

## 4 Navegação Inercial (INS)

A fusão de sensores só pode ser realizada quando os mesmos medem a mesma variável, logo primeiramente é necessário a escolha do modelo sobre o qual irá se representar as medidas e em seguida fazer as correções necessárias para que as variáveis medidas sejam as mesmas. Este capítulo apresentará o modelo e os equacionamentos necessários para a fusão do GPS com o sensor inercial.

### 4.1. Modelo da Terra

O mundo possui formas irregulares e complexas, logo este é simplificado em um modelo sobre o qual se navega. A navegação via a fusão do sensor inercial com o GPS requer um modelo da Terra que inclua a forma, gravidade e rotação. O modelo utilizado será o definido pelo WGS 84, o qual é atualmente o melhor sistema geodésico de referência global para a Terra, definido pelo (Department of Defense World Geodetic System 1984 et. al., 2000).

Aplicações geodésicas trabalham com três superfícies distintas: a superfície topográfica da Terra, que é irregular; a superfície gerada pela revolução de uma elipsóide, que é a forma mais simplificada de aproximação da superfície terrestre, devido à sua simplicidade é a preferida para realizar a computação e definir as coordenadas do ponto como latitude, longitude e elevação; e a geóide, que é a superfície sobre a qual o potencial gravitacional é constante. As diferenças das três superfícies podem ser vistas na Fig. 39.

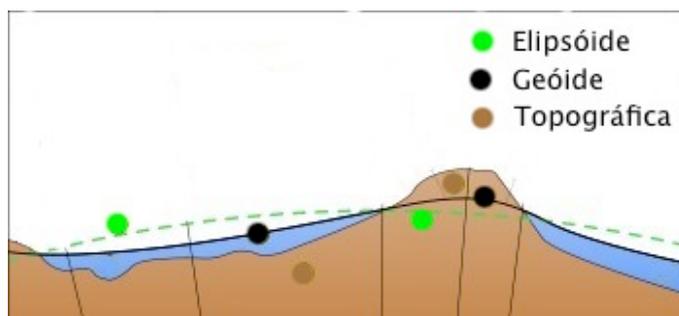


Figura 1 – Aproximações à superfície da Terra.

Nesta dissertação será utilizada como aproximação da superfície terrestre a revolução da elipsóide definida pelo WGS-84. Esta possui o raio equatorial de 6.378.137 metros e raio polar de 6.356.752,3142 metros, sendo o eixo e centro de revolução coincidentes com o eixo de rotação e centro de massa da Terra, respectivamente. Os parâmetros do WGS-84 utilizados neste trabalho encontram-se na Tab. 4.

**Tabela 4 – Parâmetros do WGS-84 (Department of Defense World Geodetic System 1984 et. al, 2000)**

Parâmetro	Notação	Valor
Raio Equatorial	$R_a$	6.378.137m
Raio Polar	$R_b$	6.356.752,3142m
Constante Gravitacional	$GM$	$3986004,418 \cdot 10^8 \text{m}^3/\text{s}^2$
Velocidade da Luz	$C$	299792458m/s
Gravidade no Equador	$g_0$	$9,780373 \text{m}/\text{s}^2$
Velocidade Angular da Terra	$\Omega$	$7,292115 \cdot 10^{-11} \text{rad}/\text{s}$

## 4.2. Sistemas de Coordenadas

Definido o modelo do meio sobre o qual irá se navegar, um sistema de coordenadas é estabelecido para representar cada ponto deste modelo unicamente. Existem alguns sistemas de coordenadas utilizados para calcular a solução da navegação GPS/INS, sendo estes ECI, ECEF, ENU, Medição e Corpo.

#### 4.2.1. Sistema Centrado e Fixo na Terra (ECEF)

O ECEF é centrado e fixo na Terra, possuindo seu centro coincidente ao centro de massa da Terra e rotacionando com a Terra, vide Fig. 40. O eixo X passa através do equador no meridiano de referência, o eixo Z através do pólo norte, e o eixo Y pode ser determinado pela regra da mão direita.

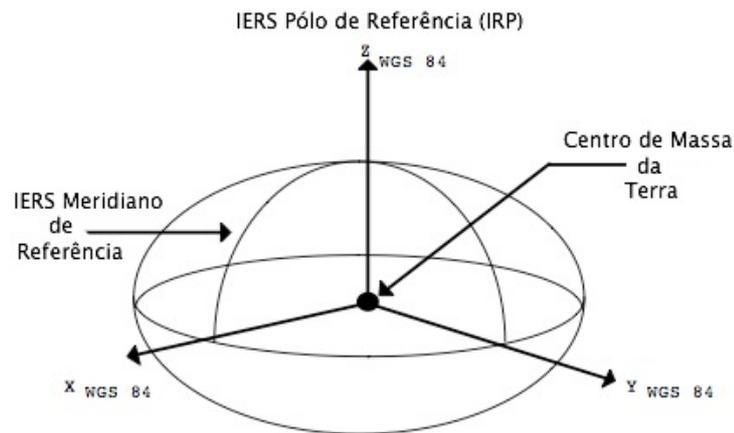


Figura 2 – Sistema de Coordenadas ECEF. (Department of Defense World Geodetic System 1984 et. al., 2000)

Um ponto sobre a superfície do modelo pode ser descrito em termos de Latitude ( $\Phi$ ), Longitude ( $\lambda$ ) e Altura ( $h$ ), vide Fig. 41. Latitude é o ângulo entre a normal à superfície de referência e o plano do equador. Longitude é o ângulo no plano equatorial entre as linhas que conectam o centro da Terra com o meridiano de referência e com o meridiano onde o ponto se encontra. Um meridiano é um caminho direto sobre a superfície de referência que é a menor distância entre os pólos. A altura é a menor distância do ponto à superfície de referência.

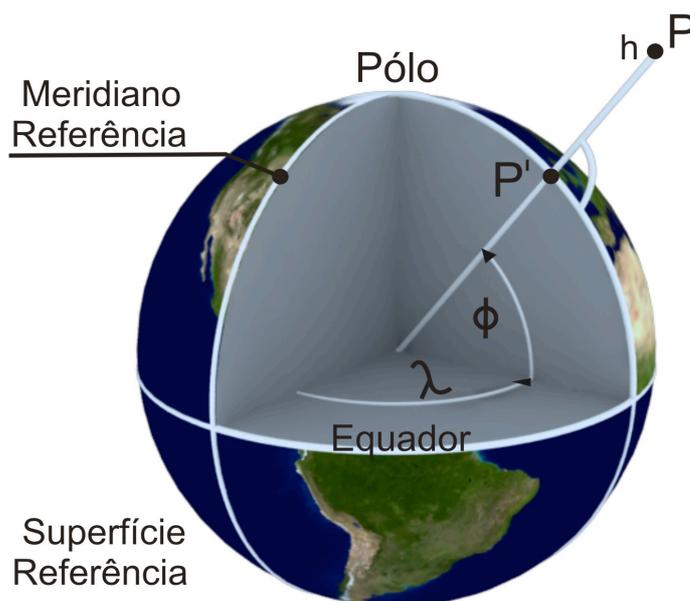


Figura 3 – Representação do Ponto em Latitude, Longitude e Altura.

#### 4.2.2. Sistema Inercial Centrado na Terra (ECI)

O ECI possui o seu centro coincidente ao centro de massa da Terra; o eixo  $X_{ECI}$  na direção do equinócio vernal; o eixo  $Z_{ECI}$  na direção paralela a rotação da Terra; e o eixo  $Y_{ECI}$  na direção que torna o sistema de coordenadas ortogonais e de mão direita, vide Fig. 42.

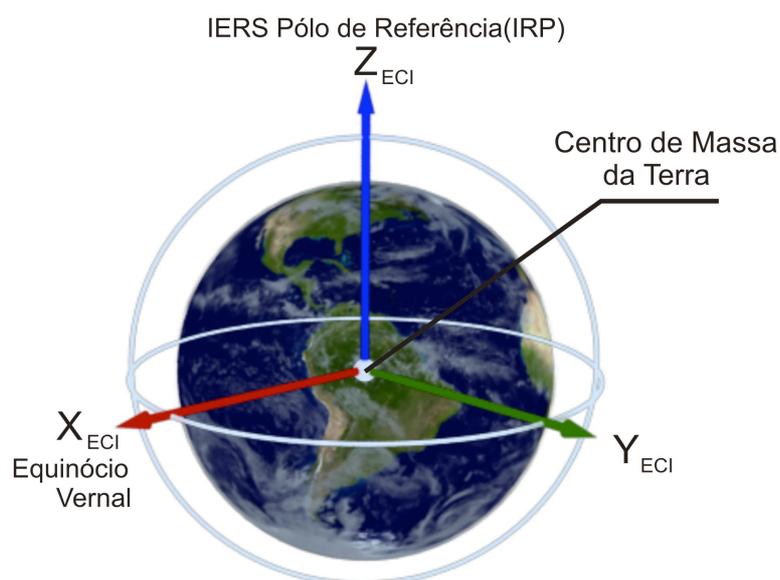


Figura 4 – Sistema de Coordenadas ECI

#### 4.2.3. Sistema Localmente Tangente (ENU)

No Sistema Localmente Tangente, a Terra é considerada localmente plana. Pode-se então construir um sistema de coordenadas auxiliar ENU, onde o eixo norte aponta na direção que a latitude cresce, o eixo leste aponta na direção em que a longitude cresce, e o eixo em cima aponta na direção que a altura cresce, vide Fig. 43.

