

## 4

### Experimentos Numéricos

Neste capítulo será apresentado um conjunto de experimentos numéricos e estatísticos para ilustrar algumas das vantagens e características do método IAMLS, descrito no capítulo anterior.

O software utilizado para implementação dos algoritmos foi o R, que é um ambiente de desenvolvimento para computação estatística. Foi criado por Ross Ihaka e Robert Gentleman, na Universidade de Auckland, Nova Zelândia. Atualmente é mantido por uma comunidade de desenvolvimento e liberado ao público, sobre licença de software livre GPL.

A análise é feita para os casos unidimensional e bidimensional. Em todos os experimentos, é analisado a convergência do método IAMLS para o interpolante RBF, bem como a escolha do parâmetro a ser utilizado e o número de iterações.

Para analisar os métodos, alguns critérios estatísticos foram utilizados, tais como o erro quadrático (EQ), o erro quadrático médio (EQM), o desvio padrão (DP) e a raiz do erro quadrático médio (REQM).

Nessas análises, a função de base radial usada foi a Laguerre-Gaussiana  $s$ -Dimensional.

$$\varphi(r) = \frac{\epsilon^s}{\sqrt{\pi^s}} e^{-\frac{\epsilon^2 r^2}{h^2}},$$

onde  $h$  é o parâmetro de escala,  $s$  indica a dimensão dos dados e  $\epsilon$  o parâmetro de forma.

#### 4.1

##### Análise Unidimensional

Para a análise unidimensional foi utilizada uma função teste que é uma combinação linear modificada de exponenciais similar à famosa função Franke, dada por:

$$f(x) = 15e^{\frac{-1}{1-(2x-1)^2}} \left( \frac{3}{4}e^{-\frac{(9x-2)^2}{4}} + \frac{3}{4}e^{-\frac{(9x+1)^2}{49}} + \frac{1}{2}e^{-\frac{(9x-7)^2}{4}} - \frac{1}{5}e^{-(9x-2)^2} \right) \quad (4-1)$$

Um exemplo gráfico desta função pode ser vista na Figura 4.1, onde o domínio de variação é o intervalo  $[0, 1]$ .

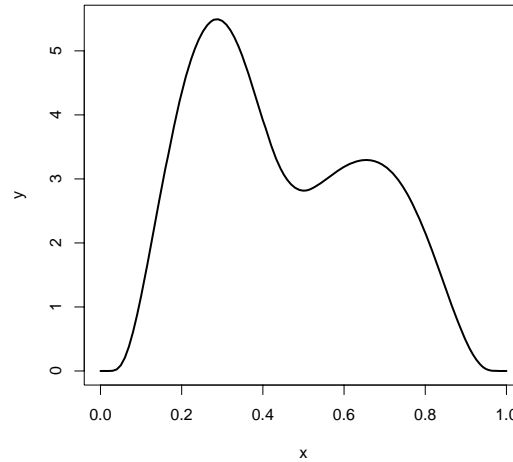


Figura 4.1: Gráfico da função de Franke

A princípio foram selecionadas amostras de tamanho  $N = 30$  com pontos uniformemente espaçados e amostras aleatórias também de tamanho 30 para pontos não-uniformemente espaçados no domínio da função. Para garantir a convergência do método IMLS, faz-se necessário verificar as condições de convergência em função dos possíveis valores do parâmetro de forma  $\epsilon$  da função Laguerre-Gaussiana.

Para esses dois conjuntos de amostras, a Figura 4.2 ilustra para que valores de  $\epsilon$  vale  $\|\mathbf{I} - \mathbf{A}\|_2 < 1$  e  $\max_{i=1,\dots,N} \left\{ \sum_{j=1}^N |\mathbf{A}_{i,j}| \right\} < 2$ , ou seja, para quais escolhas do parâmetro  $\epsilon$  o IMLS convergiria rapidamente para o interpolador RBF. Olhando o gráfico dessa figura, pode-se dizer que para a amostra com pontos uniformemente espaçados, o parâmetro  $\epsilon$  poderia ser escolhido como um valor no intervalo de  $0.4 \leq \epsilon \leq 3.5$  e para o conjunto de pontos não-uniformemente espaçados vale  $0.3 \leq \epsilon \leq 3.5$ .

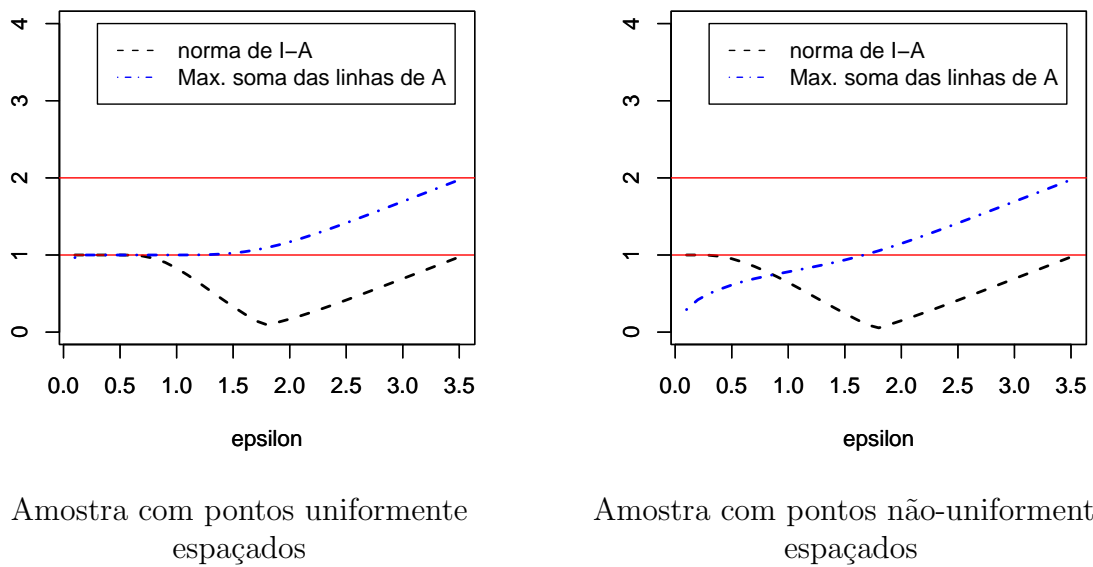


Figura 4.2: Análise do intervalo de convergência do método IMLS com relação ao parâmetro  $\epsilon$  utilizando uma amostra com 30 pontos uniformemente espaçados e outra com 30 pontos não-uniformemente espaçados.

Para o método RBF, considerando a amostra com 30 pontos igualmente espaçados, é possível verificar na Tabela 4.1 que as métricas estatísticas EQ e REQM são bem próximas de zero para vários valores do parâmetro  $\epsilon$ . Esses erros foram medidos em 100 pontos igualmente espaçados no intervalo  $[0, 1]$ .

Tabela 4.1: Estatísticas de erros para o método RBF.

Amostra com pontos uniformemente espaçados				
$\epsilon$	0.4	0.5	0.6	0.7
EQ	$2.429570e-05$	$6.730912e-05$	$9.508271e-05$	$1.100789e-04$
REQM	0.000979	0.001628	0.002044	0.002172
$\epsilon$	0.8	0.9	1.0	1.1
EQ	$1.170886e-04$	$1.268982e-04$	$1.580630e-04$	$2.366446e-04$
REQM	0.002222	0.002297	0.002502	0.003748

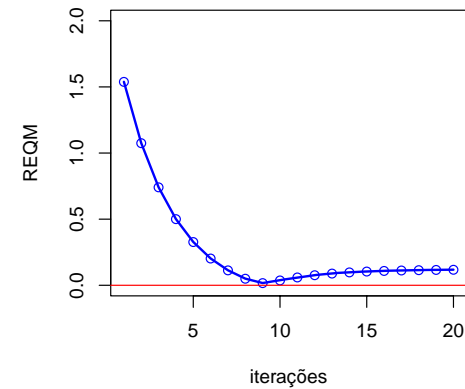
Repetindo o mesmo procedimento para o método IMLS, ou seja considerando a amostra com 30 pontos igualmente espaçados, é possível verificar na Tabela 4.2 que as estatísticas de erros calculadas nos 100 pontos igualmente espaçados do intervalo  $[0, 1]$  são bastante boas do ponto de vista numérico para vários valores do parâmetro  $\epsilon$ . Vale observar que isso acontece para somente 3 iterações do IMLS.

Este fato pode ser verificado nas Figuras 4.3, 4.4 e 4.5. A Figura 4.3 ilustra a rápida convergência do método para diferentes valores admissíveis de  $\epsilon$ . A Figura 4.4 mostra que ao aumentar de 1 para 3 o número de iterações o

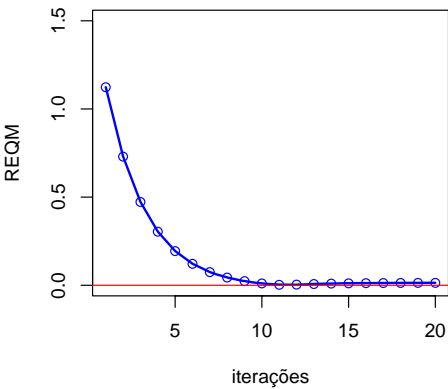
erro diminui rapidamente. E a Figura 4.5 mostra as curvas reconstruídas com apenas 3 iterações.

Tabela 4.2: Estatísticas de erros para o método IAMLS

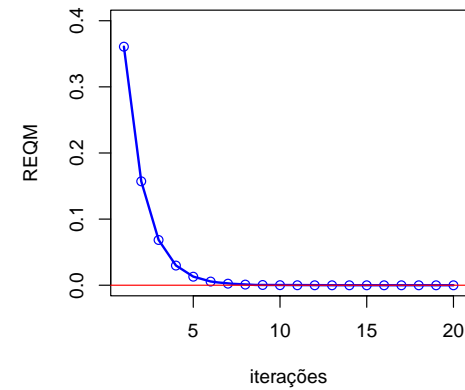
Amostra com pontos uniformemente espaçados					
1 iteração					
$\epsilon$	0.9	1.0	1.1	1.2	1.3
EQ	0.00212	0.00129	0.00097	0.00095	0.00520
EQM	$1.168056e-04$	$6.918784e-05$	$5.411674e-05$	$1.203518e-04$	$6.083400e-04$
DP	0.000325	0.000200	0.000141	0.000185	0.000981
REQM	0.010807	0.008317	0.007356	0.010970	0.024664
3 iterações					
$\epsilon$	0.9	1.0	1.1	1.2	1.3
EQ	0.001922	0.001112	<b>0.000646</b>	<b>0.000611</b>	0.004670
EQM	$3.072459e-04$	$1.655997e-04$	<b>8.205081e-05</b>	$1.027223e-04$	$6.258109e-04$
DP	0.000389	0.000219	<b>0.000122</b>	<b>0.000118</b>	0.000915
REQM	0.017528	0.012868	<b>0.009058</b>	<b>0.010135</b>	0.025016



