2
Metodologia

2.1
Vetores Auto-Regressivos (VAR)

Na década de 80, os modelos de vetores auto-regressivos surgiram como resposta às críticas endereçadas aos modelos estruturais, como por exemplo o elevado número de restrições impostas às estimações e sua pobre acurácia preditiva. Nos modelos VAR, as variáveis envolvidas são tratadas como endógenas e as relações entre elas são tais que há uma relação linear entre cada variável e os valores defasados dela própria e das demais.

No modelo VAR, as variáveis dependentes são os valores correntes dos processos x_{1t}, x_{2t}, ... , x_{nt}. Elas têm sua dinâmica explicada pelos valores passados das mesmas variáveis, assumindo uma defasagem máxima p[2]. Cada equação do modelo possui um termo específico, que representa o choque correspondente a i-ésima equação, denotado ε_{it}. A sensibilidade da i-ésima variável do modelo é com relação a k-ésima defasagem da j-ésima variável é medida pelo coeficiente φ_{jk}. As leis de movimento de cada variável compõem o seguinte sistema de equações:

$$x_{1t} = \varphi_{111}x_{1t-1} + \varphi_{121}x_{2t-1} + \ldots + \varphi_{1n1}x_{nt-1} + \ldots + \varphi_{11p}x_{1t-p} + \varphi_{12p}x_{2t-1} + \ldots + \varphi_{1np}x_{nt-p} + \varepsilon_{1t}$$

$$x_{2t} = \varphi_{211}x_{1t-1} + \varphi_{221}x_{2t-1} + \ldots + \varphi_{2n1}x_{nt-1} + \ldots + \varphi_{21p}x_{1t-p} + \varphi_{22p}x_{2t-1} + \ldots + \varphi_{2np}x_{nt-p} + \varepsilon_{2t}$$

$$\vdots$$

$$x_{nt} = \varphi_{n11}x_{1t-1} + \varphi_{n21}x_{2t-1} + \ldots + \varphi_{nn1}x_{nt-1} + \ldots + \varphi_{n1p}x_{1t-p} + \varphi_{n2p}x_{2t-1} + \ldots + \varphi_{nnp}x_{nt-p} + \varepsilon_{nt}$$

Esse sistema pode ser escrito em forma matricial:

[2] Em geral, a defasagem p é escolhida através da minimização do resultado de alguma medida de informação, como os critérios de Akaike e Schwarz, por exemplo.

$$\begin{bmatrix} x_{1t} \\ x_{2t} \\ \vdots \\ x_{nt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_{111} & \varphi_{121} & \cdots & \varphi_{1n1} \\ \varphi_{211} & \varphi_{221} & \cdots & \varphi_{2n1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{n11} & \varphi_{n21} & \cdots & \varphi_{nn1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1t-1} \\ x_{2t-1} \\ \vdots \\ x_{nt-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varphi_{112} & \varphi_{122} & \cdots & \varphi_{1n2} \\ \varphi_{212} & \varphi_{222} & \cdots & \varphi_{2n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{n12} & \varphi_{n22} & \cdots & \varphi_{nn2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1t-2} \\ x_{2t-2} \\ \vdots \\ x_{nt-2} \end{bmatrix} + \cdots$$

$$+ \begin{bmatrix} \varphi_{11p} & \varphi_{12p} & \cdots & \varphi_{1np} \\ \varphi_{21p} & \varphi_{22p} & \cdots & \varphi_{2np} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{n1p} & \varphi_{n2p} & \cdots & \varphi_{nnp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1t-p} \\ x_{2t-p} \\ \vdots \\ x_{nt-p} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \\ \vdots \\ \varepsilon_{nt} \end{bmatrix}$$

ou, de forma ainda mais compacta:

$$X_t = \Gamma_1 X_{t-1} + \Gamma_2 X_{t-2} + \ldots + \Gamma_p X_{t-p} + \mathrm{E}_t$$

onde as matrizes Γ_i sendo o vetor de perturbações $\mathrm{E}_t \sim N(0,\Omega)$, com ε_{it} e ε_{js} são descorrelatados para $t \neq s$.

