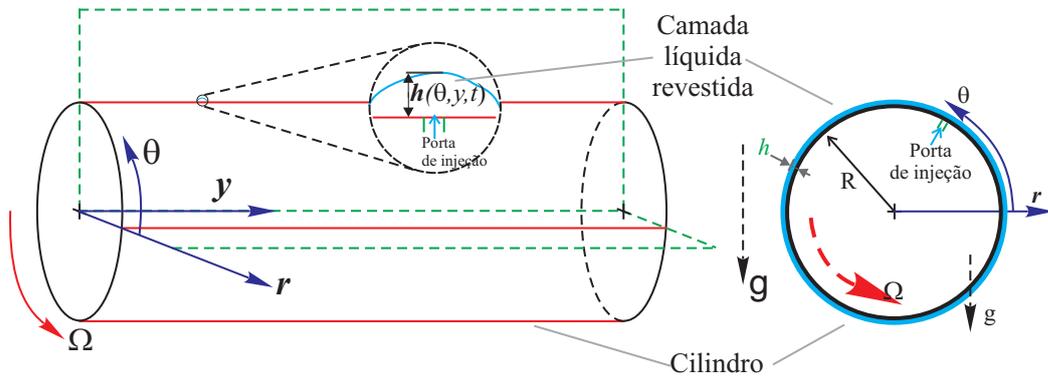


Figura 4.5: Gráfico do sistema de revestimento que mostra o cilindro giratório num sistema de coordenada fixa sem rotação.

Este problema é descrito pela equação não linear de Navier-Stokes, pela condição de superfície livre e também pela linha de contato dinâmica. As equações de conservação para um fluido incompressível em coordenadas cilíndricas são:

- Equação de continuidade:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rw)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r\Omega + u)}{\partial \theta} + \frac{\partial(v)}{\partial y} = 0 \quad (4-4)$$

- Equação de conservação de quantidade de movimento:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = \frac{1}{\rho} \left(-\nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{u} + \rho \mathbf{g} \right) \quad (4-5)$$

A análise matemática neste tipo de problema se torna mais simples através do uso de duas hipóteses simplificadoras, como indicadas na seção 2.1 do capítulo anterior. Primeiro, considera-se que o fluido de interesse é suficientemente viscoso, e segundo, considera-se que a espessura do fluido é muito pequena em relação ao raio do cilindro.

4.3

Teoria de lubrificação tri-dimensional

As equações de conservação mencionadas anteriormente junto com suas condições de contorno descrevem completamente o problema, porém o sistema torna-se bastante complicado de ser resolvido. Nos trabalhos recentes de O'Brien & Schwartz [61], se explora a existência de uma pequena relação $\epsilon = H/R \ll 1$, onde H é a espessura característica do filme, que é usada para expandir a solução do problema numa série de potência de ϵ , com o objetivo de se obter a chamada "*thin film approximation*" ou aproximação de filmes finos que está muito relacionada com a teoria clássica de lubrificação. A finalidade dessas simplificações é conseguir soluções analíticas ou pelo menos simplificar o problema para ser resolvido numericamente.

Os trabalhos de Weidner et al. [57], para os casos de cilindros estacionários, e Evans et al. [62], para casos de cilindros em rotação, a aplicação desta teoria foi apresentada juntamente com a solução destas equações, com a determinação da evolução da espessura de filme $h(\theta, y, t)$. Nestes trabalhos não foi considerada a injeção de líquido na superfície do cilindro.

Uma equação mais geral do que obtida por Evans et al. [60] e por Weidner et al. [57], i.e. que considera uma porta de injeção na superfície do cilindro e leva em consideração as dimensões físicas, é dada em 4-6. Para considerar a porta de injeção na superfície do cilindro é necessário acrescentar um termo fonte, Φ , como utilizado na seção 2.1 (ver Eq. 2-8). O líquido será injetado através de um orifício circular de raio R_f , apresentando um perfil parabólico, centralizado na coordenada $(\theta_{cp}, y_{cp}(t))$ que mudará ao longo do tempo com θ_{cp} fixo, como mostrado na Fig.4.6. Assim, a equação da evolução da espessura do filme fica representada por:

$$\begin{aligned}
 (R + h) \frac{\partial h}{\partial t} = & - R\Omega \frac{\partial}{\partial \theta} \left(h + \frac{h^2}{2R} \right) + \frac{\rho g}{\mu} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\left(\frac{h^3}{3} + \frac{h^4}{2R} \right) \cos \theta \right] \\
 & - \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \frac{\sigma h^3}{3\mu} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{h}{R^2} + \nabla^2 h \right) + \frac{\rho h^3}{3\mu} (R\Omega^2 - g \sin \theta) \frac{\partial h}{\partial \theta} \right\} \\
 & - R \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{\sigma h^3}{3\mu} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{h}{R^2} + \nabla^2 h \right) + \frac{\rho h^3}{3\mu} (R\Omega^2 - g \sin \theta) \frac{\partial h}{\partial y} \right\} \\
 & + \Phi(\theta_{cp}, y_{cp}(t)),
 \end{aligned} \tag{4-6}$$

onde:

$$\nabla^2 = \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad (4-7)$$

é o laplaciano ao longo da superfície do cilindro. O parâmetro Φ é definido da seguinte forma:

$$\Phi(\theta_{cp}, y_{cp(t)}) = \begin{cases} \frac{2\Gamma}{\pi R_f^2} \left[1 - \left(\frac{r_f}{R_f} \right)^2 \right] & \text{caso } r_f \leq R_f; \\ 0 & \text{caso } r_f > R_f. \end{cases}$$

$$r_f = [R^2(\theta - \theta_{cp})^2 + (y - y_{cp(t)})^2]^{1/2}$$

sendo que a posição $y_{cp(t)}$ é determinada pela velocidade de translação da porta de injeção dado por V_{inj} , assim: $y_{cp(t)} = y_{cp(0)} + V_{inj} \times t$.

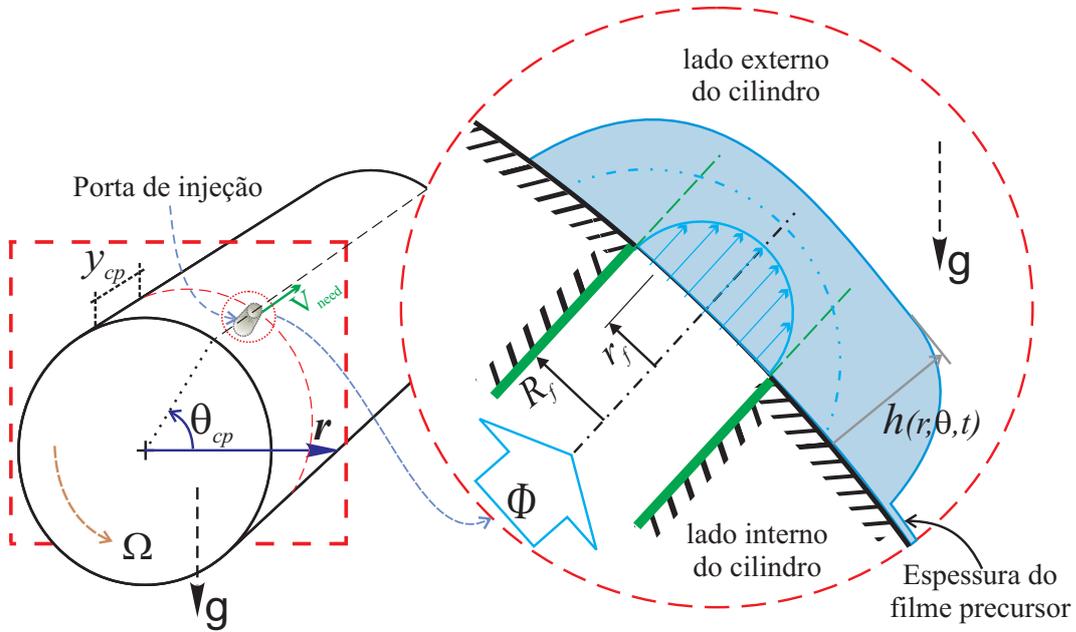


Figura 4.6: Representação da porta de injeção no interior de um cilindro.

A equação (4-6) pode ser escrita de forma adimensional pela introdução dos seguintes parâmetros característicos definidos abaixo:

$$\bar{h} = \frac{h}{\epsilon R}; \quad \bar{y} = \frac{y}{R}; \quad \bar{t} = \frac{t}{T}; \quad (4-8)$$

$$T = R/U; \quad (4-9)$$

$$U = \rho g H^2 / \mu; \quad (4-10)$$

$$\bar{R}_f = \frac{R_f}{R}; \quad (4-11)$$

$$\bar{\Gamma} = \frac{\Gamma}{\sqrt{gRR^2}}; \quad (4-12)$$

$$\bar{\Phi} = \frac{\bar{\Gamma}}{\pi \bar{R}_f^2}; \quad (4-13)$$

$$\bar{V}_{inj} = \frac{V_{inj}}{U} \quad (4-14)$$

$$M = \frac{\mu}{\rho \sqrt{gR^3}}, \quad (4-15)$$

$$W = \frac{\Omega}{\sqrt{g/R}}, \quad (4-16)$$

$$Bo = \frac{\rho g R^2}{\sigma}, \quad (4-17)$$

sendo, M a viscosidade adimensional, W a velocidade de rotação adimensional e Bo o número de *Bond*. Substituindo eles na Eq. (4-6) obtemos a seguinte equação da evolução de forma adimensional:

$$\begin{aligned} (1 + \epsilon \bar{h}) \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{t}} = & - U_\Omega \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\bar{h} + \epsilon \frac{\bar{h}^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\left(\frac{\bar{h}^3}{3} + \epsilon \frac{\bar{h}^4}{2} \right) \cos \theta \right] \\ & - \epsilon \bar{\nabla} \cdot \left\{ \frac{\bar{h}^3}{3Bo} \bar{\nabla} (\bar{h} + \bar{\nabla}^2 \bar{h}) + \frac{\bar{h}^3}{3} [W^2 - \sin \theta] \bar{\nabla} \bar{h} \right\} \\ & + \frac{(1 + \epsilon \bar{h})}{\epsilon^3} M \bar{\Phi}, \end{aligned} \quad (4-18)$$

Onde, $\bar{\nabla} = e_\theta \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \right) + e_y \left(\frac{\partial}{\partial \bar{y}} \right)$ e $\bar{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial \bar{y}^2}$

A taxa de injeção torna-se adimensional com:

$$\begin{aligned} \frac{R\Phi}{UH} &= \frac{R}{UH} \frac{2\Gamma}{\pi R^2 \bar{R}_f^2} \left[1 - \left(\frac{\bar{r}_f}{\bar{R}_f} \right)^2 \right] = \\ &= \frac{R\mu}{\rho g H^3 R^2} \frac{2\Gamma}{\pi \bar{R}_f^2} \left[1 - \left(\frac{\bar{r}_f}{\bar{R}_f} \right)^2 \right] = \\ &= \frac{\mu}{\rho g H^3 R} \frac{2\sqrt{gRR^2} \bar{\Gamma}}{\pi \bar{R}_f^2} \left[1 - \left(\frac{\bar{r}_f}{\bar{R}_f} \right)^2 \right] = \\ &= \underbrace{\frac{M}{\rho \sqrt{gR^3}}}_{M} \frac{\sqrt{gR^3}}{gH^3 R} \sqrt{gRR^2} \overbrace{\frac{2\bar{\Gamma}}{\pi \bar{R}_f^2} \left[1 - \left(\frac{\bar{r}_f}{\bar{R}_f} \right)^2 \right]}^{\bar{\Phi}} = \frac{M\bar{\Phi}}{\epsilon^3} \end{aligned} \quad (4-19)$$

A presença da viscosidade adimensional, M , junto com o valor da velocidade de injeção $\bar{\Phi}$, estava prevista como na equação (2-14) da seção 2.2. A combinação deles representa a força de injeção do líquido i.e. quanto mais

viscoso o líquido, maior a pressão de injeção.