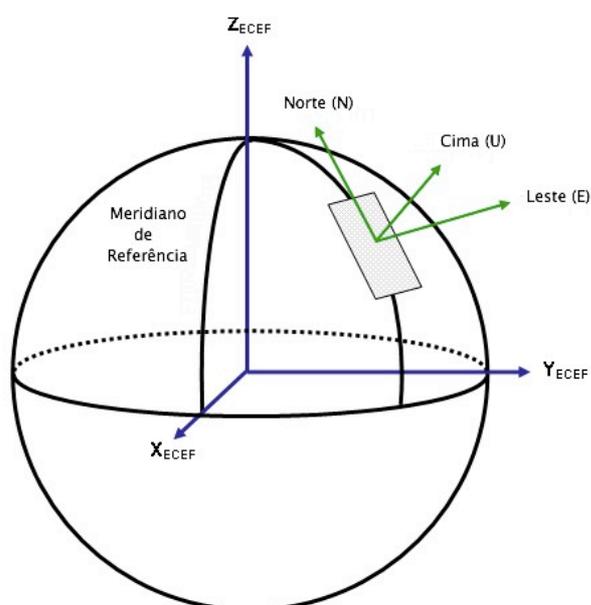


Figura 5 – Sistema de Coordenadas ENU

#### 4.2.4. Sistema Wander-Azimuth (NAV)

O sistema de navegação será o sistema de coordenadas Wander-Azimuth, o qual é relacionado ao sistema localmente tangente por uma rotação em Azimuth ( $\alpha$ ), vide Fig. 44. O ângulo  $\alpha$  é definido como o ângulo positivo entre o primeiro eixo do sistema localmente tangente, neste equacionamento o N, e o primeiro eixo do sistema de navegação (x). O sistema localmente tangente não será utilizado como sistema de navegação, pois este apresentaria uma singularidade ao se navegar sobre os pólos.

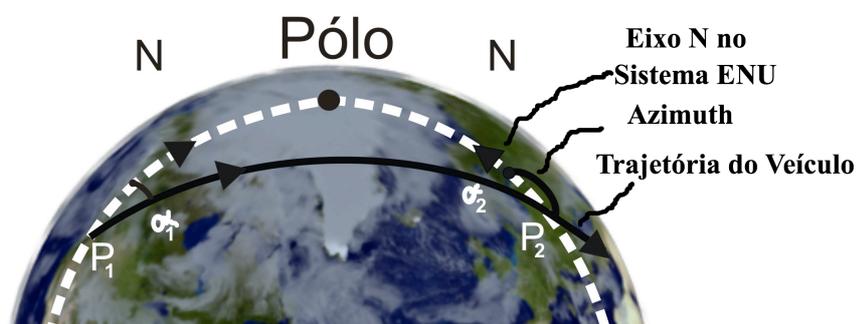


Figura 6 – Wander Azimuth

#### 4.2.5. Coordenadas do Corpo

O Sistema de Coordenadas do Corpo é fixo ao corpo do veículo. Utilizando a definição mais comumente encontrada na literatura, obtemos o eixo X apontando para a frente do veículo, Y para a direita e Z para baixo, como esquematizado na Fig 45. Neste sistema de coordenadas, rotações em torno dos eixos X, Y e Z são chamadas de Roll ( $\phi$ ), Pitch ( $\theta$ ) e Yaw ( $\psi$ ), respectivamente.

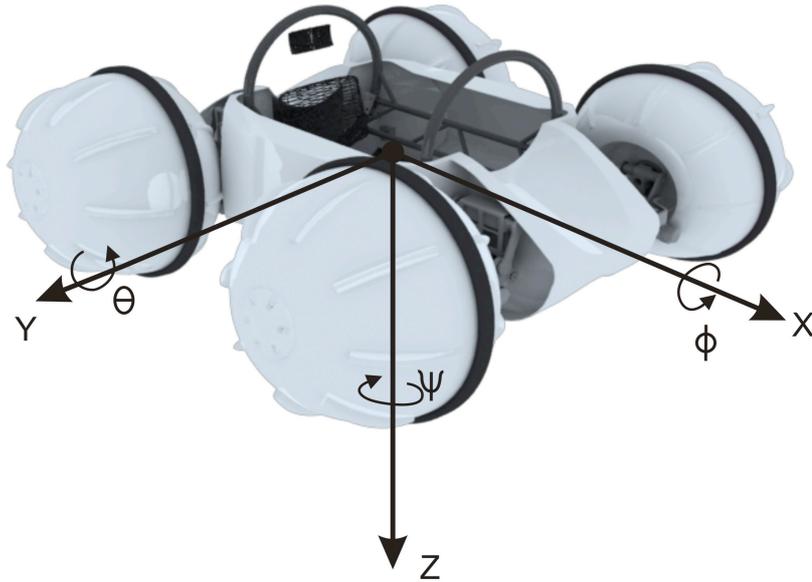


Figura 7 – Coordenadas do Corpo

#### 4.2.6. Coordenada de Medida

As medidas de aceleração e rotação do sensor inercial são feitas ao longo dos três eixos do sensor, estes compõem o Sistema de Coordenadas de Medida, como representado pela Fig. 46.

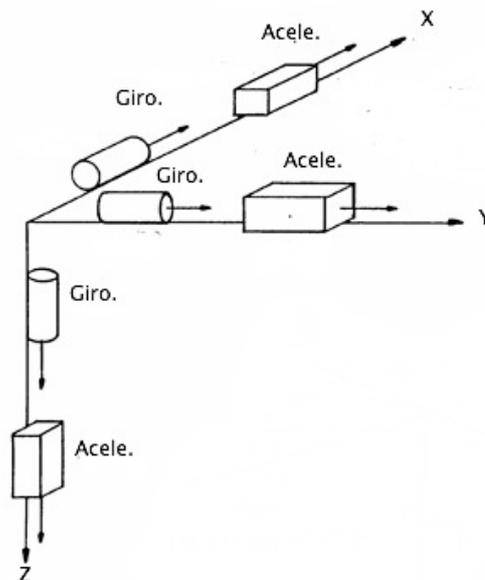


Figura 8 – Coordenadas da Medida

### 4.3. Navegação Inercial

A fusão do GPS com o sensor inercial através do filtro de Kalman requer que as mesmas variáveis sejam observadas por ambos os sensores. Logo, a simples integração do sensor inercial não resultará nas posições e velocidades observadas pelo GPS, sendo necessárias correções devido à forma e à rotação da Terra.

O diagrama de bloco, Fig. 47, mostra a computação necessária para se navegar inercialmente, sob o modelo da Terra definido anteriormente, utilizando um sensor inercial “*Strapdown*”. (BOSE et. al., 1982) apresenta este equacionamento e o do sensor inercial “*Guimbale*” em seu trabalho. Nas seções subsequentes cada diagrama de bloco será detalhado, verificando assim o equacionamento apresentado. As condições iniciais serão definidas e será calculado o erro da navegação inercial.

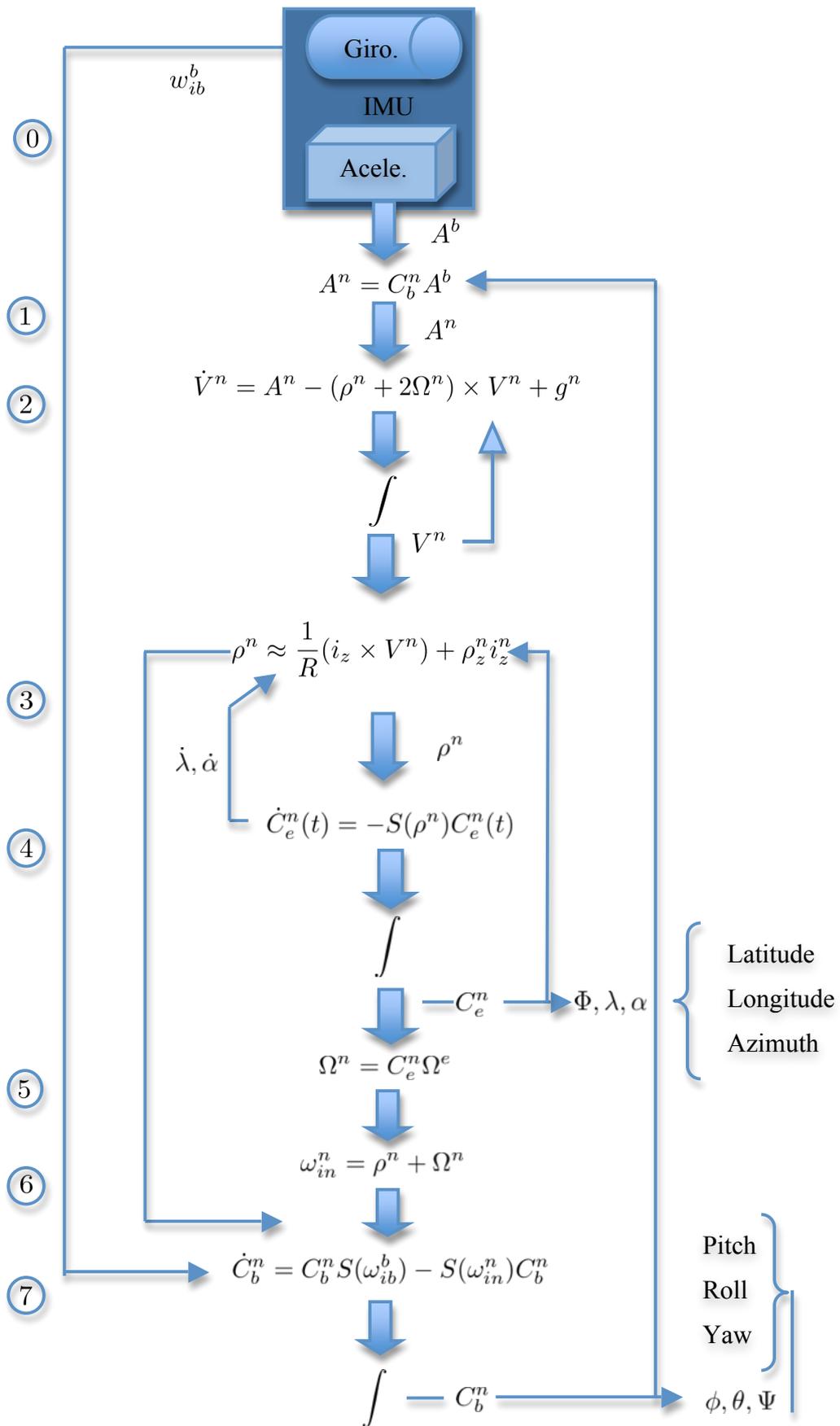


Figura 9 – Diagrama de Blocos da Navegação Inercial

#### 4.3.1.

#### **Bloco 0 – Transformação das Coordenadas de Medida para as Coordenadas do Corpo.**

A relação entre o sistema de coordenadas de Medida e o do Corpo depende de como o sensor foi acoplado no veículo, logo a matriz de transformação será particular a cada caso.

