4
Mínimos Quadrados de Monte Carlo (LSM)

O método dos Mínimos Quadrados de Monte Carlo surge como uma alternativa promissora frente aos tradicionais métodos de avaliação de opções como o método binomial e o de diferenças finitas. Apresenta algumas vantagens significativas em relação aos outros métodos tais como: pode ser utilizado para avaliar opções com variáveis de estado subjacentes cuja evolução pode ocorrer de acordo com diversos processos estocásticos; é considerado um método bem simples por não abordar os aspectos relativos à condição de contorno livre; maior velocidade no cômputo das opções; permite avaliação de opções com características semelhantes às opções americanas as quais dependem da avaliação a cada instante de tempo; e, o mais importante e relevante, melhor precisão encontrada, sobretudo, com um número grande de simulações.

A programação dinâmica está implícita no cômputo via LSM. Isso se deve ao mecanismo de avaliação da decisão a cada instante de tempo anterior à data de vencimento da opção. Os métodos apresentados nesse trabalho são os desenvolvidos por Longstaff e Schwartz (2001) e Gamba (2003) para avaliação utilizando a ferramenta do LSM.

4.1
Abordagem LSM proposta por Longstaff e Schwartz (2001)

4.1.1
Formulação do Problema

A precificação de uma *call* americana pode ser representada como:

$$Call = \underset{t}{Max} \ \ E\left[\exp\left(-\int_0^{ti} r(w,S)\ \right)\{S(t_i)-K\}\ \right] \ \ para \ \ t_i \leq T \qquad (4.1)$$

Onde,

t_i é o instante de exercício: $0 < t_1 < t_2 < ... < t_{L-1} < t_L = T$

$S(t_i)$ é o preço da ação no instante *ti* ;

K *é o* preço de exercício;

$r(w,S)$ é a taxa de desconto associada a cada simulação (w) e preço da ação (S). No caso de uma opção americana simples, considera-se essa taxa como constante para todos os caminhos simulados de preços de modo que: $\left[\exp\left(-\int_0^{ti} r(w,S)\right) = e^{-r.t_i}\right]$.

No entanto, sabe-se que uma opção americana pode ser exercida a qualquer instante de tempo e não apenas em alguns determinados instantes de tempo. Isto é, a opção de exercer é representada por um período de tempo contínuo e não discreto. Para solucioná-lo, basta que o valor da opção seja aproximado tomando-se um número de intervalos suficientemente grande.

No instante final (vencimento), existe a alternativa de exercer a opção caso ela esteja “in the money” ou permitir sua expiração se estiver “out of the money”. No instante de exercício antecipado $t_i (t_i < T)$, o investidor deve decidir entre o exercício antecipado ou manter a opção viva e reavaliar novamente a possibilidade de exercício no instante posterior t_{i+1}. No instante t_i , sabe-se que o valor da opção devido ao exercício antecipado é igual a $S(t_i) - K$. No caso de optarmos por mantê-la viva, o valor da opção em $t_i (V(w,t_i))$ corresponderá ao valor esperado dos payoff’s gerados pelo exercício futuro nos instantes $t_{i+1}, t_{i+2}, ..., t_{L-1}, t_L = T$. Assim, considerando a hipótese de não arbitragem, o valor de continuação em t_i corresponderá a:

$$V(w,t_i) = E_Q\left[\sum_{j=i+1}^{L} \exp\left(-\int_{t_i}^{t_j} r(w,S)dS\right).C(w,t_j;t_i,T) \;/F_{t_i} \right] \tag{4.2}$$

onde $C(w,t_j;t_i,T)$ são os payoff's gerados pelo exercício da opção. Observa-se que F_{t_i} indica que o valor de continuação no instante t_i, está condicionado às informações conhecidas na respectiva data (F_{t_i});

Assim, a estratégia de exercício ótimo em cada instante de tempo se reduz à comparação dos valores de exercício imediato $S(t_i)-K$ e valores de continuação $(V(w,t_i))$. O modelo LSM assume que o valor de continuação $(V(w,t_i))$ em $t_i, i = L-1, L-2,...,1$ pode ser estimado por um modelo de regressão dos mínimos quadrados e uma combinação linear de um número determinado de bases $(F_{in}(X))$ representativas do conjunto de informações conhecidas em $t_i(F_{t_i})$ Em seu artigo original, Longstaff e Schwartz(2001) usam como exemplo inicial as potências de uma variável de estado X como funções base . Assim, temos

$$\hat{V}(w,t_i) = \alpha_0 + \alpha_{i1}.f_n(X) + \alpha_{i2}.f_{i2}(X) + ... \qquad (4.3)$$

$$\hat{V}(w,t_i) = \alpha_0 + \alpha_{i1}.X + \alpha_{i2}.X^2 + ..., \quad (Base: f_{in}(X) = X^n, \ \ n = 1,2,3....) \qquad (4.4)$$

onde $(\hat{V}(w,t_i))$ é uma função que estima os valores $(V(w,t_i))$ para cada simulação w e instante t_i. Cabe ressaltar que outras funções como Laguerre, Legendre, Chebyshev e polinômios de Jacobi poderiam ser usadas como base.

Uma vez simulados os preços para todos os instantes de exercício antecipado $t_1, t_2,...., t_{L-1}, t_L = T$, o modelo em questão pode ser dividido em duas partes principais correspondentes a cada instante t_i

a) estimar os coeficientes de $(\hat{V}(w,t_i))$ pela regressão de $\mathrm{Y}t_i$ sobre Xt_i ($\mathrm{Y}t_i$ é o vetor dos valores de continuação em t_i e $\mathrm{X}t_i$ é o vetor dos preços do ativo simulado que estejam " in the money"em t_i :

b) determinar o exercício antecipado em t_i pela comparação dos valores $\hat{V}(w,t_i)$ e $S(t_i)-K$ para cada ação "*in the money*".