A quantidade $U_\Omega = MW\epsilon^{-2}$ define a razão entre a velocidade da parede do cilindro $R\Omega$ e a velocidade característica U . Os parâmetros de operação do processo de revestimento do cilindro fotorreceptor são: $Bo, M, W, \bar{\Gamma}, \bar{V}_{inj}$ e ϵ . No trabalho de Evans se indica que as ordens de grandezas de U_Ω e W^2 devem ser de $\mathcal{O}\{1\}$ ou menores para casos de revestimentos de filmes finos. A equação (4-18) é aplicável quando o valor de $\epsilon \ll 1$.

Os termos acima indicados contêm todos os mecanismos físicos que descrevem o problema, incluindo: convecção do fluido pela rotação, drenagem devido aos componentes da gravidade, efeitos de tensão superficial e injeção contínua do fluido.

4.4

Solução numérica

Para o desenvolvimento de um modelo numérico é conveniente, embora não seja de forma alguma essencial, ter todos os comprimentos medidos numa escala em comum. Redimensionando todos os comprimentos, incluindo a espessura de filme, como sendo medidas em unidades de R , i.e. $h^* = \epsilon$, a equação da evolução é escrita assim:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h^*}{\partial t} = & - MW \frac{\partial h^*}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{h^{*3}}{3} \cos \theta \right) \\ & - \nabla \cdot \left\{ \frac{h^{*3}}{3Bo} \nabla (h^* + \nabla^2 h^*) + \frac{h^{*3}}{3} [W^2 - \sin \theta] \nabla h^* \right\} + M\Phi \end{aligned} \quad (4-20)$$

Aqui os termos de ordem ϵh^* da equação 4-18 foram desprezados, seguindo a sugestão dada no trabalho de Evans[60], que fez uma análise das equações (4-18) e (4-20), obviamente sem o termo de injeção, obtendo equivalentes resultados para valores de ϵ suficientemente pequenos. A partir de agora, as estrelas (*) e as barras (̄) das quantidades adimensionais serão retiradas para simplificar a notação.

A equação resultante é uma equação de quarta ordem no espaço e de primeira ordem no tempo. Ela é resolvida pela utilização do Método de Diferenças Finitas, caso similar ao tratado na seção 2.4. Os trabalhos de Eres[33], Weidner[57] e Evans[62] utilizaram o método ADI (*Alternating Direction Implicit*) para resolver estes tipos de equações (4-20). Porém, neste presente trabalho faremos uso de um método implícito, proposto por Diez e Kondic[8].

A equação (4-20) é definida somente no domínio onde encontra-se localizado o líquido injetado. É necessário incluir a análise da linha de contato

dinâmica para tornar a formulação completa. O problema da linha de contato dinâmica será abordado da mesma maneira que na seção 2.3, pela inclusão de um filme precursor microscópico na frente da linha de contato aparente.

4.4.1 Discretização espacial

O domínio (θ, y) é discretizado num retângulo definido por $\theta \in [0, L\theta]$ e $y \in [0, Ly]$ que é dividido em $N_{tot} = N\theta \times (Ny + 1)$ células retangulares, como mostrado na Fig. 2.4 da seção 2.4, espaçados uniformemente $\Delta\theta = L\theta/N\theta$ e $\Delta y = Ly/Ny$. Portanto, os pontos nodais são discretizados assim $x_i = i\Delta x, i = 0, \dots, Nx$ e $y_j = j\Delta y, j = 0, \dots, Ny$. A numeração dos nós $k = i - (j - 1) \times Nx$ é feita de forma euleriana e os nós $irh = (i, j)$ de maneira lagrangiana como representados na Fig. 2.4. A discretização espacial da equação (4-20), utilizando diferenças finitas centrais, nos leva a obter um sistema de EDO (Equações Diferenciais Ordinárias), do tipo $dh_k/dt = f(h_i)$; para cada k :

$$\frac{\partial h_k}{\partial t} - M\Phi = - \sum_{m=1}^{12} f_k^m = \underbrace{6}_{Bo} \text{termos} + \underbrace{2}_{W} \text{termos} + \underbrace{2}_{g \sin \theta} \text{termos} + \underbrace{1}_{g \cos \theta} \text{termos} + \underbrace{1}_{MW} \text{termos}$$

4.4.2 Discretização dos termos da equação de evolução

Expandindo cada termo do lado direito da equação 4-20, temos que o termo relativo às forças capilares é escrito como:

$$\underbrace{\nabla \cdot \left\{ h^3 \nabla (\nabla^2 h + h) \right\}}_{\text{termos } Bo} = \frac{\partial}{\partial \theta} \left(D(h) \frac{\partial^3 h}{\partial \theta^3} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(D(h) \frac{\partial^3 h}{\partial y^3} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(D(h) \frac{\partial^3 h}{\partial y^2 \partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(D(h) \frac{\partial^3 h}{\partial \theta^2 \partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(G(h) \frac{\partial h}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(G(h) \frac{\partial h}{\partial y} \right). \quad (4-21)$$

O termo da rotação junto com o componente $\sin \theta$ da gravidade é escrito

como:

$$\underbrace{\nabla \cdot \left\{ h^3 (W^2 - \sin \theta) \nabla h \right\}}_{\text{termos } W \text{ e } g \sin \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta} \left(G(h) (W^2 - \sin \theta) \frac{\partial h}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(G(h) (W^2 - \sin \theta) \frac{\partial h}{\partial y} \right). \quad (4-22)$$

O termo da componente $\cos \theta$ da gravidade fica sendo:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(h^3 \cos \theta \right) = \frac{\partial}{\partial \theta} \left(H(h) \cos \theta \right). \quad (4-23)$$

onde $D(h)$, $G(h)$ e $H(h)$ nas direções θ e y são definidas como:

$$\begin{aligned} D_k^{(\theta)} &= \frac{2h_{irh}^2 h_{iR1}^2}{h_{irh} - h_{iR1}}, & D_k^{(y)} &= \frac{2h_{irh}^2 h_{iT1}^2}{h_{irh} - h_{iT1}}, \\ G_k^{(\theta)} &= \frac{h_{irh}^3 + h_{iR1}^3}{2}, & G_k^{(y)} &= \frac{h_{irh}^3 + h_{iT1}^3}{2}, \\ H_k^{(\theta)} &= \left(\frac{h_{irh}^2 + h_{iR1}^2}{2} \right) \left(\frac{h_{irh} + h_{iR1}}{2} \right). \end{aligned}$$

O critério da discretização do termo não linear, h^3 , foi comentado anteriormente na seção 2.4.2.

O termo da componente MW foi discretizado utilizando a fórmula de diferença central $\partial h / \partial \theta = (h_{iR1} - h_{iL1}) / (2\theta)$.

4.4.3

Discretização do tempo

Faremos uso do esquema Crank-Nicolson (implícito, $O(\Delta t)^2$, $\theta = 1/2$) incondicionalmente estável.

$$\frac{h_k^{n+1} - h_k^n}{\Delta t^n} + \theta f_k^{n+1} + (1 - \theta) f_k^n = 0, \quad (4-24)$$

n representa o nível de tempo t^n .

Como a análise envolve a evolução de variáveis ao longo do tempo, é necessário estabelecer condições iniciais $h(x, y, 0) = h^0 = \epsilon$. No início, a superfície encontra-se sem fluido e como estamos utilizando o modelo de filme precursor, o valor de h^0 ao longo do domínio, irá se tornar o valor da espessura do filme precursor H_f , como mostrado na Fig. 4.6. Equivalente ao caso tratado na seção 2.4.4 do capítulo 2.

4.4.4

Condição de contorno

De acordo com a física do problema, na direção θ é necessário a utilização da condição de contorno periódica, assim:

$$h(\theta + 2\pi, y, t) = h(\theta, y, t) \quad (4-25)$$

para todo θ . E na direção y é dada pela reflexão simétrica que é a imposição de fluxo zero. Esta condição de contorno é do tipo *Neumann* ou do segundo tipo onde a derivada da variável dependente é especificada assim:

$$\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial^3 h}{\partial y^3} = 0 \quad \text{em } y = 0, \quad \text{e } y = L \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi) \quad (4-26)$$

Para aplicar esta condição, precisa-se de duas filas de células fictícias fora do domínio, que são espelhos das células internas adjacentes, como discutidas na seção 2.4.5.

$$h(\theta, -\delta, t) = h(\theta, +\delta, t), \quad h(\theta, L_y + \delta, t) = h(\theta, L_y - \delta, t), \quad (4-27)$$

A equação (4-24) forma um sistema de N_{tot} equações algébricas não-lineares. O método usado para resolver este tipo de equações é o método de Newton (ou Newton Rhapsion) como já comentado na seção 2.4.6. O critério de convergência adotado foi de $\xi = 10^{-11}$, isto é:

$$\|\mathbf{R}\|_2 \leq \xi, \quad (4-28)$$

onde \mathbf{R} é o vetor resíduo.

4.5

Validação

Nesta seção apresentaremos a validação do modelo numérico pela comparação com duas soluções clássicas. Estas soluções são relativas aos processos de revestimento de cilindros diferentes do descrito neste trabalho, que não consideram a linha de contato dinâmica. A primeira solução trata-se do problema resolvido por Moffat [42], onde esta representa um balanço entre o escoamento devido à drenagem e a rotação do cilindro com taxas de rotação elevadas. O problema já foi comentado no início deste capítulo. A segunda solução consiste no problema da análise da instabilidade hidrodinâmica quando o cilindro é estacionário. A instabilidade leva à formação de gotas na base do cilindro que é suportada pela tensão superficial. Neste caso, o modelo foi validado comparando com as instabilidades de Rayleigh-Taylor apresentadas por Weidner et al. [57].