Modelos VAR foram largamente utilizados nas literaturas de Economia Monetária e Macroeconomia com o intuito de estudar as reações das variáveis de um sistema econômico em resposta a choques monetários, fiscais, de produtividade etc. (ver Christiano, Eichenbaum e Evans (1998), Wu (2002), Minella (2001) e Blanchard e Perotti (2002), entre outros). Nessa literatura, os modelos VAR efetivamente observados pelo analista (usualmente denominados “forma reduzida”) são utilizados para estimar o modelo que de fato incorpora as conexões econômicas existentes entre as variáveis do sistema (a chamada “forma estrutural”). Essa conversão da forma reduzida para o VAR estrutural subjacente é feita assumindo algumas hipóteses de identificação, que em geral excluem a possibilidade de alguns choques exercerem efeitos contemporâneos sobre algumas das variáveis do sistema. É nesse contexto que se inclui o trabalho de Evans e Marshall, cujo arcabouço analítico inspirou os modelos construídos ao longo desse trabalho. A próxima seção traz uma breve discussão do mesmo.

2.2
O Modelo de Evans e Marshall

Este trabalho segue a metodologia proposta por Evans e Marshall (1998), que visa estudar os efeitos de choques monetários sobre a curva de juros. O método utilizado consiste em estimar modelos VAR envolvendo variáveis macroeconômicas e taxas ao longo da curva de juros, recuperar os modelos estruturais subjacentes usando algumas hipóteses de identificação e utilizá-los para calcular as respostas das taxas ao longo da curva de juros a perturbações de natureza monetária.

De acordo com Christiano, Eichenbaum e Evans (1998), define-se choque monetário como qualquer movimento na taxa de juros básica manipulada pelas autoridades monetárias que não reflete mudanças nas variáveis que pertencem a sua função de reação. Em geral assume-se que essa taxa básica é uma taxa *overnight*, representada por r_t, e que o Banco Central a define através de uma função de reação com o seguinte formato geral:

$$r_t = r(\Omega_t) + \varepsilon_t$$

Nessa equação, Ω_t representa o conjunto de variáveis que retratam o estado da economia e inspiram as decisões de política monetária. Em geral considera-se que Ω_t incorpora valores correntes, passados ou esperados das variáveis macroeconômicas mais importantes (em geral medidas de inflação e atividade econômica), juntamente com valores defasados da própria taxa de juros. O termo ε_t na equação acima é que representa o choque monetário, cuja interpretação é freqüentemente associada a mudanças na composição do comitê responsável pelas decisões de política monetária ou mesmo a fatores políticos que afetam a independência do BC.

No modelo proposto por Evans e Marshall, a função de reação descrita acima aparece como uma das equações do modelo descrito abaixo:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathrm{b} \\ \mathrm{c} & \mathrm{d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{z_t} \\ \mathrm{s_t^j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{c^z} \\ \mathrm{c^j} \end{bmatrix} + \sum_{k=1}^{p} \begin{bmatrix} \mathbf{A_k} & \mathrm{b_k} \\ \mathrm{c_k} & \mathrm{d_k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{z_{t\text{-}k}} \\ \mathrm{s_{t\text{-}k}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_t^z \\ \varepsilon_t^j \end{bmatrix}$$

onde $\mathbf{z_t}$ é um vetor formado por *n* variáveis macroeconômicas (dentre as quais a taxa *Fed Funds*); $\mathbf{s_t^j}$ denota a taxa de um *pure discount Bond* com maturidade de j períodos; A é uma matriz de dimensões $n \times n$; $\mathrm{A_1}$, $\mathrm{A_2}$, ... , $\mathrm{A_T}$ são matrizes $n \times n$; b, b_1, b_2, ... , b_T são vetores coluna de dimensões $n \times 1$; c, c_1, c_2, ... , c_T são vetores linha de dimensões $1 \times n$; d, d_1, d_2, ... , d_K são escalares; $\begin{bmatrix} \mathrm{c^z} & \mathrm{c^j} \end{bmatrix}'$ é um vetor coluna de dimensões $(n+1)\times 1$ composto de constantes e $\begin{bmatrix} \varepsilon_t^z & \varepsilon_t^j \end{bmatrix}'$ é um vetor coluna de dimensões $(n+1)\times 1$ composto de erros i.i.d.

