

3 Filtro de Kalman Discreto

As medidas realizadas por sensores estão sujeitas a erros, como pode ser visto no Capítulo 2. Os filtros são aplicados aos sinais medidos pelos sensores para reduzir os erros, de forma a estimar o valor real. O filtro de Kalman é um filtro estatístico que estima o estado interno de um sistema dinâmico a partir de uma série de medidas ruidosas da saída do sistema. Na abordagem estatística assume-se que o sinal desejado e o ruído possuem características estatísticas e que as medidas realizadas são a soma de ambos. A abordagem clássica considera que o sinal desejado e o não desejado se encontram em faixas de frequência distintas.

Este capítulo será uma revisão do filtro de Kalman apenas no caso discreto, pois em situações práticas as observações e controles são realizados em tempo discreto. As deduções das equações do Filtro de Kalman apresentadas neste capítulo são encontradas em (ANDERSON E MOORE et. al., 1979; HOSET, LYNCH; e Outros et. al., 2005; THRUN, BURGARD e FOX et. al., 2005).

3.1. Sistemas Lineares

A representação por equações de estado modela um sistema físico como um conjunto de entradas, saídas e variáveis de estado. Seja um sistema dinâmico linear de dimensão finita amostrado nos instantes $t, \Delta t$, representado pelas equações de estado abaixo dada por (HOSET, LYNCH; e Outros et. al., 2005), onde as incertezas na evolução dos estados e nas medidas dos sensores são modeladas pelo acréscimo de um ruído branco em ambas as equações

$$x(t + \Delta t) = F(t)x(t) + G(t)u(t) + v(t) \quad (15)$$

$$z(t) = H(t)x(t) + w(t) \quad (16)$$

na qual:

Δt – intervalo entre amostras;

t – número da amostra, indicando indiretamente o instante;

n – número de estados do sistema;

m – número de entradas do sistema;

p – número de estados medidos;

$x \in \mathbb{R}^n$ – vetor de estado do sistema;

$u \in \mathbb{R}^m$ – vetor de entradas do sistema;

$z \in \mathbb{R}^p$ – vetor de saídas do sistema medidas pelos sensores;

$F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ – matriz da dinâmica do sistema;

$G \in \mathbb{R}^{n \times m}$ – matriz que relaciona como as entradas alteram a dinâmica do sistema;

$H \in \mathbb{R}^{p \times n}$ – matriz que descreve como as equações de estados são mapeadas em saídas;

$v \in \mathbb{R}^n$ – ruído do processo; e

$w \in \mathbb{R}^p$ – ruído da medida.

O filtro de Kalman é utilizado em sistemas lineares para se obter a melhor estimativa do vetor de estado condicionado às observações. Esta estimativa é calculada através da reconstrução do vetor de estados utilizando a estimativa do vetor de estado anterior, as entradas conhecidas e as saídas medidas. Logo, o filtro de Kalman age filtrando os ruídos do processo e da medida, como um observador.

Se o sistema for observável, todos os estados podem ser reconstruídos através das saídas do sistema. Para qualquer sistema linear observável, o erro entre o valor real e o valor estimado pelo filtro de Kalman será sempre limitado.

3.2. Estimação Probabilística

No filtro de Kalman as evoluções dos estados e das medidas são governadas pelas leis da probabilidade. Se o estado de $x(t)$ é completo, então nenhuma variável anterior a $x(t)$ influencia a evolução estocástica dos estados futuros, a não ser que esta dependência seja medida através de $x(t)$. A densidade de probabilidade de $x(t)$ será apenas dependente do estado $x(t-\Delta t)$ e do controle $u(t-$

Δt), representado pela probabilidade condicional $p(x(t)|x(t-\Delta t),u(t-\Delta t))$. A densidade de probabilidade de $z(t)$ será apenas dependente do estado $x(t)$, representada por sua densidade condicional $p(z(t)|x(t))$. Neste sistema, a evolução dos estados é constituída por um processo Markoviano não observável, onde a camada escondida tem seu valor corrompido por um ruído de medida para gerar a saída, vide Fig. 28.