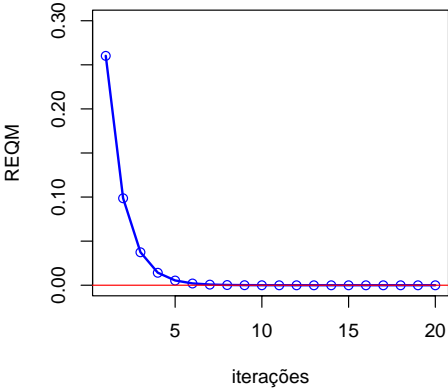
$\epsilon = 0.4$



$\epsilon = 0.6$

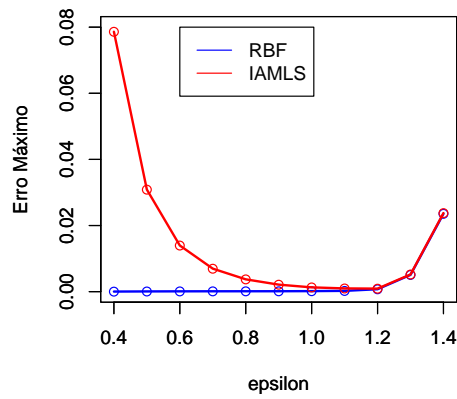


$\epsilon = 1.0$

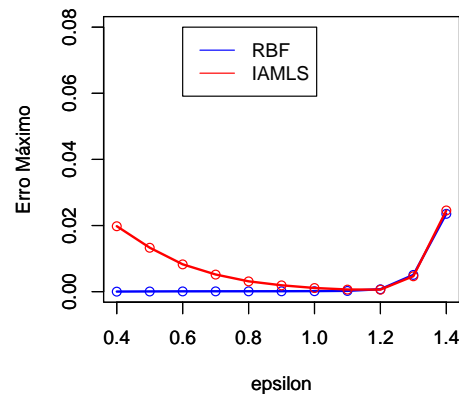


$\epsilon = 1.1$

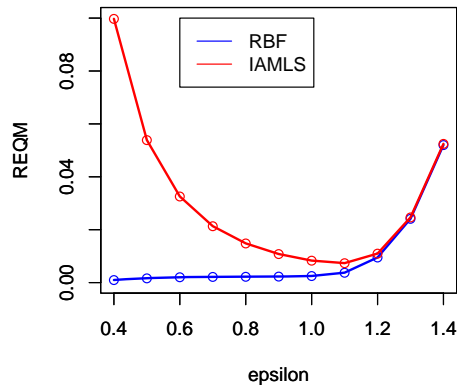
Figura 4.3: Análise gráfica da convergência do Método IAMLS.



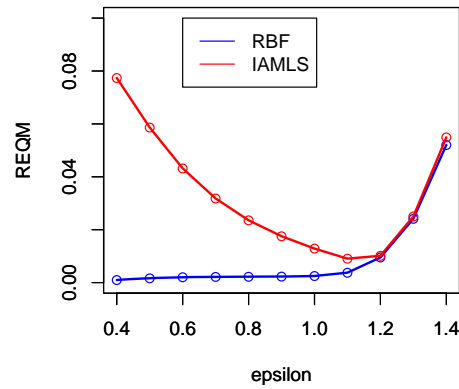
Máximo EQ



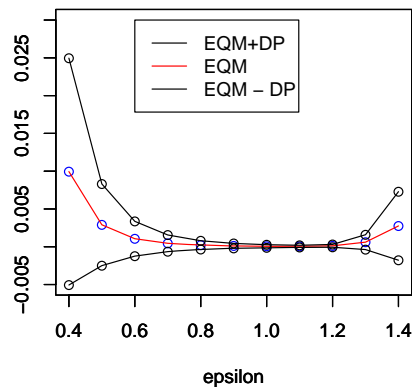
Máximo EQ



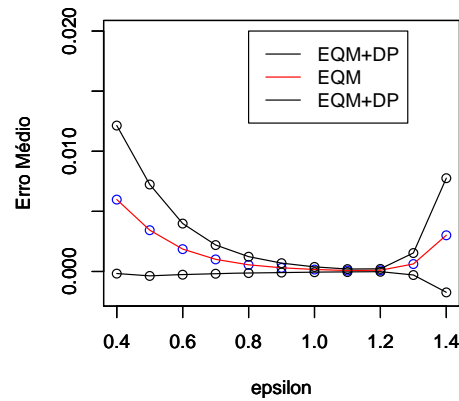
REQM



REQM

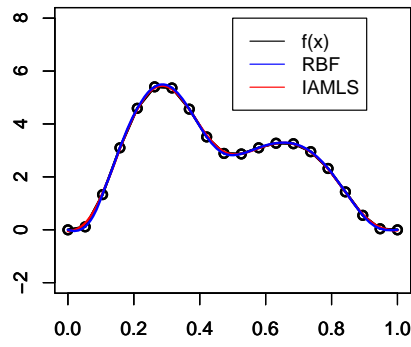


DP em relação EQM

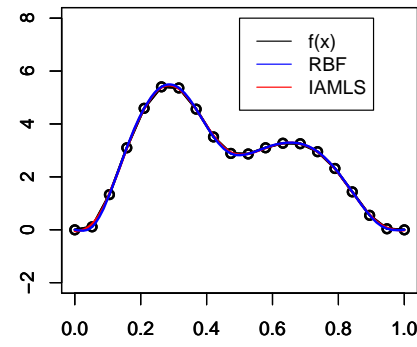


DP em relação EQM

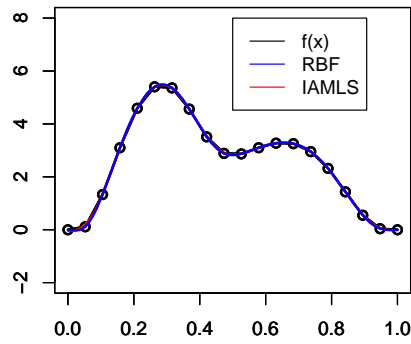
Figura 4.4: Análise gráfica da convergência do Método IAMLS usando as estatísticas EQ, EQM, REQM e DP - gráficos à esquerda utilizam 1 iteração e à direita utilizam 3 iterações.



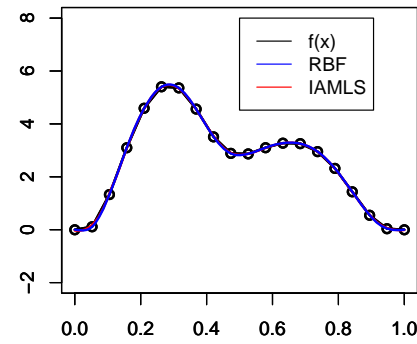
$\epsilon = 0.8$



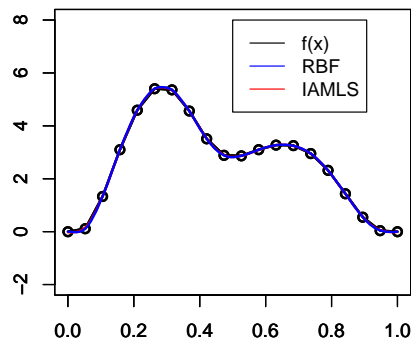
$\epsilon = 0.9$



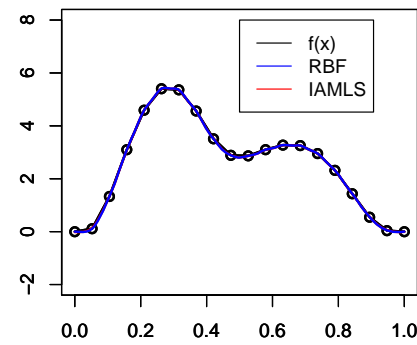
$\epsilon = 1.0$



$\epsilon = 1.1$



$\epsilon = 1.2$



$\epsilon = 1.3$

Figura 4.5: Gráficos que representam 100 pontos interpolados pelo Método RBF e IAMLS considerando uma amostra de 30 pontos igualmente espaçados.

No caso da amostra com pontos não uniformemente espaçados, para determinar qual o valor ótimo do parâmetro de forma  $\epsilon$  para o método RBF dentro de um conjunto finito de valores, foi utilizando o teste “leave-one-out cross validation”. Fazendo a análise para alguns valores de  $\epsilon$  no intervalo  $[0.1, 2]$ , pode-se verificar pela Figura 4.6 e pela Tabela 4.3 que o ótimo é  $\epsilon = 0.5$ . Por fins de mostrar de outra forma que esse valor de  $\epsilon$  é uma boa escolha, está ilustrado na Figura 4.7 os gráficos do erro quadrático máximo e a raiz do erro quadrático médio para diferente valores de  $\epsilon$ .

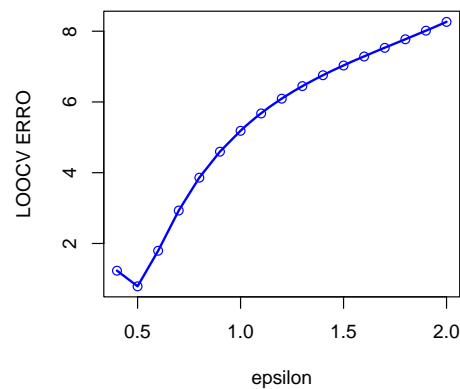
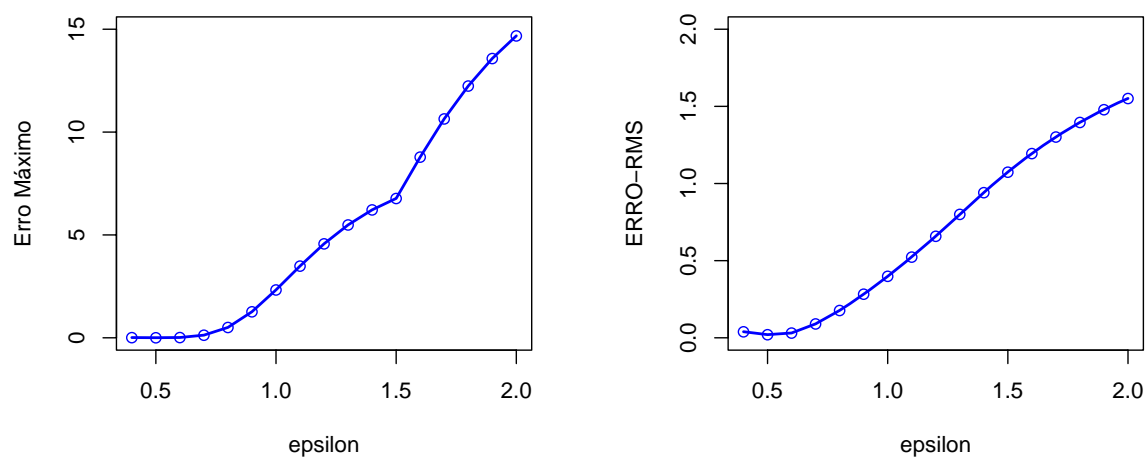


Figura 4.6: Teste LOOCV para Método RBF.

Tabela 4.3: Estatísticas de erros para o método RBF.

Amostra com pontos não-uniformemente espaçados				
$\epsilon$	0.4	0.5	0.6	0.7
LOOCV	1.2327716	0.7899998	1.7962249	2.9329210
EQ	0.011252258	0.004702629	0.014693825	0.128857473
REQM	0.03934058	0.02046077	0.03113628	0.09028804



Amostra com pontos não-uniformemente espaçados

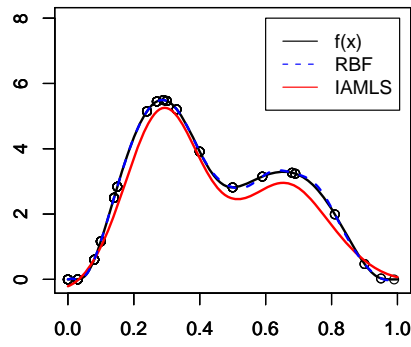
Figura 4.7: Gráficos do EQ máximo e da REQM.

