

2

Modelo matemático do processo de revestimento por extrusão em regime transiente

A fig. (16) representa um corte transversal em uma barra de revestimento por extrusão mostrando o escoamento, as equações que o regem e todas as condições de contorno consideradas no modelo matemático.

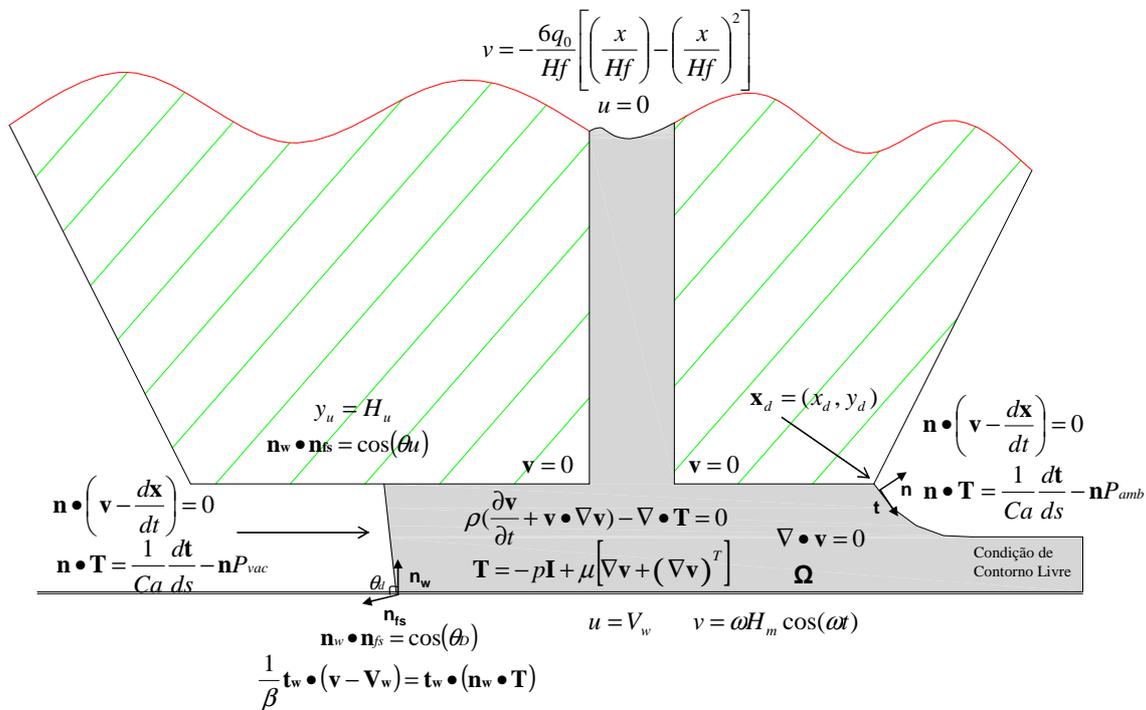


Figura 16 – Domínio físico do escoamento de revestimento por extrusão

O modelo assume escoamento laminar, bi-dimensional, incompressível e isotérmico. O fluido é Newtoniano e o efeito da gravidade é desprezado.

O modelo utilizado nesta tese é o mesmo apresentado por Romero & Carvalho (2008).

As equações básicas que regem o escoamento são a continuidade e a conservação da quantidade de movimento linear definidas no domínio Ω , desconhecido a priori, função do tempo.

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (1)$$

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) - \nabla \cdot \mathbf{T} = 0 \quad (2)$$

onde: \mathbf{v} = velocidade;

ρ = densidade;

\mathbf{T} = tensor tensão total.

A influência do campo gravitacional na equação da conservação da quantidade de movimento é desprezada em virtude do reduzido volume de fluido presente no domínio do escoamento.

Pela hipótese de fluido Newtoniano, o tensor tensão total é dado por:

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \mu \left[\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T \right] \quad (3)$$

onde: p = pressão estática;

μ = viscosidade;

\mathbf{I} = tensor unitário.

A característica transiente do escoamento é dada pela oscilação da fresta de revestimento.

$$H(t) = H_0 + H_m \mathcal{S}(\omega t) \quad (4)$$

onde: H_0 = fresta de revestimento (H_d) em regime permanente;

H_m = amplitude de variação da fresta de revestimento;

ω = frequência angular de variação da fresta de revestimento.