A identificação dos choques monetários exige a adoção de hipóteses que, em geral, separam as variáveis macroeconômicas em dois grupos. O primeiro grupo é composto por variáveis cujos choques conseguem sensibilizar a taxa básica de juros instantaneamente, enquanto que o segundo grupo é integrado por variáveis cujos choques só conseguem afetar a taxa básica no mínimo um período após a sua ocorrência. Essas hipóteses (usualmente referidas na literatura como “restrições de ordenação”) assumem o seguinte formato no arcabouço proposto por Evans e Marshall:

- *Conjunto de hipóteses 1*: Evans e Marshall assumem que os elementos em b, b_1, b_2, ... , b_T são todos iguais a zero, de maneira que os valores contemporâneos e defasados das variáveis macroeconômicas são independentes dos valores contemporâneos e defasados da taxa de juros de *j* períodos. Isto significa que a dinâmica das variáveis macroeconômicas determina a dinâmica da taxa de juros de *j* períodos, mas não o contrário (em outras palavras, os choques associados às variáveis macroeconômicas afetam a taxa básica prontamente, mas os choques nas taxas de juros não o fazem). Sendo assim, é possível fazer uma decomposição do modelo estrutural em dois blocos:

$$\mathbf{Az_t} = \mathrm{c^z} + \sum_{k=1}^{p} \mathbf{A_k z_{t\text{-}k}} + \varepsilon_t^z \qquad \rightarrow \qquad \text{Bloco Macro}$$

$$\mathrm{s}_{\mathrm{t}}^{\mathrm{j}} = \mathrm{c}^{\mathrm{j}} - \mathrm{c}\mathbf{z}_{\mathbf{t}} + \sum_{k=1}^{p} \mathrm{c}_{\mathrm{k}} \mathbf{z}_{\mathbf{t-k}} + \sum_{k=1}^{p} \mathrm{d}_{\mathrm{k}} \mathrm{s}_{\mathrm{t-k}}^{\mathrm{j}} + \varepsilon_t^j \qquad \rightarrow \qquad \text{Bloco } \textit{Yield}$$

▪ *Conjunto de hipóteses 2*: no que diz respeito ao chamado Bloco Macro, Evans e Marshall adotam o procedimento proposto por Christiano, Eichenbaum e Evans (1996b), que assumem que (i) a autoridade monetária enxerga os preços e a atividade econômica correntes na hora de ajustar a taxa *Fed Funds*; (ii) preços e níveis de atividade não são afetados contemporaneamente pela taxa *Fed Funds* devido a *lags* de efeito; (iii) as demais variáveis macroeconômicas são afetadas contemporaneamente por preços, atividade econômica e a taxa *Fed Funds*, e (iv) choques que perturbam a dinâmica dessas variáveis não afetam contemporaneamente preços, atividade econômica e taxa *Fed Funds*.

Sendo assim, o vetor Z_t é formado por:

$$Z_t = \begin{bmatrix} Z_{1t} \\ R_t \\ Z_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EM_t \\ P_t \\ PCOM_t \\ R_t \\ NBR_t/TR_t \\ \Delta M2_t \end{bmatrix} \begin{matrix} \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} \text{não são afetadas contemporaneamente por } R_t \\ \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} \text{são afetadas contemporaneamente por } R_t \end{matrix}$$

onde:

$EM_t \rightarrow$ nível de emprego *ex*-setor agrícola

$P_t \rightarrow$ nível geral de preços medido pelo deflator implícito dos gastos pessoais com consumo

$PCOM_t \rightarrow$ índice de preços de *commodities* sensíveis

$R_t \rightarrow$ taxa *Fed Funds*

$NBR_t/TR_t \rightarrow$ razão entre a *non-borrowed reserves* (equivalente às reservas voluntárias) e o *total reserves*

