

2

FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Neste capítulo descrevemos uma análise para o escoamento através de um canal formado por duas placas paralelas, supondo a ausência de deslizamento nas superfícies das placas em contato com o fluido. Mostraremos que a análise conduz a uma equação transcendental para a distribuição da taxa de cisalhamento (Eq. (2-6)), que impede uma solução analítica para este escoamento.

Portanto, utilizamos técnicas numéricas para a obtenção das curvas teóricas de vazão x pressão, que, conforme já dissemos, se referem à condição de não-deslizamento nas superfícies das placas revestidas.

2.1

Revisão Teórica

Fluidos são definidos como substâncias que se deformam continuamente sob ação de uma tensão de cisalhamento. Os fluidos podem ser classificados, de modo geral, de acordo com a relação entre a tensão de cisalhamento aplicada e a taxa de deformação (12).

Fluidos newtonianos são aqueles para os quais a tensão de cisalhamento é proporcional à taxa de deformação. A constante de proporcionalidade representada por μ é uma propriedade do fluido e é denominada viscosidade absoluta ou dinâmica.

Fluidos não newtonianos são aqueles os quais a tensão de cisalhamento não é diretamente proporcional à taxa de deformação. Existem diversos tipos de fluidos não newtonianos, neste trabalho trabalharemos com o tipo viscoplástico. Este fluido é extremamente viscoso até que uma tensão limítrofe, chamada de tensão limite de escoamento τ_0 , seja excedida, e subsequentemente apresentando então uma relação linear entre tensão cisalhante e taxa de deformação.

A viscosidade pode decrescer muitas ordens de grandeza em uma estreita faixa de tensão de cisalhamento. Pode haver uma queda da ordem de milhão na viscosidade para uma pequena região de crescimento da tensão cisalhante, da ordem de uma década ou até menor (3).

O ramo da mecânica dos fluidos que descreve a deformação de um corpo sob a influência de tensões é chamado de reologia. A reologia estuda as propriedades físicas que influenciam a forma e o fluxo do material, englobando variantes tais como viscosidade, plasticidade e elasticidade entre outras (22).

2.2

Formulação Matemática

A Figura 2.1 mostra a geometria a ser analisada. Como a folga h entre as placas paralelas é muito pequena (isto é, muito menor que o comprimento L e a largura W da placa), supõe-se um escoamento totalmente desenvolvido. Assim $u = u(y)$, $v = w = 0$.

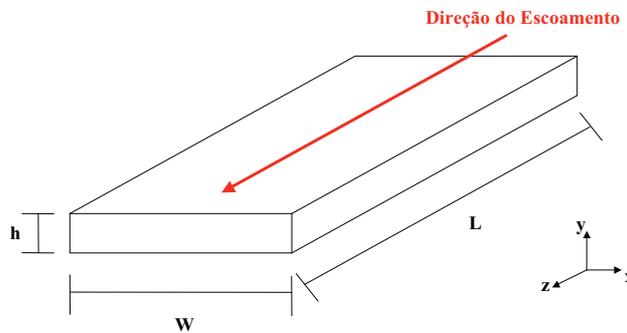


Figura 2.1: Dimensões do canal de escoamento.

Logo, um balanço de forças em um elemento definido fornece

$$\tau = -\frac{dp}{dz}y = \frac{\Delta p}{L}y \quad (2-1)$$

onde τ é a tensão cisalhante, p é a pressão, Δp é diferença de pressão, z é a coordenada na direção do escoamento, L é o comprimento da placa, e y a coordenada transversal, medida a partir do plano de simetria. Em particular, aplicando a Eq. (2-1) na superfície da placa (onde $y = h/2$), obtemos a seguinte expressão para a tensão cisalhante na superfície das placas, τ_w :

$$\tau_w = \frac{\Delta p}{L} \frac{h}{2} \quad (2-2)$$

A Eq. (2-2) permite calcular a tensão cisalhante na parede τ_w a partir de grandezas mensuráveis no laboratório, e portanto podemos considerar τ_w como uma grandeza conhecida.

Combinando as Eqs. (2-1) e (2-2), obtemos:

$$\tau = \tau_w \frac{2y}{h} \quad (2-3)$$

A Eq. (2-3) também permite determinar a distribuição em y da tensão cisalhante τ a partir de grandezas mensuráveis no laboratório, e portanto também podemos considerar $\tau(y)$ como uma distribuição conhecida.

Por outro lado, no escoamento investigado, os fluidos utilizados têm um comportamento mecânico bem representado pelo modelo do fluido newtoniano generalizado (4). Para este escoamento de cisalhamento, este modelo se reduz a:

$$\tau = \eta(\dot{\gamma})\dot{\gamma} \quad (2-4)$$

onde $\dot{\gamma}$ a taxa de cisalhamento, e $\eta(\dot{\gamma})$ a função viscosidade.

