3
Processos Estocásticos

Os processos estocásticos abordados nesta dissertação são conhecidos como movimento browniano (MB) e movimento de reversão à média (MRM). O capítulo terá como objetivo a apresentação destes processos quanto às suas características econômicas e demonstrações matemáticas de suas medidas estatísticas. O capítulo baseia-se em DIXIT PINDYCK (1994), AIUBE e BRANDÃO.

3.1.
Movimento Browniano

Há algumas variações sobre o movimento browniano ou processo de Wiener, por conta disto esta seção será dividida entre estas variações. Três características são típicas do MB, são elas:

1. É um processo de Markov (tudo que se precisa para fazer previsão é o valor atual e a distribuição de probabilidade da variação)
   $dz = \varepsilon_t\sqrt{dt} \therefore \varepsilon_t \sim N(0,1)$
2. Incrementos independentes
   $E[\varepsilon_t\varepsilon_s] = 0 \;\forall\; t \neq s$
3. Mudanças normalmente distribuídas e com variância crescente no tempo

A terceira propriedade é decorrente das duas primeiras. A primeira propriedade remete para a normalidade de dz, pois como dz é dado por uma constante dt e por uma variável aleatória que segue uma distribuição Normal, dz também seguirá uma distribuição Normal. A média e a variância de dz são:

$$E[dz] = E\left[\varepsilon_t\sqrt{dt}\right] = 0$$

$$Var[dz] = Var\left[\varepsilon_t\sqrt{dt}\right] = dt$$

Então,

$$dz \sim N(0, dt)$$

A demonstração de que a variância do processo de Wiener é crescente no tempo pode ser encontrada no Apêndice C.

3.1.1. Movimento Aritmético Browniano

O movimento aritmético browniano é um processo de Wiener com uma tendência, e que pode ser descrito da seguinte forma:

$$dx = \alpha dt + \sigma dz \therefore dz = \varepsilon\sqrt{dt} \therefore \varepsilon \sim N(0,1) \quad (34)$$

Onde:

α = tendência

σ = variância

A equação acima é conhecida como a de um movimento aritmético browniano (MAB) por apresentar uma tendência linear no tempo. Podemos calcular o valor esperado e a variância para a variação da variável dx, da seguinte forma:

$$E[dx] = E[\alpha dt + \sigma dz] = \alpha dt + \sigma E[dz] = \alpha dt \quad (35)$$

$$Var[dx] = E[(\alpha dt + \sigma dz - \alpha dt)^2] = \sigma^2 E[(dz)^2]$$

Onde:

$$E[(dz)^2] = E\left[\left(\varepsilon\sqrt{dt}\right)^2\right] = dtE[\varepsilon^2] = dt$$

Então,

$$Var[dx] = \sigma^2 dt \quad (36)$$

Portanto, dx terá uma distribuição de probabilidade dada por:

$$dx \sim N(\alpha dt, \sigma^2 dt) \quad (37)$$

A seguir podemos observar três caminhos diferentes para o processo. No exemplo os parâmetros do modelo foram:

Tabela 1 - Parâmetros Para o MAB

X_0	50
tendência a. a.	0,2
volatilidade a. a.	1
delta t	0,083333

Figura 1 - Simulação Para Movimento Aritmético Browniano

3.1.2. Movimento Geométrico Browniano

O movimento geométrico browniano (MGB) é um caso particular do processo de Itô, e é utilizado para modelar preço de ações, taxas de juros, preço de produtos e outras variáveis financeiras e econômicas.

Se considerarmos um movimento browniano generalizado ou processo de Itô como:

$$dx = a(x,t)dt + b(x,t)dz \tag{38}$$

Então, o MGB será o caso especial em que:

$a(x,t) = \alpha x$

$b(x,t) = \sigma x$

Substituindo essas relações na equação (38) teremos a equação do MGB:

$$dx = \alpha x dt + \sigma x dz \tag{39}$$

Então,

$$\frac{dx}{x} = \alpha dt + \sigma dz$$

Onde:

$\frac{d}{dx}(ln(x)) = \frac{1}{x}dx = \frac{dx}{x}$

Portanto, podemos ver que $\frac{dx}{x}$ segue uma distribuição Normal, pois segue um MAB. A variação de $ln(x)$ é igual à variação $\frac{dx}{x}$, portanto, $ln(x)$ também seguirá um MAB e terá uma distribuição Normal. Desta forma, x terá uma distribuição LogNormal.