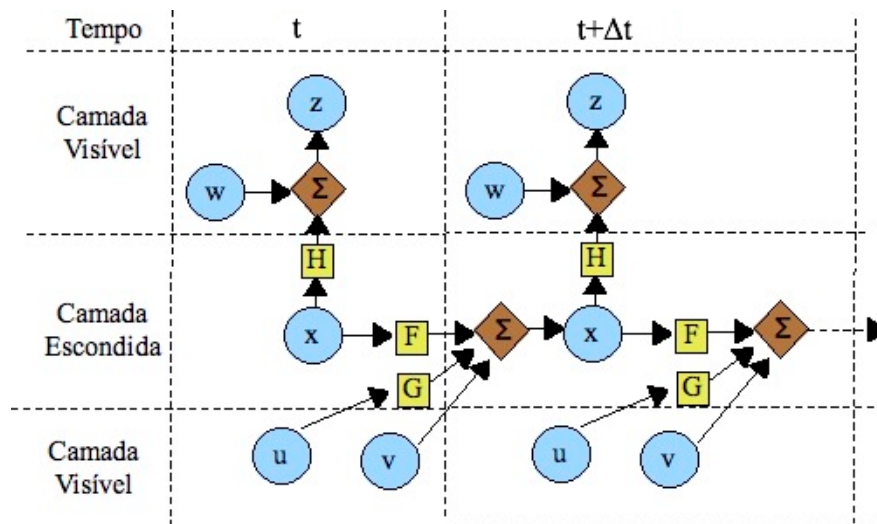


Figura 28 – Cadeia escondida de Markov que caracteriza a evolução do sistema.

3.3. Filtro de Kalman

Assume-se que $v(t)$ e $w(t)$ são vetores de ruídos brancos, sendo estes processos gaussianos independentes, com média zero e matrizes de covariância $V(t)$ e $W(t)$. Assume-se também que o vetor de estados inicial é um processo gaussiano randômico.

O vetor de estado, dado pela Eq. (15), é uma transformação linear de variáveis gaussianas. A distribuição gaussiana possui a propriedade que uma combinação linear de gaussianas também é uma distribuição gaussiana, logo o vetor de estado no instante t qualquer será sempre gaussiano, se $x(0)$ também for gaussiano.

O estimador do vetor de estado no instante $t+\Delta t$, construído no instante t , será representada na forma $x(t+\Delta t|t)$, cuja distribuição, por ser gaussiana, é definida por sua média e matriz de covariância dadas, de acordo com

(ANDERSON E MOORE et. al., 1979), pelas Eqs. (17) e (18), respectivamente. Este estimador é calculado através da transformação linear, dada pela Eq. (15), da distribuição do vetor de estado $x(t)$, das entradas $u(t)$ e do ruído do processo $v(t)$. Este primeiro passo do filtro de Kalman é conhecido como predição, pois é construído um estimador que prevê a distribuição do vetor de estado um passo a frente.

$$\hat{x}(t + \Delta t|t) = F(t)\hat{x}(t|t) + G(t)u(t) \quad (17)$$

$$P(t + \Delta t|t) = F(t)P(t|t)F(t)^T + V(t) \quad (18)$$

na qual:

$(t+\Delta t, t)$ – instante $t+\Delta t$ construído no instante t ;

$\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ – vetor de médias da distribuição x ;

$P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ – matriz de covariância da distribuição x ; e

$V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ – matriz de covariância da distribuição v .

No instante t a observação esperada do vetor de estado do instante $t+\Delta t$ é dada pelo estimador $z(t+\Delta t|t)$. Este estimador é obtido através da transformação linear dada pela Eq. (16). O estimador é um transformação linear de uma distribuição gaussiana, logo é também uma gaussiana.

No instante $t+\Delta t$ é obtida, através dos sensores, uma observação do vetor de estado, $x(t+\Delta t)$, observação representada por $z(t+\Delta t)$. A diferença entre o observado e o que se esperava observar é dada pelo estimador $\Delta z(t+\Delta t)$. Este é gaussiano, por ser uma combinação linear de gaussianas, que de acordo com (ANDERSON E MOORE et. al., 1979) é definido por seu vetor de médias e matriz de covariância, respectivamente:

$$\Delta \hat{z}(t + \Delta t) = z(t + \Delta t) - H(t + \Delta t)\hat{x}(t + \Delta t|t) \quad (19)$$

$$S(t + \Delta t) = H(t + \Delta t)P(t + \Delta t|t)H(t + \Delta t)^T + W(t + \Delta t) \quad (20)$$

na qual:

$\Delta \hat{z} \in \mathbb{R}^p$ – vetor de médias da distribuição Δz ;

$z \in \mathbb{R}^p$ – vetor de valores observados na medição; e

$W \in \mathbb{R}^{p \times p}$ – matriz de covariância da distribuição w .