Usamos também aqui o modelo SMD (9) para a função viscosidade:

$$\eta = \left(1 - \exp\left[-\frac{\eta_o \dot{\gamma}}{\tau_o}\right]\right) \left(\frac{\tau_o}{\dot{\gamma}} + K\dot{\gamma}^{n-1}\right) \quad (2-5)$$

Conforme já mencionado, η_o é a viscosidade a baixíssimas taxas de cisalhamento, τ_o a tensão limite de escoamento, K o índice de consistência e n o índice de comportamento. Estas grandezas são obtidas a partir da curva de escoamento do fluido de interesse.

Combinando as Eqs. (2-3), (2-4) e (3-1), obtemos:

$$\tau_w \frac{2y}{h} = \left(1 - \exp\left[-\frac{\eta_o \dot{\gamma}}{\tau_o}\right]\right) (\tau_o + K\dot{\gamma}^n) \quad (2-6)$$

A Eq. (2-6) fornece a distribuição da taxa de cisalhamento, $\dot{\gamma}(y)$. Como não é possível explicitar $\dot{\gamma}$ em função de y , a distribuição $\dot{\gamma}(y)$ é obtida numericamente através do método de Newton.

Uma vez determinada a distribuição $\dot{\gamma}(y)$, pode-se obter a distribuição

da velocidade na direção do escoamento, $v_z(y)$, pois, da própria definição da taxa de cisalhamento, pode-se escrever:

$$\dot{\gamma} = -\frac{dv_z}{dy} \quad (2-7)$$

ou

$$v_z(y) = \int_y^{h/2} \dot{\gamma}(y') dy' \quad (2-8)$$

onde se impôs a condição de não-deslizamento nas superfícies das placas, isto é $v_z(h/2) = 0$. Esta integral é resolvida numericamente pela regra de Simpson.

Finalmente, a velocidade média é obtida através de:

$$\bar{v}_z = \frac{2}{h} \int_0^{h/2} v_z(y) dy \quad (2-9)$$

Esta integral, por sua vez, também é resolvida numericamente pela regra de Simpson.

Logo, esta análise permite a obtenção teórica da velocidade média \bar{v}_z em função da tensão cisalhante na parede τ_w , supondo a ausência de deslizamento nas superfícies das placas. Nota-se que, nos experimentos, medimos também \bar{v}_z em função de τ_w , mas em geral se observa deslizamento no laboratório. Portanto, a diferença entre a curva experimental e a teórica é uma medida do deslizamento que ocorre no laboratório.

A solução numérica das Eqs. (2-6), (2-8) e (2-9) é obtida utilizando uma malha não uniforme de 200 pontos nodais, mais concentrados na região adjacente à parede em que o material é efetivamente cisalhado.

2.3

Adimensionalização

A análise dimensional é uma importante ferramenta para facilitar a comparação dos experimentos realizados no laboratório com a prática em campo. Os parâmetros adimensionais obtidos são usados para correlacionar os dados, por exemplo, para poder comparar o escoamento real com o do modelo do laboratório, uma vez que são relacionados por leis de escala conhecidas. Para uma dada geometria e condições iniciais, o maior benefício de analisar um problema de mecânica dos fluidos na forma adimensional é a redução do número de parâmetros governantes.

Souza Mendes (8) sugeriu uma nova proposta para a adimensionalização de problemas envolvendo fluidos não newtonianos na qual a velocidade característica é relacionada com dados reológicos.

Com o objetivo de ampliar a sua faixa de aplicabilidade, os resultados (tanto os numéricos quanto os experimentais) são apresentados na forma adimensional (8). Para isso, utilizamos como comprimento característico a distância h entre as placas, como tensão característica a tensão limite de escoamento, τ_o , e como taxa de cisalhamento característica a grandeza $\dot{\gamma}_1$, definida por

$$\dot{\gamma}_1 = \left(\frac{\tau_o}{K} \right)^{\frac{1}{n}} \quad (2-10)$$

A velocidade característica utilizada é portanto $\dot{\gamma}_1 h$. Logo, a velocidade média e a tensão cisalhante na parede têm as seguintes formas adimensionais:

$$\bar{u}^* = \frac{\bar{v}_z}{\dot{\gamma}_1 h}; \quad \tau_w^* = \frac{\tau_w}{\tau_o} \quad (2-11)$$

Conforme já mencionamos, tanto os resultados numéricos quanto os experimentais são apresentados nesta forma adimensional $\bar{u}^* \times \tau_w^*$.