Os passos citados acima são então repetidos recursivamente ($t_l = T, t_{l-1}, ..., t_1$) até que todas as decisões de exercício antecipado para todos os instantes de tempo e simulações ($w = 1,2,..., N$, *onde* N *é* o número total de simulações) tenham sido determinados.

Finalmente o valor da *call* americana pode ser valorado por*:*

$$Call = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \exp\left[-\int_{0}^{t_{(1)}} r(w,S).dS\right]\max\{S^w(t^*_{t_i}) - K, 0\} \qquad (4.5)$$

onde $S^w(t^*_{t_i})$ é o preço do ativo simulado para cada instante de exercício antecipado ótimo t_i , para cada simulação *w* (ou trajetória).

Caso não exista nenhum instante de exercício antecipado ótimo para a simulação *w*, então $\max\{S^w(t^*_{t_i}) - K, 0\} = 0$. Nos próximos itens será abordado o algoritmo passo a passo utilizando-se de um exemplo simplificado, mostrado por Longstaff (2001) no seu artigo, em que evidencia-se a estratégia ótima de exercício antecipado.

4.1.2
Algoritmo LSM

Nessa abordagem o objetivo é mostrar como o algoritmo se desenvolve a partir de cinco passos, onde calcula-se o valor da call americana por exemplo.

Primeiro Passo: É preciso gerar N trajetórias de preços de algum processo estocástico (MGB, por exemplo). As trajetórias geradas a partir serão definidas somente onde é possível exercer as opções. Segue abaixo a matriz de preços de um ativo S.

Tabela 4.1 – Simulação dos Preços

MATRIZ DE PREÇOS				
St(0)	S_1 t(1)	S_1 t(2)	...	S_1 t(t_L=T)
St(0)	S_2 t(1)	S_2 t(2)	**...**	**S?(T)**
St(0)	S_3 t(1)	S_3 t(2)		**S?(T)**
...	**...**	**...**	**...**	**...**
St(0)	**S_{N-1} t(1)**	**S_{N-1} t(2)**	**...**	**S_{N-1} (T)**
St(0)	**S_N t(1)**	**S_N t(2)**	**...**	**S_N t(T)**

Segundo Passo: No vencimento as opções (*in the money*) serão exercidas obedecendo o valor da call: $\max\{S^w(t^*_{T_i}) - K, 0\}$, para todo w = 1,2,...,N;

Terceiro Passo: O processo de cômputo das opções americanas é feito (*backward*) do instante final ao inicial. O valor da opção para cada trajetória é definido como:

$$call(t_i, S^W(t_i)) = \max\{C^w_{t_i}, \hat{V}^w_{t_i}\} \tag{4.6}$$

onde: $C^w_{t_i} = \max\{S^w(t^*_{T_i}) - K, 0\}$, é o valor de exercício antecipado.

$V^w_{t_i}$ é o valor da expectância condicional obtida na regressão, ou seja, o valor de continuação.

É necessário ainda, determinar os valores e as funções de continuação.

- Os valores de continuação para cada *w*, $w = 1,2,....,N$, serão dados por:

$$V^w_{t_i} = E_Q\left[\sum_{j=i+1}^{L} \exp\left(-\int_{t_{ii}}^{t_{jj}} r(w,S)dS\right).C^w_{t_j}\right] \tag{4.7}$$

O cálculo do somatório é executado até o exercício antecipado ou até a data de expiração da opção (vencimento).

O cálculo da função de continuação é feito apenas para as opções in the money. Sendo assim, far-se-á a regressão do vetor Yt sobre o vetor Xt de modo a obter os coeficientes da função V_{t_i} .

$$Y_{t_i} = \begin{bmatrix} V_{t_i}^1 \\ V_{t_i}^2 \\ \vdots \\ V_{t_i}^M \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad X_{t_i} = \begin{bmatrix} S^1(t_{t_i}) \\ S^2(t_{t_i}) \\ \vdots \\ S^M(t_{t_i}) \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad a_0, a_{1i}, a_{2i}, \ldots$$

Sendo M o número de preços de S in the Money no instante de tempo analisado. Utiliza-se para isso, a função base $f_{in}(X) = X^n$.

Quarto Passo: Para mensuração dos exercícios ótimos antecipadamente, os valores são colocados na matriz (Θ_{NxL}), compostas por valores 0 ou 1. (sendo 0 para os instantes em que manter viva a opção é melhor do que exercê-la e 1 para os instantes que o exercício imediato é mais interessante.)