A existência da nova informação, gerada pela observação $z(t+\Delta t)$, permite que o estimador do vetor de estado $x(t+\Delta t)$ seja atualizado. Essa atualização é feita através da adição de um termo de correção ao estimador $x(t+\Delta t|t)$. O termo de correção é dado por um ganho K vezes a diferença das observações, $\Delta z(t+\Delta t)$. O ganho K pode ser visto como um peso que leva em conta a relação entre a acurácia da estimativa $x(t+\Delta t|t)$ e o ruído da medida. Quanto maior o ganho K , maior é a crença que o observado está mais próximo do correto que a estimativa propagada. Este passo é conhecido como a atualização, pois o estimador para o vetor de estado $x(t+\Delta t)$, feito no instante t , é atualizado no instante $t+\Delta t$. O novo estimador $x(t+\Delta t|t+\Delta t)$ é gaussiano e descrito de acordo com (ANDERSON E MOORE et. al., 1979) por seu vetor de médias e matriz de covariância, respectivamente:

$$\hat{x}(t + \Delta t|t + \Delta t) = \hat{x}(t + \Delta t|t) + K(t + \Delta t)\Delta \hat{z}(t + \Delta t) \quad (21)$$

$$P(t + \Delta t|t + \Delta t) = P(t + \Delta t|t) - K(t + \Delta t)H(t + \Delta t)P(t + \Delta t|t) \quad (22)$$

na qual:

$(t+\Delta t, t+\Delta t)$ – instante $t+\Delta t$ construído no instante $t+\Delta t$; e

$K \in \mathbb{R}^{p \times n}$ – matriz de ganhos.

O ganho K que minimiza o erro quadrático na estimativa do estado é também conhecido como o ganho ótimo de Kalman

$$K(t + \Delta t) = P(t + \Delta t|t)H(t + \Delta t)^T S(t + \Delta t)^{-1} \quad (23)$$

As Eqs. (16) a (23) são as equações do filtro de Kalman, que fornecem um estimador ótimo para o vetor de estado, quando a hipótese de que os ruídos são

gaussianos é mantida. As equações se mantêm válidas para o caso onde as distribuições $x(0)$, $v(t)$, $w(t)$ não forem conjuntamente gaussianas. Entretanto, dependendo da distribuição de $v(t)$ e $w(t)$, os dois primeiros momentos podem não ser suficientes para descrever a distribuição de probabilidade do vetor de estados $x(t)$.

A hipótese de os ruídos do processo e da medida serem brancos pode ser relaxada. Considerando estes processos correlacionados, os mesmos podem ser modelados como um sistema linear de dimensão finita, onde a entrada é um ruído branco. Então, o vetor de estado do filtro de Kalman será composto pelos sinais originais do modelo e pelos do modelo do ruído.

3.4. Exemplo

3.4.1. Simples Posicionamento em 1 Dimensão

Para melhor compreender como um filtro de Kalman funciona, um simples exemplo será apresentado, retirado de (MAYBECK et. al., 1979). O exemplo constitui em estimar a posição em uma dimensão, através de observações ruidosas da mesma. Em um determinado tempo t_1 a posição é observada como sendo z_1 . Esta medição possui um desvio padrão σ_{z_1} , logo a probabilidade de se estar em uma determinada posição $x(t_1)$ no tempo t_1 é baseado na medida e é dada pela probabilidade condicional $f_{x(t_1)|z(t_1)}(x|z_1)$, vide Fig. 29.

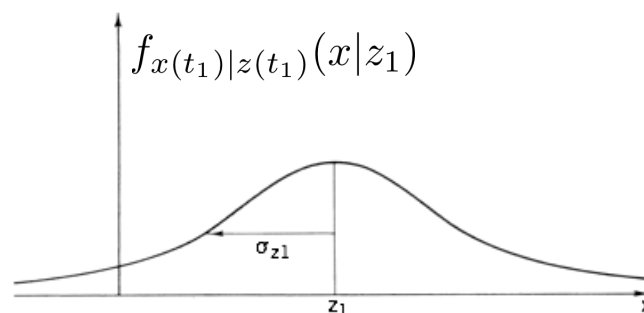


Figura 29 – Densidade condicional da posição baseada no valor medido z_1 . (MAYBECK et. at., 1979)

Em um tempo t_2 próximo a t_1 outra medida é feita da mesma posição, z_2 . Esta possui uma variância σ_{z_2} , onde *e.g.* $\sigma_{z_1} > \sigma_{z_2}$, ou seja, a certeza da posição é maior baseada na medição z_2 . A distribuição de probabilidade da posição no instante t_2 , $x(t_2)$, é dada pela probabilidade condicional $f_{x(t_2)|z(t_2)}(x|z_2)$, Fig. 30.