#### 4.3.2.

#### **Bloco 1 – Aceleração $A^n$ .**

Para se calcular a solução da navegação inercial é necessário transformar as medidas de aceleração do sistema de coordenadas do Corpo ( $A^b$ ) para o do modelo navegado ( $A^n$ ). O sistema de coordenadas de navegação utilizado será o NAV, sendo seu centro coincidente ao centro do sistema de coordenadas do Corpo.

De acordo com o teorema de rotação de Euler, qualquer rotação pode ser descrita por três ângulos, conhecidos como ângulos de Euler. Estes ângulos podem ser escritos em termos de matrizes de rotação que multiplicadas resultam na matriz de transformação do sistema, Eq. (37).

$$A^n = C_b^n A^b \quad (37)$$

na qual:

$A^n \in \mathbb{R}^3$  – aceleração no sistema de coordenadas NAV;

$A^b \in \mathbb{R}^3$  – aceleração no sistema de coordenadas do Corpo; e

$C_b^n \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  – matriz de Rotação entre o sistema de coordenadas do Corpo e NAV.

A rotação entre o sistema de coordenadas NAV para do Corpo é dada na seguinte ordem de rotação:

1. Roll ( $\phi$ ): Rotação em torno do eixo X. Medido positivo no sentido horário.
2. Pitch ( $\theta$ ): Rotação em torno do eixo Y. Medido positivo para cima do plano horizontal local.
3. Yaw Plataforma ( $\psi^p$ ): Rotação em torno do eixo Z. Medido positivo no sentido horário a partir do eixo Norte, onde  $\psi^p = \psi + \alpha$ .

Lembrando a seguinte propriedade da matriz rotação  $C_a^b = C_b^{a-1}$ , a rotação entre o Corpo e NAV é descrita pelas equações

$$C_b^{n-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \phi_c & \phi_s \\ 0 & -\phi_s & \phi_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_c & 0 & -\theta_s \\ 0 & 1 & 0 \\ \theta_s & 0 & \theta_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_c^p & \Psi_s^p & 0 \\ -\Psi_s^p & \Psi_c^p & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (38)$$

$$C_b^n = \begin{bmatrix} \theta_c \Psi_c^p & \theta_c \Psi_s^p & -\theta_s \\ -\phi_c \Psi_s^p + \phi_s \theta_s \Psi_c^p & \phi_c \Psi_c^p + \phi_s \theta_s \Psi_s^p & \phi_s \theta_c \\ \phi_s \Psi_s^p + \phi_c \theta_s \Psi_c^p & -\phi_s \Psi_c^p + \phi_c \theta_s \Psi_s^p & \phi_c \theta_c \end{bmatrix} \quad (39)$$

na qual:

subscritos S e C significam seno e cosseno, respectivamente;

$\Psi$ ,  $\phi$ ,  $\theta$  – ângulos yaw, roll e pitch, respectivamente;

$\psi^p$  – ângulo yaw da plataforma; e

$\alpha$  – ângulo de Azimuth.

### 4.3.3.

#### Bloco 2 – Velocidade $V^n$ .

A aceleração medida pelo sensor precisa ser compensada, pois este mede forças que não correspondem ao movimento do veículo, sendo estas a centrípeta, a Coriolis e a gravitacional de massa.

A Terra, por possuir uma massa grande, gera uma força de atração de massa vertical à sua superfície e em direção a seu centro. Esta força faz com que um acelerômetro estacionário meça uma aceleração vertical e de direção oposta ao centro da Terra.

Ao ser utilizado um sistema de coordenada que está girando, as equações de movimento são alteradas, sendo necessário incluir forças fictícias que não existirão caso seja utilizado um sistema de coordenada inercial. Devido à rotação do sistema de coordenadas ser uniforme, apenas as forças centrípeta e de Coriolis estarão presentes.

Relembrando a lei de Coriolis: sejam dois sistemas de coordenadas ortogonais  $a$  e  $b$ , onde o sistema  $b$  está girando com relação ao sistema  $a$  com velocidade angular  $\omega_{ab}$ . A derivada de qualquer vetor  $A$  no sistema  $a$  em termos da derivada no sistema  $b$

é dada pela Eq. (40), onde as componentes podem estar em qualquer sistema de coordenadas, que para exemplificar esta derivada será expressa em termos do sistema  $c$ .

$$\left(\frac{dA}{dt}\Big|_a\right)^c = \left(\frac{dA}{dt}\Big|_b\right)^c + \omega_{ab}^c \times A^c \quad (40)$$

na qual:

superscritos  $c$  – Indica que o vetor está no sistema de coordenadas  $c$ ;

$A \in \mathbb{R}^3$  – vetor qualquer;

$\frac{dA}{dt}\Big|_a \in \mathbb{R}^3$  – derivada do vetor  $A$  no sistema  $a$ ;

$\frac{dA}{dt}\Big|_b \in \mathbb{R}^3$  – derivada do vetor  $A$  no sistema  $b$ ; e

$\omega_{ab} \in \mathbb{R}^3$  – velocidade angular de  $b$  relativo a  $a$ .

A posição de um veículo sobre a Terra pode ser expressa no sistema de coordenadas ECI, que é um sistema inercial, por um vetor  $R$ . A segunda derivada do vetor posição  $R$  é o vetor aceleração do veículo. Devido ao sistema de coordenadas ser inercial, a aceleração real difere da medida apenas devido à força gravitacional. A Eq. (41) expressa esta relação no sistema de coordenadas NAV, no qual a aceleração foi medida. A derivada do vetor  $R$  se encontra no sistema ECI, logo será aplicada a lei de Coriolis para representar esta derivada no sistema NAV.

$$\frac{d^2 R}{dt^2}\Big|_i = A^n + g_m^n \quad (41)$$

na qual:

superscrito  $n$  – indica que o vetor está no sistema de coordenadas NAV;

$A \in \mathbb{R}^3$  – aceleração medida;

$R \in \mathbb{R}^3$  – posição real;

$\frac{d^2 R}{dt^2}\Big|_i \in \mathbb{R}^3$  – derivada segunda do vetor  $R$  no sistema ECI, é a aceleração

real; e

$g_m^n \in \mathbb{R}^3$  – aceleração gravitacional de massa.

O sistema NAV está girando com uma velocidade angular  $\rho$  com relação ao sistema ECEF, que por sua vez gira com velocidade angular  $\Omega$  com relação ao sistema ECI, logo NAV gira com velocidade angular  $\rho + \Omega$  com relação a ECI. A derivada do vetor  $V$  com relação ao sistema ECI pode ser então expressa em termo da derivada no sistema NAV através da lei de Coriolis

$$\left. \frac{dR}{dt} \right|_i = \left. \frac{dR}{dt} \right|_e + \Omega \times R \quad (42)$$

na qual:

$R \in \mathbb{R}^3$  – posição real;

$\left. \frac{dR}{dt} \right|_i \in \mathbb{R}^3$  – derivada do vetor  $R$  no sistema  $ECI$ ;

$\left. \frac{dR}{dt} \right|_e \in \mathbb{R}^3$  – derivada do vetor  $R$  no sistema  $ECEF$ ;  $e$

$\Omega \in \mathbb{R}^3$  – velocidade angular de  $ECEF$  relativo a  $ECI$ .

A derivada do vetor de posição com relação ao sistema ECEF é o vetor velocidade  $V$ . Substituindo e diferenciando a Eq. (42) com relação ao sistema ECI, obtém-se

$$\left. \frac{d^2R}{dt^2} \right|_i = \left. \frac{dV}{dt} \right|_i + \left. \frac{d\Omega}{dt} \right|_i \times R + \Omega \times \left. \frac{dR}{dt} \right|_i \quad (43)$$

na qual:

$R \in \mathbb{R}^3$  – posição real;

$V \in \mathbb{R}^3$  – velocidade real;

$\left. \frac{d^2R}{dt^2} \right|_i \in \mathbb{R}^3$  – derivada segunda do vetor  $R$  no sistema  $ECI$ ;

$\left. \frac{dV}{dt} \right|_i \in \mathbb{R}^3$  – derivada do vetor  $V$  no sistema  $ECI$ ;

$\Omega \in \mathbb{R}^3$  – velocidade angular de  $ECEF$  relativo a  $ECI$ ; e

$\left. \frac{d\Omega}{dt} \right|_i \in \mathbb{R}^3$  – derivada da velocidade angular no sistema  $ECI$ .

A velocidade de rotação da Terra é constante com relação ao sistema ECI, logo sua derivada é igual a zero. Substituindo a Eq. (42) na (43), obtém-se

$$\left. \frac{d^2 R}{dt^2} \right|_i = \left. \frac{dV}{dt} \right|_i + \Omega \times (V + \Omega \times R) \quad (44)$$

na qual:

$R \in \mathbb{R}^3$  – posição real;

$V \in \mathbb{R}^3$  – velocidade real;

$\left. \frac{d^2 R}{dt^2} \right|_i \in \mathbb{R}^3$  – derivada segunda do vetor  $R$  no sistema  $ECI$ ;

$\left. \frac{dV}{dt} \right|_i \in \mathbb{R}^3$  – derivada do vetor  $V$  no sistema  $ECI$ ; e

$\Omega \in \mathbb{R}^3$  – velocidade angular de  $ECEF$  relativo a  $ECI$ .

O sistema NAV está girando com uma velocidade angular  $\rho$  com relação ao sistema ECEF, que por sua vez gira com velocidade angular  $\Omega$  com relação ao sistema ECI, logo NAV gira com velocidade angular  $\rho + \Omega$  com relação a ECI. A derivada do vetor  $V$  com relação ao sistema ECI pode ser então expressa em função da derivada no sistema NAV através da lei de Coriolis

$$\left. \frac{dV}{dt} \right|_i = \left. \frac{dV}{dt} \right|_n + (\Omega + \rho^n) \times V \quad (45)$$

na qual:

$V \in \mathbb{R}^3$  – velocidade real;

$\left. \frac{dV}{dt} \right|_i \in \mathbb{R}^3$  – derivada do vetor  $V$  no sistema  $ECI$ ;

$\left. \frac{dV}{dt} \right|_n \in \mathbb{R}^3$  – derivada do vetor  $V$  no sistema  $NAV$ ;

$\Omega \in \mathbb{R}^3$  – velocidade angular de  $ECEF$  relativo a  $ECI$ ; e

$\rho \in \mathbb{R}^3$  – velocidade angular de  $NAV$  relativo a  $ECEF$ .