Quinto Passo: A partir da matriz de decisão o valor da opção será estimado em to.

$$Call = \frac{1}{N}\sum_{w=1}^{N}[\ \sum_{i=1}^{L} e^{-r.t_i}(\Theta_{wi}.\Phi_{wi})] \tag{4.8}$$

Onde Φ_{wi} é a matriz representativa dos valores de exercício, dados pela função: $\max\{S^w(t_{t_i}^*) - K, 0\}$

4.1.3
Exemplo Numérico Longstaff e Schwartz

O exemplo apresentado a seguir é uma pequena verificação do funcionamento do método LSM para precificação de opções. Considere as seguintes premissas: A opção a ser avaliada é de venda (put) do tipo americana de um ativo que não paga dividendos. O preço inicial do ativo é 1,00, o preço de exercício da opção é 1,10, podendo ser exercida em qualquer instante de tempo, 1, 2 ou 3. A taxa de juros livre de risco é de 6% ao período. As trajetórias geradas adotam o princípio da neutralidade ao risco, como ilustra a matriz S_{8x3}:

Tabela 4.2 – Matriz de Preços Simulados

MATRIZ DE PREÇOS				
w	**t(0)**	**t(1)**	**t(2)**	**t(3)=T**
1	1	1,09	1,08	1,34
2	1	1,16	1,26	1,54
3	1	1,22	1,07	1,03
4	1	0,93	0,97	0,92
5	1	1,11	1,56	1,52
6	1	0,76	0,77	0,9
7	1	0,92	0,84	1,01
8	1	0,88	1,22	1,34

Define-se a regra de exercício que maximiza o valor da opção em cada trajetória de preços. Matriz $\Phi_{8x3} = \max\{k - S^{w}(t_{t_i}),0\}$;

Tabela 4.3 – Matriz Fluxo de Caixa Φ_{8x3}

t(1)	t(2)	t(3)
0,01	0,02	0,00
0,00	0,00	0,00
0,00	0,03	0,07
0,17	0,13	0,18
0,00	0,00	0,00
0,34	0,33	0,20
0,18	0,26	0,09
0,22	0,00	0,00

8x3

No instante 3, que é o instante de vencimento da opção, determina-se os valores de exercício para cada trajetória.

Tabela 4.4 – Valores de Exercício da Opção

Valores da PUT			
w	t(1)	t(2)	t(3)=T
1	-	-	0,00
2	-	-	0,01
3	-	-	0,07
4	-	-	0,18
5	-	-	0,00
6	-	-	0,2
7	-	-	0,09
8	-	-	0,00

Tabela 4.5 – Matriz de Exercício Antecipado

Matriz de Decisão			
w	t(1)	t(2)	t(3)=T
1	-	-	0
2	-	-	1
3	-	-	1
4	-	-	1
5	-	-	0
6	-	-	1
7	-	-	1
8	-	-	0

Se a opção estiver (*in the money*) dentro do dinheiro no instante 2, há uma escolha entre exercer ou continuar com a opção até o vencimento. Dentre os caminhos simulados, apenas os caminhos 1, 3, 4, 6 e 7 deixam a opção dentro do dinheiro no instante 2. Seguindo a lógica dos autores, só serão considerados os caminhos dentro do dinheiro, onde o exercício é relevante. Para tal, X corresponde aos preços das ações no instante 2 e Y o valor descontado um período pela taxa livre de risco.

Tabela 4.6 – Regressão Linear em t=2

Regressão Linear em t=2		
w	Y	X
1	0,00 X 0,9418	1,08
2	-	out of the money
3	0,07 X 0,9418=0,0659	1,07
4	0,18 X 0,9418=0,1695	0,97
5	-	out of the money
6	0,20X 0,9418=0,1884	0,77
7	0,09 X 0,9418=0,0848	0,84
8	-	out of the money

A estimação do valor esperado de continuação está condicionado ao preço de S no instante 2 e é feita utilizando uma regressão linear de Y com relação a X e a X^2. Nesse caso específico do exemplo, para replicação dos resultados dos autores, utilizou-se o software R para obtenção da regressão polinomial truncando no segundo termo X^2. Através da regressão, obteve-se a expectância condicional ao valor de X no instante 2. A equação abaixo ilustra essa expectativa condicional

$$E[Y/X] = -1{,}070 + 2{,}983X - 1{,}813X^2 \qquad (4.9)$$

Substituindo os valores de X na função, obteve-se o valor de continuação para cada trajetória de preços. Comparando-se os valores de continuação aos de exercício, definiu-se a estratégia de exercício antecipado no instante 2, como ilustra o quadro abaixo.

Tabela 4.7 – Estratégia de Exercício no instante t=2

Estratégia De Exercício em t(2)					
w	Valor de Exercício	Valor de Continuação	Continuar	Exercer	Estratégia Ótima
1	1,10-1,08=0,02	V(1)=-1,07+2,983.(1,08)-1,813(1.08)^2=0,0369	0,0369	0,02	0
2	-	-	-		0
3	1,10-1,07=0,03	V(3)=-1,07+2,983.(1,07)-1,813(1.07)^2=0,0461	0,0461	0,03	0
4	1,10-0,97=0,13	V(4)=-1,07+2,983.(0,97)-1,813(0,97)^2=0,1176	0,1176	0,13	1
5	-	-	-		0
6	1,10-0,77=0,33	V(6)=-1,07+2,983.(0,77)-1,813(0,77)^2=0,1520	0,152	0,33	1
7	1,10-0,84=0,26	V(7)=-1,07+2,983.(0,84)-1,813(0,84)^2=0,1565	0,1564	0,26	1
8	-	-	-		0

Analisando a tabela acima, verifica-se que só é interessante o exercício no instante em que o valor de exercício é superior ao valor de continuar. Nesse caso as trajetórias 4, 6 e 7 apresentam valores superiores aos de continuar.

Tomando agora a nova de exercício antecipado formada.