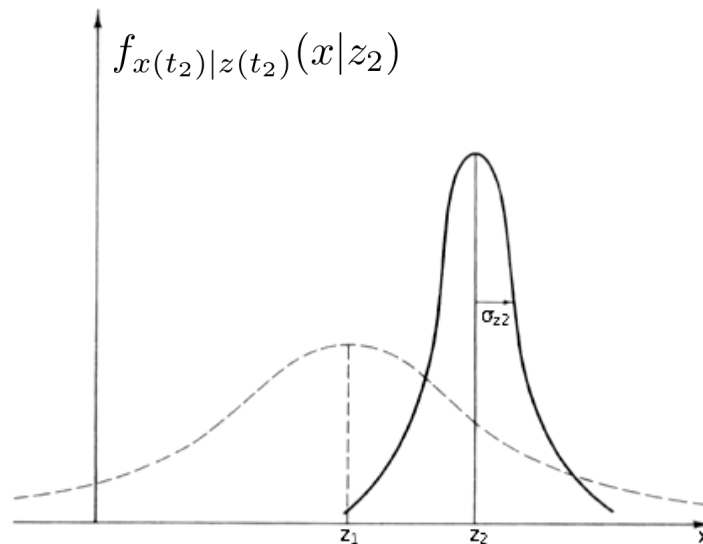


Figura 30 – Densidade condicional da posição baseada no valor medido z_2 . (MAYBECK et. at., 1979)

Considerando as duas medidas de posição (z_1 e z_2) e sendo estas gaussianas, o filtro de Kalman fornecerá o melhor estimador possível para a posição no instante t_2 , $x(t_2)$, cuja distribuição é dada pela probabilidade condicional $f_{x(t_2)|z(t_1),z(t_2)}(x|z_1, z_2)$ com média μ e variância σ , onde $\sigma_{z_1} > \sigma_{z_2} > \sigma$, vide Fig. 31.

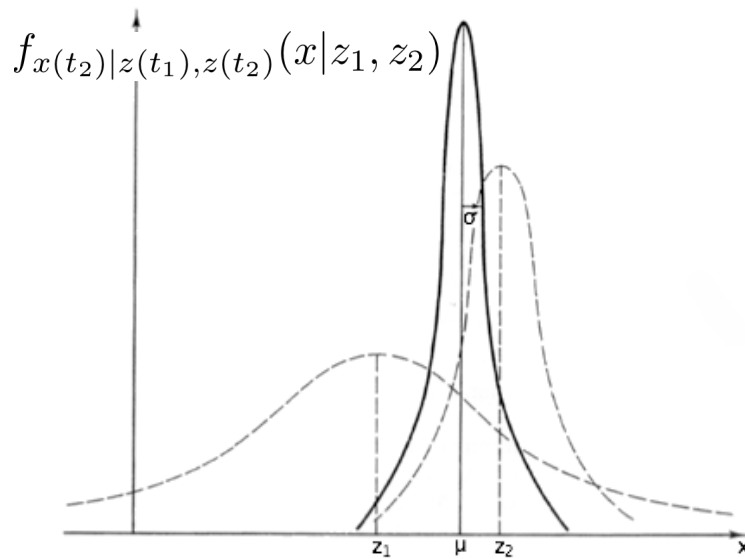


Figura 31 – Densidade condicional da posição baseada nos valores medidos z_1 e z_2 . (MAYBECK et. at., 1979)

3.4.2. Ajuste do Ruído da Medida

Este exemplo retirado de (WELCH e BISHOP et. al., 2006) mostra como o desempenho do filtro de Kalman é influenciado pelo parâmetro de ruído da medida. Seja uma constante observada 50 vezes, onde as observações são corrompidas por um ruído branco de média nula e variância 0,1. O filtro de Kalman estima o valor da constante através das 50 medições ruidosas. As Figs. 32, 33 e 34 representam as simulações do filtro onde as variâncias da medida (W) são $(0,01)^2$, $(0,1)^2$, $(1)^2$ respectivamente. A linha sólida representa o valor real da constante, as cruzes representam as medidas ruidosas e a curva restante o valor estimado pelo filtro.

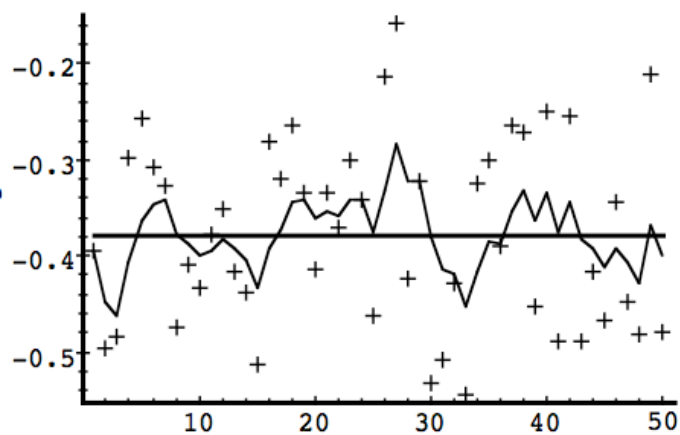


Figura 32 – Simulação do Filtro de Kalman com $W=(0,01)^2$. (WELCH e BISHOP et. al., 2006)