$\Delta M2_t \rightarrow$ taxa de crescimento de M2

As variáveis EM_t , P_t e $PCOM_t$ pertencem ao primeiro grupo de variáveis macroeconômicas, enquanto que as variáveis NBR_t/TR_t e $\Delta M2_t$ pertencem ao segundo. As hipóteses de identificação assumidas fazem com que a matriz A seja igual a:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0_{3\times2} \\ A_{21} & A_{22} & 0_{1\times2} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$

onde A_{11} é uma matriz 3x3, A_{12} é um vetor 3x1, A_{21} é um vetor 1x3, A_{22} é um escalar, A_{31} é uma matriz 2x3, A_{32} é um vetor 2x1 e A_{33} é uma matriz 2x2. De acordo com o demonstrado em Christiano, Eichenbaum e Evans (1998), essas restrições são suficientes para a identificação perfeita dos choques monetários.

2.3
Metodologia Aplicada

Esse trabalho adota a estratégia seguida em Vereda, Lopes e Fukuda (2007), que adaptam os modelos desenvolvidos por Evans e Marshall para alcançar um objetivo básico, qual seja, calcular previsões para as taxas de juros futuras relativas às mais diversas maturidades. O desempenho preditivo desses modelos é estudado e comparado com o desempenho atingido por outros modelos que a literatura usualmente adota como referências, como o *random walk* e meros modelos auto-regressivos univariados (ver Diebold e Li (2006)).

Usando dados brasileiros coletados entre julho de 1999 e maio de 2006, com freqüência mensal, Vereda, Lopes e Fukuda concluem que, se o interesse está em prever o comportamento de curto prazo de títulos de maturidade curta, então não há ganhos significativos ao incorporar variáveis macroeconômicas aos modelos preditivos porque a informação contida nos valores passados dos retornos já é suficiente para calcular previsões satisfatórias. Se o interesse, porém, está em prever o comportamento de curto prazo das taxas mais longas da curva de juros ou em calcular previsões de longo prazo para o espectro completo de taxas, então a incorporação de variáveis macroeconômicas aos modelos logra melhorar a qualidade das previsões, ou seja, o desempenho preditivo dos modelos propostos supera o desempenho preditivo dos concorrentes.

O presente trabalho se propõe não só a repetir o exercício executado em Vereda, Lopes e Fukuda (2007) com uma amostra maior de dados brasileiros, mas também a estender a análise para outros países, quais sejam, EUA, Reino Unido e Chile. Os efeitos da incorporação das variáveis macroeconômicas na previsão da Estrutura a Termo de Taxa de Juros dos diversos países são analisados à luz de diferentes modelos. Através da comparação entre os erros quadráticos médios e erros absolutos das previsões *out-of-sample*, escolhe-se aquela metodologia que possui melhor performance em relação aos dados reais observados.

Segundo Jeffrey Wooldridge, em seu livro *Introductory Econometrics – A Modern Approach*, o método *out-of-sample* é o mais indicado para realizar previsões. O autor em questão define este método como sendo um mecanismo de previsão em que utilizamos uma primeira parte da amostra para estimar os parâmetros, guardando a segunda parte desta mesma amostra no intuito de analisar a capacidade preditiva do modelo.

Suponha que temos $n + m$ observações, e usaremos as primeiras n observações para estimar os parâmetros do modelo, e guardamos as últimas m observações para analisar o desempenho da previsão do modelo. Seja $\hat{f}_{n+h}$ a previsão um passo à frente de y_{n+h+1}, para h = 0, 1,...,m–1. Os m erros de previsão são dados por $\hat{e}_{n+h+1} = y_{n+h+1} - \hat{f}_{n+h}$. Neste trabalho, adotamos duas métricas para avaliar a performance da previsão *out-of-sample*. A primeira delas é o Erro Quadrático Médio (EQM), em que:

$$\hat{e}_{n+h+1} = \left[\left(y_{n+h+1} - \hat{f}_{n+h}\right)^2\right]$$

A segunda métrica utilizada no trabalho é o Erro Absoluto (MAD), onde temos que:

$$s_{n+h+1} = y_{n+h+1} - f^{p}_{n+h}$$

Os modelos propostos no trabalho são oito, quais sejam:

1. Um modelo VAR que explica o retorno de um título através da dinâmica das variáveis macroeconômicas e dos valores defasados deste título;