Para analisar a convergência do método IAMLS são mostrados as estatísticas de erros na Tabela 4.4 e a visualização desses dados nas Figuras 4.8 e 4.9. Note que para esse caso a convergência não é tão rápida quando comparado com o caso anterior.

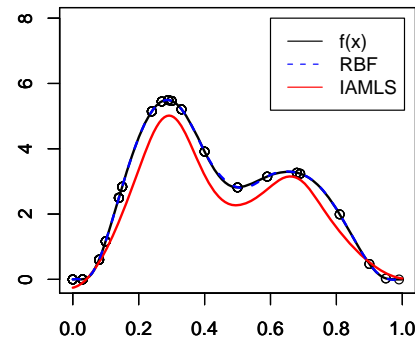
Tabela 4.4: Análise estatística da convergência do método IAMLS.

Método IAMLS - 1 iteração				
ϵ	0.4	0.5	0.6	0.7
EQ	0.4435893	1.0050775	2.0802858	4.0638159
REQM	0.3534912	0.5071195	0.7081759	0.9407273
Método IAMLS - 2 iterações				
ϵ	0.4	0.5	0.6	0.7
EQ	0.09576675	0.12852899	0.11623024	0.10902947
REQM	0.8908243	1.3219843	3.3888362	6.9143424
Método IAMLS - 3 iterações				
ϵ	0.4	0.5	0.6	0.7
EQ	0.908526	1.798036	4.301423	8.197531
REQM	0.4456729	0.6145639	0.7833316	0.9366601



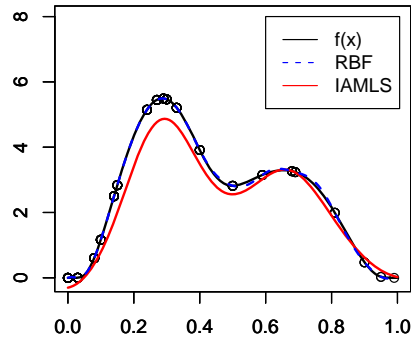


$\epsilon = 0.4$

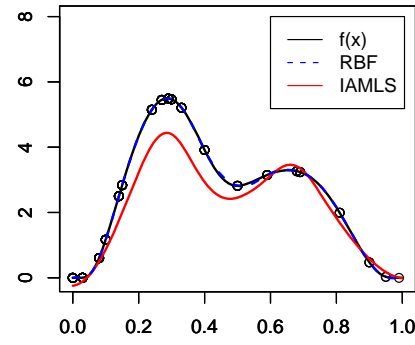


$\epsilon = 0.5$

Após 1 iteração do algoritmo IAMLS.

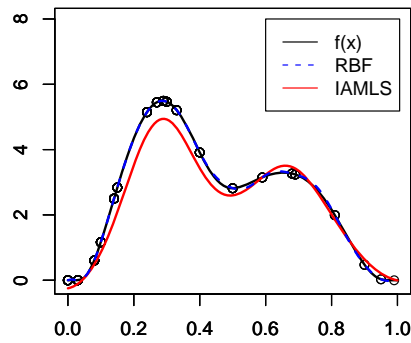


$\epsilon = 0.4$

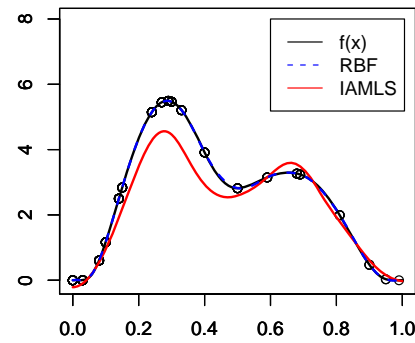


$\epsilon = 0.5$

Após 2 iterações do algoritmo IAMLS.



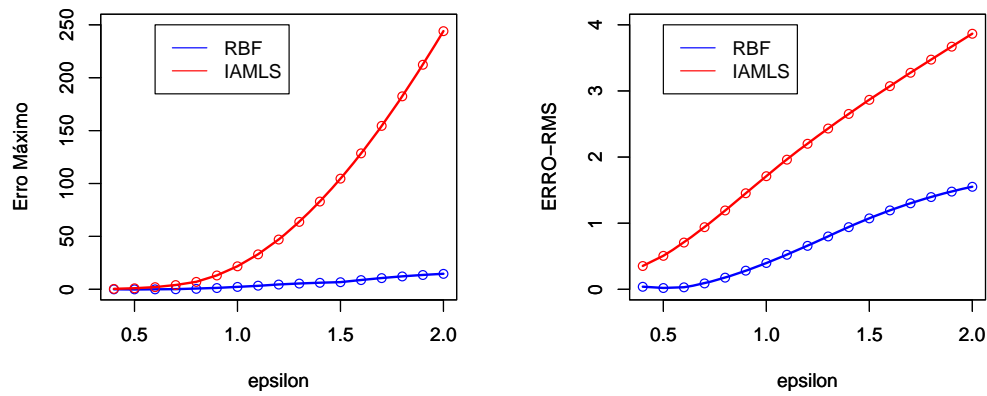
$\epsilon = 0.4$



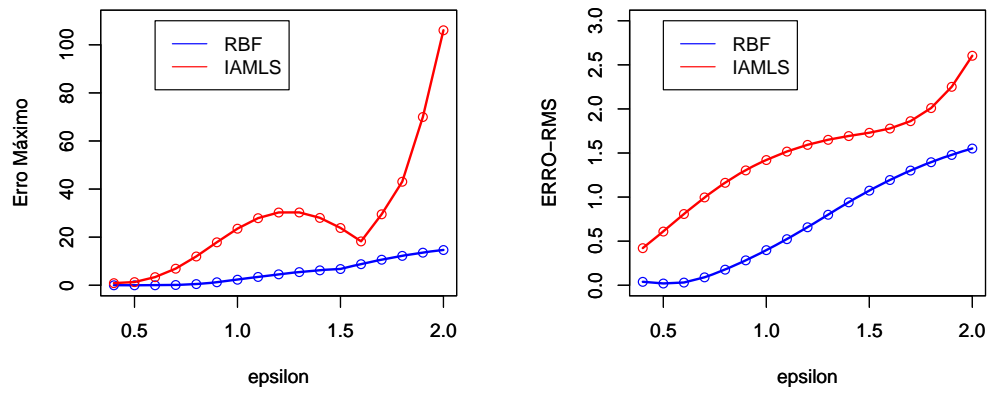
$\epsilon = 0.5$

Após 3 iterações do algoritmo IAMLS.

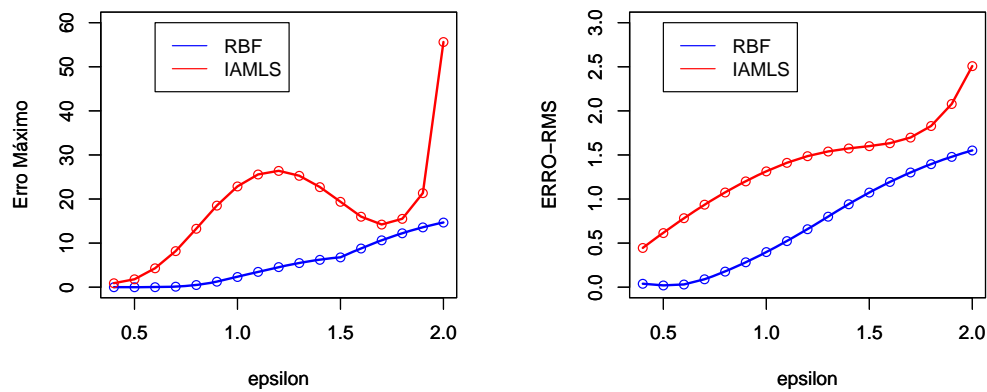
Figura 4.8: Análise da convergência do método IAMLS.



Após 1 iteração do algoritmo IAMLS.



Após 2 iterações do algoritmo IAMLS.



Após 3 iterações do algoritmo IAMLS.

Figura 4.9: Gráficos do EQ máximo e da REQm para o método IAMLS.

## 4.2

### Análise Bidimensional

Para a análise bidimensional, foram escolhidos os dados de um dos 50 vulcões de um campo vulcânico de Auckland, o Maunga Whau. O conjunto de dados do R, chamado `volcano`, fornece a informação topográfica para Maunga Whau num formato de uma matriz 87 linhas por 61 colunas. Isso significa que possui 5.307 pontos amostrais. As linhas do reticulado estão no sentido leste a oeste e as colunas, sul para norte. A Figura 4.10 mostra um exemplo de superfície. O domínio desse dado, foi assumido ser o retângulo  $[0, 1] \times [0, \frac{87}{61}]$ . Assim, do ponto de vista geométrico esse dado pode ser interpretado como um reticulado em que cada uma de suas células tem área  $\frac{1}{61} \times \frac{1}{61}$ , e cada vértice tem informação sobre a elevação topográfica no ponto onde o vértice está localizado.

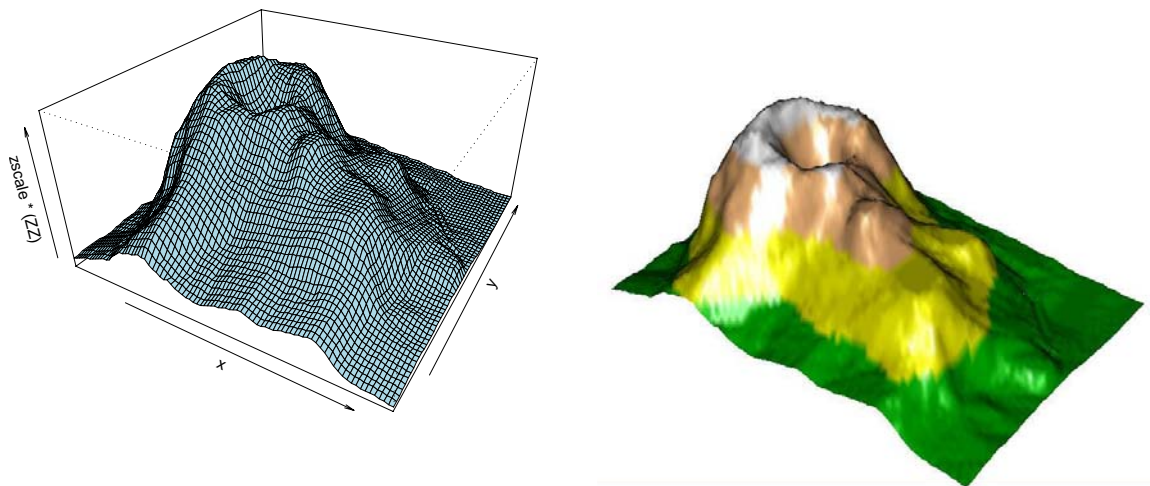


Figura 4.10: Superfície topográfica do dado `volcano` disponível na plataforma R.

No primeiro experimento foi considerado uma sub-matriz de dimensão  $30 \times 30$  do conjunto `volcano` e, a partir deste subconjunto, foram selecionadas amostras aleatórias de tamanho  $N = 20$  e  $N = 30$ . Em primeiro lugar, foram verificadas as condições de convergência do método IAMLS, baseado em possíveis valores do parâmetro de forma  $\epsilon$  da função Laguerre-Gaussiana.

Para ambas as amostras, a Figura 4.11 mostra que a máxima soma da linha da matriz de interpolação  $\mathbf{A}$  é superior a dois, se  $\epsilon > 1.9$ . Sendo assim, para garantir a convergência do algoritmo IAMLS para o interpolante RBF, foi escolhido um valor de epsilon no intervalo  $0.5 \leq \epsilon \leq 1.9$ .