Tabela 4.8 – Matriz Φ_{8x3}

Matriz de Decisão			
w	t(1)	t(2)	t(3)=T
1	-	0	0
2	-	0	1
3	-	0	1
4	-	1	1
5	-	0	0
6	-	1	1
7	-	1	1
8	-	0	0

Tabela 4.9 – Cálculo $(\Theta_{8x3}.\Phi_{8x3})$

Matriz de Decisão												
w	t(1)	t(2)	t(3)		t(1)	t(2)	t(3)		t(1)	t(2)	t(3)
1	-	0	0		0,01	0,02	0,00		-	0	0
2	-	0	1		0,00	0,00	0,00		-	0	0
3	-	0	1		0,00	0,03	0,07		-	0	0,07
4	-	1	1	x	0,17	0,13	0,18	=	-	0,13	0
5	-	0	0		0,00	0	0		-	0	0
6	-	1	1		0,34	0,33	0,2		-	0,33	0
7	-	1	1		0,18	0,26	0,09		-	0,26	0
8	-	0	0		0,22	0	0		-	0	0

Se a opção for exercida no instante 2, necessariamente o fluxo de caixa resultante em t=3 será igual a zero. Para a análise no instante 1 é importante observar com cuidado a matriz de trajetórias. Serão definidos Y_s como os fluxos de caixa reais descontados pela taxa livre de risco. X representa os preços do ativo S no instante t=1. A matriz abaixo mostra os valores de X e Y.

Tabela 4.10 – Regressão Linear em t=1

Regressão Linear em t=1		
w	Y	X
1	0,00 X 0,9418	1,09
2	-	out of the money
3	-	out of the money
4	0,13 X 0,9418	0,93
5	-	out of the money
6	0,33X 0,9418	0,76
7	0,26 X 0,9418	0,92
8	0,00 X 0,9418	0,88

O procedimento de cômputo da expectância condicional é similar ao feito no instante t=2, ou seja, faz-se a regressão para X e X^2. Segue abaixo a equação estimada.

$$E[Y/X] = 2{,}038 - 3{,}335X + 1{,}356X^2 \tag{4.10}$$

Substituindo os valores de X na função, obtêm-se o valor de continuação para cada trajetória de preços. Comparando-se os valores de continuação aos de exercício, define-se a estratégia de exercício antecipado no instante 1, como ilustra o quadro abaixo.

Tabela 4.11 – Estratégia de Exercício no instante t=1

Estratégia De Exercício em t(1)					
w	Valor de Exercício	Valor de Continuação	Continuar	Exercer	Estratégia Ótima
1	1,10-1,09=0,01	V(1)=2,038-3,335.(1,09)+1,356(1.09)2=0,0139	0,0139	0,01	0
2	-	-	-		0
3	-	-	-		0
4	1,10-0,93=0,17	V(4)=2,038-3,335.(0,93)+1,356(0,93)2=0,1092	0,1092	0,17	1
5	-	-	-		0
6	1,10-0,76=0,34	V(6)=2,038-3,335.(0,76)+1,356(0,76)2=0,2866	0,2866	0,34	1
7	1,10-0,92=0,18	V(7)=2,038-3,335.(0,92)+1,356(0,92)2=0,1175	0,1175	0,18	1
8	1,10-0,88=0,22	V(8)=2,038-3,335.(0,88)+1,356(0,08)2=0,1533	0,1533	0,22	1

Analisando a tabela acima, verifica-se que só é interessante o exercício no instante em que o valor de exercício é superior ao valor de continuar. Para as trajetórias 4, 6 , 7 e 8, é ótimo exercer no instante t=1 .

Tomando agora a nova matriz de exercício antecipado formada.

Tabela 4.12 – Matriz de Exercício Antecipado Resultante

w	t(1)	t(2)	t(3)
1	0	0	0
2	0	0	0
3	0	0	1
4	1	0	0
5	0	0	0
6	1	0	0
7	1	0	0
8	1	0	0

Cálculo do valor da opção de venda

$$Put = \frac{1}{N}\sum_{w=1}^{N}[\ \sum_{i=1}^{L} e^{-r.t_i}(\Theta_{wi}.\Phi_{wi})] \tag{4.11}$$

$$Put = \frac{1}{8}\sum_{w=1}^{8}[\ \sum_{i=1}^{3} e^{-r.t_i}(.\Pi_{wi})] = 0{,}1144 \tag{4.12}$$

$$\therefore \Pi_{8x3} = (\Theta_{8x3}.\Phi_{8x3})$$

Tabela 4.13 – Matriz de Decisão

Matriz de Decisão												
w	t(1)	t(2)	t(3)		t(1)	t(2)	t(3)		t(1)	t(2)	t(3)
1	0	0	0		0,01	0,02	0,00		0	0	0
2	0	0	0		0,00	0,00	0,00		0	0	0
3	0	0	1		0,00	0,03	0,07		0	0	0,07
4	1	0	0	x	0,17	0,13	0,18	=	0,17	0	0
5	0	0	0		0,00	0,00	0,00		0	0	0
6	1	0	0		0,34	0,33	0,2		0,34	0	0
7	1	0	0		0,18	0,26	0,09		0,18	0	0
8	1	0	0		0,22	0,00	0,00		0,22	0	0

4.1.4
Determinação do Gatilho

A determinação da curva de gatilho é essencial para precificação de opções reais, independente do método a ser utilizado, pois é necessário determinar o “timing” exato de exercer a opção de investimento. Na aplicação em opções reais no capítulo 5 utilizar-se-ão alguns modelos para determinação dessa curva. Frota 2003 sugere um método para determinação da Curva de Gatilho, que seria o cálculo das raízes da função abaixo:

$$f(S_{t_i}) = \hat{V}_{t_i} - C_{t_i} = \left[a_0 + a_{i1}.S_{t_i} + a_{i2}.(S_{t_i})^2 + \ldots\right] - \left[S_{t_i} - X\right] \tag{4.13}$$

Tal abordagem foi implementada pelo autor no programa em VBA, e o seu resultado será confrontado com o obtido por outros métodos como: Aproximação Analítica de Bjerksund.