2. Um modelo VAR que explica os retornos dos títulos, modelados conjuntamente, através da dinâmica das variáveis macroeconômicas e dos valores contemporâneos e defasados de todos os títulos;

3. Um modelo VAR em que os retornos dos títulos são modelados conjuntamente e explicados somente por seus valores defasados, não havendo qualquer influência das informações econômicas;

4. Um modelo VAR para os retornos dos títulos e para as variáveis macroeconômicas, onde os retornos dos títulos dependem das variáveis macro, mas a relação não existe no sentido inverso;

5. Um modelo VAR para os retornos dos títulos, utilizando os valores efetivamente observados das variáveis macro, sendo que a informação econômica afeta os *yields* dos títulos, mas os mesmos não são afetados pelas variáveis macro;

6. Um modelo onde as variáveis macro seguem um VAR e a relação entre o retorno de um título e as variáveis macroeconômicas é representada por uma equação, e a informação econômica afeta os *yields* dos títulos, mas o retorno do papel não afeta as variáveis macro;

7. Um modelo onde a previsão do retorno é realizada utilizando os valores observados das variáveis macro e a relação entre o *yield* do título e as variáveis macro é representada por uma equação, onde a informação econômica afeta o retorno dos papéis, mas os mesmo não são afetados pelas variáveis macro;

8. Um modelo auto-regressivo, onde o valor contemporâneo do *yield* de um título é função dos valores defasados deste mesmo título, sem incorporar a dinâmica dos títulos de diferentes maturidades e das variáveis macroeconômicas.

2.3.1
Primeiro Modelo – VAR 1

Neste modelo, utiliza-se um vetor $\mathbf{y}_t = \left[\mathbf{z}_t s_t^j\right]$, que é composto um sub-vetor de variáveis macroeconômicas e pelo retorno de um título de maturidade *j*.

As variáveis macro que compõem o sub-vetor $\mathbf{z}_t$, que é parte de integrante de $\mathbf{y}_t$, é formado pela taxa de juros r_t, pela inflação e pelo hiato do produto (desvio do índice de produtividade industrial em relação a sua tendência linear).

Temos portanto o seguinte modelo VAR:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{b} \\ \mathbf{c}' & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{z_t} \\ s_t^j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{w^z} \\ w^j \end{bmatrix} + \sum_{k=1}^{p} \begin{bmatrix} \mathrm{A}_\kappa & \mathbf{b_k} \\ \mathbf{c}'_\mathbf{k} & \mathrm{d_k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{z_{t-k}} \\ s_{t-k}^j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{e_t^z} \\ e_\mathbf{t}^\mathbf{j} \end{bmatrix}$$

Onde $\mathbf{I}$ é uma matriz identidade 3x3; $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots, \mathrm{A}_p$ são matrizes em $\Re^{3x3}$; $\mathbf{b}$, $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$,..., $\mathbf{b}_p$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{c}_1$, $\mathbf{c}_2$, ..., $\mathbf{c}_p$ são vetores em $\Re^3$; d_1, d_2, ... , d_p são números reais; $\left[\mathbf{w^z} \quad w^j\right]'$ é um vetor em $\Re^4$ (onde o vetor $\mathbf{w^z}$ tem dimensão três e w^j é um número real) e $\left[\mathbf{e_t^z} \quad e_t^j\right]'$ é um vetor real de quatro dimensões de erros aleatórios i.i.d., onde o vetor $\mathbf{e_t^z}$ tem dimensão três e e_t^j é um número real.

É possível estimar os coeficientes da equação, e realizar as previsões *out-of-sample*, em que se estima *n* versões do modelo VAR com a informação disponível até um intervalo de tempo determinado t^*, para em seguida fazer a previsão dos retornos dos títulos no instante $t^* + \widetilde{T}$. Vale lembrar que este modelo não isola o impacto dos retornos dos títulos nas variáveis macroeconômicas, de forma que ambos se afetam.