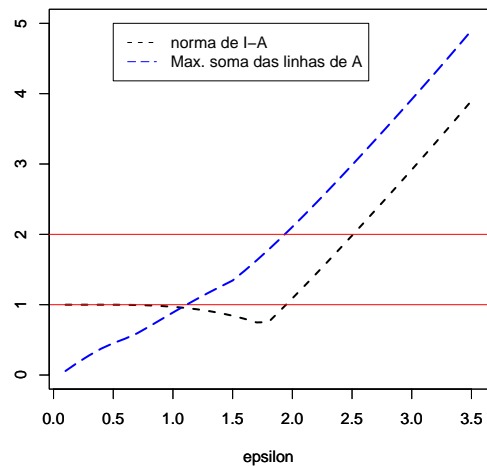


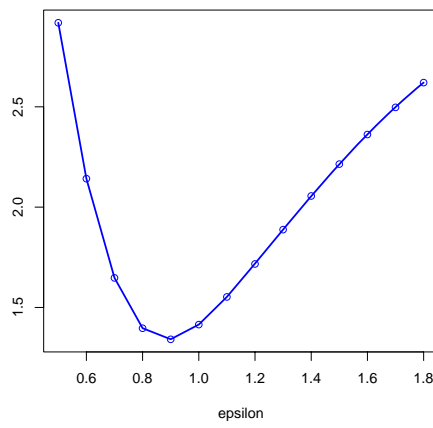
Figura 4.11: Análise do intervalo de convergência do método IMLS com relação ao parâmetro  $\epsilon$ .

Através da Tabela 4.5, pode-se observar que para a amostra  $N = 20$  a melhor aproximação é obtida quando  $\epsilon = 0.9$  e, para a amostra  $N = 30$  a melhor aproximação é obtida quando  $\epsilon = 0.7$ . Através do teste “*leave-one-out cross validation*”, usado para identificar qual o melhor parâmetro de ajuste para o Método RBF, pode-se confirmar esses dois valores. Podem ser verificados estes resultados também pela Figura 4.12.

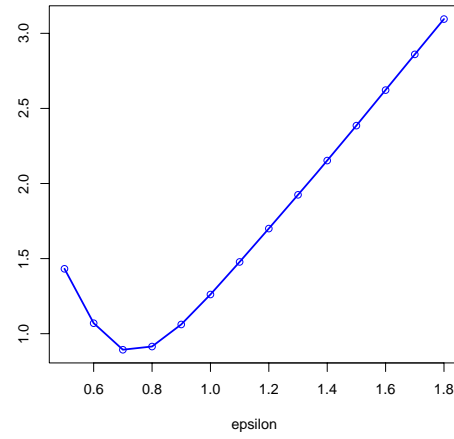
Tabela 4.5: Método RBF

$N = 20$				
$\epsilon$	0.8	0.9	1.0	1.1
EQ	0.56929	0.29762	<b>0.26373</b>	0.47550
EQM	0.03547	<b>0.01873</b>	0.02646	0.04844
DP	0.07438	<b>0.03561</b>	0.04510	0.09132
REQM	0.18834	<b>0.13689</b>	0.16267	0.22009
LOOCV	1.39664	<b>1.34144</b>	1.41479	1.55278
$N = 30$				
$\epsilon$	0.5	0.6	0.7	0.8
EQ	1.30674	<b>0.39932</b>	0.40165	0.51560
EQM	0.04744	0.015739	<b>0.012114</b>	0.017157
DP	0.15068	0.03843	<b>0.03229</b>	0.04376
REQM	0.21780	0.12545	<b>0.11006</b>	0.13098
LOOCV	1.43248	1.07011	<b>0.89338</b>	0.91474

A Figura (4.13), mostra exemplo de superfícies interpoladas para valores desses parâmetros.

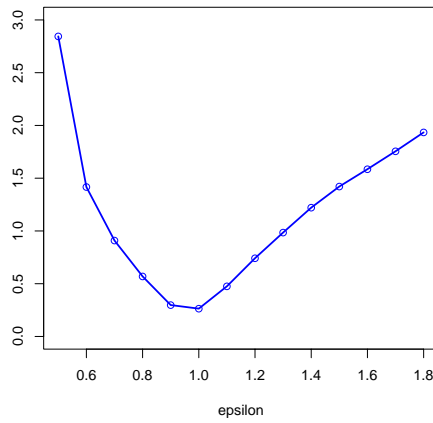


$N = 20$

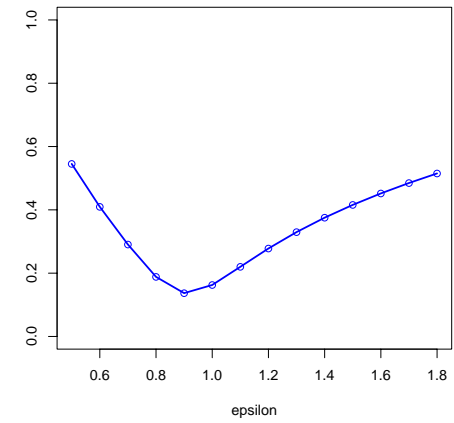


$N = 30$

Teste LOOCV

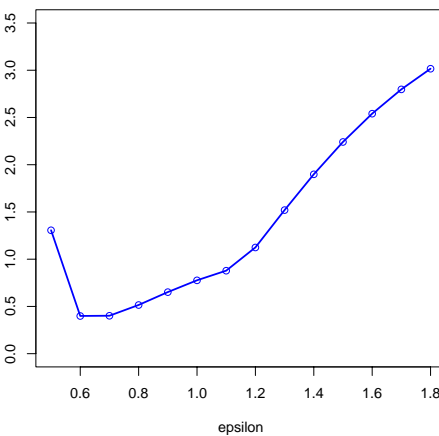


EQ

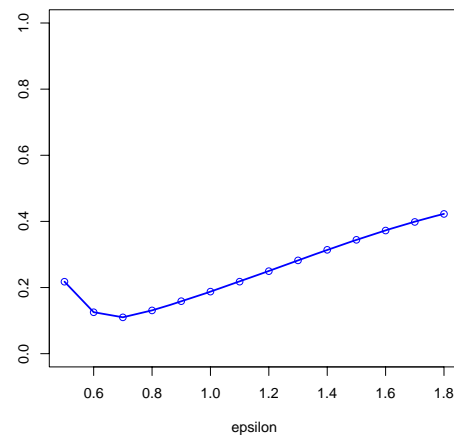


REQM

$N = 20$



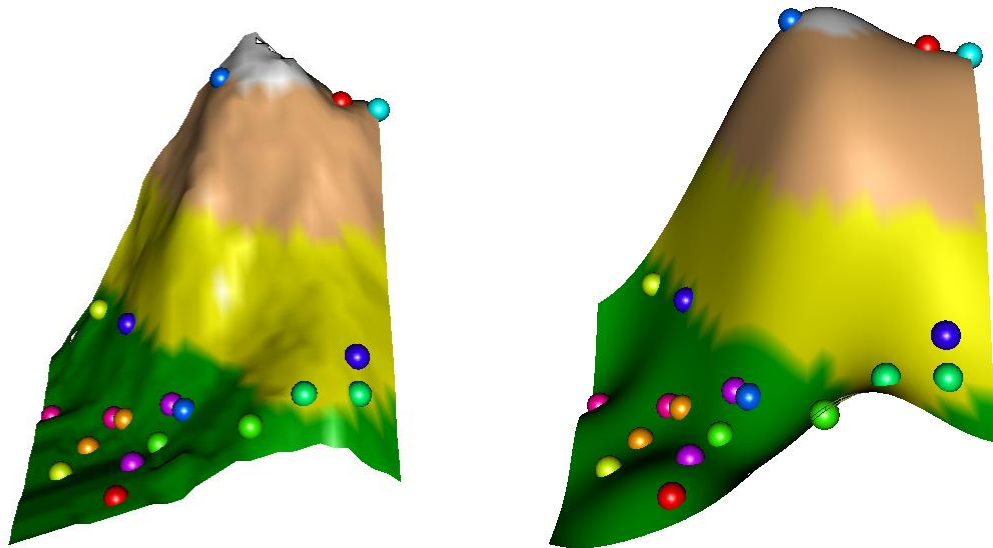
EQ



REQM

$N = 30$

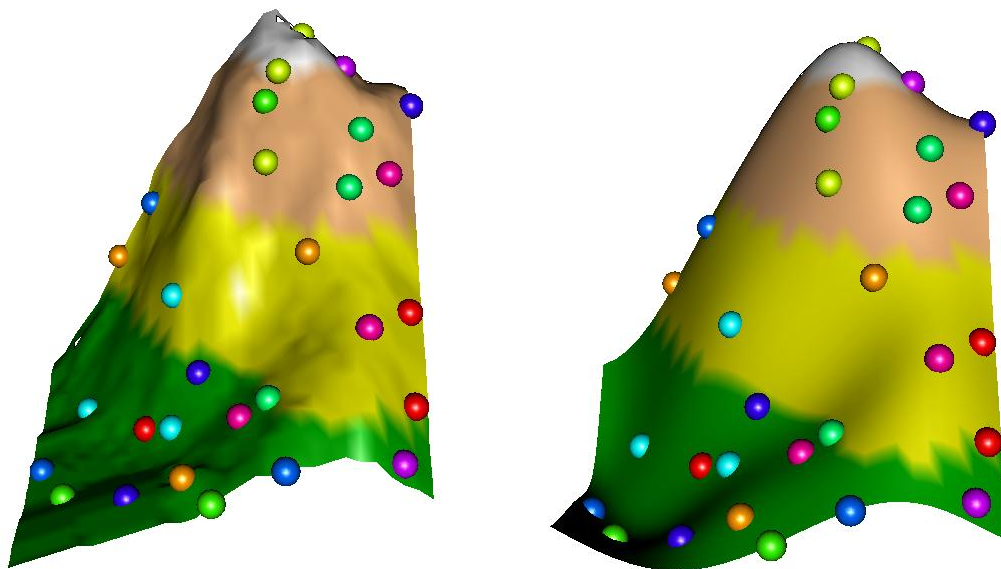
Figura 4.12: Gráficos do Teste LOOCV - “leave-one-out” cross validation e da Análise do Erro Máximo e REQM para as amostras de tamanho  $N = 20$  e  $N = 30$



Superfície verdadeira

Superfície interpolada -  $\epsilon = 0.9$

Amostra  $N = 20$



Superfície verdadeira

Superfície interpolada -  $\epsilon = 0.7$

Amostra  $N = 30$

Figura 4.13: Comparação visual da superfície verdadeira com a superfície interpolada - Método RBF.

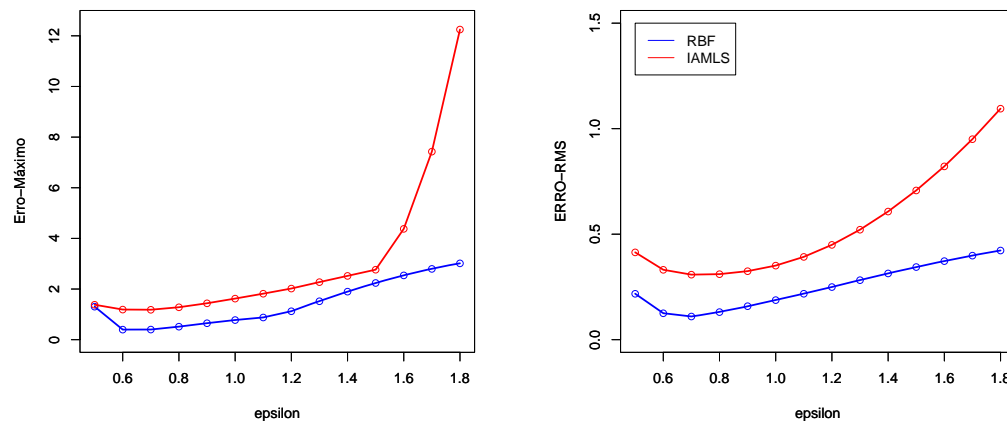
Utilizando a amostra aleatória de tamanho  $N = 30$ , a análise é realizada a fim de verificar a convergência do Método IAMLS para o RBF, através do número de iterações.