4.5.1

Teoria de Moffat

A teoria de Moffat é aplicável nos casos onde a tensão superficial é desprezível. Para obter nestes casos, uma solução em regime permanente, a advecção do líquido pela rotação deve ser balanceada pela drenagem devido ao componente tangencial da gravidade. Se a espessura do filme em regime permanente é $h(\theta)$, a vazão do líquido na direção azimutal é dada por:

$$Q(\theta) = R\Omega h - \frac{\rho g}{3\mu} h^3 \cos \theta \quad (4-29)$$

No regime permanente, a vazão deve ser independente da direção azimutal, θ , assim a equação acima torna-se numa equação cúbica de h em cada posição. Integrando, obtém-se a quantidade total de líquido carregado pelo cilindro. No entanto, esta equação pode somente ser resolvida, em qualquer parte do cilindro, quando a condição abaixo é satisfeita:

$$\frac{h_m}{R} \leq \frac{4,428}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu\Omega}{\rho g R}}, \quad (4-30)$$

onde $h_m = \int_0^{2\pi} h d\theta$ é a espessura média do filme. Não há solução contínua em regime permanente para valores altos de h_m ou valores de Ω muito pequenos, de acordo com este modelo. O valor crítico de rotação, abaixo do qual não existe solução em regime permanente, é dado por:

$$\Omega = \Omega_c = \frac{\rho g R}{\mu} \left(\frac{2\pi}{4,428} \right)^2 \left(\frac{h_m}{R} \right)^2. \quad (4-31)$$

Para valores de rotação acima do indicado, soluções são obtidas sendo que as maiores espessuras do filme são localizadas na parte ascendente do cilindro (onde $\cos \theta > 0$) e as mais finas, na parte descendente do cilindro. Na base e no topo do cilindro, onde $\cos \theta = 0$, há um escoamento de corpo rígido, já que não há drenagem. Se Ω é reduzido, uma cúspide ou vértice afiado começa a se formar em $\theta = 0$, gerando uma descontinuidade em h , quando $\Omega = \Omega_c$. Em termos matemáticos, esses vértices afiados são pontos nos quais as funções e relações não são diferenciáveis. Nestes casos, a tensão superficial poderia eliminar esta descontinuidade. Moffat usou a teoria de onda cinemática para mostrar que as soluções permanentes obtidas por meio da equação (4-30) são aproximadas pela seguinte equação com condições iniciais arbitrárias:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{1}{R} \frac{\partial Q}{\partial \theta}, \quad (4-32)$$

onde Q é dada pela equação (4-30). Partes com maiores espessuras são carregadas ao redor do cilindro mais lentamente que partes com menores

espessuras. No entanto, a solução permanente é estabilizada adicionando um termo difusivo propositalmente. Neste presente trabalho, a tensão superficial desempenha o mesmo papel estabilizador, e quando a taxa de rotação é reduzida, a tensão superficial também ajudará a suportar uma parte do líquido presente. Porém, como mostrado por Evans [62], há um limite de quanto pode ser suportada somente pela tensão superficial.

Efeito da rotação do cilindro

Simulações, com situação similar à teoria de Moffat, foram realizadas para cilindros completamente revestidos com uma espessura uniforme $h_0 = 0,03162R$ de raio $R = 1,0a$ ($Bo = 1,0$), onde $a = \sqrt{\sigma/\rho g}$ é comprimento capilar. O parâmetro M ajusta a escala de tempo, e na escolha de um determinado líquido e cilindro, este parâmetro é constante $M = 0,007$. Todos estes valores nos levam a obter uma velocidade crítica $W = W_c = 0,287$. Foi utilizada uma malha de $N_\theta = 200$ e $N_y = 80$ num domínio $L_\theta = 2\pi$ e $L_y = 4\pi/5$, obtendo-se assim uma malha uniformemente espaçada.

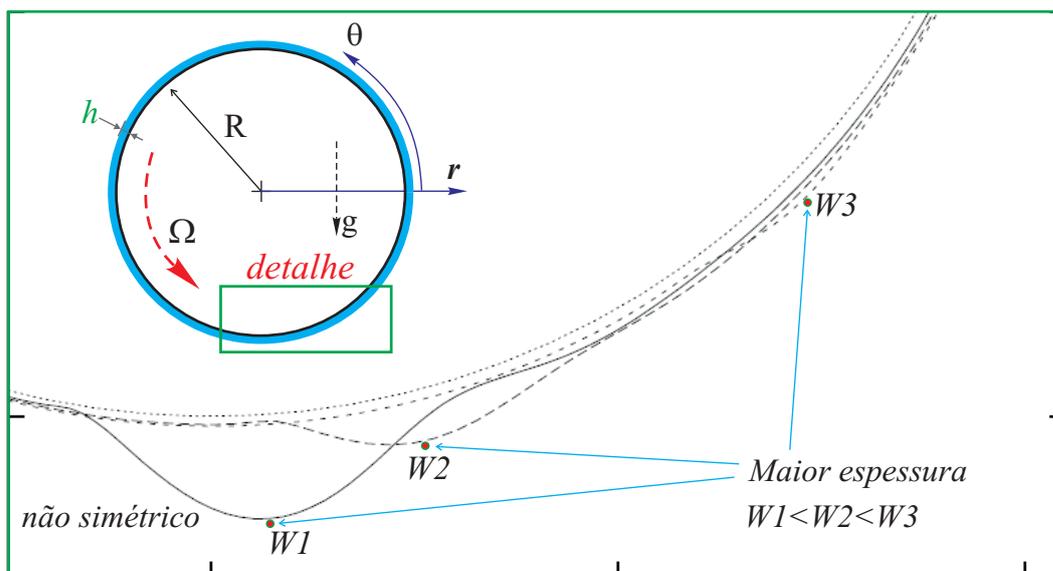


Figura 4.7: Efeito da rotação do cilindro. O líquido que está sendo formado na base por efeito gravitacional é carregado na direção da rotação. Para cada tipo de velocidade W é obtido um perfil diferente de líquido, se a velocidade for baixa forma-se uma maior acumulação de líquido na base do cilindro, se a velocidade for aumentada, a acumulação será menor.

Soluções permanentes foram obtidas com o presente modelo e com os valores das taxas de rotação no intervalo $0 < W < W_c$. Tais soluções foram também encontradas por Evans [60]. Observou-se que quando o cilindro está no estado estacionário, $W = 0$, uma grande acumulação de líquido é formada na base do cilindro, $\theta = 3\pi/2$, a qual continua a crescer ao longo do tempo.

No topo do cilindro, $\theta = \pi/2$, a espessura do líquido revestido continua a diminuir assintoticamente. Uma característica, neste estado estacionário, é que a camada de líquido permanece simétrica em relação ao eixo vertical. Quando o cilindro começa a girar, o líquido é convectado na direção ascendente do cilindro, perdendo assim a simetria vertical da solução. Este efeito é mostrado na Fig. 4.7. Quando W aproxima-se de W_c , a camada torna-se mais uniforme e o ponto da espessura máxima da camada se translada para cima, em direção a $\theta = 0$, semelhante aos resultados obtidos pelo modelo de Moffat.

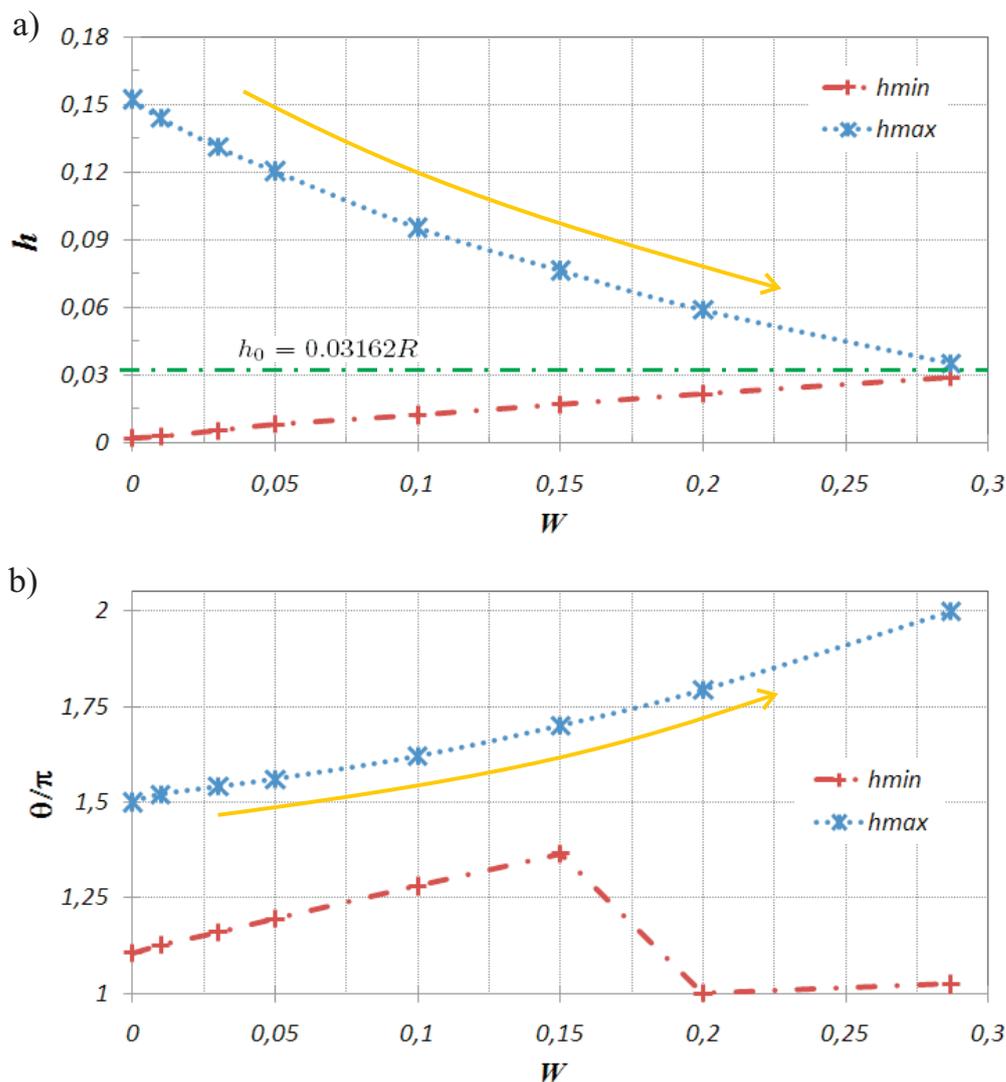


Figura 4.8: Resultados dos valores da espessura máxima e mínima do filme revestido e também da posição θ em função da taxa de rotação W . (a) Máxima (*) e mínima (+) espessura atingida. (b) Localização das espessuras máxima (*) e mínima (+) espessura.

A figura 4.8 apresenta os resultados dos valores da espessura máxima e mínima do filme revestido e também da posição θ , onde ocorrem estas

espessuras, em função da taxa de rotação W . Os valores de W utilizados foram $W = 0; 0,05; 0,1; 0,15; 0,2; 0,25; 0,287$. Com W_c obtém-se uma camada mais uniforme, sendo que a posição da espessura máxima coincide em $\theta = 0$, como na teoria de Moffat.

Para o caso de cilindros estacionários, a formação de líquido na base do cilindro representa um arranjo instável porque apresenta uma configuração de um fluido (líquido) com densidade maior, acima de outro fluido de menor densidade (ar ou gás). Na próxima seção, verifica-se que o modelo consegue capturar esta instabilidade.