2.3.2
Segundo Modelo – VAR 2

As taxas associadas aos títulos com maturidades mais longas contêm informação sobre as taxas intermediárias futuras. Um título com maturidade de dois anos, por exemplo, possui um retorno resultante da composição do valor esperado de taxas curtas futuras ajustadas a risco. Sendo assim, este título contém informações sobre o retorno futuro dos títulos de maturidades mais curtas. Este argumento é trabalhado no seguinte modelo VAR:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3\times3} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{I}_{\mathbf{J}\times\mathbf{J}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{z_t} \\ \mathbf{s_t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{w}^{\mathbf{z}} \\ \mathbf{w}^{\mathbf{s}} \end{bmatrix} + \sum_{k=1}^{p} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\mathbf{\kappa}} & \mathbf{B_k} \\ \mathbf{C_k} & \mathbf{D}_{k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{z_{t\text{-}k}} \\ \mathbf{s_{t\text{-}k}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{\mathbf{t}}^{\mathbf{z}} \\ \mathbf{e}_{\mathbf{t}}^{\mathbf{s}} \end{bmatrix}$$

Agora, o vetor que contém as variáveis dependentes traz não só o vetor de variáveis macroeconômicas $\mathbf{z_t}$, mas também um outro vetor formado pelos retornos dos títulos de diferentes maturidades $\mathbf{s_t} = \begin{bmatrix} s_t^{j_1} & s_t^{j_2} & \dots & s_t^{j_J} \end{bmatrix}'$. I_{3x3} e I_{JxJ} são matrizes identidade 3x3 e JxJ. $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, ..., \mathbf{A}_p$ são matrizes 3x3; $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, ..., \mathbf{B}_p$ são matrizes 3xJ; $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, ..., \mathbf{C}_p$ são matrizes Jx3; $\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2, ..., \mathbf{D}_p$ são matrizes JxJ; $\begin{bmatrix} \mathbf{w}^{\mathbf{z}} & \mathbf{w}^{\mathbf{s}} \end{bmatrix}'$ é um vetor de constantes e $\begin{bmatrix} \mathbf{e}_{\mathbf{t}}^{\mathbf{z}} & \mathbf{e}_{\mathbf{t}}^{\mathbf{s}} \end{bmatrix}'$ é um vetor de resíduos i.i.d. que são não-correlacionados.

Assim, é possível estimar os coeficientes da equação, e realizar as previsões *out-of-sample*, em que se estima *n* versões do modelo VAR com a informação disponível até um intervalo de tempo determinado t^*, para em seguida fazer a previsão dos retornos dos títulos no instante $t^* + \widetilde{T}$.

Este modelo não isola o impacto dos *yields* dos títulos no conjunto de variáveis macroeconômicas, de forma que a relação de dependência se dá em ambas as direções.

2.3.3
Terceiro Modelo – VAR 3

Neste modelo, os *yields* de todos os títulos são modelados conjuntamente, sem a incorporação de nenhuma informação econômica.

Sendo assim, os retornos contemporâneos dos títulos de diferentes maturidades seriam afetados exclusivamente pelos seus valores defasados. Temos portanto, o seguinte modelo:

$$\mathbf{s_t^j} = \mathbf{w}^s + \sum_{k=1}^{p} \mathbf{D_k s_{t-k}} + \mathbf{e_t^s}$$

Onde $\mathbf{s_t^j}$ é o vetor de retornos dos títulos j no tempo t; $\mathbf{w}^s$ é um vetor de constantes; $\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2, \ldots, \mathbf{D}_T$ é uma matriz JxJ, que capta a sensibilidade dos retornos aos seus valores defasados; e $\mathbf{e_t^s}$ é um vetor de erros i.i.d.

Os coeficientes da equação são estimados e as previsões *out-of-sample* são realizadas, estimando-se n versões do modelo VAR com a informação disponível até um intervalo de tempo determinado t^*, para em seguida fazer a previsão dos retornos dos títulos no instante $t^* + \widetilde{T}$. Este modelo não isola o impacto dos retornos dos diversos títulos nas variáveis macroeconômicas, de forma que ambos se afetam.