4.2
Avaliação de Opções Reais pela metodologia de André Gamba (2003)

Esse tópico busca expor de forma objetiva e sucinta a modelagem para o problema de opções reais proposto por Gamba (2003). Tal abordagem foi apresentada por Araujo (2005) e será complementada com um exemplo numérico. O autor aborda tal tema utilizando o método de Mínimos Quadrados de Monte Carlo, resumindo um problema de OR em um portfólio de opções simples interligadas. Para tal abordagem, é preciso que sejam respeitadas algumas peculiaridades das opções contidas no projeto, classificadas em: independentes, mutuamente exclusivas e compostas. A seguir será exposto um exemplo numérico baseado no algoritmo do LSM elaborado pelo próprio autor de forma a exemplificar o funcionamento do algoritmo proposto por Gamba(2003).

4.2.1
Opções Independentes

O caso da opção independente pode ser considerado o mais simples dentro desta abordagem. O valor de qualquer opção do portfólio não é influenciado pelo exercício de outra opção. Desse modo, o somatório de cada opção individualmente representa o valor total do portfólio.

Considerou-se como exemplo o seguinte caso:

H opções com prazo de vencimento T_h, com valor $F_h(t, Xt)$, onde X representa a o fator de risco. No caso de mais de um fator de risco, considera-se um vetor Xt. Representa-se o exercício independente de todas as opções do portfólio como uma opção cuja função de preço é determinada por:

$$G(t, X_t) = \sum_{h=1}^{H} F_h(t, X_h) \tag{4.14}$$

Considera-se nessa abordagem que as incertezas técnicas (qualidade de um poço de petróleo) e as incertezas provenientes da variável de estado (preço do petróleo e taxa de câmbio, por exemplo) são estocasticamente independentes. Com isso, assume-se a premissa de que a probabilidade de um evento técnico afetar o projeto é conhecida. Conjectura-se que o evento tem N possibilidades de ocorrência e a probabilidade da ocorrência de cada caso obedeça a algumas propriedades específicas, sendo elas:

- $p_n > 0$;
- $\sum_{n=1}^{N} p_n = 1$

Outra premissa assumida é a de que no período de tempo $T` < T_l$, não existe mais incerteza técnica e, assim, calcula-se o valor da opção como:

$$G(t, X_t) = e^{-r(T'-t)} \sum_{n=1}^{N} \sum_{h=1}^{H} p_n E_t^*[F_h(T', X_T)] \tag{4.15}$$

onde $E_t^*[.]$ representa a expectância condicionada às informações disponíveis no instante t, assumindo um processo de neutralidade ao risco. O exercício das opções continuaria obedecendo às regras convencionais de exercício. As opções do tipo americana poderiam ser exercidas a partir do instante T' até o instante T_h. Já as opções européias serão exercidas no instante T_h.

4.2.2
Opções Compostas

O caso da opção independente, muito embora seja o mais simples, muitas vezes não representa fielmente o que acontece na vida prática. Isso acontece por que pode existir interação entre os participantes de um determinado mercado. Nesse contexto, o exercício de opções por um dos participantes pode afetar o valor das opções de outros participantes. Soma-se a esse fato, a possibilidade de o exercício de uma opção gerar outra opção. Este fato é muito comum em exploração e produção em blocos de petróleo onde os investimentos são realizados em seqüência, ou seja, à medida que vão sendo reveladas as informações sobre o prospecto geram-se opções com possibilidade de exercício em caso de sucesso. Assim, o valor da opção anterior depende das opções seguintes.

Seja H as opções existentes num determinado portfólio com prazo de vencimento em T_h com valor $F_h(t, Xt)$ de cada opção determinado por:

- 0 se $t > T_h$ (quando a opção não puder mais ser exercida)
- $\max\limits_{se(t,T_h)} \left\{ e^{-r(s-t)} E_t^*[\prod_h (s, X_s) + F_{h+1}(s, X_s)] \right\}$ se $t \leq T_h$ e a opção for americana;
- $e^{-r(T_h - t)} E_t^*[\prod_h (T_h, X_{T_h}) + F_{h+1}(T_h, X_{T_h})]\}$ se $t \leq T_h$ e a opção for do tipo européia.

Nesse contexto F_{n+1} pode ser o valor de uma opção, o valor de várias opções independentes com a mesma data de vencimento, o valor esperado de opções que estarão disponíveis ate que alguma incerteza técnica se dissipe ou a mais vantajosa dentre uma série de opções mutuamente exclusivas.

4.2.3
Opções Mutuamente Exclusivas

Seja H o conjunto de opções no qual apenas uma opção pode ser exercida. Seja T_h a data de vencimento de cada uma das opções e seja $F_h(t, Xt)$ o valor do projeto no instante t. Até um instante $T_{máx}$, que compreende ao valor máximo do intervalo $(T_1,...,T_h)$, o detentor dos direitos decidirá a melhor opção disponível dentre as existentes tais como: Continuar, Expandir, Abandonar, e ainda o melhor instante de exercício dessas opções. Dada a irreversibilidade do exercício da opção, ao exercer a opção, todas as outras deixariam de existir. Faz-se necessário para tal abordagem que exista no portfólio pelo menos uma opção do tipo americana.

O valor da opção é dado por

$$G(t, X_t) = \max_{(s,h)} \left\{ e^{-r(s-t)} E_t^*[F_h(s, X_s)] \right\} \tag{4.16}$$

Onde s varia entre T e $T_{máx}$. Se todas as opções forem européias, a escolha da melhor opção automaticamente resultará na escolha da data de exercício.