A Tabela 4.6 e a Figura 4.14 mostram que após  $n = 25$  iterações do algoritmo IAMLS, o melhor parâmetro de ajuste é dado para  $\epsilon = 0.5$ , onde  $EQ = 0.3978751$  e  $REQM = 0.1914113$ .

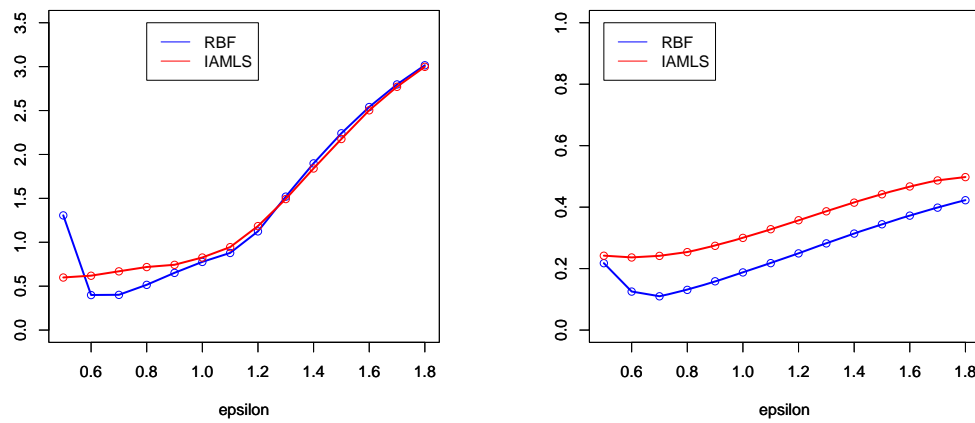
Tabela 4.6: Análise da convergência do Método IAMLS para o RBF.

Método IAMLS				
Número de iterações $n = 1$				
$\epsilon$	0.5	0.6	0.7	0.8
EQ	1.38079	1.19041	1.18323	1.28162
EQM	0.17138	0.10980	0.09504	0.09652
DP	0.21474	0.17532	0.16889	0.17858
REQM	0.41398	0.33137	0.30828	0.31068
Número de iterações $n = 5$				
$\epsilon$	0.5	0.6	0.7	0.8
EQ	0.5991462	0.6195434	0.6693758	0.7182481
EQM	0.05862	0.05591	0.05836	0.06445
DP	0.09308	0.09097	0.10208	0.11278
REQM	0.24212	0.23646	0.24159	0.25388
Número de iterações $n = 25$				
$\epsilon$	0.5	0.6	0.7	0.8
EQ	<b>0.3978751</b>	0.4582159	0.5232023	0.6199519
EQM	0.03664	0.03562	<b>0.03424</b>	0.03637
DP	<b>0.04976</b>	0.05629	0.06283	0.07044
REQM	0.19141	0.18871	<b>0.18504</b>	0.19072

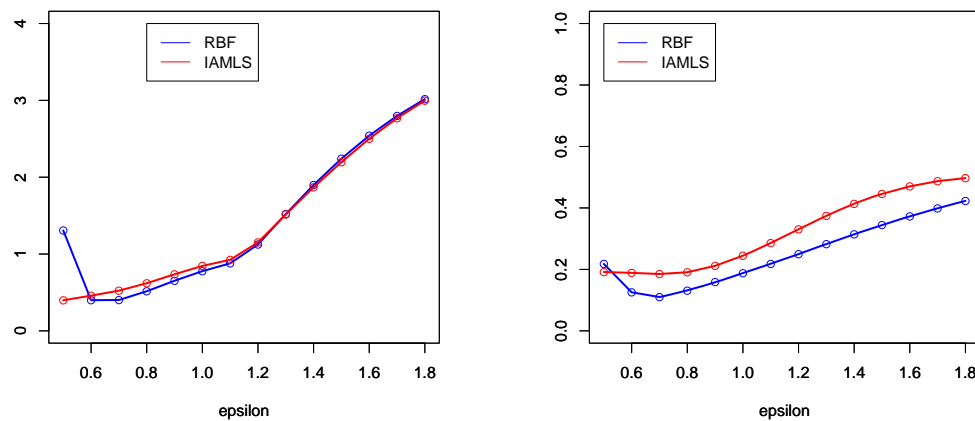
A Figura 4.15 mostra exemplos da superfície interpolada pelos dois métodos: o RBF e o IAMLS.



1 iteração do algoritmo IAMLS



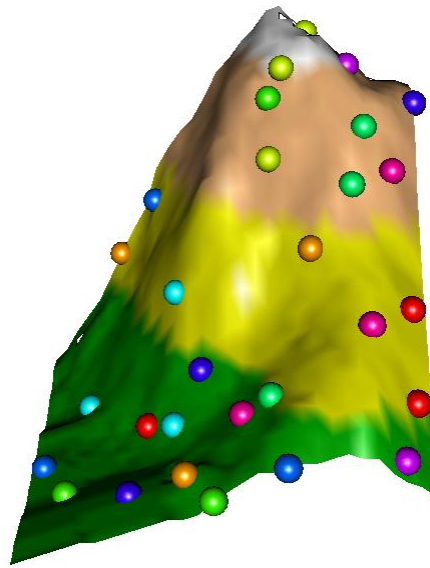
5 iterações do algoritmo IAMLS



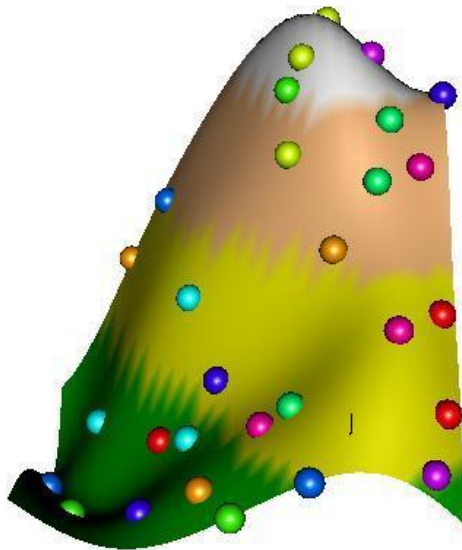
25 iterações do algoritmo IAMLS

Figura 4.14: Análise do EQ e REQM do Método IAMLS após  $n$  iterações.

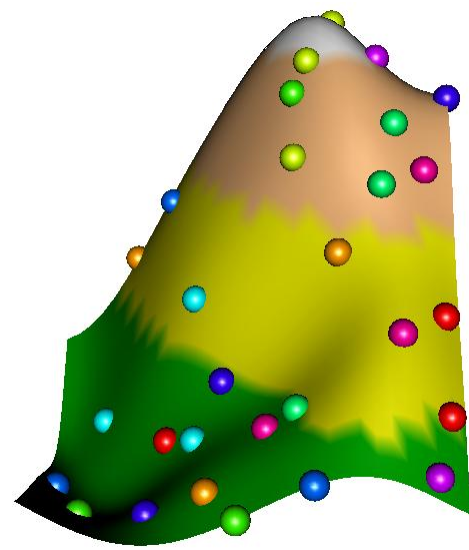




Superfície verdadeira e os pontos amostrados



Superfície interpolada - IMLS - 25 iter.



Superfície interpolada - RBF

Figura 4.15: Comparação da Superfície original com a Superfície interpolada pelo Método RBF e pelo método IMLS (após 25 iterações).

No segundo experimento, de igual modo à abordagem do primeiro, foram selecionados 50 pontos da matriz completa de dimensão  $87 \times 81$  e, novamente, são verificadas as condições de convergência do método IAMLS. Só que agora, são usadas as funções Laguerre-Gaussiana e a Multiquádrica Inversa Generalizada:

$$\varphi(\mathbf{x}) = \frac{\epsilon^s}{\sqrt{\pi^s}} e^{-\frac{(\epsilon \|\mathbf{x}\|)^2}{h^2}},$$

$$\varphi(\mathbf{x}) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\left(1 + \frac{\epsilon^2 \|\mathbf{x}\|^2}{h^2}\right)^s},$$

onde  $h$  é o parâmetro de escala entre os pontos definido anteriormente,  $s$  é a dimensão dos dados e  $\epsilon$  o parâmetro de forma.

Para garantir a convergência do método IAMLS, faz-se necessário verificar as condições de convergência, usando as funções Laguerre-Gaussiana e Multiquádrica Inversa Generalizada.

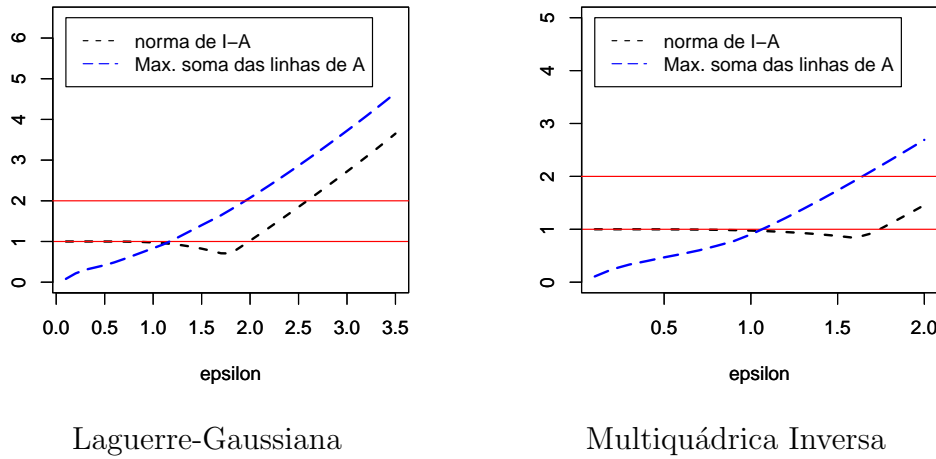


Figura 4.16: Análise de convergência do Método IAMLS para RBF usando as funções Laguerre Gaussiana e Multiquádrica Inversa Generalizada.

Para a função Laguerre-Gaussiana, a Figura 4.16 mostra que a máxima soma da linha da matriz de interpolação  $\mathbf{A}$  é superior a dois, se  $\epsilon \geq 1.7$  e para a função Multiquádrica Inversa Generalizada, se  $\epsilon \geq 1.6$ .