Uma outra grandeza adimensional de interesse é o número de salto J , uma propriedade reológica do fluido definida por

$$J = \frac{\dot{\gamma}_1 - \dot{\gamma}_o}{\dot{\gamma}_o}, \quad \text{onde} \quad \dot{\gamma}_o = \frac{\tau_o}{\eta_o} \quad (2-12)$$

O número de salto aparece quando adimensionalizamos a função viscosidade SMD, que toma a seguinte forma (9):

$$\eta^* = (1 - \exp[-(J + 1)\dot{\gamma}^*]) \left(\frac{1}{\dot{\gamma}^*} + \dot{\gamma}^{*n-1} \right) \quad (2-13)$$

onde

$$\eta^* = \frac{\eta \dot{\gamma}_1}{\tau_o}; \quad \dot{\gamma}^* = \frac{\dot{\gamma}}{\dot{\gamma}_1} \quad (2-14)$$

Comparando as Eqs. (3-1) e (2-13), observa-se que a adimensionalização reduz de 4 para 2 o número de parâmetros reológicos, a saber, de η_o , τ_o , K e n para J e n .

2.4 Resultados da Análise e Solução Numérica

Soluções numéricas foram obtidas para uma ampla faixa valores de n e J , para investigar a dependência das curvas $\bar{u}^* \times \tau_w^*$ com estes parâmetros reológicos. Esses resultados encontram-se nas Figs. 2.2 e 2.3.

Estes resultados mostram que, para um J fixo (Fig. 2.2), quanto maior o n (mais próximo ao newtoniano), mais rápido e brusco é o aumento de vazão quando a tensão cisalhante na parede atinge um valor igual à tensão limite de escoamento ($\tau_w^* = 1$), e menor é o crescimento subsequente (uma inclinação menor na curva).

Percebemos também que, para um n fixo (Fig. 2.3), quanto maior o J , maior e mais brusco é o aumento da vazão quando a tensão cisalhante na parede atinge um valor igual à tensão limite de escoamento ($\tau_w^* = 1$).

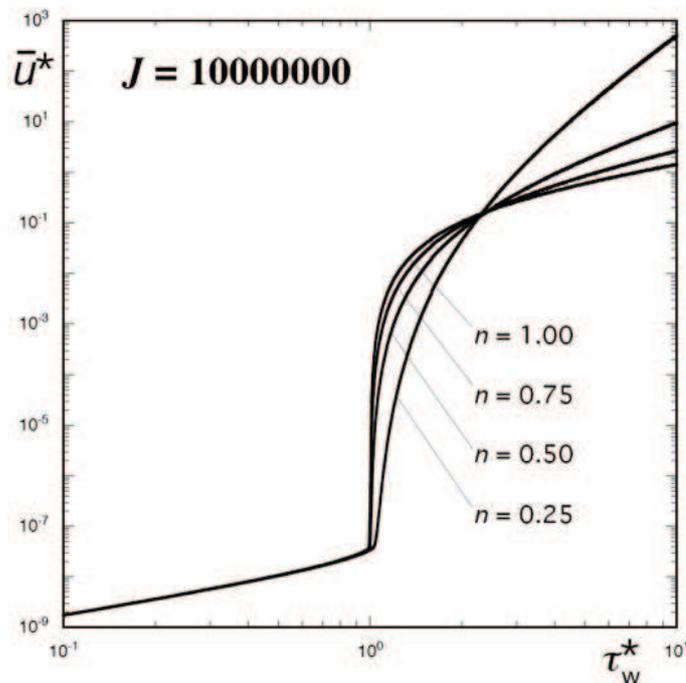


Figura 2.2: Velocidade média adimensional x Tensão cisalhante adimensional na parede – Efeito do n .

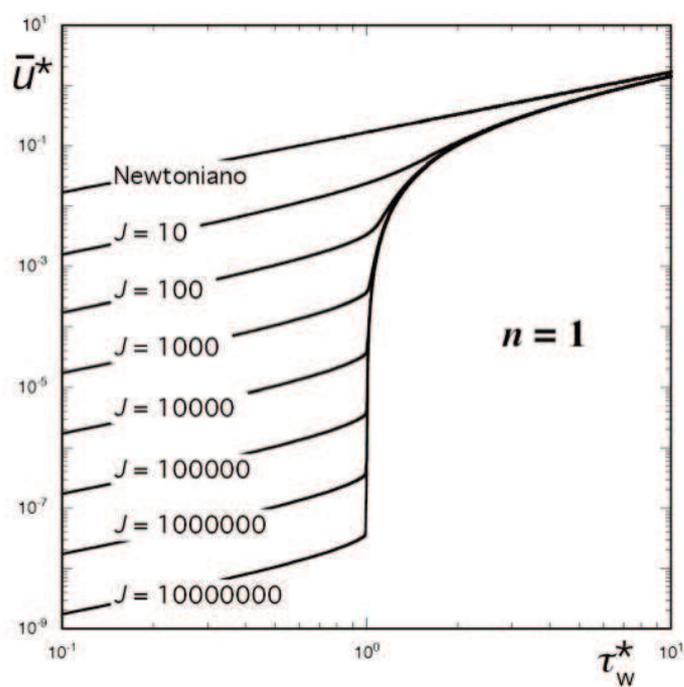


Figura 2.3: Velocidade média adimensional x Tensão cisalhante adimensional na parede – Efeito do J .