2.3.4
Quarto Modelo – VAR 4

Neste modelo, o comportamento dos diversos retornos dos títulos segue um VAR, bem como as variáveis macroeconômicas. Temos, portanto:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3\times3} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{I}_{\mathbf{J}\times\mathbf{J}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{z_t} \\ \mathbf{s_t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{w^z} \\ \mathbf{w^s} \end{bmatrix} + \sum_{k=1}^{p} \begin{bmatrix} \mathbf{A_K} & \mathbf{B_k} \\ \mathbf{C_k} & \mathbf{D_k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{z_{t-k}} \\ \mathbf{s_{t-k}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{e^z_t} \\ \mathbf{e^s_t} \end{bmatrix}$$

O vetor de variáveis dependentes contém o vetor de variáveis macroeconômicas $\mathbf{z_t}$, e o vetor formado pelos retornos dos títulos de diferentes maturidades $\mathbf{s_t} = \begin{bmatrix} s_t^{j_1} & s_t^{j_2} & \dots & s_t^{j_J} \end{bmatrix}'$. I_{3x3} e I_{JxJ} são matrizes identidade 3x3 e JxJ. $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, ..., \mathbf{A}_p$ são matrizes 3x3; $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, ..., \mathbf{B}_p$ são matrizes 3xJ; $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, ..., \mathbf{C}_p$ são matrizes Jx3; $\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2, ..., \mathbf{D}_p$ são matrizes JxJ; $\begin{bmatrix} \mathbf{w^z} & \mathbf{w^s} \end{bmatrix}'$ é um vetor de constantes e $\begin{bmatrix} \mathbf{e^z_t} & \mathbf{e^s_t} \end{bmatrix}'$ é um vetor de erros i.i.d.

Neste modelo, utilizamos uma restrição análoga àquela apresentada no 1º modelo VAR:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_2 = \ldots = \mathbf{B}_p = \mathbf{0}_{JxJ}$$

Onde $\mathbf{0}_{JxJ}$ é uma matriz JxJ formada por zeros. Esta restrição anula o impacto dos valores defasados e atuais dos retornos dos títulos no valor das variáveis macroeconômicas. Observe também que não há relação entre o valor contemporâneo do retorno de um título de determinada maturidade e dos demais papéis, pois trabalhamos com a hipótese de que não relação direta entre os retornos dos títulos.

As restrições utilizadas também tornam possível a quebra do modelo VAR proposto em duas partes: um bloco macro, idêntico ao proposto no 1º modelo, formado por um VAR na forma reduzida representada pelo vetor $\mathbf{z_t}$, que descreve a evolução da inflação, hiato do produto e taxa de juros, em função de seus valores defasados; já o segundo bloco, é formado por um VAR que descreve do vetor $\mathbf{s_t}$, que é composto pelos retornos dos títulos de diversas maturidades como função de suas próprias defasagens, e também de valores atuais e defasados das variáveis macroeconômicas que integram o vetor $\mathbf{z_t}$. Esta separação em blocos é representada nos seguintes modelos VAR:

$$\mathbf{z_t} = \mathbf{w^z} + \sum_{k=1}^{p} \mathbf{A_k z_{t\text{-}k}} + \mathbf{e_t^z}$$

$$\mathbf{s_t} = \mathbf{w^s} + \sum_{\kappa=1}^{p} \mathbf{C_k z_{t\text{-}k}} + \sum_{k=1}^{p} \mathbf{D_k s_{t\text{-}k}} - \mathbf{C z_t} + \mathbf{e_t^s}$$

Os vetores $\mathbf{s_t}, \mathbf{s_{t\text{-}1}}, \ldots, \mathbf{s_{t\text{-}p}}$ não aparecem no modelo VAR que governa o vetor das variáveis macroeconômicas, muito embora os valores contemporâneos e defasados de inflação, taxa de juros e hiato do produto estejam influenciando o valor atual do retorno dos títulos.

Assim, é possível estimar os coeficientes de ambas as equações de forma independente, e realizar as previsões *out-of-sample*, em que se estima *n* versões do modelo VAR com a informação disponível até um intervalo de tempo determinado t^*, para em seguida fazer a previsão dos retornos dos títulos no instante $t^* + \tilde{T}$. Note que os valores previstos para o vetor de variáveis macroeconômicas são componentes do cálculo da previsão do vetor que contém os retornos dos diversos títulos.