Substituindo as Eq. (44) e (45) na (41), re-arranjando e representando no sistema de coordenadas NAV, obtém-se

$$\dot{V}^n = A^n - (\rho^n + 2\Omega^n) \times V^n + g_m^n - \Omega^n \times (\Omega^n \times R^n) \quad (46)$$

na qual:

subscrito n – indica que o vetor está no sistema de coordenadas NAV;

$\dot{V} \in \mathbb{R}^3$  – aceleração real;

$V \in \mathbb{R}^3$  – velocidade real;

$A \in \mathbb{R}^3$  – aceleração medida;

$R \in \mathbb{R}^3$  – posição real;

$g_m^n \in \mathbb{R}^3$  – aceleração gravitacional de massa;

$\Omega \in \mathbb{R}^3$  – velocidade angular de *ECEF* relativo a *ECI*;

$\rho \in \mathbb{R}^3$  – velocidade angular de *NAV* relativo a *ECEF*;

$(\rho + 2\Omega) \times V \in \mathbb{R}^3$  – aceleração de Coriolis; e

$\Omega \times (\Omega \times R) \in \mathbb{R}^3$  – aceleração centrífuga.

A força centripeda e de atração de massa são normais à superfície da Terra e dependentes do modelo escolhido para representar a mesma. Essas duas forças em conjunto representam a gravidade normal à superfície. O WGS 84 fornece um modelo gravitacional, que é composto de 130.367 parâmetros devido às anomalias do campo gravitacional. Um modelo mais simplificado descrito em (BOSE, 82) é dado por

$$g_m^n + \Omega^n \times (\Omega^n \times R^n) = g^n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g_z \end{bmatrix} \quad (47)$$

na qual:

subscrito n – sistema de coordenadas NAV.;

$g \in \mathbb{R}^3$  – força gravitacional;

$\Omega \times (\Omega \times R) \in \mathbb{R}^3$  – aceleração centrífuga;

$g_m \in \mathbb{R}^3$  – força de atração de massa; e

$g_z$  – gravidade no eixo z do sistema NAV.

$$g_z = -g_o \left[ 1 - 2 \left( 1 + \frac{R_a - R_b}{R_a} + \frac{\Omega^2 R_a^2 R_b}{GM} \right) \frac{h}{R_a} \right]$$

$$+\left(\frac{5}{2} \frac{\Omega^2 R_a^2 R_b}{GM} - \frac{R_a - R_b}{R_a}\right) \sin^2 \Phi] \quad (48)$$

e:

$g_z$  – gravidade no eixo z do sistema NAV, eixo normal a superfície;

$g_0$  – gravidade no Equador;

$R_a$  – raio Equatorial;

$R_b$  – raio Polar;

$\Omega$  – velocidade angular da Terra;

$GM$  – constante gravitacional da Terra, que vale  $3986004,418 \cdot 10^8 \text{ m}^3/\text{s}^2$ ;

$h$  – altitude no sistema ECEF; e

$\Phi$  – latitude no sistema ECEF.

Reescrevendo a Eq. (46) utilizando a (47) obtém-se a (49).

$$\dot{V}^n = A^n - (\rho^n + 2\Omega^n) \times V^n + g^n \quad (49)$$

na qual:

Subscrito n – indica que o vetor está no sistema de coordenadas ENU.

$\dot{V} \in \mathbb{R}^3$  – aceleração real;

$V \in \mathbb{R}^3$  – velocidade real;

$A \in \mathbb{R}^3$  – aceleração medida;

$g^n \in \mathbb{R}^3$  – aceleração gravitacional;

$\Omega \in \mathbb{R}^3$  – velocidade angular de ECEF relativo a ECI; e

$\rho \in \mathbb{R}^3$  – velocidade angular de NAV relativo a ECEF.

#### 4.3.4.

#### Bloco 3 – Velocidade angular do sistema NAV relativo a ECEF ( $\rho^n$ ).

Os sistemas NAV e ENU são localmente tangentes a Terra sendo, portanto, apenas válidos localmente. Ao existir movimento do veículo, paralelo à superfície da Terra, ambos os sistemas precisam ser retraçados. A forma da Terra no modelo escolhido é um elipsóide, logo os sistemas apresentarão uma rotação ao ser retraçados em uma nova localidade, vide Fig. 48. O sistema ECEF gira com a Terra, assim, a

rotação relativa entre ECEF e os sistemas ENU e NAV será apenas devido à rotação do sistema ao ser retraçado em um novo ponto da superfície.

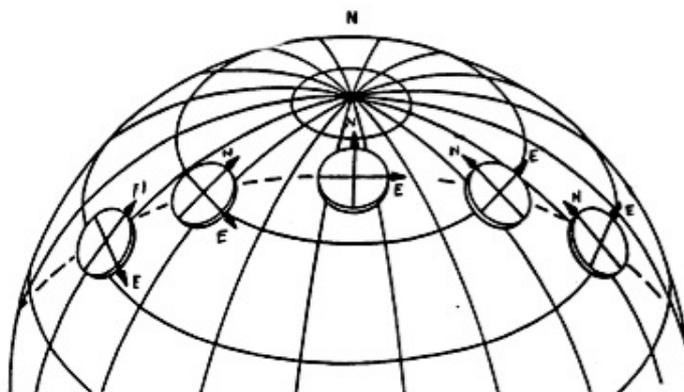


Figura 10 – Rotação do sistema (BOSE. et. al., 1982)

A velocidade angular do sistema ENU relativo ao ECEF em torno do eixo  $E$  ( $\rho_E$ ) e  $N$  ( $\rho_N$ ) é dependente da velocidade do veículo na direção do eixo  $N$  e  $E$  respectivamente (vide Fig. 49)

$$\rho_E = \frac{-V_N}{R_m + h} \quad (50)$$

$$\rho_N = \frac{V_E}{R_p + h} \quad (51)$$

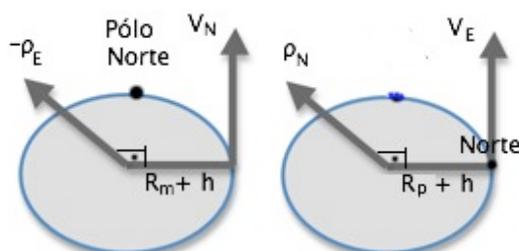


Figura 11 – Velocidade angular em torno do eixo E e N.

O sistema NAV está rotacionado de  $\alpha$  (Wander Azimuth) com relação ao ENU, vide Fig. 50. A velocidade angular em torno do eixo  $x$  ( $\rho_x$ ) e  $y$  ( $\rho_y$ ) é descrita como

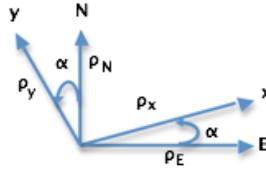


Figura 12 – Velocidade Angular no sistema NAV

$$\rho_x = \rho_E \cos(\alpha) + \rho_N \sin(\alpha) \quad (52)$$

$$\rho_y = -\rho_E \sin(\alpha) + \rho_N \cos(\alpha) \quad (53)$$

Substituindo os termos  $\rho_E$  e  $\rho_N$  das Eqs. (52) e (53), obtém-se

$$\rho_x = -V_y \left( \frac{\sin^2 \alpha}{R_p + h} + \frac{\cos^2 \alpha}{R_m + h} \right) - V_x \left( \frac{1}{R_m + h} - \frac{1}{R_p + h} \right) \cos(\alpha) \sin(\alpha) \quad (54)$$

$$\rho_y = V_x \left( \frac{\cos^2 \alpha}{R_p + h} + \frac{\sin^2 \alpha}{R_m + h} \right) + V_y \left( \frac{1}{R_m + h} - \frac{1}{R_p + h} \right) \cos(\alpha) \sin(\alpha) \quad (55)$$

Utilizando as variáveis auxiliares  $R_y$ ,  $R_x$  e  $T$  definidas como

$$\frac{1}{R_y} = \frac{\sin^2 \alpha}{R_p + h} + \frac{\cos^2 \alpha}{R_m + h} \quad (54)$$

$$\frac{1}{R_x} = \frac{\cos^2 \alpha}{R_p + h} + \frac{\sin^2 \alpha}{R_m + h} \quad (55)$$

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{R_m + h} - \frac{1}{R_p + h} \quad (56)$$

Reescreve-se as Eq. (54) e (55) como

$$\rho_y = V_x \left( \frac{1}{R_x} \right) + V_y \frac{1}{T} \quad (57)$$

$$\rho_x = -V_y \left( \frac{1}{R_y} \right) - V_x \frac{1}{T} \quad (58)$$

Tendo em vista que a altura  $h$  é muito pequena comparada com o raio meridional e com o principal e que o valor de ambos os raios são próximos, pode-se aproximar

$$\rho^n \approx \frac{1}{R}(i_z \times V^n) + \rho_z^n i_z^n \quad (59)$$

A velocidade angular total é a combinação linear das variações de posições, dada pela Eq. (60), vide Fig. 51. A velocidade angular em torno do eixo  $z$  ( $\rho_z$ ) é dada pela componente vertical da velocidade angular total, Eq. (61) e (62).

A taxa de variação do ângulo azimuth ( $\alpha$ ) será escolhida de acordo com a Eq. (63), o que é definido na literatura como Azimuth livre. Logo, a velocidade angular em torno do eixo  $z$  ( $\rho_z$ ) será nula.