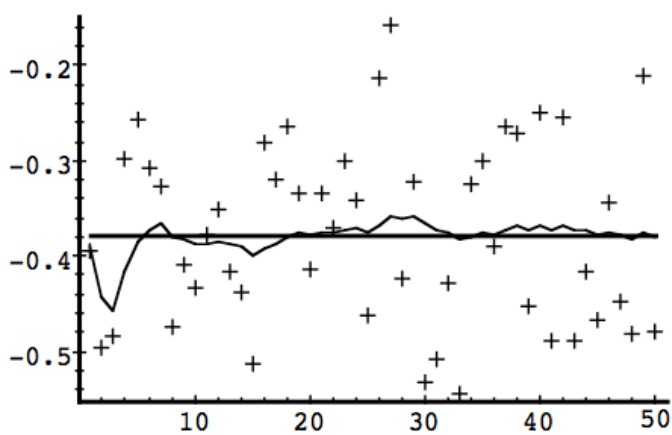


Figura 33 – Simulação do Filtro de Kalman com $W=(0,1)^2$. (WELCH e BISHOP et. al., 2006)

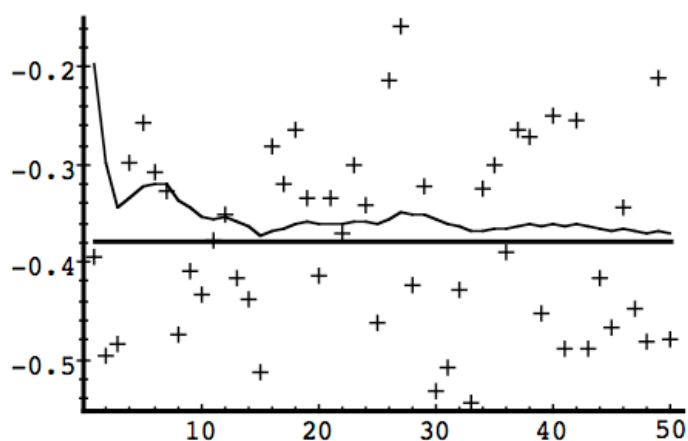


Figura 34 – Simulação do Filtro de Kalman com $W=(1)^2$. (WELCH e BISHOP et. al., 2006)

Na Fig. 33 com $W=(0,1)^2$ obtém-se o melhor desempenho dentre as 3 simulações, pois é utilizado o valor real da variância do erro da medida. Na Fig. 34 observa-se que o filtro responde mais lentamente às medidas, resultando em uma variância reduzida, mas uma maior lentidão na convergência. Enquanto na Fig. 32 o filtro responde mais velozmente às medidas, o que aumenta a variância estimada.

3.5. Sistemas Não Lineares

Seja um sistema dinâmico de dimensão finita, não-linear, amostrado discretamente em instantes t e descrito pelas Eqs. (24) e (25), (HOSET, LYNCH; e Outros et. al., 2005). O filtro ótimo para a estimação do vetor de estado do sistema é não-linear, entretanto filtros não-lineares são de difícil construção. Tendo em vista simplificar a filtragem, o sistema pode ser linearizado e os filtros lineares aplicados ao mesmo.

$$x(t + \Delta t) = f(x(t), u(t), t) + v(t) \quad (24)$$

$$z(t) = h(x(t), t) + w(t) \quad (25)$$

na qual:

$x \in \mathbb{R}^n$ – vetor de estado do sistema;

$u \in \mathbb{R}^m$ – vetor de entradas do sistema;

$z \in \mathbb{R}^p$ – vetor de saídas do sistema medidas pelos sensores;

$f \in \mathbb{R}^n$ – vetor de funções da dinâmica do sistema;

$h \in \mathbb{R}^p$ – vetor de funções que descreve como as equações de estado são

mapeadas em saídas;

$v \in \mathbb{R}^n$ – ruído do processo; e

$w \in \mathbb{R}^p$ – ruído da medida.

3.6. Filtro de Kalman Estendido

A adaptação do filtro de Kalman para sistemas não-lineares, linearizados através da expansão da série de Taylor de primeira ordem com relação à estimativa mais recente, é chamado de filtro de Kalman Estendido. No entanto, existem métodos de linearização que produzem melhores estimadores para os vetores de estado gaussianos do que o método de expansão por série de Taylor.