Apesar da escolha da melhor opção ser realizada no instante inicial t, o seu exercício só ocorrerá no instante ótimo de exercício desta opção. Isso possibilita que, antes desta data, outra opção se torne mais valiosa e seja mais interessante exercê-la no lugar da opção originalmente escolhida.

4.3
Método LSM aplicado em Opções Reais

A aplicação do método LSM às opções reais é muito semelhante ao das opções financeiras, ou seja, começa-se dividindo o horizonte de tempo T em N intervalos, onde T é a data de expiração da opção. Logo, são simuladas as “k” trajetórias para as variáveis de estado X. A notação $X_t(w)$ representa o vetor de valores das variáveis de estado em um determinado instante t na trajetória w e $F(t, X_t(w))$ o valor da opção para o mesmo período e trajetória.

A regra de decisão será a de comparar o payoff do exercício imediato $F(t, X_t(w))$ com o valor de continuação $\Phi(t, X_t(w))$. Caso o primeiro seja maior o investidor exerce sua opção. Essa sistemática é feita para cada uma das trajetórias simuladas. O valor de manter a opção "viva" em t corresponde ao valor da opção no instante $t+1$ descontado até t e é representado pela seguinte equação:

$$\Phi(t, X_t) = e^{-r\Delta t} E_t^*[F(t+\Delta t, X_{t+\Delta t}) / I_t] \tag{4.17}$$

Onde I_t corresponde ao conjunto das informações relevantes no instante t disponível para tomada de decisão.

A intuição por trás da abordagem do LSM é a obtenção da data de exercício ótimo de uma opção americana. Já o valor da opção é calculado pela seguinte equação:

$$F(t, X_t) = Max\{\Pi(t, X_t), \Phi(t, X_t)\} \tag{4.18}$$

Aqui também o valor da opção é dado pela média de todos os fluxos de caixa de exercícios ótimos descontados até o instante inicial. A sua fórmula é:

$$F(0, X_0) = \frac{1}{K}\sum_{w=1}^{K} e^{-rt^*(w)}\Pi(t^*(w), X_{t^*(w)}(w)) \tag{4.19}$$

Onde $t^*(w)$ é a data de exercício ótimo da opção na trajetória *w*.

O que torna o LSM aplicado a opções financeiras diferente do aplicado a opções reais, é como calcular o valor de continuação para depois formular as regras de decisão. A idéia encontrada foi que, se a opção ainda não foi exercida, o valor de continuação (Φ) é a esperança, condicionada às informações naquela data do *payoff* ótimo futuro da opção.

Como Φ pertence a um espaço vetorial linear, pode-se fazer a seguinte operação:

$$\Phi(t, X_t) = \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j(t) L_j(t, X_t) \tag{4.20}$$

Onde, L_j é o elemento *j* na base ortonormal. Usando somente $J < \infty$ elementos na base e estimando $\Phi^j(t)$ através da regressão linear dos mínimos quadrados, chega-se à seguinte aproximação para o valor de continuação:

$$\hat{\Phi}^J(t, X_t) = \sum_{j=1}^{J} \hat{\phi}_j(t) L_j(t, X_t) \tag{4.21}$$

Foi mostrado que essa metodologia converge para o seu “valor verdadeiro” de continuação à medida que se aumenta o intervalo de tempo N, o número k de simulações e as funções básicas. Com isso, esse método pode ser aplicado a vários casos de opções reais. Para este trabalho será feita uma aplicação para opções mutuamente exclusivas.

4.3.1
LSM e Opções Mutuamente Exclusivas

Seja H o conjunto de opções mutuamente exclusivas onde apenas uma delas pode ser exercida de cada vez. Essas opções podem ser de expansão, contração e abandono, por exemplo. Também podem existir vários tipos de cada uma delas. Seja agora $\prod_h$ e T_h o *payoff* e a data de expiração de cada uma das opções respectivamente e $F(t, X_t)$ o valor no instante *t*.

Com isso, o investidor vai ter que escolher até a data de vencimento a melhor opção para investir num instante de tempo qualquer *t*. Como a decisão de exercer a opção é irreversível, o investidor vai achar interessante adiar ao máximo, no intuito de manter todas as opções “vivas” o maior tempo possível.

O valor da oportunidade de escolha $G(t, X_t)$ da melhor opção dentre todas existentes será dado pela seguinte equação:

$$G(t, X_t) = \max_{(s,h)} \left\{ e^{-r(s-t)} E_t^* \left[F_h(s, X_s) \right] \right\} \tag{4.22}$$

Onde *s* é um instante de tempo genérico entre a data inicial (*t*) e de vencimento (*T*). Caso as opções sejam do tipo européias a escolha da melhor opção se dará na data de vencimento.

Enfim, suponha um instante *s* onde existem 3 opções: h_1 = abandono, h_2 = contrair, h_3 = expandir. O valor de continuação será dado pela regressão. O método LSM vai avaliar nesse instante *s,* primeiramente, qual das opções disponíveis (h_1, h_2 ou h_3) apresenta maior valor no futuro, sendo em seguida trazido a tempo presente para que possa ser comparado com o valor de exercício imediato, onde se terá a conclusão de exercício ou manutenção da opção "viva". Essa sistemática é feita em todo intervalo de tempo $t < s \leq T$.