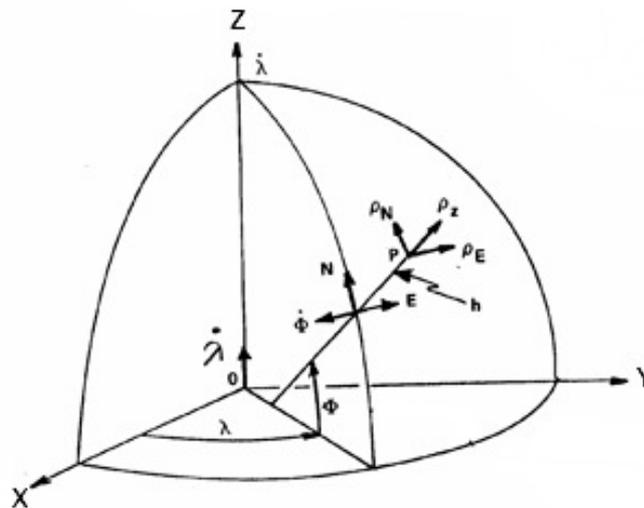


Figura 13 – Velocidade Angular total. (BOSE et. al., 1982)

$$\rho = -\dot{\Phi}i_E + \dot{\lambda}i_z^e + \dot{\alpha}i_U \quad (60)$$

$$\rho_z^n = \rho i_z^n \quad (61)$$

$$\rho_z^n = \dot{\lambda} \sin(\Phi) + \dot{\alpha} \quad (62)$$

$$\dot{\alpha} = -\dot{\lambda} \sin \Phi \quad (63)$$

na qual:

- subscrito n – sistema de coordenadas NAV;
- subscrito e – sistema de coordenadas ECEF;
- subscrito E, N e U – eixos do sistema ENU;
- subscrito x e y – eixos do sistema NAV;
- i – vetor unitário;
- $\rho$  – velocidade angular;
- V – velocidade;
- $R_m$  – raio meridional de curvatura do modelo da Terra;
- $R_p$  – raio principal de curvatura do modelo da Terra;
- h – altura;
- $\Phi$  – latitude;
- $\lambda$  – longitude; e
- $\alpha$  – azimuth.

#### 4.3.5. Bloco 4 – Posição Angular ( $C_e^n$ )

##### Transformação de Coordenadas ECEF para NAV

A matriz de rotação  $C_e^n$ , Eqs. (64) e (65), transforma o sistema ECEF para NAV e é descrita por ângulos de Euler, vide Fig. 52, na seguinte ordem:

“wander azimuth” ( $\alpha$ ) - rotação em torno do eixo Z;

latitude ( $-\Phi$ ) - rotação em torno do eixo X; e

longitude ( $\lambda$ ) - rotação em torno do eixo Y.

$$C_e^n = \begin{bmatrix} \alpha_c & \alpha_s & 0 \\ -\alpha_s & \alpha_c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \Phi_c & -\Phi_s \\ 0 & \Phi_s & \Phi_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_c & 0 & -\lambda_s \\ 0 & 1 & 0 \\ \lambda_s & 0 & \lambda_c \end{bmatrix} \quad (64)$$

$$C_e^n = \begin{bmatrix} \alpha_c \lambda_c - \alpha_s \Phi_s \lambda_s & \alpha_s \Phi_c & -\alpha_c \lambda_s - \alpha_s \Phi_s \lambda_c \\ -\alpha_s \lambda_c - \alpha_c \Phi_s \lambda_s & \alpha_c \Phi_c & \alpha_s \lambda_s - \alpha_c \Phi_s \lambda_c \\ \Phi_c \lambda_s & \Phi_s & \Phi_c \lambda_c \end{bmatrix} \quad (65)$$

na qual:

Subscrito S e C – significam seno e coSseno, respectivamente; e

$\alpha, \Phi, \lambda$  – ângulos de Euler (“Wander Azimuth”, Latitude e Logitude, respectivamente).

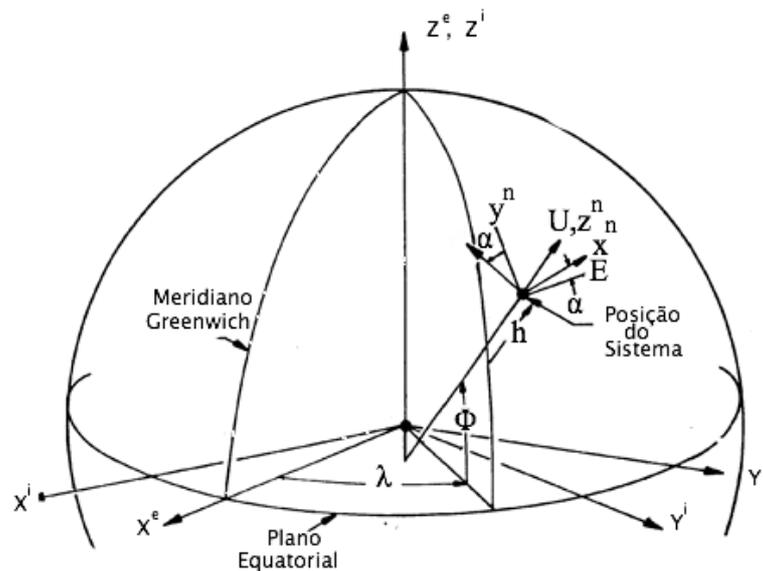


Figura 14 – Ângulos de Euler da Matriz de Rotação  $C_e^n$ . (BOSE et. al., 1982)

### Obtendo “Wander Azimuth” ( $\alpha$ ), Latitude ( $\Phi$ ) e Logitude ( $\lambda$ ).

Utilizando a matriz de rotação  $C_e^n$ , Eq. (65), e relações trigonométricas obtêm-se os três ângulos  $\alpha, \Phi, \lambda$

$$\alpha = \tan^{-1}(C_e^n(1,2)/C_e^n(2,2)) \quad (66)$$

$$\Phi = \sin^{-1}(C_e^n(3,2)) \quad (67)$$

$$\lambda = \tan^{-1}(C_e^n(3,1)/C_e^n(3,3)) \quad (68)$$

### Derivada da Matriz de Rotação

Seja a matriz de rotação da coordenada *ECEF* e *NAV* descrita por  $C_e^n$ . Tendo em vista a ortogonalidade, pode-se escrever

$$C_e^n(t)C_e^{nT}(t) = I \quad (69)$$

Diferenciando com relação ao tempo, obtém-se a identidade descrita

$$\dot{C}_e^n(t)C_e^{nT}(t) + C_e^n(t)(\dot{C}_e^n)^T(t) = 0 \quad (70)$$

Criando uma variável auxiliar  $S(t)$ , define-se

$$S(t) = \dot{C}_e^n(t)C_e^{nT}(t) \quad (71)$$

Substituindo a Eq. (72) na (73), temos que  $S$  é Skew Simétrica já que satisfaz a

$$S^T = -S \quad (72)$$

Multiplicando ambos os lados da eq. (70) por  $C_e^n(t)$ , obtém-se

$$\dot{C}_e^n(t) = S(t)C_e^n(t) \quad (73)$$

Considere o vetor  $v(t)$  expresso com relação a um vetor constante  $v'$  através de

$$v(t) = C_e^n(t)v' \quad (74)$$

Diferenciando a Eq. (74), obtém-se

$$\dot{v}(t) = \dot{C}_e^n(t)v' \quad (75)$$

Usando a Eq. (73), pode-se reescrever a Eq. (75) como

$$\dot{v}(t) = S(t)C_e^n(t)v' \quad (76)$$

Seja o vetor  $w_{ne}^n$  a velocidade angular da coordenada ECEF com relação a NAV, expressa no sistema ENU. Pode-se então escrever

$$\dot{v}(t) = w_{ne}^n(t) \times C_e^n(t)v' \quad (77)$$

Logo, o operador  $S(t)$  descreve o produto de vetores entre  $w_{ne}^n$  e o  $C_e^n(t)v'$ . A matriz  $S(t)$  é de tal forma que seus elementos simétricos com relação à diagonal principal representam os componentes do vetor  $w_{ne}^n$  de acordo com

$$S(w_{ne}^n) = \begin{bmatrix} 0 & -w_z & w_y \\ w_z & 0 & -w_x \\ -w_y & w_x & 0 \end{bmatrix} \quad (78)$$

Onde  $w_{ne}^n = -w_{en}^n = -\rho^n$ . Substituindo a Eq. (78) na (73) obtém-se

$$\dot{C}_e^m(t) = -S(\rho^n)C_e^m(t) \quad (79)$$

na qual:

$\dot{C}_e^m \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  – derivada da matriz de rotação entre os sistemas ECEF e NAV;

$C_e^m \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  – matriz de rotação entre os sistemas ECEF e ENU; e

$S(\rho^n) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  – matriz anti-simétrica da velocidade angular do sistema NAV

com relação ao sistema ECEF, expressa no sistema NAV.

#### 4.3.6.

#### Bloco 5 – Velocidade Angular da Terra expressa nas Coordenadas NAV ( $\Omega^n$ ).

No modelo da Terra escolhido anteriormente, tem-se a velocidade angular da Terra ocorrendo em torno do eixo Z do modelo ECEF. A velocidade angular da Terra no modelo de navegação ENU é encontrado através de

$$\Omega^n = C_e^n \Omega^e \quad (80)$$

na qual:

subscrito  $n$  e  $e$  – significa sistemas de coordenadas ENU e ECEF, respectivamente, nos quais os vetores estão sendo representados;

$C_e^n \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  – matriz de rotação entre ECEF e NAV; e

$\Omega \in \mathbb{R}^3$  – vetor velocidade angular da Terra.

#### 4.3.7.

#### Bloco 6 – Velocidade Angular do sistema NAV com relação ao sistema ECI ( $w_{in}^n$ ).

O sistema ENU possui uma velocidade angular  $\rho^n$  com relação ao sistema ECEF, que por sua vez possui uma velocidade angular  $\Omega^n$  com relação ao sistema ECI. Logo, a velocidade angular de NAV com relação ao ECI é dada por

$$\omega_{in}^n = \rho^n + \Omega^n \quad (81)$$

na qual:

subscrito  $n$  – vetores expressos no sistema ENU;

$\omega_{in}^n \in \mathbb{R}^3$  – velocidade angular do sistema NAV com relação ao ECI;

$\rho^n \in \mathbb{R}^3$  – velocidade angular do sistema NAV com relação ao ECEF; e

$\Omega^n \in \mathbb{R}^3$  – velocidade angular do sistema ECEF com relação ao ECI.