2.3.5
Quinto Modelo – VAR 5

Este modelo é semelhante ao proposto na seção anterior. A diferença reside no tratamento das variáveis macroeconômicas; aqui os valores utilizados não são resultantes de um modelo VAR, e sim os valores efetivamente observados.

Assim como no modelo proposto na seção 2.3.5, a motivação por trás deste modelo é a análise do efeito da incorporação das variáveis macroeconômicas na previsão dos retornos dos títulos de diversas maturidades, considerando que exista, por trás dos cálculos das previsões dos *yields*, um modelo acurado a ponto de prever com exatidão a informação econômica.

2.3.6
Sexto Modelo – Equação com Variáveis Macro Previstas

Neste modelo, utiliza-se um vetor $\mathbf{z_t}$, que é composto por variáveis macroeconômicas: formado pela taxa de juros r_t, pela inflação e pelo hiato do produto (desvio do índice de produtividade industrial em relação a sua tendência linear)

O comportamento das variáveis macro que compõem esse vetor é estimado através de um modelo VAR, cuja ordem de defasagem é escolhida através do critério de informação de Schwarz.

O retorno do título é uma equação em que o valor atual do *yield* depende de valores atuais e defasados das variáveis macroeconômicas e do seu próprio valor defasado. A ordem da defasagem, *T*, é determinada pelo critério de informação de Schwarz. Temos que:

$$y_t = \alpha + \beta_1 \sum_{k=1}^{p} \mathrm{inf}_{t-k} + \beta_2 \sum_{k=1}^{p} ff_{t-k} + \beta_3 \sum_{k=1}^{p} hiato_{t-k} + \beta_4 \sum_{k=1}^{p} y_{t-k} + \varepsilon_t$$

Onde β_1, β_2, β_3 são parâmetros que captam a sensibilidade do valor do retorno do título no momento t em relação às variáveis econômicas, e β_4 é o parâmetro que nos mostra quanto do valor atual do *yield* de um título é explicado por seus valores defasados.

Assim sendo, previsões *out-of-sample* do retorno do título são feitas utilizando como *input* as previsões das variáveis macroeconômicas, estimadas através de um modelo VAR.

Neste modelo, os valores atuais e defasados das variáveis macroeconômicas afetam o valor do retorno do título, mas essa relação não se dá em sentido contrário, uma vez que as variáveis macro são exógenas ao modelo.

2.3.7
Sétimo Modelo – Equação com Variáveis Macro Observadas

Este modelo trata o retorno do título da mesma maneira que o modelo proposto na seção anterior. A diferença reside no tratamento dado às variáveis macroeconômicas.

No quarto modelo, o comportamento das variáveis macroeconômicas era modelado via VAR, e utilizou-se previsões destas variáveis na previsão *out-of-sample* do retorno do título. Aqui, os *yields* do título são previstos utilizando os valores das variáveis macro efetivamente observados no período, e não valores previstos.

A motivação para tal procedimento é a tentativa de observar o desempenho do modelo de previsão de *yields*, finalidade primeira do trabalho, considerando que há um modelo robusto o suficiente para previsão econômica, capaz de acertar com precisão o valor futuro das variáveis macro de interesse.

2.3.8
Oitavo Modelo – Modelo Auto-regressivo

O modelo auto-regressivo univariado é aquele que explica o comportamento de uma determinada variável através dos valores defasados dela própria. Em linhas gerais, um processo AR(p) é:

$$x_t = \alpha + \sum_{k=1}^{p} \phi_k x_{t-k} + \varepsilon_t$$

Onde α é uma constante, ϕ_1, ϕ_2, ..., ϕ_p são os parâmetros do modelo que captam a sensibilidade dos valores defasados da variável em seu valor contemporâneo, e ε_t é o choque associado ao instante t. É importante ressaltar que o número ótimo de defasagens é escolhido através do critério de informação de Schwarz.

Neste trabalho, avaliamos seis casos deste modelo; ou seja, $p \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Vale ressaltar que não há qualquer influência das variáveis macroeconômicas na variável dependente, no caso, o retorno de um título de determinada maturidade.