



**Cecilia Reis Englander Lustosa**

## **2-category and Proof Theory**

### **Dissertação de Mestrado**

Dissertation presented to the Postgraduate Program in Informatics of the Departamento de Informática, PUC-Rio as partial fulfillment of the requirements for the degree of Mestre em Informática.

Advisor: Prof. Edward Hermann Haeusler

Rio de Janeiro  
August 2009



**Cecilia Reis Englander Lustosa**

## **2-category and Proof Theory**

Dissertation presented to the Postgraduate Program in Informatics of the Departamento de Informática, PUC-Rio as partial fulfillment of the requirements for the degree of Mestre em Informática. Approved by the following commission:

**Prof. Edward Hermann Haeusler**

Advisor

Departamento de Informática — PUC-Rio

**Prof. Luiz Carlos Pereira**

Instituto de Filosofia – PUC-Rio

**Prof. Mario Benevides**

Departamento de Ciência da Computação –UFRJ

**Prof. Marcelo Correa**

Instituto de Matemática – UFF

**Prof. José Eugenio Leal**

Coordinator of the Centro Técnico Científico da PUC-Rio

Rio de Janeiro — August 20, 2009

All rights reserved.

**Cecilia Reis Englander Lustosa**

Bibliographic data

Lustosa, Cecilia Reis Englander

2-category and Proof Theory / Cecilia Reis Englander  
Lustosa ; advisor: Edward Hermann Haeusler. — 2009.  
70 f ; il. ; 30 cm

Dissertação (Mestrado em Informática) – Pontifícia Uni-  
versidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2009.  
Inclui bibliografia

1. Informática – Dissertações. 2. dedução natural. 3.  
lógica intuicionista. 4. teoria das categorias. 5. 2-categoria.  
6. lógica categórica . 7. isomorfismo de curry-howard.  
I. Haeusler, Edward Hermann. II. Pontifícia Universidade  
Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Informática. III.  
Título.

CDD: 004

## Acknowledgments

Ao meu orientador, o Professor Hermann Haeusler, pela dedicação e amizade.

Ao CNPq e à PUC-Rio, pelos auxílios concedidos, sem os quais este trabalho não teria sido realizado.

À minha família, em especial à minha mãe e ao meu marido, que trilhou esse caminho comigo.

Ao pessoal da informática, em especial Pedro Maia e Jefferson Santos que muito me ajudaram.

## Abstract

Lustosa, Cecilia Reis Englander; Haeusler, Edward Hermann. **2-category and Proof Theory**. Rio de Janeiro, 2009. 70p. MSc. Dissertation — Departamento de Informática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Natural Deduction for intuitionistic logic has been related to Category Theory by what now is known as Categorical Logic. This relationship is strongly based on the Curry-Howard Isomorphism between Natural Deduction and typed  $\lambda$ -Calculus. This dissertation describes some aspects of these relationship with the aim of proposing a 2-categorical view of categorical logic. We show that even under this 2-categorical view some of the drawbacks already known in ordinary Category Theory remain holding. We conclude this dissertation discussing the advantages of 2-categorical view under some weaker assumptions.

## Keywords

natural deduction. intuitionistic logic. category theory. 2-category. categorical logic. curry-howard isomorphism.

## Resumo

Lustosa, Cecilia Reis Englander; Haeusler, Edward Hermann. **2-categoria e Teoria da Prova**. Rio de Janeiro, 2009. 70p. Dissertação de Mestrado — Departamento de Informática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Dedução Natural para a lógica intuicionista tem sido relacionada à Teoria das Categorias através do que agora é conhecido por Lógica Categórica. Essa relação é fortemente baseada no isomorfismo de Curry-Howard entre Dedução Natural e  $\lambda$ -Cálculo Tipado. Esta dissertação descreve alguns aspectos dessa relação com o objetivo de propor uma visão 2-categórica da Lógica Categórica. Mostramos que mesmo numa visão 2-categórica algumas desvantagens conhecidas na Teoria das Categorias continuam valendo. Concluimos essa dissertação discutindo as vantagens de uma visão 2-categórica a partir de premissas mais fracas.

## Palavras-chave

dedução natural. lógica intuicionista. teoria das categorias. 2-categoria. lógica categórica . isomorfismo de curry-howard.

# Contents

1	Introduction	8
2	Natural Deduction	10
2.1	Background and terminology	10
2.2	Structural reductions	18
2.3	Curry-Howard Isomorphism	20
3	Category Theory	24
3.1	The Curry-Howard Isomorphism	26
3.2	Categorical view of Proof Theory	30
3.3	Problems with the Curry-Howard Isomorphism	31
4	2-Category Theory	35
4.1	A proof-theoretical 2-category	37
4.2	Conjunction	38
4.3	Disjunction	47
4.4	Implication	54
4.5	2-initial object	61
4.6	Ekman's reduction	61
5	Conclusion	63
	Bibliography	64
A	Appendix	66
B	Appendix	68