#### 4.3.8.

#### Bloco 7 – Orientação ( $C_b^n$ ).

Utilizando o mesmo raciocínio do bloco 4, obtém-se a derivada da matriz de rotação entre o sistema de coordenadas do Corpo e NAV,  $\dot{C}_b^n$ . Esta derivada depende da própria matriz de rotação,  $C_b^n$ , assim como da matriz anti-Simétrica,  $S(w_{nb}^n)$ , representando os componentes do vetor velocidade angular entre o sistema do Corpo e NAV expresso no sistema NAV,  $w_{nb}^n$ , por

$$\dot{C}_b^n = S(w_{nb}^n)C_b^n \quad (82)$$

As velocidades angulares entre o sistema do Corpo e o ECI,  $w_{ib}$ , pode ser escrita como uma soma das velocidades angulares entre os sistemas NAV e ECI,  $w_{in}$ , com a entre os sistemas do Corpo e NAV,  $w_{nb}$ , logo

$$w_{ib} = w_{in} + w_{nb} \quad (83)$$

Substituindo a Eq. (83) em (82), obtém-se

$$\dot{C}_b^m = S(w_{ib}^n - w_{in}^n)C_b^m = S(w_{ib}^n)C_b^m - S(w_{in}^n)C_b^m \quad (84)$$

Considerando a igualdade dada por

$$C_b^n S(w_{ib}^b) = C_b^n [C_n^b C_b^n] S(w_{ib}^b) [C_n^b C_b^n] = S(w_{ib}^n) C_b^n \quad (85)$$

pode-se então reescrever a Eq. (84) na forma dada por

$$\dot{C}_b^m = C_b^n S(w_{ib}^b) - S(w_{in}^n) C_b^m \quad (86)$$

na qual:

$\dot{C}_b^m \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  – derivada da matriz de rotação entre o sistema de coordenadas do Corpo e NAV;

$C_b^m \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  – matriz de rotação entre o sistema do Corpo e NAV;

$w_{ib}^b \in \mathbb{R}^3$  – velocidade angular entre o Corpo e o sistema ECI expresso no sistema de coordenadas do Corpo, ou seja, valor medido pelos giroscópios; e

$w_{in}^n \in \mathbb{R}^3$  – velocidade angular entre o sistema NAV e o ECI expresso no sistema de coordenadas NAV; este é o valor computado através da posição e velocidade.

**Obtendo Roll ( $\phi$ ), Pitch ( $\theta$ ) e Yaw ( $\psi$ ).**

Utilizando a matriz de rotação  $C_b^n$  e relações trigonométricas obtêm-se os três ângulos  $\phi$ ,  $\theta$  e  $\psi$

$$\phi = \tan^{-1}(C_b^n(3, 2)/C_b^n(3, 3)) \quad (87)$$

$$\theta = \sin^{-1}(C_b^n(3, 1)) \quad (88)$$

$$\psi = \tan^{-1}(C_b^n(1, 1)/C_b^n(1, 2)) \quad (89)$$

#### 4.3.9. Condições Iniciais

Os sensores inerciais são apenas capazes de detectar mudanças sofridas pelo mesmo. Logo, para se chegar a uma solução na navegação é, necessário saber-se os valores iniciais de velocidade, posição e orientação. A velocidade e posição iniciais são geralmente adquiridas a partir de outros sensores como o GPS. A orientação inicial é adquirida em duas etapas, sendo que em ambas o sensor inercial precisa estar estático. Na primeira etapa, o pitch( $\theta$ ) e o roll( $\phi$ ) são calculados através da Eqs. (90) e (91), respectivamente. Essas equações são obtidas, utilizando-se do fato que sob condições estáticas as medidas dos acelerômetros medem apenas a força gravitacional. Na segunda etapa o yaw( $\Psi$ ) é calculado utilizando-se a Eq. (92), a qual é obtida do fato que, sob condições estáticas, os valores medidos pelos giroscópios são apenas devidos à rotação da Terra. Entretanto, este cálculo para o yaw só é possível para sensores inerciais de alta precisão; a alternativa para se estimar o valor do yaw é utilizar bússolas magnéticas ou a velocidade do GPS em condições dinâmicas.

$$\theta = \sin^{-1} \frac{A_x^b}{g} \quad (90)$$

$$\phi = \sin^{-1} \frac{A_y^b}{g} \quad (91)$$

$$\psi = \tan^{-1} \frac{\omega_y^b \cos(\phi)}{\omega_x^b \cos(\theta)} \quad (92)$$

na qual:

subscrito  $b$  – indica que as medidas se encontram no sistema de coordenadas do corpo;

$A_x$  - aceleração medida no eixo x sob condições estáticas;

$A_y$  - aceleração medida no eixo y sob condições estáticas;

$\omega_x$  – velocidade angular no eixo x sob condições estáticas;

$\omega_y$  – velocidade angular no eixo y sob condições estáticas ;

$g$  – valor da gravidade; e

$\Psi, \phi, \theta$  – ângulos de Euler (yaw, pitch e roll, respectivamente).

#### 4.4. Erro na Navegação Inercial

O erro na navegação inercial é resultante dos erros dos acelerômetros e giroscópios do sensor inercial; estes se propagam pela solução da navegação inercial, degradando a mesma. O equacionamento do erro na navegação inercial, aqui desenvolvido, assumirá que os erros na posição angular são pequenos seguindo a linha do trabalho de (BOSE et. al., 1982). Em (KONG et. al., 2000) este mesmo equacionamento é desenvolvido para erros grandes.

##### 4.4.1. Erro na Posição Angular ( $\delta C_e^n$ )

A posição angular na Navegação Inercial é dada pelos ângulos wander azimuth ( $\alpha$ ), Latitude ( $\Phi$ ) e Longitude ( $\lambda$ ). Esta posição é computada, logo existe um erro entre o valor computado e o atual, vide Fig. 53 e 54. Definido o erro como **Erro = Computado - Atual**, tem-se o erro no Wander Azimuth ( $\delta\alpha$ ), na Latitude ( $\delta\Phi$ ) e na Longitude ( $\delta\lambda$ ).

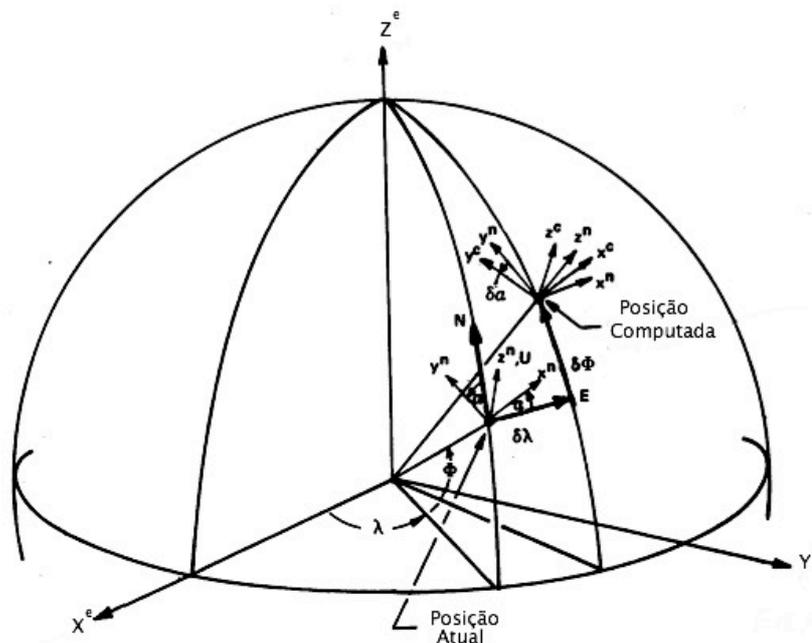


Figura 15 – Erro na Posição Angular. (BOSE et. al., 1982)

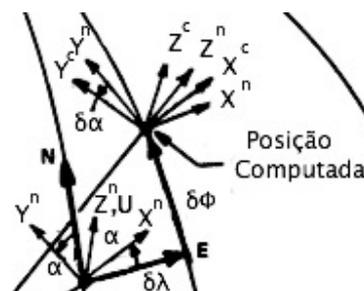


Figura 16 – Erro na Posição Angular Zoom. (BOSE et. al., 1982)

A posição atual no sistema NAV é encontrada através da matriz  $C_e^n$  que transforma do sistema de coordenadas ECEF para NAV.  $C_e^n$  é construída utilizando os valores reais dos ângulos “Wander Azimuth” ( $\alpha$ ), Latitude ( $\Phi$ ) e Longitude ( $\lambda$ ).

A posição computada no sistema NAV é calculada através da matriz  $C_e^c$  que rotaciona o sistema ECEF para o NAV Computado. A matriz é construída de maneira análoga à na Eq. (65), sendo os ângulos de rotação os valores reais somados aos erros da computação: Wander Azimuth computado ( $\alpha + \delta\alpha$ ), Latitude computada ( $\Phi + \delta\Phi$ ) e Longitude computada ( $\lambda + \delta\lambda$ ).

A matriz  $C_n^c$  transforma o sistema NAV para o NAV Computado. Os ângulos de Euler desta matriz de rotação são: erros no “Wander Azimuth” ( $\delta\alpha$ ), na Latitude ( $\delta\Phi$ ) e na Longitude ( $\delta\lambda$ ). O diagrama da Fig. 55 exemplifica as três transformações.