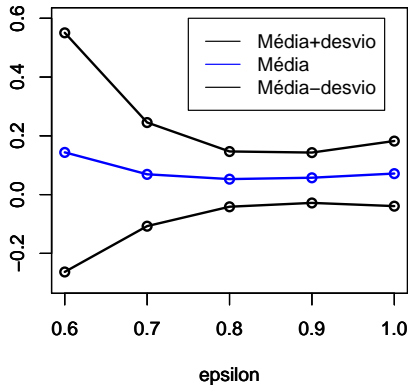
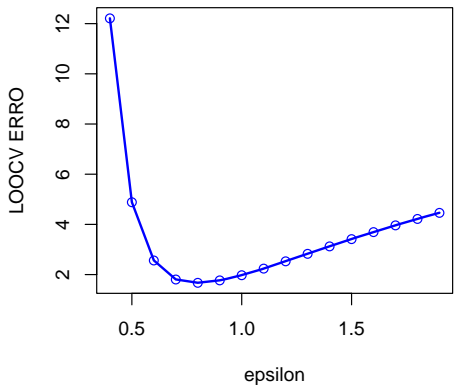
Para a verificação de qual o melhor valor para parâmetro de ajuste usando a função Laguerre-Gaussiana foram calculadas as estatísticas de erro que estão mostrados na Tabela 4.7. Observou-se que os menores valores de EQM e REQM são obtidos quando  $\epsilon = 0.8$  e o menor EQ e DP para  $\epsilon = 0.9$ .

A Figura 4.17 mostra exemplos gráficos do EQ, REQM e do desvio padrão em relação EQM.

Utilizando o teste “leave-one-outcross validation” é verificado qual o valor ótimo do parâmetro de forma  $\epsilon$  para o método RBF. Fazendo a análise para parâmetros no intervalo de  $0.1 \leq \epsilon \leq 2.0$  pode-se verificar que o valor ótimo é igual a  $\epsilon = 0.8$ . A Figura 4.18 mostra exemplos de superfícies interpoladas para valores de  $\epsilon = 0.8$  e  $\epsilon = 0.9$ , comparado-as com a superfície verdadeira.

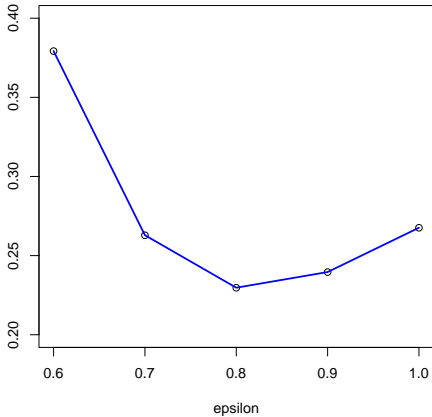
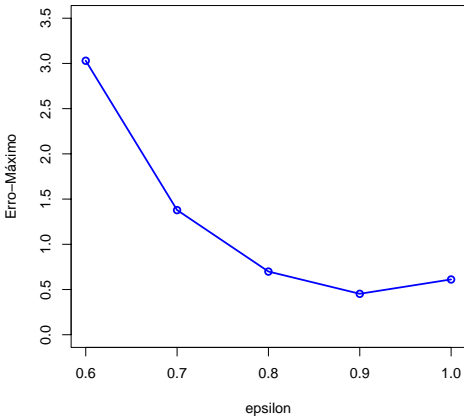
Tabela 4.7: Análise do Método RBF usando a função Laguerre-Gaussiana.

Laguerre-Gaussiana					
$\epsilon$	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
EQ	3.0301215	1.3785863	0.6990491	<b>0.4528659</b>	0.6116504
EQM	0.14383	0.06911	<b>0.05276</b>	0.05742	0.07162
DP	0.40687	0.17632	0.09404	<b>0.08566</b>	0.11073
REQM	0.37924	0.26289	<b>0.22971</b>	0.23961	0.26761
LOOCV	2.56519	1.80713	<b>1.67432</b>	1.77171	1.97793



Teste LOOCV para o Método RBF

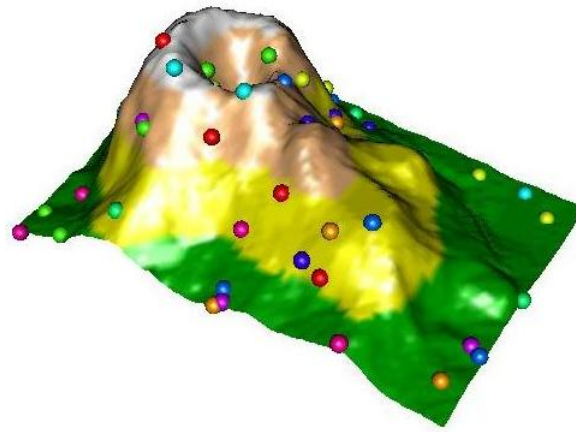
EQM e DP



EQ Máximo

REQM

Figura 4.17: Análise do Método RBF através do teste LOOCV e estatísticas EQ, REQM e DP em relação ao EQM.



Superfície verdadeira e os pontos amostrados

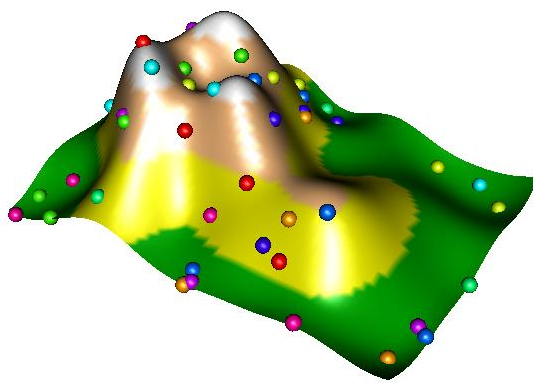
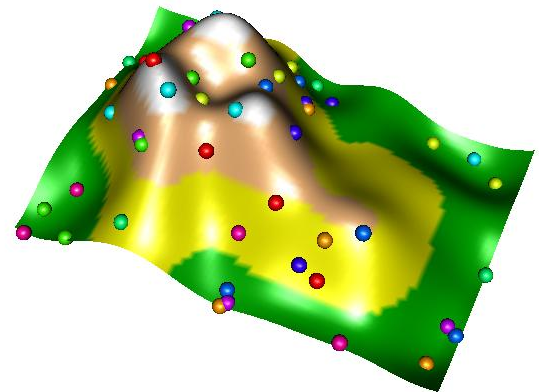
 $\epsilon = 0.8$  $\epsilon = 0.9$ 

Figura 4.18: Superfícies interpoladas usando o Método RBF e a Função Laguerre-Gaussiana.

A Tabela 4.8 mostra uma análise dos erros do Método IAMLS para um número de iterações  $n = 10$ . Percebe-se que com 10 iterações ainda não se obteve uma boa aproximação, implicando a necessidade de mais iterações. A Figura 4.19 mostra exemplos gráficos através do número de iterações das estatísticas EQ e REQM.

A Figura 4.25 mostra exemplos de superfícies interpoladas pelos métodos RBF e IAMLS, onde, a superfície interpolada pelo método IAMLS foi obtida para 10 iterações do algoritmo IAMLS.

Tabela 4.8: Análise da Convergência do Método IAMLS para o RBF usando a Função Laguerre-Gaussiana.

Grid $87 \times 61$ - Método IAMLS					
Número de iterações $n = 1$					
$\epsilon$	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
EQ	1.14842	1.12499	1.12027	1.00710	1.09361
EQM	0.21839	0.17849	0.15755	0.14848	0.14787
DP	0.20909	0.19138	0.18646	0.18717	0.19458
REQM	0.46732	0.42248	0.39692	0.38533	0.38454
Número de iterações $n = 5$					
$\epsilon$	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
EQ	1.66685	1.41707	1.01290	0.69447	0.72011
REQM	0.30335	0.28469	0.27964	0.28693	0.30515
Número de iterações $n = 10$					
$\epsilon$	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
EQ	1.73485	1.27683	0.82877	<b>0.61700</b>	0.65303
EQM	0.07009	0.06164	<b>0.06051</b>	0.06768	0.08147
DP	0.15114	0.11649	<b>0.09384</b>	0.09727	0.11913
REQM	0.26475	0.24827	<b>0.24599</b>	0.26016	0.28543

Será agora repetido o mesmo processo de análise para a função Multiquádrica Inversa Generalizada. Pode-se observar, que para valores de parâmetro  $\epsilon = 0.4$ ,  $\epsilon = 0.5$  e  $\epsilon = 0.6$  as estatísticas EQM, DP e REQM, apresentam valores muito próximos. Estes resultados podem ser observados na Tabela 4.9. A Figura (4.21) mostra exemplos gráficos do EQ, REQM.

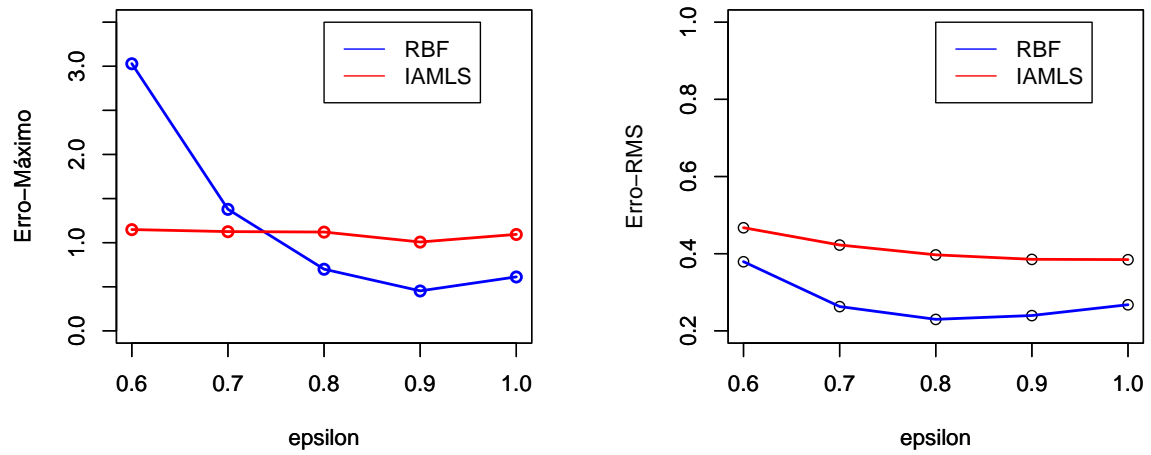
Tabela 4.9: Análise do Método RBF usando a função Multiquádrica Inversa Generalizada.

Multiquádrica Inversa Generalizada								
$\epsilon$	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
EQ	2.07133	0.92760	0.52889	<b>0.50661</b>	0.61950	0.75623	0.91625	1.10604
EQM	0.08949	0.04147	<b>0.03469</b>	0.04063	0.05365	0.07099	0.09087	0.11222
DP	0.26401	0.10075	<b>0.06411</b>	0.06694	0.086023	0.11198	0.14068	0.17016
REQM	0.29915	0.20365	<b>0.18625</b>	0.20156	0.23162	0.26644	0.30145	0.33499
LOOCV	1.85626	<b>1.43911</b>	1.46360	1.64211	1.87920	2.13812	2.40537	2.67437

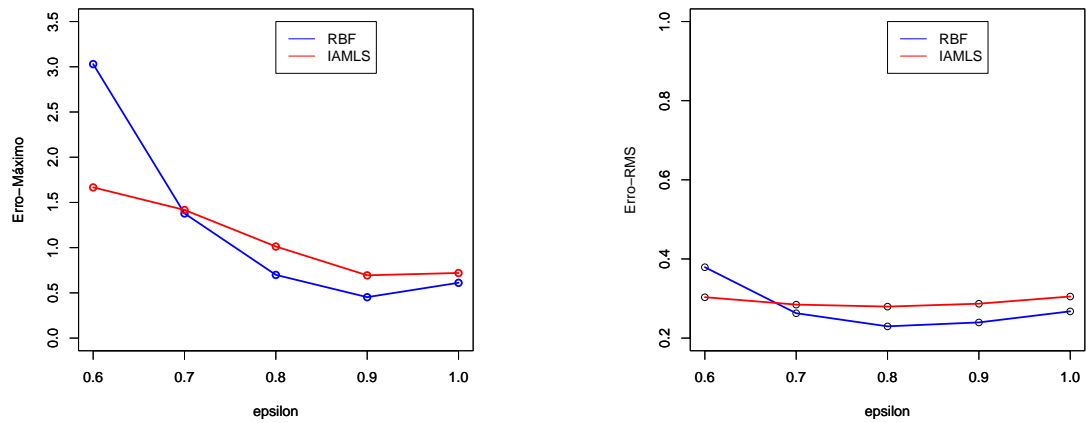
Usando o teste “leave-one-out cross validation”, verificou-se que o valor ótimo é igual a  $\epsilon = 0.4$ , veja Figura 4.22. A Figura 4.23 mostra exemplos de superfícies interpoladas para valores de  $\epsilon = 0.3$ ,  $\epsilon = 0.4$ ,  $\epsilon = 0.5$  e  $\epsilon = 0.6$  comparado com a superfície verdadeira e seus pontos amostrados.