4.5.2

Instabilidade Rayleigh-Taylor

Existem vários tipos de instabilidades que poderiam afetar o revestimento num cilindro estacionário, como por exemplo, a instabilidade Rayleigh *sausage* e a instabilidade Rayleigh-Taylor. A primeira é uma instabilidade axisimétrica, que geralmente se aplica a qualquer coluna de jato líquido de seção cilíndrica, como um resultado da tendência a minimizar exclusivamente sua própria área superficial. A segunda instabilidade Rayleigh-Taylor é causada pela combinação dos efeitos gravitacionais e da tensão superficial na configuração de um fluido denso suportado por um fluido menos denso. Uma pequena perturbação na superfície fará com que o fluido de maior densidade migre para baixo reduzindo sua energia potencial gravitacional e o fluido menos denso, que é deslocado para cima, aumenta esta energia, como pode-se observar na Fig. 4.9. A gravidade tem um efeito desestabilizador na camada de fluido de maior densidade, formando gotas, que originam gradientes de pressão opostos aos gradientes de densidade. Este mecanismo, por exemplo, é responsável pela formação de gotas de condensação no teto de um quarto úmido. Este tipo de instabilidade foi estudada numericamente em detalhe por Yiantsios & Higgins [63].

No presente problema, a instabilidade R-T age na base do cilindro onde o líquido revestido de maior densidade está acima do ar que é de menor densidade. Esta configuração é instável, mas é possível que a tensão superficial possa suportar o revestimento de maior densidade. No topo do cilindro a gravidade atua para estabilizar o revestimento. A estabilidade de uma camada sujeita a pequenas perturbações pode ser determinada pela aplicação da equação que governa uma camada fina numa superfície horizontal como obtida no capítulo 2. Porém, neste caso considera-se que a camada do filme está embaixo da superfície horizontal, como mostrado na Fig. 4.9. Assim, a equação (2-8), sem considerar a função de injeção, pode ser reescrita utilizando os

parâmetros: $\alpha = 3\pi/2$, $g\cos\alpha = +1$ e $g\sin\alpha = 0$, obtendo-se:

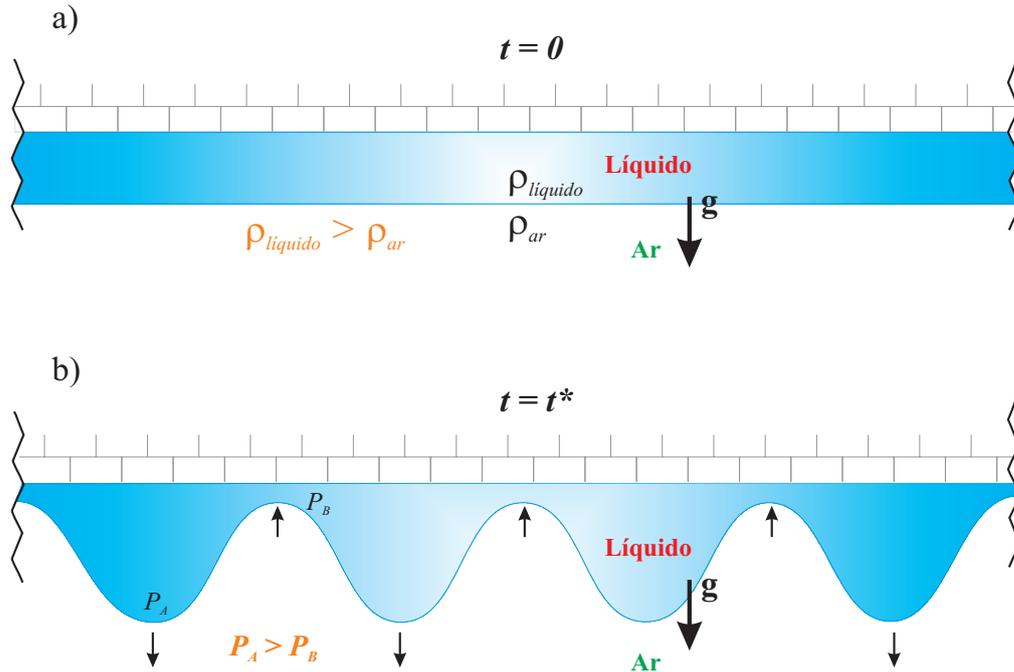


Figura 4.9: Configuração instável por efeito gravitacional de uma camada de filme embaixo de uma superfície horizontal (Ex: teto de um quarto molhado). a) camada de líquido no instante $t = 0$. b) nova configuração do líquido em $t = t^*$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\nabla \cdot \left\{ \frac{h^3}{3\mu} (\sigma \nabla \nabla^2 h + \rho g \nabla h \cos \alpha) \right\} \quad (4-33)$$

Considerando uma pequena perturbação na camada revestida, h pode ser escrito como:

$$h(x, t) = h_0 + \beta e^{\omega t} \cos(kx), \quad (4-34)$$

onde a β é a amplitude de perturbação, $\beta \ll h_0$, ω é a taxa de crescimento da instabilidade e k é o número de onda na direção x . O comprimento de onda da perturbação correspondente é necessariamente $2\pi/k$. Substituindo na equação (4-33), obtém-se a seguinte taxa de crescimento da perturbação:

$$\omega = \frac{\sigma h_0^3}{3\mu} \left(\frac{\rho g}{\sigma} k^2 - k^4 \right). \quad (4-35)$$

Taxas de crescimento positivas ocorrem para comprimentos de onda $\lambda = 2\pi/k$ maiores que $\lambda_0 = 2\pi a$, onde a é o comprimento capilar dado por $a^2 = \sigma/\rho g$. Para comprimentos de onda menores λ_0 as perturbações são amortecidas pela tensão superficial. A perturbação de maior taxa de crescimento tem um comprimento de onda

$$\lambda_{RT} = 2\sqrt{2}\pi a, \quad (4-36)$$

com uma correspondente taxa de crescimento

$$\omega_{RT} = \frac{\sigma h_0^3}{12\mu a^4} \quad (4-37)$$

Os trabalhos experimentais de Bruyn [64] analisam o efeito da instabilidade R-T de cilindros de diferentes raios, classificando-os em pequenos, médios e grandes. Para cilindros de raios pequenos, $r/a < 0,1$, o padrão de comprimento de onda e a taxa de crescimento guardam boa concordância com previsões teóricas a partir da análise de estabilidade linear [65], representada pelas linhas pontilhadas na Fig. 4.10. Para cilindros de raios grandes, $r/a > 1,0$, o comprimento de onda se mantém constante $\lambda = 2\sqrt{2}\pi R$, como deduzido pela instabilidade R-T. Para cilindros de tamanhos médios, $0,1 < r/a < 1,0$, uma transição entre essas duas instabilidades ocorre, como mostrado na Fig. 4.10.

As duas linhas horizontais tracejadas na Fig. 4.10 representam os comprimentos de onda $\lambda = 8,89$ para uma camada de filme fina e $\lambda = 10,9$ para uma camada de filme não tão fina, que foram obtidos por Fermigier et al. [66] e Limat et al. [67].

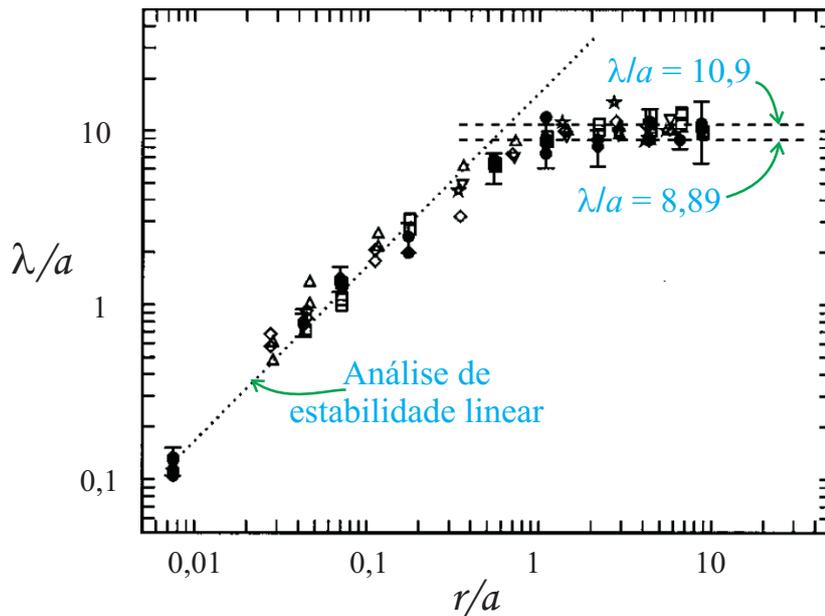


Figura 4.10: Resultados experimentais e teóricos do comprimento de onda em diferentes raios de cilindros, ambos em forma adimensional, dados por Bruyn [64].

Verificação: cilindro estacionário

A equação (4-38), sem considerar a rotação do cilindro nem a injeção de líquido é escrita como:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{h^3}{3} \cos \theta \right) - \nabla \cdot \left\{ \frac{h^3}{3Bo} \nabla (h + \nabla^2 h) - \frac{h^3}{3} \sin \theta \nabla h \right\}. \quad (4-38)$$

A dinâmica do escoamento pode ser caracterizada pela espessura inicial $h(\theta, y, 0) = \epsilon$ e Bo . Como a equação está restrita a valores de ϵ muito pequenos, o único parâmetro governante é o número de *Bond*, Bo . O modelo numérico somente será testado para $Bo = 1,0$ e $\epsilon = 0,1$, com raio $R = a$ e uma perturbação aleatória de 1% da espessura inicial uniforme nas direções (θ, y) . Como o comportamento é dominado pela drenagem do líquido até a base do cilindro, o revestimento neste caso é muitas vezes bem caracterizado pela espessura do filme na base, $h(3\pi/2, y)$. Foi utilizada uma malha de 40×100 num cilindro de largura $L = 5\pi$. O filme resultante é simétrico no plano vertical ao longo do tempo. A figura 4.11 mostra a espessura do filme ao longo da base do cilindro. Para verificar a conservação de massa ao longo do tempo, realizou-se um controle do volume de líquido, reportando-se valores de erros relativos menores a 1,5%.

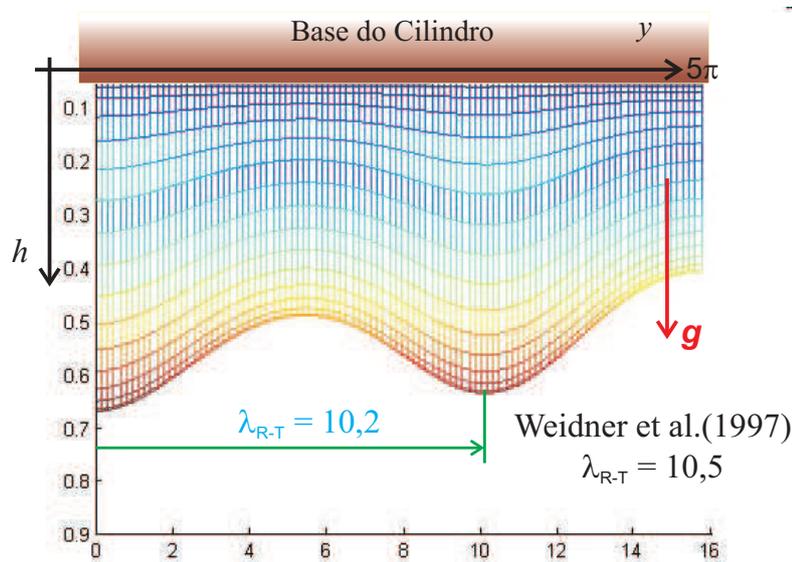


Figura 4.11: Vista do perfil da malha na base do cilindro estacionário mostrando a formação de gotas com comprimento de onda $\lambda = 10,2$.