A demonstração de como obter a média e a variância do MGB encontram-se no Apêndice C, e os resultados são:

$$E[x_t] = x_0 \mathrm{e}^{\alpha T} \quad (40)$$

E,

$$Var[x_t] = {x_0}^2 \mathrm{e}^{2\alpha T + \sigma^2 T} - {x_0}^2 \mathrm{e}^{2\alpha T} = {x_0}^2 \mathrm{e}^{2\alpha T}\left(\mathrm{e}^{\sigma^2 T} - 1\right) \quad (41)$$

Abaixo podemos ver três caminhos aleatórios de um MGB com parâmetros:

Tabela 2 - Parâmetros Para o MGB

X_0	50
tendência a. a.	0,09
volatilidade a. a.	0,2
delta t	0,083333

Figura 2 - Simulação Para Movimento Geométrico Browniano

3.2. Movimento de Reversão à Média

O movimento de reversão à média (MRM) possui uma grande diferença em relação ao MGB, que é a convergência de longo prazo. Quando se faz o tempo tender a infinito o MGB tende a infinito ou a zero, dependendo da sua tendência. A característica de tendência exponencial é adequada a alguns ativos como as ações. Por outro lado, o MRM converge para uma tendência de longo prazo, o que é uma característica que possui embasamento na teoria microeconômica. Há ativos, como é o caso das *commodities*, que possuem claramente uma relação com os seus custos marginais de produção.

No caso do petróleo, por exemplo, através da teoria microeconômica, o preço será dado pelo custo marginal do campo com maior custo, necessário para equilibrar a oferta e a demanda. Cabe aqui ressaltar que o modelo não incorpora custos marginais crescentes, como é o caso da indústria de petróleo. No entanto, a modelagem por MRM tem se demonstrado coerente. A equação de reversão à média pode ser escrita da seguinte forma:

$$dx = \eta(\bar{x} - x)dt + \sigma dz \tag{42}$$

Onde:

η = velocidade de reversão à média

$\bar{x}$ = média de longo prazo

O valor esperado do MRM em função do tempo é dado por

$$E[x_t] = \bar{x} + e^{-\eta t}(x_0 - \bar{x})$$

E a variância será

$$Var[x_t] = \frac{\sigma^2}{2\eta}(1 - e^{-2\eta t}) \tag{43}$$

Abaixo apresentam-se três curvas que representam a evolução no tempo de diferentes processos de reversão à média. Os valores utilizados como parâmetros destes processos estocásticos encontram-se na tabela abaixo:

Tabela 3 - Parâmetros Para o MRM

X_0	40
Velocidade de Reversão (η1)	0
Velocidade de Reversão (η2)	0,5
Velocidade de Reversão (η3)	1
Média de Longo Prazo	30
volatilidade a. a.	0,2
delta t (ano)	0,083333

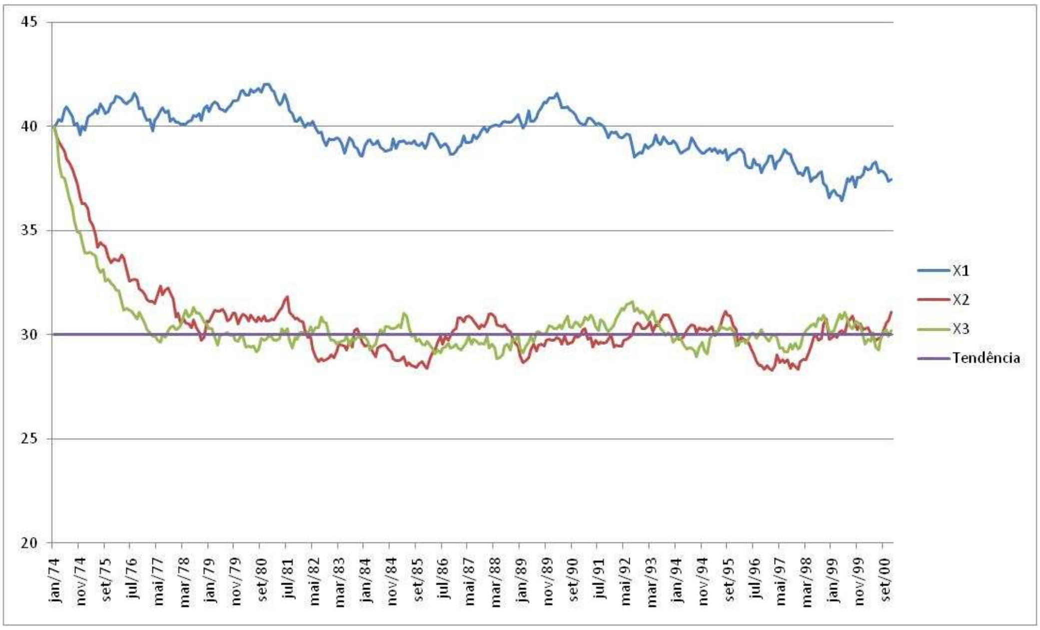

Figura 3 - Simulação Para Movimento de Reversão à Média

O gráfico acima demonstra a característica particular do MRM que apresenta valor de η igual a zero. No gráfico, X1 representa este tipo de processo que na verdade se iguala a um processo browniano sem *drift*.