3.6.1. Linearização

A linearização por expansão da série de Taylor de primeira ordem aproxima a função não-linear através de seu valor em um ponto, extrapolado linearmente por sua inclinação no ponto. O ponto escolhido é aquele onde o estado tenha maior probabilidade de ocorrência no momento da linearização, ou seja, no valor esperado do estado. As inclinações e as equações linearizadas das funções f e h são dada por (HOSET, LYNCH; e Outros et. al., 2005) como:

$$JF(t) = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x=\hat{x}(t|t)} \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$f(x(t), u(t), t) \approx f(\hat{x}(t|t), u(t), t) + JF(t)(x(t|t) - \hat{x}(t|t)) \quad (27)$$

$$JH(t + \Delta t) = \frac{\partial h}{\partial x} \Big|_{x=\hat{x}(t+\Delta t|t)} \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial h_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_p}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial h_p}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (28)$$

$$h(x(t + \Delta t), t + \Delta t) \approx f(\hat{x}(t + \Delta t|t), t + \Delta t) + JH(t + \Delta t)(x(t + \Delta t|t) - \hat{x}(t + \Delta t|t)) \quad (29)$$

na qual:

$JF \in \mathbb{R}^{n \times n}$ – Jacobiano de f ;

$\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ – vetor de médias do estimador x ;

$f=[f_1 \ f_2 \ \dots \ f_n]^T \in \mathbb{R}^n$ – vetor de funções da dinâmica do sistema;

$h=[h_1 \ h_2 \ \dots \ h_n]^T \in \mathbb{R}^p$ – vetor de funções que descreve como as equações de estado são mapeadas em saídas;

$u \in \mathbb{R}^m$ – vetor de entradas do sistema;

$x \in \mathbb{R}^n$ – vetor de estado do sistema; e

$JH \in \mathbb{R}^{p \times n}$ – Jacobiano de h .

Visando exemplificar o efeito de uma transformação não-linear sobre a propagação do vetor de estado e os erros que a linearização trazem, simplifica-se o vetor de estado como sendo uma variável única de estado X , com distribuição gaussiana $p(x)$, Figs. 35 a 38. Cada figura possui três gráficos: o inferior à direita representando a distribuição original $p(x)$, o superior na direita a transformação e o da esquerda as distribuições resultantes após a transformação, sendo que o gráfico da esquerda possui três distribuições:

A distribuição $p(y)$ não gaussiana representada pela área em cinza.

A distribuição resultante da transformação não-linear do estado X , $y=g(x)$, computada através do método de Monte-Carlo é representada pela linha sólida

A distribuição gaussiana resultante da projeção do estado X através da linearização de $g(x)$ representada pela linha pontilhada. A linearização é feita através da expansão de primeira ordem da série de Taylor de $g(x)$ com relação à estimativa de X , ou seja, a tangente no ponto $g(\mu)$, com μ sendo a média da distribuição $p(x)$.

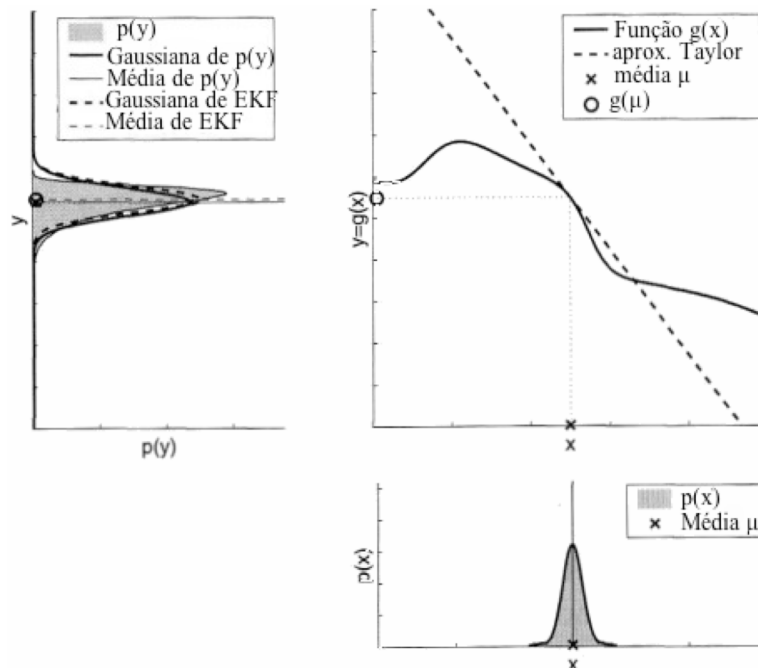


Figura35– Transformação não-linear de uma distribuição com pequena variância. (THRUN; BURGARD; e FOX et. al., 2005)