No presente trabalho, obteve-se um comprimento de onda aproximado de $\lambda = 10,2$, similar ao obtido por Weidner et al. [57], $\lambda = 10,5$. Porém, ambos diferentes do valor teórico $\lambda = 8,89$ dado pela equação (4-37). Os resultados mostrados aqui não concordam exatamente com o valor teórico pelas seguintes razões: (i) Utilização de uma expressão aproximada para o cálculo da curvatura no presente modelo numérico, que afeta significativamente o resultado numa escala maior de tempo; (ii) Utilização de uma equação de conservação de massa integral que afeta o comportamento da evolução quando a espessura de filme é da mesma ordem do raio do cilindro. Sabe-se que para casos de espessura consideráveis o presente modelo numérico não irá reproduzir muito

bem a evolução deste filme ao longo do tempo. Note-se que o filme considerado nesta validação tem uma espessura relativamente grande $\epsilon = 0,1$. Porém, nos revestimentos de cilindros fotorreceptores, as espessuras máximas estão na ordem de $\epsilon \leq 0,005$ e portanto o presente modelo é apropriado nestes casos.

4.6 Resultados

Na escolha dos parâmetros que governam o escoamento no processo de revestimento de cilindros, há restrições em dois dos seis grupos adimensionais Bo, M, W, H_f, V_{inj} e Γ . Primeiro, a espessura do revestimento, que depende diretamente de Γ deve ser pequena para poder garantir a validade da teoria de lubrificação. Na indústria de cilindros fotorreceptores, o valor dos raios varia em torno de $R = 5,08 - 10,16$ cm apresentando espessura de filme fotorreceptor $h = 5 - 250 \mu\text{m}$ com uma faixa de tolerância $\pm 2,5 \mu\text{m}$, garantindo assim a aplicação do presente modelo. Segundo, o valor da espessura de filme precursor, H_f , deve ser o menor possível para evitar problemas de resultados deslocados no tempo, como mencionado nos capítulos anteriores.

Os parâmetros ainda não avaliados, Γ e V_{inj} , serão testados com a finalidade de reproduzir o processo de revestimento em questão. Inicialmente, discutiremos situações em que o líquido é injetado através de uma porta de injeção, fictícia, fixa, localizada no interior do cilindro, como mostrado na Fig. 4.6, enquanto este gira com velocidade constante Ω . Portanto, neste caso o parâmetro V_{inj} não é considerado. Em seguida, será analisado o efeito de espalhamento de uma tira de líquido gerada na parte superior de um cilindro estacionário onde os parâmetros V_{inj} e Γ serão avaliados em conjunto. Depois disso, o efeito da velocidade da porta de injeção com Γ e W constantes é analisado. Para obter-se uma boa aproximação do processo de revestimento de cilindros fotorreceptores é preciso ajustar os três parâmetros V_{inj} , W e Γ com a finalidade de cobrir parte da superfície do cilindro por inteiro, o que não necessariamente implica na obtenção de uma espessura uniforme. Ao contrário, nesta situação aparece o padrão ondulado, equivalente ao obtido na indústria.

4.6.1 Efeito de advecção do líquido por rotação do cilindro

Simulações foram feitas para avaliar o efeito de advecção no modelo numérico num domínio $L_\theta = 2\pi$ e $L_y = \pi/2$, com malha de $N_\theta = 400$ e $N_y = 100$. O líquido é injetado pelo aplicador, de raio $R_f = 0,25$ com uma taxa de injeção $\Gamma = 0,001$, sobre um cilindro de raio $R = a$ ($Bo = 1,0$) que apresenta uma rotação constante de $W = 1,5$ com $M = 0,007$ e

$H_f = 3 \times 10^{-5}$, lembrando que a é o comprimento capilar. A porta de injeção foi posicionada em três coordenadas fixas ($\theta_{cp}, y_{cp} = L_Y/2$). Duas destas posições são simétricas em relação ao plano vertical, i.e. em $\theta_{cp} = \pi/2 \pm \pi/4$ e a outra está localizada no topo do cilindro.

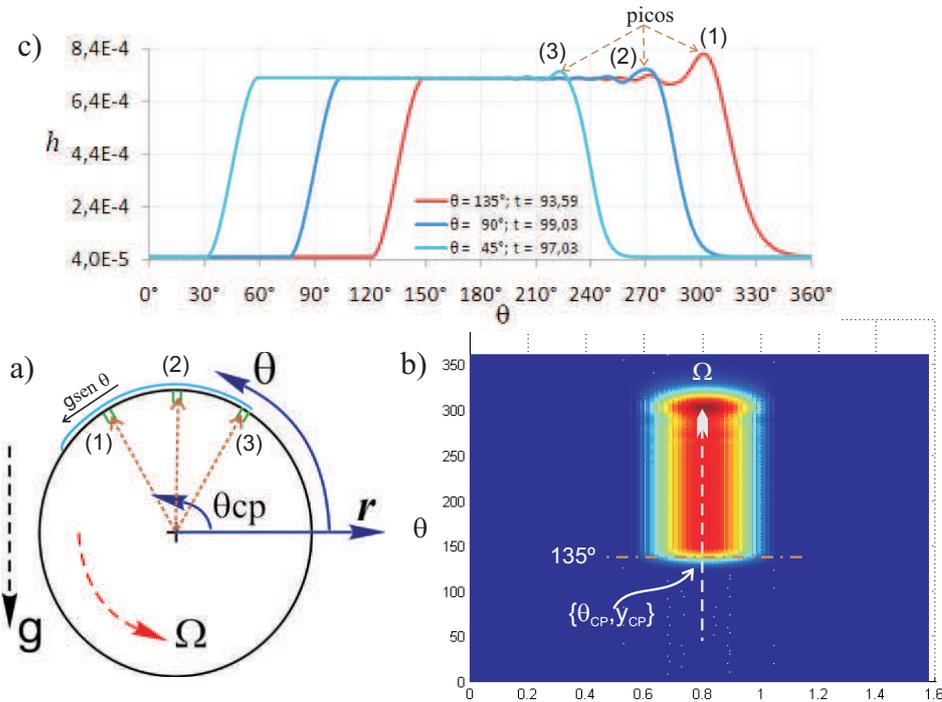


Figura 4.12: Teste do efeito de advecção do líquido pela rotação do cilindro com $W = 1,5$. a) Vista de perfil mostrando as posições das portas de injeção testadas, b) Domínio θ vs y da malha estendida mostrando a injeção de líquido na posição (θ_{cp}, y_{cp}) e c) Perfil do filme gerado pela injeção contínua e advectada pela rotação do cilindro para as diferentes posições indicadas em a).

Na primeira posição testada ($\theta_{cp} = \pi/2 + \pi/4, y_{cp} = L_Y/2$) uma gota é formada inicialmente pela injeção contínua, para depois ser advectada pela rotação e formando assim uma tira líquida ao redor do cilindro como mostrado na Fig. 4.12 b). A linha representada por (1) na fig 4.12 c), é obtida extraindo o perfil da tira líquida após $t = 93,59$ em $y = L_Y/2$, que é a linha de simetria neste caso. Pode-se apreciar um pico acentuado na parte frontal da tira e uma espessura uniforme após o pico. O pico formado no início da injeção é considerado uma configuração não desejável para o propósito, isto é, para produzir uma tira de espessura uniforme. Mudando a posição da porta de injeção para $(\theta_{cp} = \pi/2, y_{cp} = L_Y/2)$ o perfil da espessura para $t = 99,03$, é denotado por (2). Neste caso, o pico formado é mais suave. Para $(\theta_{cp} = \pi/2 - \pi/4, y_{cp} = L_Y/2)$, posição (3), oposta ao primeiro, consegue-se minimizar ainda mais o padrão indesejável. Na faixa de $93 < t < 99$ a forma

dos perfis, casos (1),(2) e (3), não mudam e somente são transportados na superfície do cilindro. Os picos são o resultado do movimento relativo da gota líquida com o efeito das forças gravitacionais em relação ao movimento de corpo rígido. Na primeira posição da porta de injeção, a componente gravitacional tangente à superfície é paralela ao vetor de traslação ΩR . Na segunda posição, este componente não aparece, e na última posição, este componente é oposto à rotação, de maneira que esta posição minimiza aquele movimento relativo da gota formada.

Uma outra maneira de se evitar estes picos é através do aumento da taxa de rotação. A figura 4.13 representa a comparação dos perfis da tira líquida com os parâmetros $W = 3,0$ e $\Gamma = 0,005$ aplicados nas três diferentes posições. Observa-se, a presença de picos suaves idênticos nas três posições.

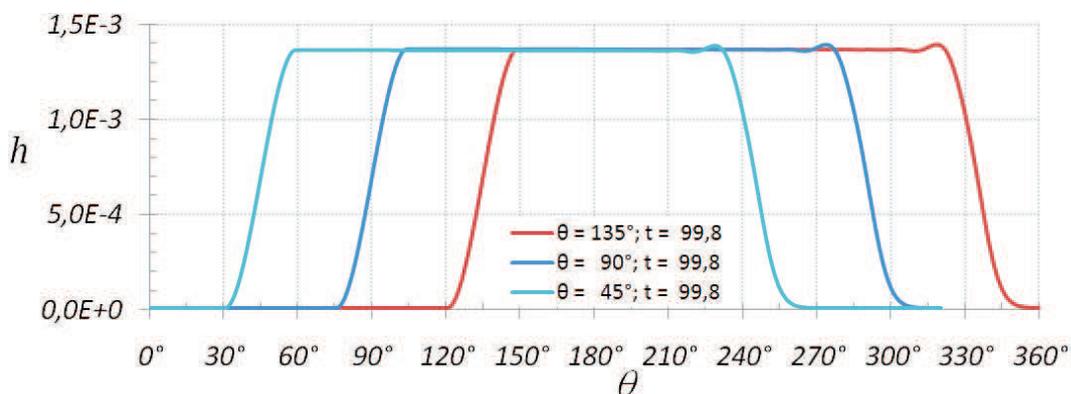


Figura 4.13: Comparação dos perfis da tira revestida para $W = 3,0$ e $\Gamma = 0,005$ para as diferentes posições da porta de injeção dada na Fig. 4.12a).

4.6.2

Efeito de espalhamento na superfície do cilindro

O espalhamento de um líquido sobre um plano inclinado foi analisado no capítulo anterior, onde a teoria de lubrificação foi aplicada com êxito. Neste capítulo, o espalhamento de uma tira de líquido sobre uma superfície de um cilindro estacionário de raio unitário e $L_y = 2\pi/3$ é analisado. A tira é depositada pela injeção contínua de líquido através de uma porta de injeção em movimento de raio $R_f=0,25$. A porta está localizada inicialmente no ponto $(\theta_{cp}, y_{cp}(0)) = (\pi/2, 1,05R_f)$, movimentando-se com a seguinte equação: $y_{cp}(t) = y_{cp}(0) + V_{inj} \times t$. A trajetória é feita no topo do cilindro, i.e., $\theta_{cp} = \pi/2$ constante, até um ponto final dado por $(\theta_{cp}, y_{cp}) = (\pi/2, L_y - 1,05R_f)$. Evita-se atingir os extremos axiais do cilindro para não ter problemas com as condições de contorno. Uma vez atingida a posição final, a injeção é interrompida. Após um longo tempo, o espalhamento por efeito das forças gravitacionais e da

tensão superficial é apresentado na Fig. 4.14a). Os resultados foram obtidos para $Bo = 1,0 (R = a)$; $M = 0,007$; $W = 0,0$; $H_f = 1 \times 10^{-5}$, $\Gamma = 0,001$; $V_{inj} = 0,001$.