Pela Tabela 4.10 é possível avaliar as estatísticas de erros após 10 iterações do algoritmo IAMLS. Percebe-se que com 10 iterações ainda não se obteve uma boa aproximação, implicando a necessidade de mais iterações. A Figura 4.24 mostra exemplos gráficos através do número de iterações das estatísticas EQ e REQM.

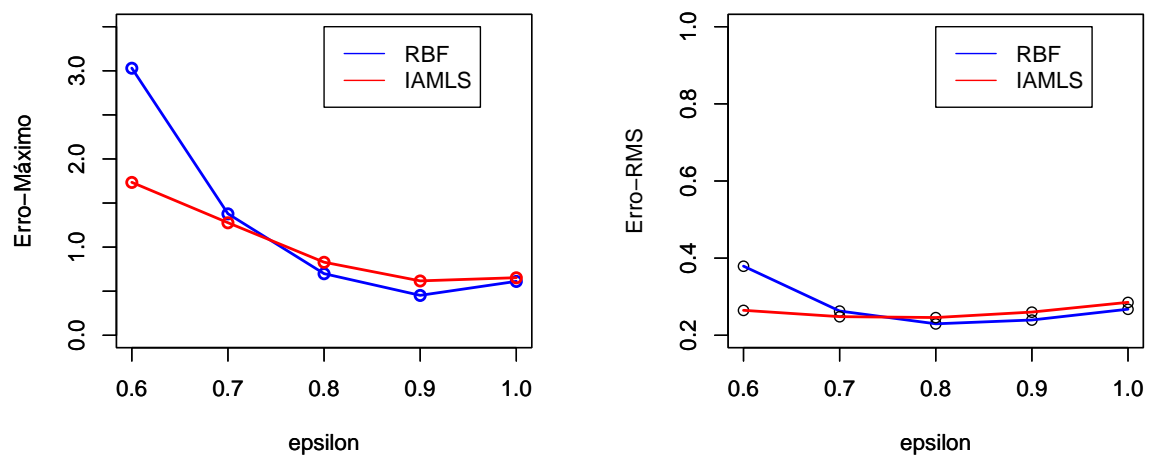
A Figura 4.25 ilustra exemplos de superfícies interpoladas pelos métodos citados acima, onde, a superfície interpolada pelo método IAMLS foi obtida



Após 1 iteração do algoritmo IMLS.

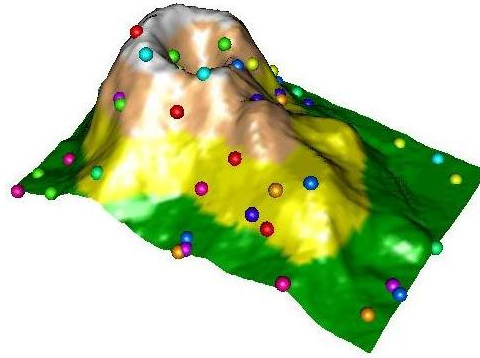


Após 5 iterações do algoritmo IMLS.

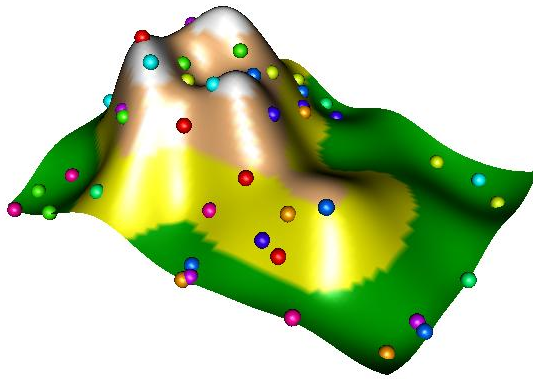


Após 10 iterações do algoritmo IMLS.

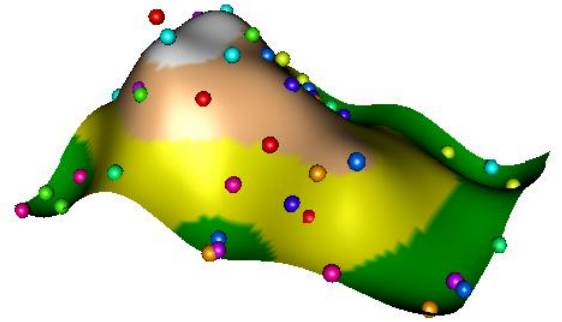
Figura 4.19: Gráficos do EQ e REQM.



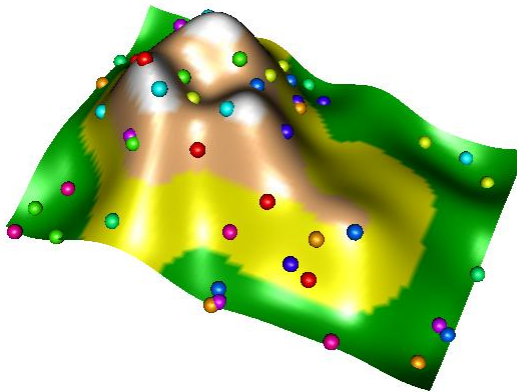
Superfície verdadeira e os pontos amostrados



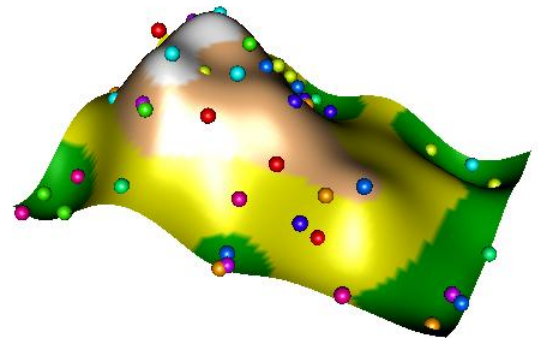
$\epsilon = 0.8$  - RBF



$\epsilon = 0.8$  - IAMLS



$\epsilon = 0.9$  - RBF



$\epsilon = 0.9$  - IAMLS

Figura 4.20: Superfícies interpoladas pelo Método RBF e IAMLS (10 iterações) usando a Função Laguerre-Gaussiana.

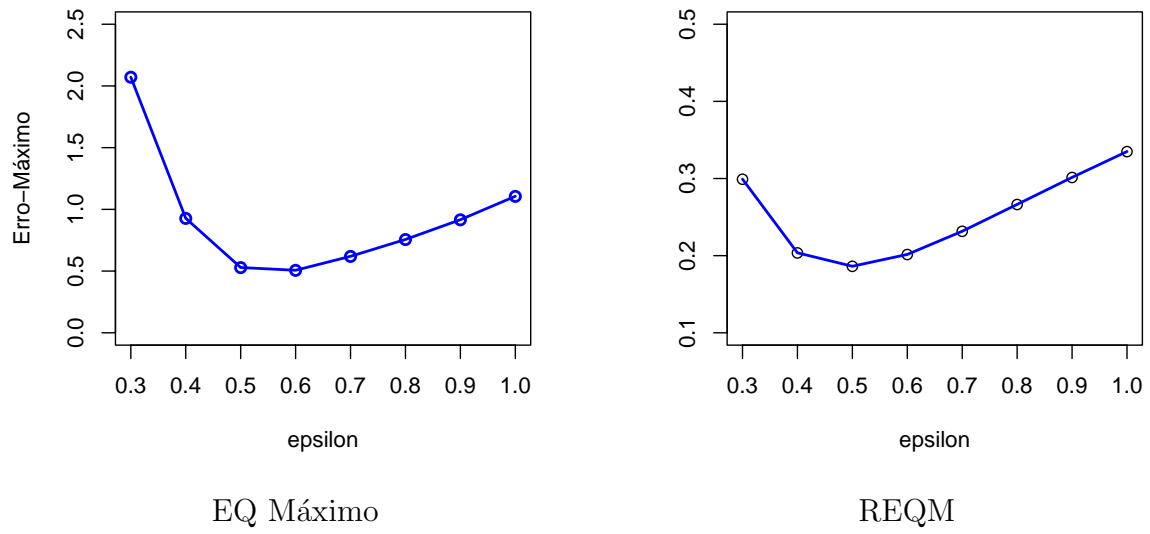


Figura 4.21: Análise do Método RBF.

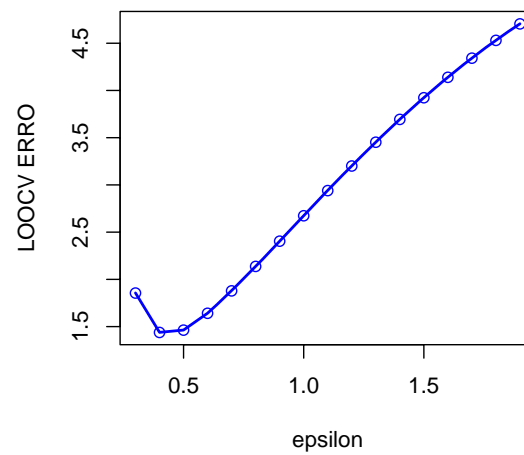
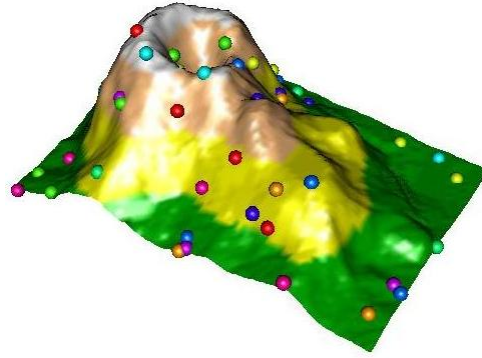


Figura 4.22: Teste LOOCV para o Método RBF usando a função Multiquádrica Inversa Generalizada.

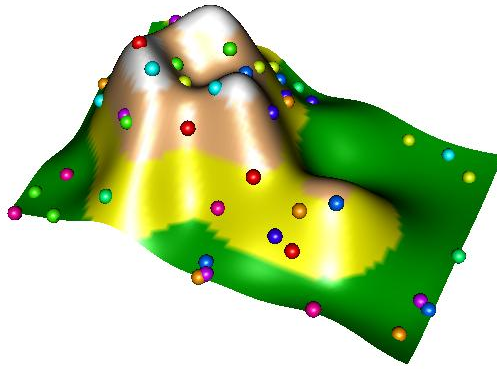
para 10 iterações do algoritmo IAMLS.