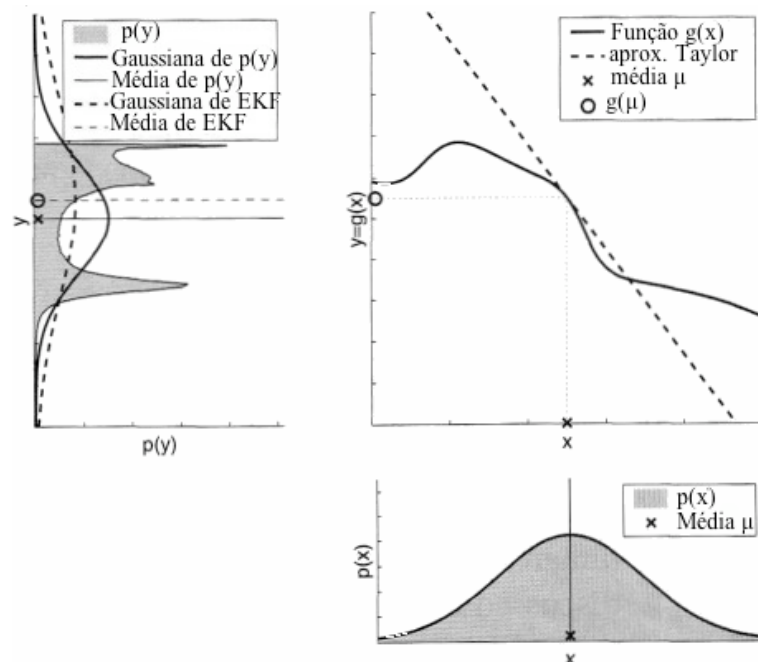


Figura 36 –Transformação não-linear de uma distribuição com grande variância. (THRUN; BURGARD; e FOX et. al., 2005)

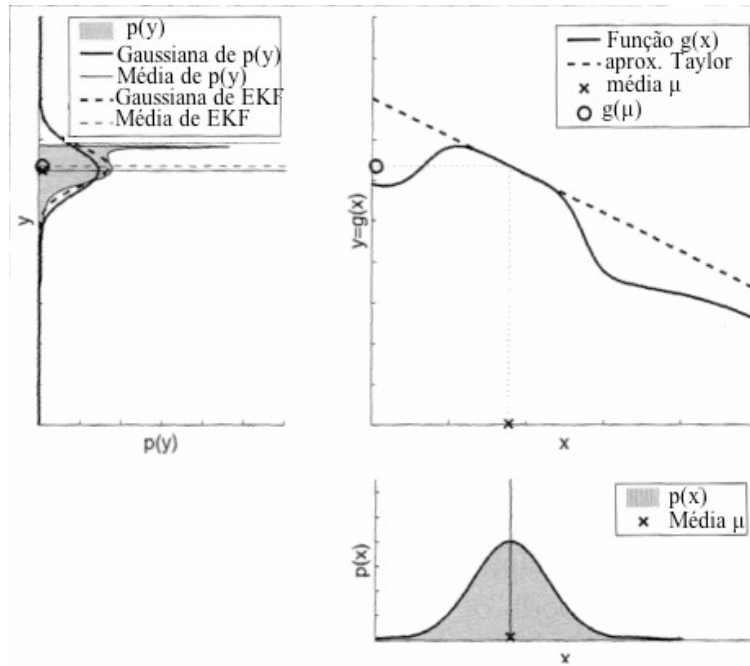


Figura 37 – Transformação através de um ponto com pequena não-linearidade local. (THRUN; BURGARD; e FOX et. al., 2005)

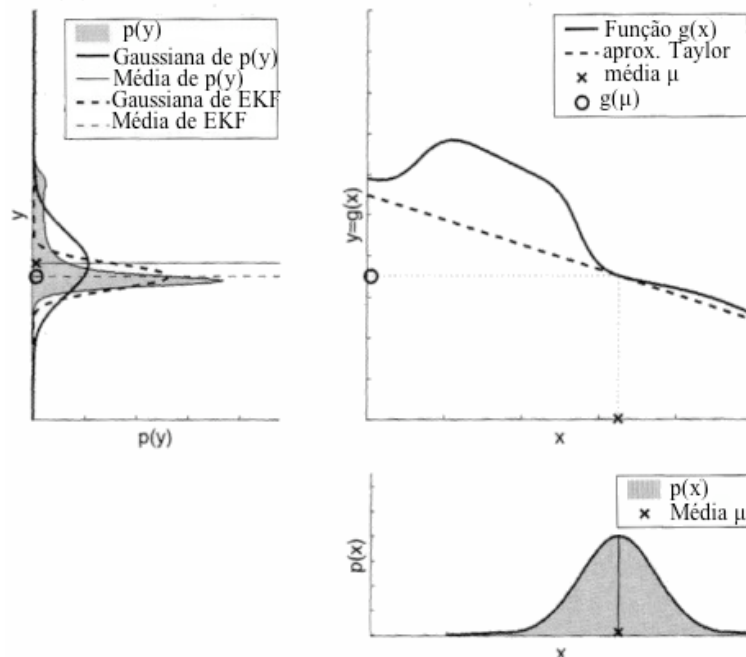


Figura 38 – Transformação através de um ponto com grande não-linearidade local. (THRUN; BURGARD; e FOX et. al., 2005)