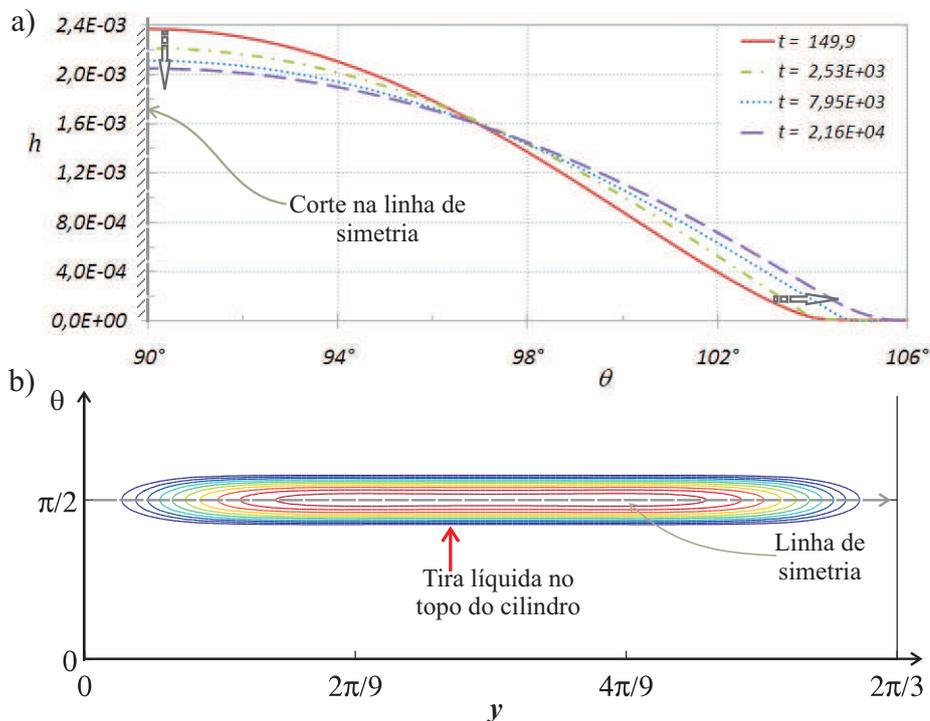


Figura 4.14: Efeito de espalhamento numa tira de líquido sobre a superfície do cilindro. a) corte transversal da tira líquida. b) vista de topo da tira revestida.

4.6.3

Efeito da relação das velocidades V_{inj} e W

Nas seções anteriores, o efeito da velocidade da porta de injeção, V_{inj} , e a rotação do cilindro, W , foram analisados separadamente. É necessário relacionar esses dois parâmetros de tal maneira a obter uma cobertura completa do cilindro. Mantendo uma taxa de rotação constante, $W = 3,0$, diferentes valores de V_{inj} são testados: 40×10^{-3} , $4,0 \times 10^{-3}$ e $0,4 \times 10^{-3}$. Mantendo o domínio e o refinamento do item anterior, $L_\theta = 2\pi$ e $L_y = 2\pi/3$ com $N_\theta = 450$ e $N_y = 150$, o modelo foi testado para os seguintes valores dos parâmetros: $Bo = 1,0$; $M = 0,007$; $R = lc$; $R_f = 0,75/2$; $H_f = 3 \times 10^{-5}$, $\Gamma = 0.001$. A porta de injeção estava inicialmente localizada em $(\theta_{cp}; y_{cp}(0)) = (\pi/4; 1,05R_f)$.

Para o primeiro valor de $V_{inj} = 40 \times 10^{-3}$, o revestimento resultante é apresentado em linhas de contorno na Fig. 4.15a e em forma tri-dimensional para o instante em que a porta de injeção atinge o ponto $(\theta_{cp}, y_{cp}) = (\pi/2, L_y - 1,05R_f)$. A taxa de rotação, neste caso, não é suficiente para obter um revestimento completo sobre a superfície do cilindro. Para $V_{inj} = 4,0 \times 10^{-3}$, e

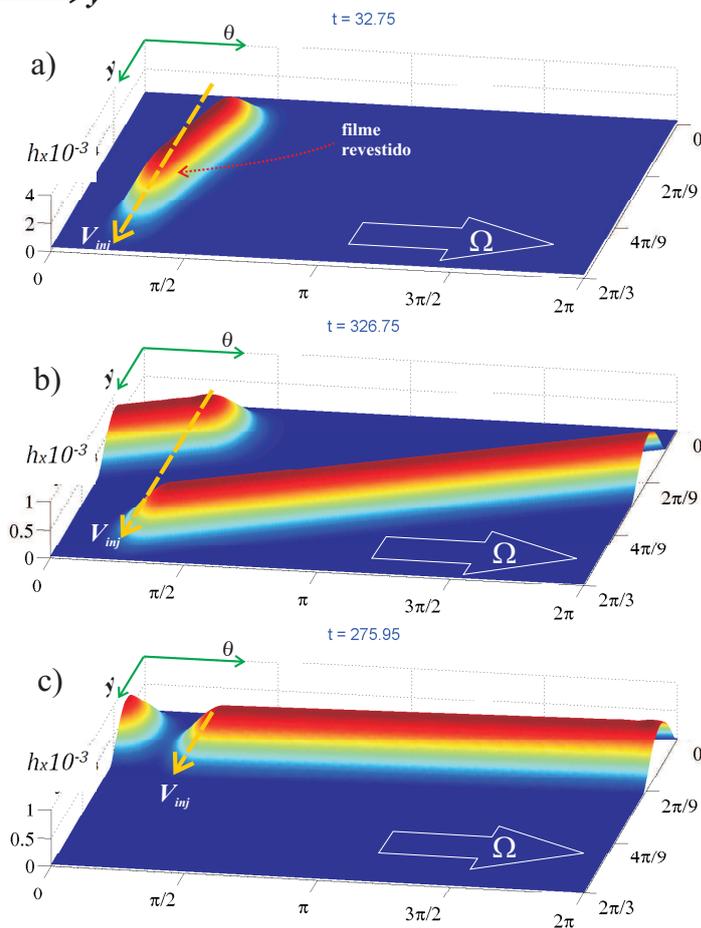
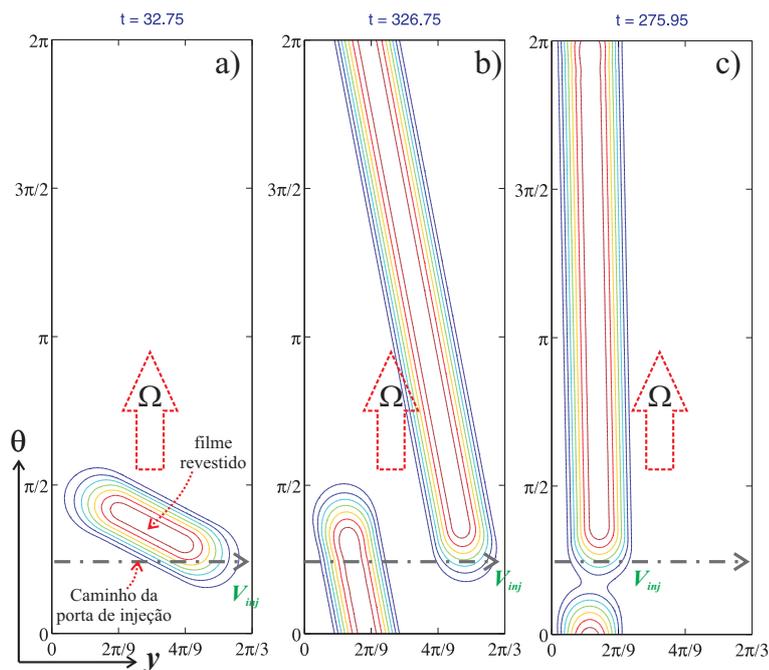


Figura 4.15: Efeito da velocidade da porta de injeção, V_{inj} : a) $V_{inj} = 40 \times 10^{-3}$; b) $V_{inj} = 4,0 \times 10^{-3}$ e c) $V_{inj} = 0,4 \times 10^{-3}$, representadas em curvas de nível e em forma tri-dimensional.

mantendo os outros parâmetros fixos, a superfície cilíndrica é parcialmente coberta, como mostrado na Fig. 4.15b. A tira líquida segue um padrão espiralado. Para $V_{inj} = 0,4 \times 10^{-3}$, o passo da configuração espiral obtida é pequeno o suficiente, permitindo que o cilindro seja revestido por camadas sucessivas.

4.6.4 Efeito de nivelamento

Na escolha apropriada dos valores dos parâmetros V_{inj} e W , o cilindro é revestido por completo por uma camada de líquido. Porém, a espessura não é uniforme. A modelagem do processo de revestimento de um cilindro fotorreceptor é obtida e mostrada na figura 4.16.

Considerando os seguintes parâmetros: $W = 3,0$; $V_{inj} = 0,001$; $M = 0,007$; $R_f = 0,25$; $H_f = 3 \times 10^{-5}$, $\Gamma = 0,001$ e $(\theta_{cp,t}, y_{cp,0}) = (\pi/2; 1,25 \times R_f)$ numa malha de $N_\theta = 450$ e $N_y = 150$ no domínio $L_\theta = 2\pi$ e $L_y = 2\pi/3$, obteve-se a espessura do filme sobre a superfície do cilindro, conforme ilustrado na figura 4.16. Pode-se observar um padrão de onda como resultado da interferência entre duas tiras de líquido consecutivas originadas em uma porta de injeção em movimento.

A dinâmica do escoamento é caracterizada pelos seis parâmetros indicados no início da seção 4.6. Porém, neste trabalho focamos a análise no efeito do número de Bond, Bo . Para tal, simulações foram feitas para $Bo = 100; 1,0; 0,1$ e $0,01$.

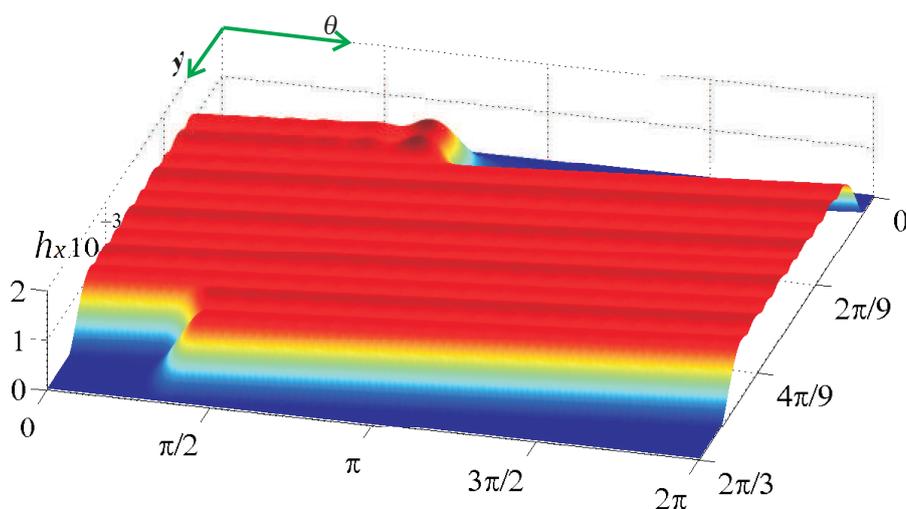


Figura 4.16: Espessura de filme revestido no domínio θ - y após uma escolha apropriada nos valores dos parâmetros $V_{inj} = 0,001$, $\Gamma = 0,001$ e $W = 3,0$ para o caso de $R_f = 0,25$.