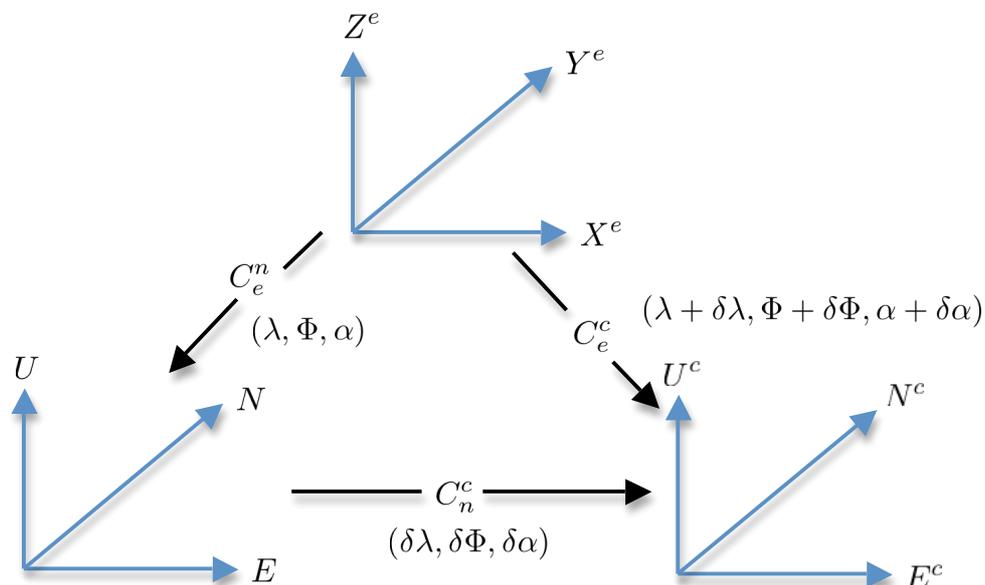


Figura 17 – Diagrama de Transformação do Erro na Posição Angular.

A matriz de posição NAV Computada pode ser escrita como a matriz da posição real somada a uma matriz de erro, vide Eq. (93), ou como a matriz de posição real rotacionada, vide Eq. (94).

$$C_e^c = C_e^n + \delta C_e^n \quad (93)$$

$$C_e^c = C_n^c C_e^n \quad (94)$$

Considerando o vetor

$$\delta\theta = [\delta\lambda, \delta\Phi, \delta\alpha] \quad (95)$$

Para ângulos pequenos pode-se escrever a igualdade abaixo para a matriz de transformação entre o real e o computado

$$C_c^n = I + S(\delta\theta^n) \quad (96)$$

Substituindo a Eq. (96) na (94),

$$C_e^c = [I - S(\delta\theta^n)]C_n^e \quad (97)$$

Reescrevendo a Eq. (93) utilizando o resultado obtido na Eq. (97),

$$\delta C_e^n = -S(\delta\theta^n)C_e^n \quad (98)$$

na qual:

$\delta C_e^n \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  – erro da matriz de rotação entre o sistema de coordenadas do ECEF e NAV;

$S(\delta\theta^n) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  – matriz anti-simétrica do vetor erro de posição; e

$C_e^n \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  – matriz de rotação entre o sistema de coordenadas do ECEF e NAV.

#### 4.4.2. Erro na Orientação ( $\delta C_b^n$ )

Análogo ao que ocorre no erro da posição angular os ângulos Yaw ( $\psi$ ), Pitch ( $\theta$ ) e Roll ( $\phi$ ), utilizados para transformar do sistema de coordenadas do Corpo para NAV,  $C_b^n$ , possuem erros ao serem computados. Esses erros expressos como ângulos no sistema de coordenadas NAV são  $\phi^n = [\phi_E \ \phi_N \ \phi_U]^T$ . Considerando os erros pequenos pode-se equacionar a matriz do erro de transformação do Corpo para NAV de modo análogo à seção anterior, Eq. (99).

$$\delta C_b^n = -S(\phi^n)C_b^n \quad (99)$$

onde

$\delta C_b^n \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  – erro da matriz de rotação entre o sistema de coordenadas do Corpo e NAV;

$S(\phi^n) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  – matriz anti-simétrica do vetor erro; e

$C_b^n \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  – matriz de rotação entre o sistema de coordenadas do Corpo e NAV.

#### 4.5. Propagação do Erro

O erro dos sensores inerciais e acelerômetros se propagam na solução da navegação inercial de acordo com o diagrama de blocos dado pela Fig. 56. Essas equações de propagação estão deduzidas a seguir e se utilizam de algumas relações de matrizes anti-simétricas dadas pelas

$$S(w^a)V^a = w^a \times V^a \quad (100)$$

$$S(w^a)S(V^a) - S(V^a)S(w^a) = S(w^a \times V^a) \quad (101)$$

$$C_a^b S(w^a) C_b^a = S(w^b) \quad (102)$$

$$S(w^a) = \begin{bmatrix} 0 & -w_z^a & w_y^a \\ w_z^a & 0 & -w_x^a \\ -w_y^a & w_x^a & 0 \end{bmatrix} \quad (103)$$

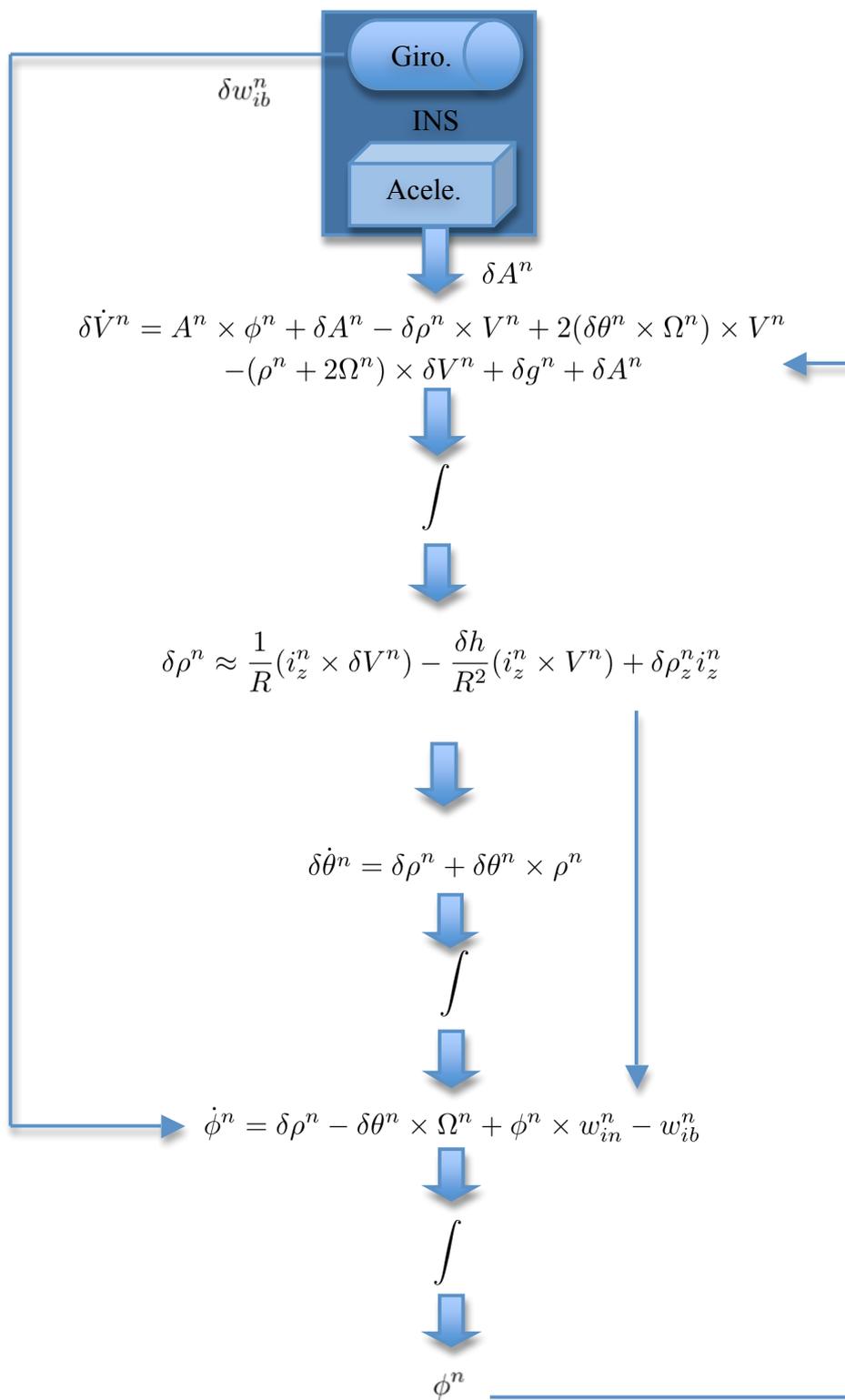


Figura 18 – Diagrama de Blocos da Propagação do Erro na Navegação Inercial

#### 4.5.1. Erro da Derivada da Posição Angular ( $\delta C_e^n$ ).

A derivada da posição angular, dada pela Eq. (84), quando perturbada gera

$$\delta \dot{C}_e^n = -S(\delta \rho) C_e^n - S(\rho) \delta C_e^n \quad (104)$$

O erro da matriz de rotação entre ECEF e NAV está definido pela Eq. (98) que diferenciada gera

$$\delta \dot{C}_e^n = -S(\delta \dot{\theta}^n) C_e^n - S(\delta \theta^n) \dot{C}_e^n \quad (105)$$

Substituindo a Eq. (84) na Eq. (105), obtém-se

$$\delta \dot{C}_e^n = -S(\delta \dot{\theta}^n) C_e^n + S(\delta \theta^n) S(\rho^n) C_e^n \quad (106)$$

Inserindo as Eq. (106) e (105) na (104):

$$S(\delta \dot{\theta}^n) = S(\delta \rho^n) + S(\delta \theta^n) S(\rho^n) - S(\rho^n) S(\delta \theta^n) \quad (107)$$

Utilizando a relação anti-simétrica dada pela eq. (101) reescreve-se a (107) na forma

$$S(\delta \dot{\theta}^n) = S(\delta \rho^n) + S(\delta \theta^n \times \rho^n) \quad (108)$$

Retirando o operador  $S$  e reescrevendo a Eq. (108) na forma vetorial:

$$\delta \dot{\theta}^n = \delta \rho^n + \delta \theta^n \times \rho^n \quad (109)$$

na qual:

subscrito  $n$  – significa que os vetores estão expressos no sistema de coordenadas NAV;

$\dot{\theta} \in \mathbb{R}^3$  – derivada do vetor de erros de posição angular;