[dissertacao,brazil]ThesisPUC

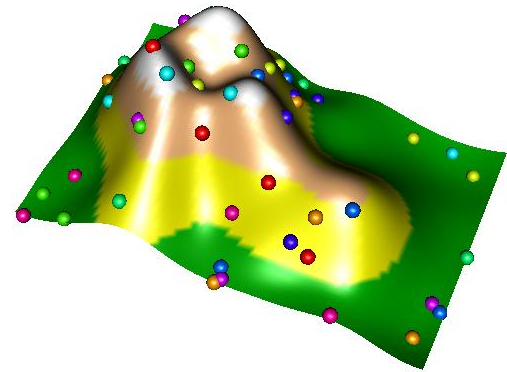




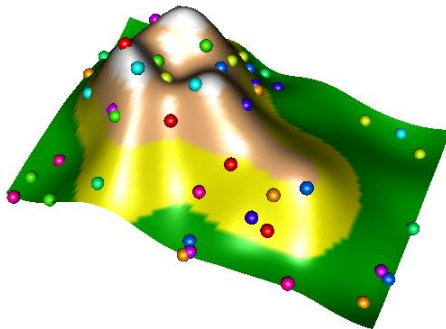
Superfície verdadeira e os pontos amostrados



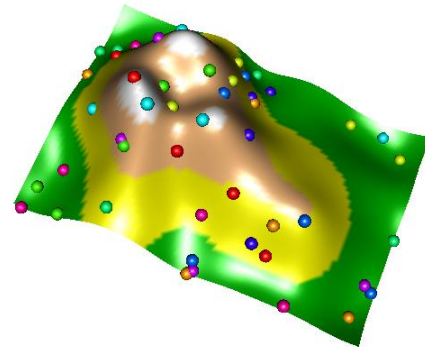
$\epsilon = 0.3$



$\epsilon = 0.4$



$\epsilon = 0.5$

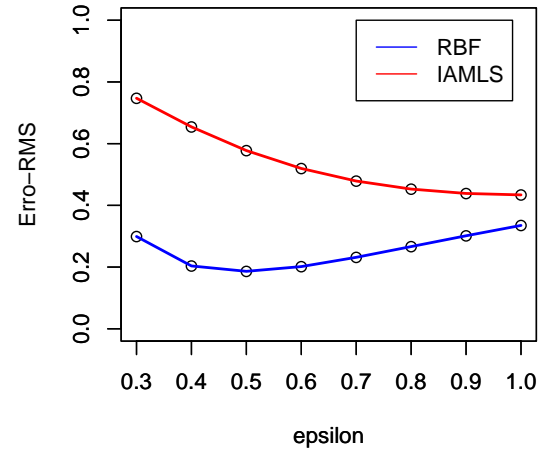
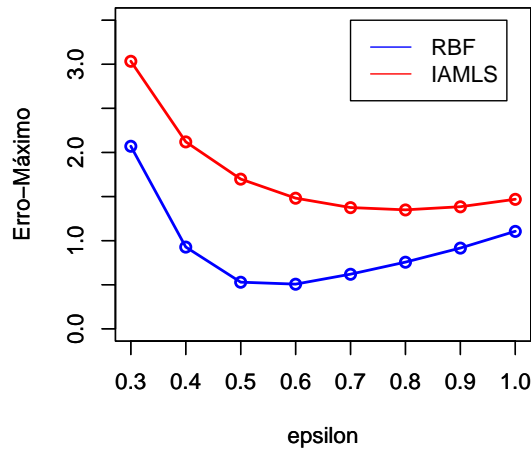


$\epsilon = 0.6$

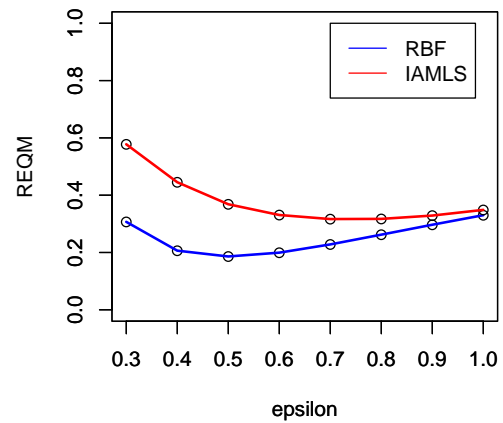
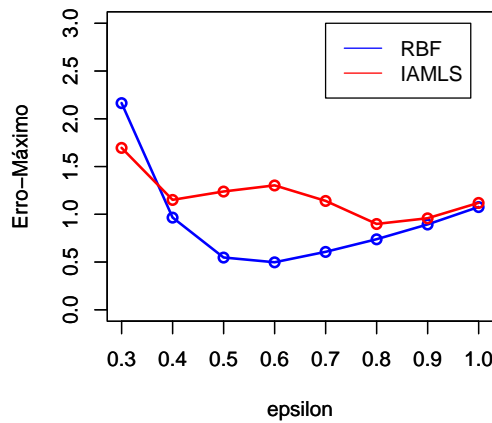
Figura 4.23: Superfícies interpoladas usando o Método RBF e a Função Multiquádrica Inversa Genralizada.

Tabela 4.10: Análise da Convergência do Método IAMLS para o RBF usando a Função Multiquádrica Inversa Generalizada.

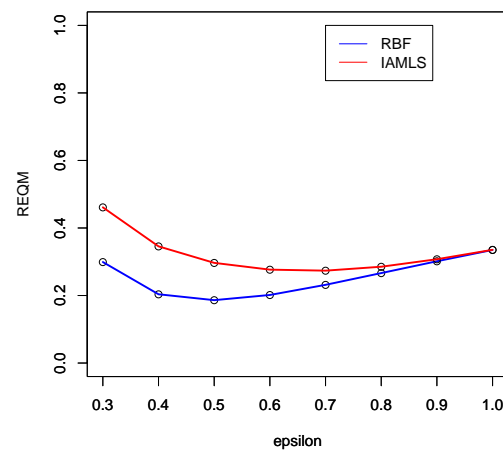
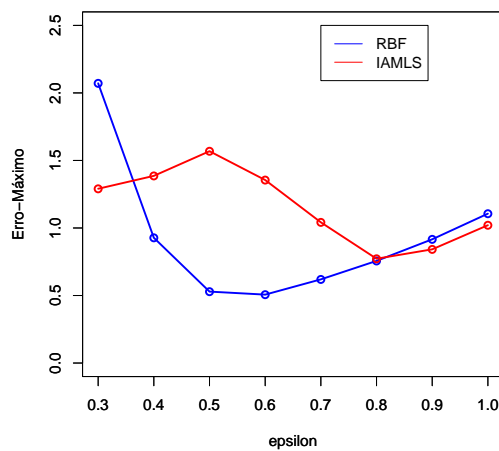
Grid 87 × 61 - Método IAMLS								
Número de iterações $n = 1$								
$\epsilon$	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
EQ	3.03529	2.12090	1.69843	1.48202	1.37531	1.34915	1.38464	1.46941
EQM	0.55832	0.42820	0.33364	0.26994	0.22928	0.20501	0.19235	0.18828
DP	0.50756	0.37959	0.30008	0.25494	0.23304	0.22561	0.22714	0.23500
REQM	0.74720	0.65437	0.57761	0.51956	0.47884	0.45278	0.43858	0.43391
Número de iterações $n = 5$								
$\epsilon$	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
EQ	1.69588	1.15117	1.23876	1.30264	1.14042	0.89904	0.95849	1.11979
EQM	0.3337	0.19825	0.13571	0.10949	0.10026	0.10065	0.10816	0.12157
DP	0.30228	0.19766	0.16432	0.15360	0.14591	0.14604	0.15724	0.17690
REQM	0.57768	0.44526	0.36838	0.33089	0.31664	0.31726	0.32888	0.34867
Número de iterações $n = 10$								
$\epsilon$	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
EQ	1.29043	1.38586	1.56848	1.35511	1.04196	<b>0.77232</b>	0.84192	1.02060
EQM	0.212696	0.119421	0.088016	<b>0.076515</b>	0.074874	0.081358	0.094515	0.112480
DP	0.22167	0.16263	0.150880	0.13223	<b>0.11952</b>	0.12366	0.141486	0.166284
REQM	0.46119	0.34557	0.29667	0.27661	<b>0.27363</b>	0.28523	0.30743	0.33538



Após 1 iteração do algoritmo IAMLS.

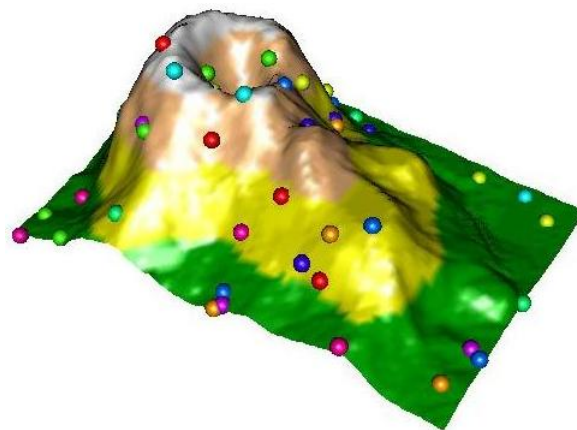


Após 5 iterações do algoritmo IAMLS.

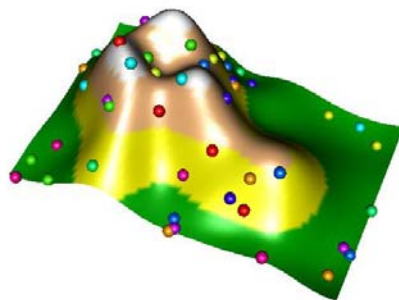


Após 10 iterações do algoritmo IAMLS.

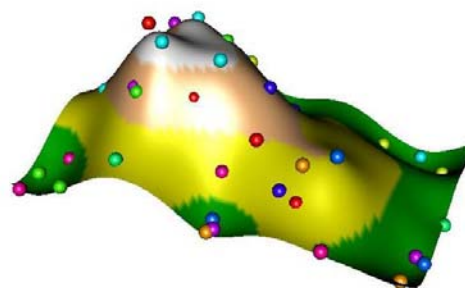
Figura 4.24: Gráficos do EQ e REQM.



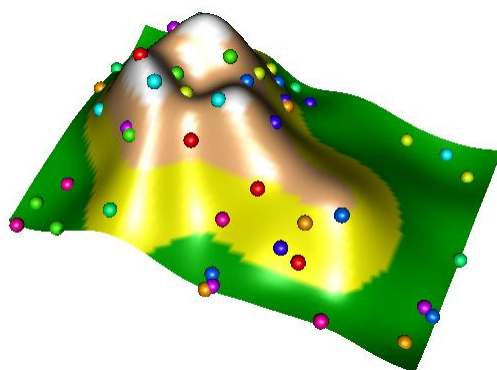
Superfície verdadeira e os pontos amostrados



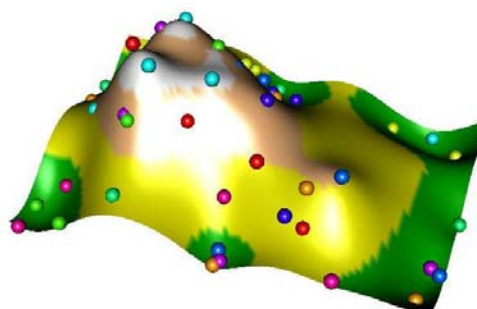
$\epsilon = 0.4$  - RBF



$\epsilon = 0.7$  - IMLS.



$\epsilon = 0.5$  - RBF



$\epsilon = 0.8$  - IMLS.

Figura 4.25: Superfícies interpoladas pelo Método RBF e IMLS (10 iterações) usando a Função Multiquádrica Inversa Generalizada.