Dois intervalos de tempo foram utilizados para analisar o efeito de nivelamento das tiras líquidas. O primeiro intervalo é relacionado ao tempo que o processo leva em recobrir o cilindro, e o segundo, é quando o cilindro torna-se estacionário e com interrupção da injeção de líquido. O gráfico superior da figura 4.17a) representa o perfil da espessura do filme depositado em $\theta = \pi/2$, ao longo de y , no primeiro intervalo no qual a porta de injeção atinge a distância final axial, definida por $(y_{cp,0} = L_y - 1,25 \times R_f)$. Este gráfico mostra os perfis da espessura do filme ao longo da direção axial, y , para diferentes números de $Bo = 100; 1,0; 0,1; 0,01$ em $t = 1,6 \times 10^3$, medidos em um dos quadrantes do cilindro, neste caso em $\theta = \pi/2$. Para $Bo = 100$, não se observa interação entre as tiras líquidas consecutivas e a interferência formada por elas. Portanto, para altos valores de Bo o efeito de nivelamento é fraco e assim o padrão de onda se mantém constante. Para valores de $Bo = 0,1$, a tensão superficial tende a nivelar o padrão de onda, como pode-se observar no intervalo $y[0,24 - 1,84]$, que corresponde à interação das duas primeiras tiras de líquido depositadas.

O segundo intervalo de tempo corresponde à continuação do intervalo anterior, porém com o cilindro em estado estacionário, $W = 0$, e sem injeção, $\Gamma = 0$. O gráfico 4.17c mostra o perfil da espessura do filme revestido após $t = 1,6 \times 10^5$ para $Bo = 100; 1,0; 0,1$ e para $Bo = 0,01$ medido na mesma posição θ após $t = 1,52 \times 10^4$. Neste último gráfico, pode-se verificar que o padrão de ondulação é praticamente removido, para $Bo = 0,1$, como resultado da força da tensão superficial para nivelar a superfície formada no processo de revestimento. Porém, nestes casos, pode-se visualizar o efeito *heavy edge* que tende a engrossar as bordas do filme revestido. No caso de $Bo = 0,01$, este efeito é ainda mais visível mesmo tendo um menor tempo de nivelamento.

Um prolongado tempo de nivelamento pode acarretar a drenagem do líquido na base do cilindro pelo efeito gravitacional. A espessura média foi determinada em $\theta = \pi/2$ e $\theta = 3\pi/2$ representada pelos cortes (A - A) e B - B, para diferentes Bo , ao longo do tempo. Pode-se observar na figura 4.18a para $Bo = 1,0$ o incremento da espessura na base e diminuição no topo do cilindro. Observa-se que até o tempo $T_{crit} = 3613$, denominado como tempo crítico, o valor de h_{medio} medido na parte superior do filme se mantém constante nos dois quadrantes.

Plotando os valores de T_{crit} em função do Bo obtemos o gráfico 4.18b), o qual apresenta três regiões. A primeira região, representa o início e a finalização do processo de injeção. Para todos os casos de Bo , o tempo final de injeção de líquido é o mesmo. A segunda região representa o processo de nivelamento até alcançar o T_{crit} . A terceira e última região é representada pelo processo de drenagem. Durante o intervalo de nivelamento nem sempre se consegue obter

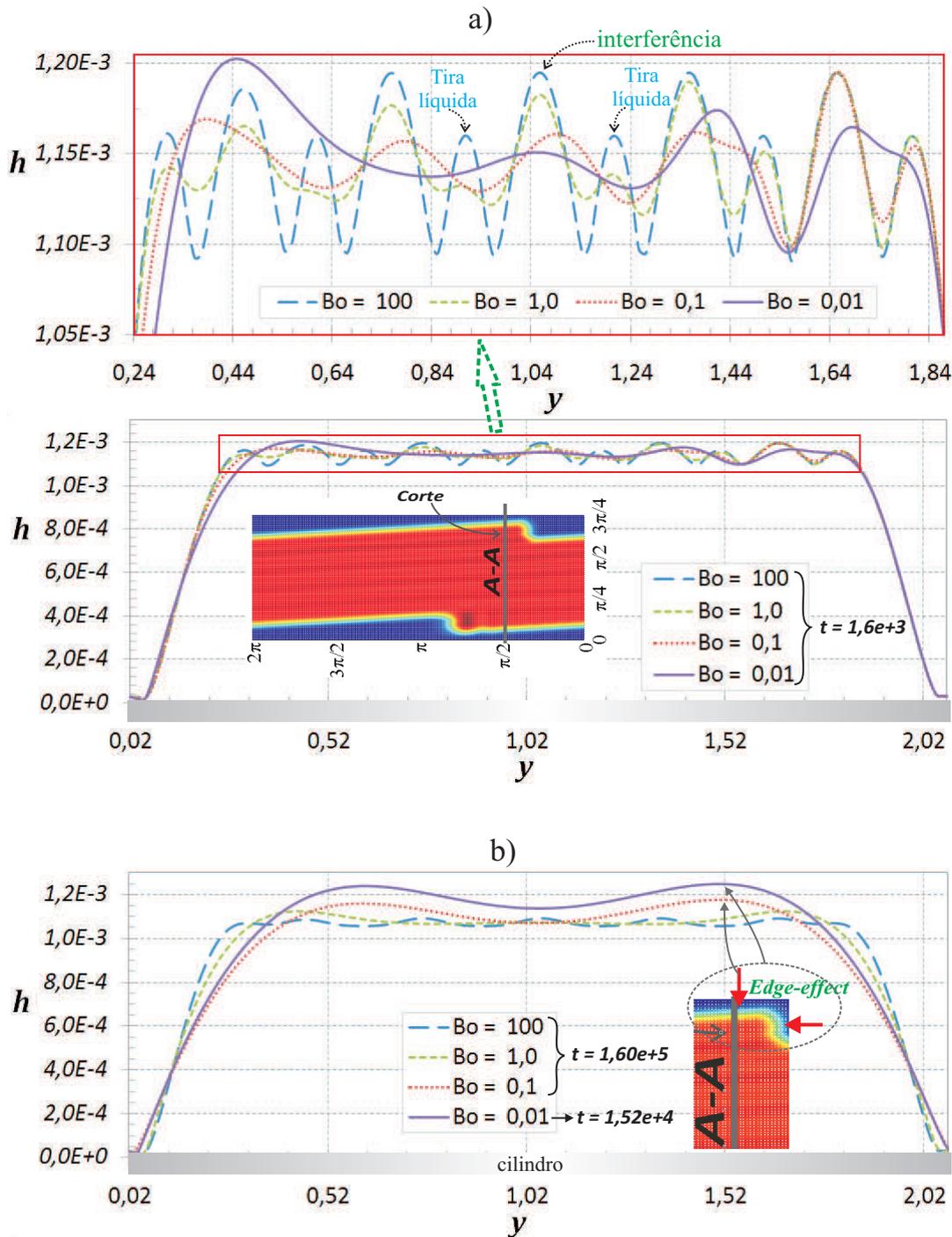


Figura 4.17: Gráfico do perfil da espessura do filme depositado em $\theta = \pi/2$ (Corte (A-A)): a) no instante no qual a porta de injeção atinge a distância final axial. b) No seguinte intervalo de tempo t .

uma camada sem padrões de onda. Porém, o perfil fica mais suave e uniforme, como visualizado na Fig. 4.19 para $Bo = 1,0$.

O modelo também é testado para baixas velocidades de rotação W , com o objetivo de prever o nivelamento da camada revestida nos diferentes intervalos mencionados anteriormente. Para manter o mesmo padrão de

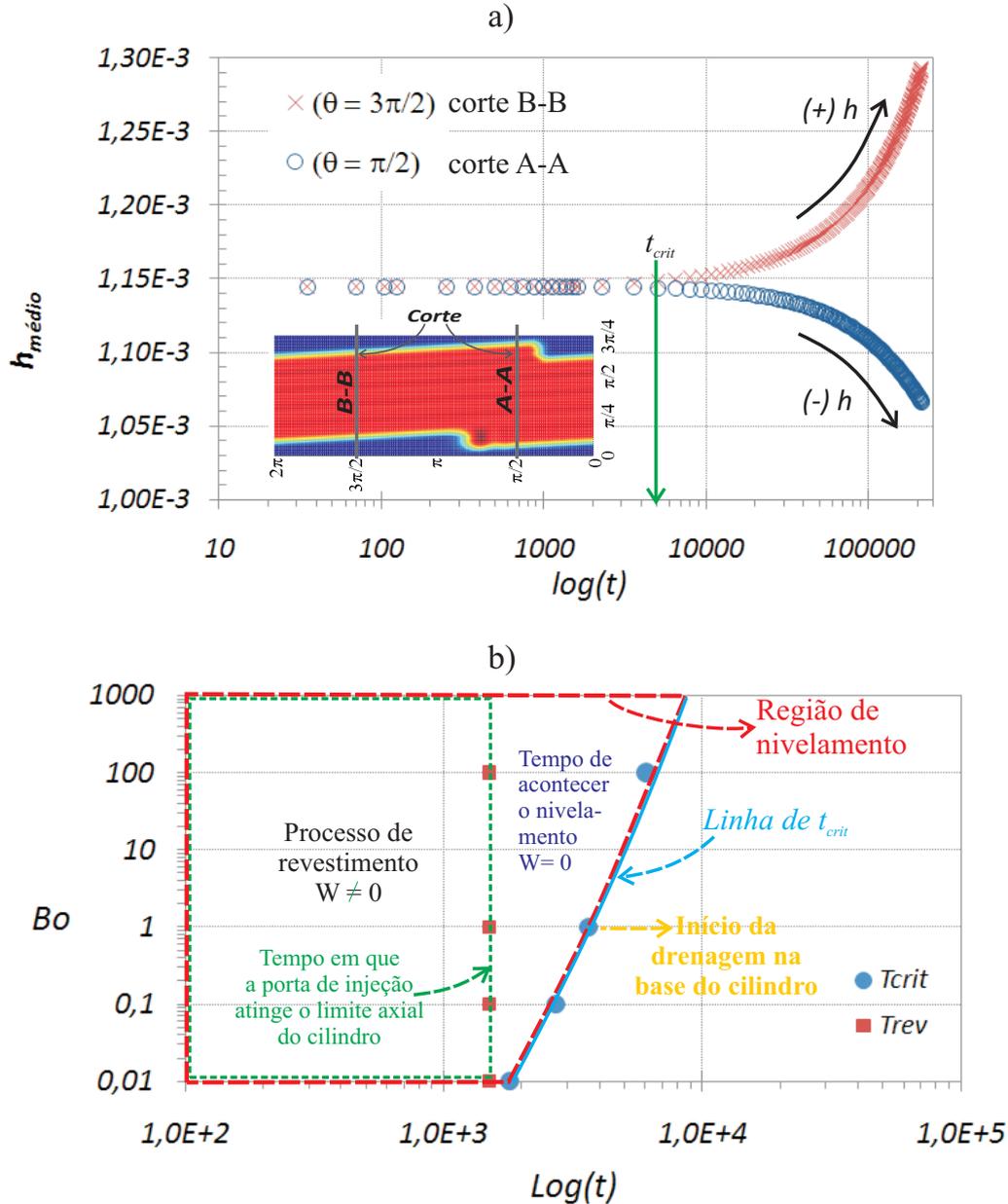


Figura 4.18: a) Espessura média ao longo do tempo, medida em $\theta = \pi/2$ e $\theta = 3\pi/2$ para $Bo = 1,0$. b) Tempo T_{crit} para diferentes valores de Bo .