A qualidade da aproximação linear de g pode ser observada pela diferença entre a linha sólida e a linha pontilhada: quanto melhor a aproximação, mais a linha pontilhada irá se aproximar da sólida. Os dois principais fatores que afetam

a qualidade de uma linearização são o grau de incerteza da distribuição que está sendo transformada e o grau de não-linearidade local da função.

As Figs. 35 e 36 mostram a dependência da qualidade da transformação linear com relação à incerteza, em ambas figuras distribuições gaussianas passam pela mesma função g , linearizada no mesmo ponto. Na Fig. 36 a distribuição possui uma variância maior que na Fig. 35, o que resulta em uma aproximação de pior qualidade.

A dependência da qualidade da linearização, com relação ao grau de linearidade local da função, pode ser observada nas Figs. 37 e 38. Em ambas as figuras a variância da distribuição e a função não-linear são as mesmas. As figuras se diferenciam pelo ponto de linearização, na Fig. 38 existe uma maior não-linearidade local ao ponto, o que resulta em um maior erro de aproximação.

3.6.2. Equação do Filtro de Kalman Estendido

O sistema não-linear, dado pelas Eqs. (24) e (25), com as funções g e h linearizadas pelas Eqs. (27) e (29), se torna um sistema linear. A lógica do equacionamento do filtro de Kalman para este sistema é a mesma que a desenvolvida para o sistema linear. As equações são descritas por (HOSET, LYNCH; e Outros et. al., 2005) como sendo:

Estimador Preditivo:

$$\hat{x}(t + \Delta t|t) = f(\hat{x}(t|t), u(t), t) \quad (30)$$

$$P(t + \Delta t|t) = JF(t)P(t|t)JF(t)^T + V(t) \quad (31)$$

Estimador Diferença Observável:

$$\Delta \hat{z}(t + \Delta t) = z(t + \Delta t) - h(\hat{x}(t + \Delta t|t), t + \Delta t) \quad (32)$$

$$S(t + \Delta t) = JH(t + \Delta t)P(t + \Delta t|t)JH(t + \Delta t)^T + W(t + \Delta t) \quad (33)$$

Estimador Atualizado:

$$\hat{x}(t + \Delta t|t + \Delta t) = \hat{x}(t + \Delta t|t) + K(t + \Delta t)\Delta\hat{z}(t + \Delta t) \quad (34)$$

$$P(t + \Delta t|t + \Delta t) = P(t + \Delta t|t) - K(t + \Delta t)JH(t + \Delta t)P(t + \Delta t|t) \quad (35)$$

Ganho de Kalman:

$$K(t + \Delta t) = P(t + \Delta t|t)JH(t + \Delta t)^T S(t + \Delta t)^{-1} \quad (36)$$

na qual:

$JF \in \mathbb{R}^{n \times n}$ – Jacobiano de f ;

$\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ – vetor de médias do estimador x ;

$f \in \mathbb{R}^n$ – vetor de funções da dinâmica do sistema;

$h \in \mathbb{R}^p$ – vetor de funções que descreve como as equações de estados são

mapeadas em saídas;

$u \in \mathbb{R}^m$ – vetor de entradas do sistema;

$x \in \mathbb{R}^n$ – vetor de estado do sistema;

$JH \in \mathbb{R}^{p \times n}$ – Jacobiano de h ;

$h \in \mathbb{R}^p$ – vetor de funções que descreve como as equações de estados são

mapeadas em saídas;

$P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ – matriz de covariância da distribuição x ;

$V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ – matriz de covariância da distribuição v ;

$\Delta\hat{z} \in \mathbb{R}^p$ – vetor de médias da distribuição Δz ;

$z \in \mathbb{R}^p$ – vetor de valores observados na medição;

$S \in \mathbb{R}^{p \times p}$ – matriz de covariância da distribuição Δz ; e

$W \in \mathbb{R}^{p \times p}$ – matriz de covariância da distribuição w .

No próximo capítulo, o Filtro de Kalman apresentado será aplicado ao problema de fusão do GPS e sensor inercial.