4.4
Exemplo Numérico utilizando o modelo de Gamba (2003)

Primeiramente, é necessário definir as variáveis básicas e o processo estocástico do ativo objeto, com os seus respectivos parâmetros. Depois é necessário definir quais os tipos de opção que estarão disponíveis para a execução do projeto no processo de decisão ao longo do período. Nesse exemplo é possível estabelecer algumas opções que sejam mutuamente exclusivas e que sejam exercidas em um único instante, a partir da qual cessa o direito a quaisquer outras opções.

Parâmetros do Projeto de Investimento

Investimento: R$ 5.100.000,00

Valor Inicial do Projeto: R$ 5.000.000,00

Taxa Livre de Risco: 5%

Prazo de Vencimento da Opção: 3 anos

Taxa de Dividendos: 0%

Parâmetros Básicos do Processo Estocástico

Movimento Geométrico Browniano

Drift: 5%

Sigma: 20%

Opções Disponíveis para Decisão

Por simplicidade consideram-se apenas 3 opções básicas para o gestor. Pode expandir, contrair ou abandonar seu projeto.

Opção de Abandonar o Projeto: Caso ocorra o cenário desfavorável, estabelece-se um valor pré-determinado que assegure um nível mínimo de recebimento residual.

Valor Opção de Abandono: A (função característica)

Opção de Expandir o Projeto: Essa opção dá o direito de expandir suas atividades, similar a uma opção de compra (call), permitindo assim aumentar suas atividades caso o cenário seja favorável e alavancar seus ganhos.

Valor Opção de Expandir $\omega.X - I$ (função característica), sendo ω um fator de sensibilidade da expansão.

Opção de Contrair o Projeto: Essa opção dá o direito à empresa de reduzir o nível de produção por meio da diminuição de sua capacidade ou por meio da venda de parte do projeto para outra empresa por um determinado valor. Esta opção é valiosa em cenários desfavoráveis.

Valor Opção de Contrair: $\gamma.X + R$ (função característica), sendo γ o fator de contração.

O quadro abaixo ilustra as 3 opções disponíveis adotando um fator de expansão de 10% e de contração de 50%.

MGB Neutro ao Risco $$dX = (r - \delta - \frac{\sigma^2}{2}).dt + \sigma.\sqrt{dt}.N(0,1)$$

O método utiliza a programação dinâmica como técnica de determinação das decisões ótimas do projeto em cada instante. Para isso parte-se da seguinte decisão: exercer a opção ou não exercer a opção/continuar. A decisão ótima irá comparar o valor de continuação com o valor de exercer a opção, sendo que continuar pode tomar dois valores, dependendo do instante que está sendo considerado:

O processo de avaliação da opção é (*backward*) começando no nó terminal, sendo X(T) o valor de continuação. No nó intermediário E[Y/X(t)] é o valor de continuação (este valor é obtido considerando a regressão entre o valor presente (em t) dos (*payoffs*) das decisões tomadas posteriormente à t com o valor de todas as informações relevantes disponíveis na data em que se está avaliando a opção que no caso será de X(t) – dado que pressupõe que o ativo objeto segue um processo de Markov. (t<T)

Em cada nó devemos considerar a seguinte decisão:

Nos nós final e intermediário a condição de exercício é dada pela função:

$$Máx[Continuar, Abandonar, Expandir, Contrair].$$

Segue abaixo a construção da análise passo a passo:

A análise de opções mutuamente exclusivas é feita utilizando o mesmo principio do exemplo exposto no tópico 4.1.3. A diferença essencial é a matriz de decisão que engloba múltiplas opções. O primeiro passo é simular os cenários para o projeto.

Tabela 4.14 – Simulação do Valor do Projeto

Realização	0	1	2	3
1	5000	4215	4897	4090
2	5000	5084	4433	4183
3	5000	5586	6048	4920
4	5000	4500	3813	5468
5	5000	4214	3662	2784
6	5000	5058	6604	8050
7	5000	4753	4309	3787
8	5000	5423	6534	7961
9	5000	6059	7285	6041
10	5000	6382	8248	6716

Posteriormente é necessário calcular os (*payoffs*) do nó t=T., que para o exemplo, se dá no instante de tempo igual a 3. Tais valores foram calculados baseando-se nos valores determinados pela equação 4.30 acima.

Tabela 4.15 – Valores das Opções do Projeto

Realização	NÃO EXERCE	ABANDONO	EXPANSÃO	CONTRAÇÃO
1	4090	4500	3999	4295
2	4183	4500	4101	4341
3	4920	4500	4912	4710
4	5468	4500	5514	4984
5	2784	4500	2563	3642
6	8050	4500	8354	6275
7	3787	4500	3666	4144
8	7961	4500	8257	6231
9	6041	4500	6145	5270
10	6716	4500	6887	5608

Os valores foram calculados a partir da função de gatilho determinada acima. A partir dessa função cada valor é comparado e assim define-se a política ótima de exercício no instante t=3. Em cada realização decide-se a ação ótima. Abaixo segue o valor encontrado bem como a ação ótima nesse instante de tempo.

Tabela 4.16 – Definição do Valor da Estratégia Ótima

Realização	AÇÃO ÓTIMA	FLUXO DE CAIXA
1	ABANDONAR	4500
2	ABANDONAR	4500
3	CONTINUAR	4920
4	EXPANDIR	5515
5	ABANDONAR	4500
6	EXPANDIR	8350
7	ABANDONAR	4500
8	EXPANDIR	8250
9	EXPANDIR	6140
10	EXPANDIR	6890

Calcular os pay-offs, do nó t-1, que nesse caso, é o instante t=2.