revestimento, as variáveis V_{inj} e Γ devem mudar. A relação de W e V_{inj} é dada pelo ângulo de direção de aporte de líquido, $\tan(\psi) = V_{inj}/(WR)$. O valor deste ângulo, no caso anterior, se manteve constante a $\tan(\psi) = 0,001/(3,0 \times 1,0) = 3,33 \times 10^{-4}$. Num W reduzido à 1,0 nos obriga utilizar um $V_{inj} = (WR) \times \tan(\psi) = 0,001/3$ e para manter uma mesma espessura do filme, diminuimos o valor da taxa de injeção para $\Gamma = 0,0035$. Na figura 4.20, a linha de pontos representa o perfil do filme revestido para $Bo = 1,0$, no primeiro intervalo, e a linha descontínua representa o perfil após um $t = 5,9 \times 10^4$.

A comparação do primeiro intervalo para estas duas velocidades de

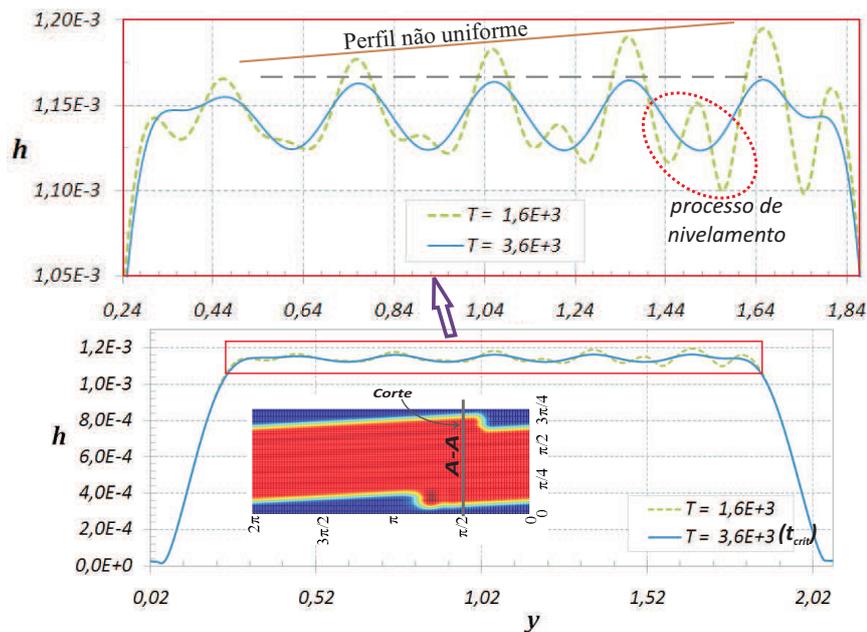


Figura 4.19: Perfil da espessura do filme em T_{crit} para $Bo = 1, 0$.

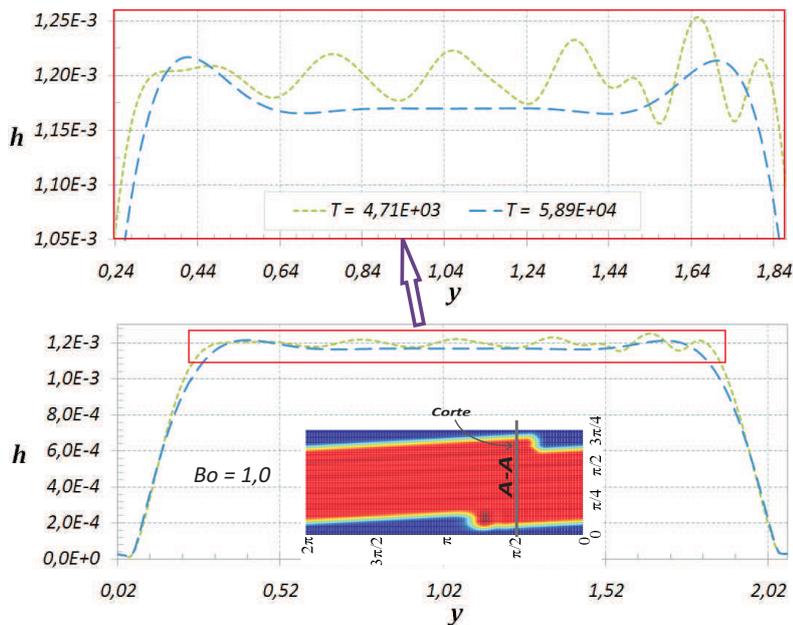


Figura 4.20: Perfil do filme revestido quando $W = 1,0$; $V_{inj} = 0,001/3$ e $\Gamma = 0,0035$

rotação com $Bo = 1,0$ é mostrada na figura 4.21, onde pode-se mostrar um melhor nivelamento quando o valor de rotação diminui. A comparação dos tempos críticos é mostrada na figura 4.22.

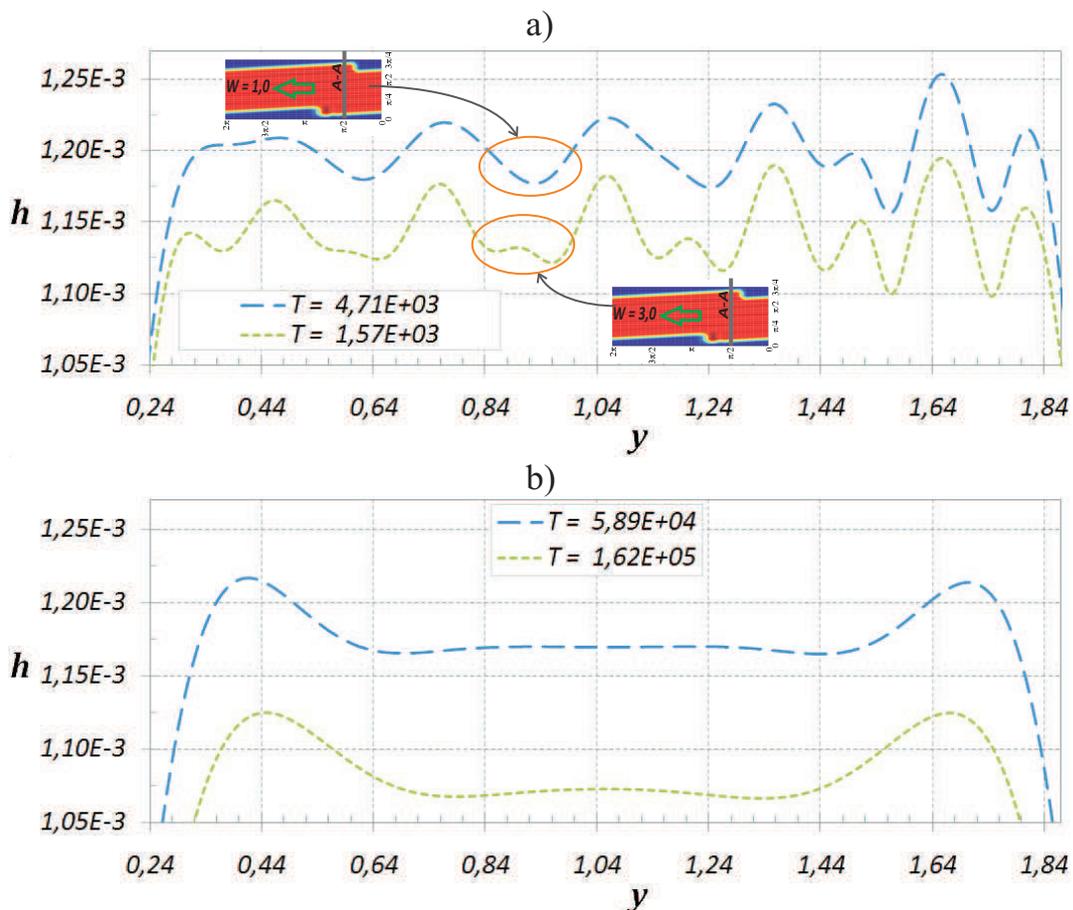


Figura 4.21: Comparação de perfil do filme revestido para diferentes taxas de rotação para $Bo = 1,0$.

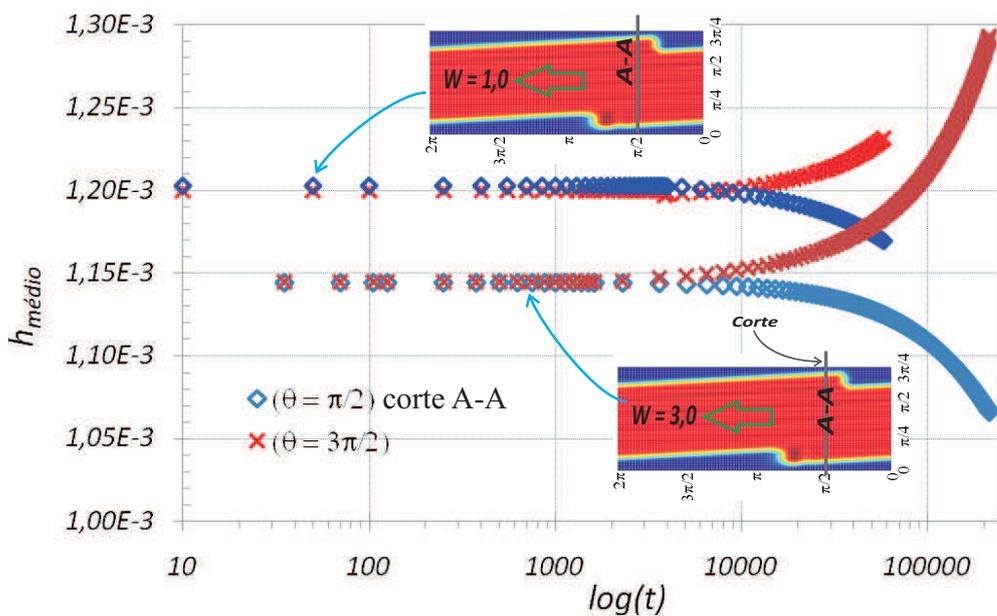


Figura 4.22: Espessura média ao longo do tempo, medida em $\theta = \pi/2$ e $\theta = 3\pi/2$ para $Bo = 1,0$.