$\delta \rho \in \mathbb{R}^3$  – erro na velocidade angular de NAV relativo a ECEF;

$\delta \theta \in \mathbb{R}^3$  – erro de posição angular; e

$\rho \in \mathbb{R}^3$  – velocidade angular de NAV relativo a ECEF

#### 4.5.2.

#### Erro na Latitude( $\delta\Phi$ ), Longitude ( $\delta\lambda$ ) e Wander ( $\delta\alpha$ ).

Os ângulos Wander, Latitude e Longitude dependem da matriz  $C_e^n$  que possui erros, vide Eq. (98). Perturbando as equações dos ângulos, encontram-se o erro no Wander, Latitude e Longitude, Eq. (110), (111) e (112), respectivamente, através de relações trigonométricas:

$$\delta\alpha = \delta\theta_z - \delta\lambda\Phi_s \quad (110)$$

$$\delta\Phi = \delta\theta_y\alpha_s - \delta\theta_x\alpha_c \quad (111)$$

$$\delta\lambda = (\delta\theta_x\alpha_s + \delta\theta_y\alpha_c)SEC\Phi \quad (112)$$

#### 4.5.3.

#### Erro na Derivada de Velocidade ( $\delta\dot{V}$ )

A derivada da velocidade é dada pela Eq. (49); esta pode ser reescrita no formato

$$\dot{V}^n = C_b^n A^b - (\rho^n + 2C_e^n \Omega^e) \times V^n + g^n \quad (113)$$

Perturbando a derivada da velocidade dada pela Eq. (113),

$$\begin{aligned} \delta\dot{V}^n &= \delta C_b^n A^b + C_b^n \delta A^b \\ &\quad - (\delta\rho^n + 2\delta C_e^n \Omega^e) \times V^n - (\rho^n + 2C_e^n \Omega^e) \times \delta V^n + \delta g^n \end{aligned} \quad (114)$$

Usando o resultado obtido na Eq. (99) e a relação anti-simétrica dada pela Eq. (100), pode-se reescrever um trecho da Eq. (101) no formato

$$\delta C_b^n A^b = -S(\delta\phi^n)C_b^n A^b = -\phi^n \times A^n = A^n \times \phi^n \quad (115)$$

Utilizando o resultado obtido na Eq. (98), reescreve-se outro trecho da Eq. (114) de modo análogo:

$$\delta C_e^n \Omega^e = -S(\delta \theta^n) C_e^n \Omega^e = -\delta \theta^n \times \Omega^e \quad (116)$$

Substituindo as Eq. (115) e (116) na (114):

$$\begin{aligned} \delta \dot{V}^n &= A^n \times \phi^n + \delta A^n \\ &\quad - \delta \rho^n \times V^n + 2(\delta \theta^n \times \Omega^n) \times V^n - (\rho^n + 2\Omega^n) \times \delta V^n + \delta g^n \end{aligned} \quad (117)$$

na qual:

subscrito  $n$  – significa sistema de coordenadas NAV;

$\delta \dot{V} \in \mathbb{R}^3$  – erro da derivada da velocidade;

$V \in \mathbb{R}^3$  – velocidade;

$\delta V \in \mathbb{R}^3$  – erro na velocidade;

$A \in \mathbb{R}^3$  – aceleração medida;

$\delta A \in \mathbb{R}^3$  – erro na aceleração medida;

$\delta g \in \mathbb{R}^3$  – erro na aceleração gravitacional;

$\Omega \in \mathbb{R}^3$  – velocidade angular de *ECEF* relativo a *ECI*;

$\rho \in \mathbb{R}^3$  – velocidade angular de *NAV* relativo a *ECEF*;

$\delta \theta \in \mathbb{R}^3$  – erro de posição angular;

#### 4.5.4. Erro na Gravidade ( $\delta g$ )

O modelo utilizado na estimativa do campo gravitacional possui erros em sua modelagem e nos parâmetros de entrada do modelo. Considerando apenas o erro propagado devido aos parâmetros de Latitude ( $\Phi$ ) e Altura ( $h$ ), o erro do campo gravitacional calculado é obtido por

$$\delta g_u = 2g_o \left[ \left( 1 + \frac{a-b}{a} + \frac{\Omega^2 a^2 b}{GM} \right) \frac{\delta h}{a} - \left( \left( \frac{5\Omega^2 a^2 b}{2GM} - \frac{a-b}{a} \right) \text{sen} \Phi \text{cos} \Phi \right) \delta \Phi \right] \quad (118)$$

Devido ao erro do ângulo ser pequeno a Eq. (118) pode ser aproximada

$$\delta g_u = 2g_0 \frac{\delta h}{a} \quad (119)$$

na qual:

$\delta g$  – erro da gravidade no eixo z do sistema NAV;

$g_0$  – gravidade no equador = 9,780373 m / s<sup>2</sup>;

$a$  – raio equatorial = 6.378.137,00 m;

$b$  – raio polar = 6.356.752,3142 m;

$\Omega$  – velocidade angular da Terra = 7,292115.10<sup>-5</sup> rad / s;

$GM$  – constante gravitacional da Terra = 3986004,418.108 m<sup>3</sup> / s<sup>2</sup>;

$\delta h$  – erro da altitude no sistema ECEF;

$\Phi$  – latitude no sistema ECEF; e

$\delta\Phi$  – erro da latitude no sistema ECEF.

#### 4.5.5. Erro na Aceleração ( $\delta A^n$ )

A saída do acelerômetro está no sistema de coordenadas do corpo, logo o erro se encontra no mesmo sistema. O erro do acelerômetro no sistema NAV ( $\delta A^n$ ) é encontrado através da transformação dada por

$$\delta A^n = C_b^n \delta A^b \quad (120)$$

onde

subscritos  $n$  e  $b$  – significam os sistemas de coordenadas NAV e BOD, respectivamente;

$C_b^n$  – matriz de transformação entre os sistemas BOD e NAV; e

$\delta A$  – erro na aceleração.

#### 4.5.6. Erro na Velocidade Angular do sistema NAV relativo a ECEF ( $\delta\rho^n$ )

A velocidade angular do sistema NAV relativo a ECEF, quando perturbada, resulta na equação do erro da velocidade angular, Eq. (121). Escreve-se esta equação considerando a relação dada pela Eq. (122).

$$\delta\rho^n \approx \frac{1}{R}(i_z^n \times \delta V^n) - \frac{\delta h}{R^2}(i_z^n \times V^n) + \delta\rho_z^n i_z^n \quad (121)$$

$$\delta\frac{1}{R} = -\frac{\delta R}{R^2} = \frac{-\delta h}{R^2} \quad (122)$$

onde

subscrito n – sistema de coordenadas NAV;

$\rho$  – velocidade angular de NAV relativo a ECEF;

V – velocidade tangencial do veículo;

$i_z$  – vetor unitário no eixo z;

$\delta$  – operador erro;

h – altitude; e

R – raio da Terra aproximado pela média entre o raio polar e equatorial.

#### 4.5.7. Erro na Altura ( $\delta h$ )

A altitude é dada pela integral da velocidade na direção perpendicular à Terra, sendo o erro desta dado por

$$\delta\dot{h} = \delta V_z \quad (123)$$

onde

$\delta\dot{h}$  – erro da derivada da altitude; e

$\delta V_z$  – erro da velocidade no eixo z do sistema NAV.

#### 4.5.8. Erro na Orientação ( $\delta C_b^n$ )

A orientação do veículo é dada pela matriz de rotação entre o sistema de coordenadas do Corpo e ENU,  $C_b^n$ , onde

$$\dot{C}_b^n = C_b^n S(w_{ib}^b) - S(\rho^n + C_e^n \Omega^e) C_b^n \quad (124)$$

Perturbando a Eq. (124),

$$\begin{aligned} \delta \dot{C}_b^n &= \delta C_b^n S(w_{ib}^b) + C_b^n S(\delta w_{ib}^b) \\ &\quad - S(\delta \rho^n + \delta C_e^n \Omega^e) C_b^n - S(\rho^n + C_e^n \Omega^e) \delta C_b^n \end{aligned} \quad (125)$$

Derivando o resultado da Eq. (99),

$$\delta \dot{C}_b^n = -S(\dot{\phi}^n) C_b^n - S(\phi^n) [C_b^n S(w_{ib}^b) - S(\rho^n + \Omega^n) C_b^n] \quad (126)$$

Substituindo as Eqs. (98), (99) e (126) na (124), e utilizando a relação anti-simétrica dada pela Eq. (100),

$$\begin{aligned} S(\dot{\phi}^n) &= S(\delta \rho^n) - S(\delta \theta^n \times \Omega^n) + \\ &\quad S(\phi^n) S(\phi^n + \Omega^n) S(\phi^n) - C_b^n S(w_{ib}^b) C_n^b \end{aligned} \quad (127)$$

Reescrevendo a Eq. (127) utilizando a relação dada pelas Eqs. (101) e (102):

$$S(\dot{\phi}^n) = S(\delta \rho^n) - S(\delta \theta^n \times \Omega^n) + S(\phi^n \times w_{in}^n) - S(w_{ib}^n) \quad (128)$$

Retirando o operador anti-simétrico e escrevendo a Eq. (128) na forma vetorial, obtém-se

$$\dot{\phi}^n = \delta \rho^n - \delta \theta^n \times \Omega^n + \phi^n \times w_{in}^n - \delta w_{ib}^n \quad (129)$$

onde

subscrito  $n$  – indica o sistema de coordenadas ENU;

$\dot{\phi} \in \mathbb{R}^3$  – deriva do erro na orientação;

$\delta \rho \in \mathbb{R}^3$  – erro na velocidade angular entre ENU e ECEF;

$\Omega \in \mathbb{R}^3$  – velocidade de rotação da Terra;

$\phi \in \mathbb{R}^3$  – erro na orientação;

$\omega_{in} \in \mathbb{R}^3$  – velocidade angular de ENU relativo ao ECI;

$\omega_{ib} \in \mathbb{R}^3$  – velocidade angular de Corpo relativo ao ECI;

$\delta\omega_{ib} \in \mathbb{R}^3$  – velocidade angular de Corpo relativo ao ECI;