Tabela 4.17 – Valor do Projeto no instante imediatamente inferior a T

Realização	0	1	2	3
1			4897	
2			4433	
3			6048	
4			3813	
5			3662	
6			6604	
7			4309	
8			6534	
9			7285	
10			8248	

Agora o valor de continuação é calculado através da regressão, e valerá E[Y/X]. As outras funções continuam sendo avaliadas com as funções especificadas na equação acima. Y = Valores extraídos da Matriz de Fluxo de Caixa atualizados no tempo pela seguinte equação $Y = \sum_{t+1}^{T} FC_t . e^{-r(T-t)}$

X = Valores extraídos das Realizações dos Processos Estocásticos do Ativo Objeto.

Tabela 4.18 – Vetores da Regressão

Realização	X(t=2)	Y
1	4897	4280
2	4433	4280
3	6048	4680
4	3813	5250
5	3662	4280
6	6604	7945
7	4309	4280
8	6534	7850
9	7285	5840
10	8248	6550

Após a regressão, utilizando um polinômio de segundo grau $E(X/Y) = \alpha_0 + \alpha_1 X + \alpha_2 X^2$, obtêm-se o valores de continuação.

Tabela 4.19 – Valor de Continuação obtido na regressão

Realização	E(Y/X)
1	5210
2	4825
3	6010
4	4250
5	4100
6	6315
7	4715
8	6280
9	6615
10	6900

Agora analisando a estratégia ótima no instante t=2 seguindo a mesma função anterior têm-se:

Tabela 4.20 – Estratégias Ótimas no instante t=2

Realização	Continuar	Expandir	Contrair	Abandonar
1	5210	4885	4700	4500
2	4825	4375	4465	4500
3	6010	6150	5270	4500
4	4250	3690	4155	4500
5	4100	3525	4080	4500
6	6315	6760	5550	4500
7	4715	4235	4400	4500
8	6280	6685	5515	4500
8	6615	7510	5890	4500
10	6900	8570	6370	4500

Dados a possibilidade de exercício imediato nos instantes anteriores aos nós finais, a matriz de exercício nessa transição do instante t=3 para o t=2 será:

Tabela 4.21 – Resultados obtidos após a definição da estratégia ótima

Realização	2	3
1	0	4500
2	0	4500
3	6150	0
4	4500	0
5	4500	0
6	6760	0
7	0	4500
8	6685	0
9	7510	0
10	8570	0

Assim, a matriz de decisão, nos seguintes instantes será:

Tabela 4.22 – Decisão ótima

Realização	2	3
1	Continuar	Abandonar
2	Continuar	Abandonar
3	Expandir	0
4	Abandonar	0
5	Abandonar	0
6	Expandir	0
7	Continuar	Abandonar
8	Expandir	0
9	Expandir	0
10	Expandir	0

Agora, faz-se a mesma análise do instante t=2 para instante t=1.

Tabela 4.23 – Vetores da Regressão Linear

Realização	X(T=2)	Y
1	4215	4070
2	5084	4070
3	5586	5850
4	4500	4495
5	4214	4210
6	5058	5050
7	4753	4750
8	5423	5420
9	6059	6055
10	6382	6380

Após regressão obtêm-se o valor de continuação.

Tabela 4.24 – Valor de Continuação

Realização	X(T=2)
1	4070
2	5160
3	6120
4	4350
5	4070
6	5115
7	4660
8	5780
9	7245
10	8140

Após essa regressão obtêm-se os exercícios ótimos em cada instante de tempo.

Tabela 4.25 – Valores da Estratégia Ótima

Realização	1	2	3
1	4500	0	0
2	0	0	4500
3	0	6150	0
4	4500	0	0
5	4500	0	0
6	0	6760	0
7	4730	0	0
8	0	6685	0
8	0	7510	0
10	0	8570	0

Abaixo têm-se a ação ótima sob incerteza a ser tomada em cada instante do tempo.

Tabela 4.26 – Estratégia Ótima

Realização	1	2	3
1	Abandonar		
2	Continuar	Continuar	Abandonar
3	Continuar		
4	Abandonar		
5	Abandonar		
6	Continuar		
7	Expandir		
8	Continuar		
8	Continuar		
10	Continuar		

Assim a partir dos (*pay-offs*) resultantes do exercício ótimo em cada instante de tempo trazidos a valor presente pela taxa de desconto, obtêm-se a partir da equação (4.23) o valor do projeto com a opção

$$V_{COM\_OPÇÃO} = \frac{\sum_{t+1}^{T} P_T . e^{-r.(T-t)}}{N} \qquad (4.23)$$

Tabela 4.27 – Pay-off da Matriz Resultante

Realização	Valor Presente	1	2	3
1	4280	4500	-	-
2	3870	-	-	4500
3	5570	-	6150	-
4	4280	4500	-	-
5	4280	4500	-	-
6	6120	-	6760	-
7	4495	4730	-	-
8	6050	-	6685	-
8	6795	-	7510	-
10	7755	-	8570	-
MÉDIA	5350			

O valor do projeto com a opção é de 5350. O valor inicial do projeto era de 5000 e calculou-se um valor para flexibilidade de 350. Essa abordagem para carteiras de múltiplas opções proposta por Gamba (2003) representa uma inovação importante para a teoria de opções reais. Ela utiliza-se do mecanismo proposto por Longstaff e Schwartz (2001) e incorpora flexibilidades importantes ao método. Como exemplificado acima o calculo é relativamente simples, pois, modifica-se apenas a função do nó terminal e as decisões múltiplas por período. Os demais passos são calculados da mesma forma que o proposto por Longstaff e Schwartz (2001).