As condições de contorno para a equação de conservação de quantidade de movimento podem ser em velocidade ou força prescrita, ou ainda uma função relacionando as duas grandezas anteriores (Carvalho, 1995).

As condições de contorno usadas neste modelo do escoamento de revestimento por extrusão são:

(1) No plano de saída do domínio, a condição de contorno adotada é a chamada *Free Boundary Condition* (Papanastasiou et al., 1992) ou condição de contor-no livre. A força no plano de saída é dada por:

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{T} = -p\mathbf{n} + \mathbf{n} \cdot \mu \left[\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T \right] \quad (5)$$

(2) No plano de entrada do líquido no domínio do revestimento (fresta de alimentação), é assumido um escoamento retilíneo (*Poiseuille*) com perfil de velocidade dado por:

$$v = -\frac{6q_0}{H_f} \left[\left(\frac{x}{H_f} \right) - \left(\frac{x}{H_f} \right)^2 \right] \quad (6)$$

$$u = 0 \quad (7)$$

onde: H_f = fresta de alimentação;

q_0 = vazão do líquido bombeado por unidade de largura da barra de revestimento;

v = componente vertical da velocidade;

u = componente horizontal da velocidade.

(3) Nas paredes dos lábios da barra de revestimento, a condição de contorno de não penetração e não escorregamento é utilizada.

$$u = 0 \quad (8)$$

$$v = 0 \quad (9)$$

(4) No substrato, também é utilizada a condição de contorno de não penetração e não escorregamento, exceto nas proximidades da linha de contato dinâmica, conforme explicado no item (8). O componente vertical da velocidade é relacionado à oscilação periódica da fresta de revestimento, portanto nula em regime permanente.

$$u = V_w \quad (10)$$

$$v = \omega H_m \cos(\omega t) \quad (11)$$

onde: H_m = amplitude de oscilação da fresta de revestimento;

V_w = velocidade do substrato.

(5) Nas superfícies livres, a tração no líquido se opõe à pressão capilar devido à curvatura e não há fluxo através destas superfícies. A tensão de cisalhamento é considerada nula neste contorno, pois a viscosidade do ar é muito menor que a viscosidade do líquido revestido.

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{T} = \frac{1}{Ca} \frac{d\mathbf{t}}{ds} - \mathbf{n}P_0 \quad (12)$$

$$\mathbf{n} \cdot \left(\mathbf{v} - \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right) = 0 \quad (13)$$

onde: \mathbf{t} = vetor unitário na direção tangente à superfície livre;

\mathbf{n} = vetor unitário na direção normal à superfície livre;

P_0 = pressão na fase gasosa, atmosférica na superfície livre a jusante e, geralmente, subatmosférica na superfície livre a montante;

$\frac{d\mathbf{x}}{dt} \equiv \mathbf{x}^0$ = velocidade da malha na superfície livre conforme descrita

por Christodoulou & Scriven (1992);

$$Ca = \text{número de capilaridade [adm]} \equiv \frac{\mu V_w}{\sigma}.$$

(6) A linha de contato estática a jusante é considerada fixa na quina do lábio a jusante da fresta de alimentação.

$$\mathbf{x}_d = (x_d, y_d) \quad (14)$$

onde: (x_d, y_d) são as coordenadas da quina do lábio a jusante da fresta de alimentação.

(7) A linha de contato estática a montante é livre para se movimentar ao longo do lábio a montante da fresta de alimentação, mantendo um ângulo fixo de $\theta_u=100^\circ$, conforme proposto por Romero & Carvalho (2008).

$$y_u = H_u \quad (15)$$

$$\mathbf{n}_w \bullet \mathbf{n}_{fs} = \cos(\theta_u) \quad (16)$$

onde: \mathbf{n}_{fs} = vetor unitário na direção normal à superfície livre;

\mathbf{n}_w = vetor unitário na direção normal à parede sólida;

H_u = coordenada vertical do lábio a montante da fresta de alimentação.

(8) Não existe teoria disponível para descrever precisamente o escoamento nas proximidades da linha de contato dinâmico. A aplicação da condição de não escorregamento nesta região gera um valor infinito de tensão (Huh & Scriven, 1971). Para sobrepor a dificuldade de análise nesta região, assume-se uma condição de escorregamento local, onde a tensão passa a ser proporcional à diferença entre o campo de velocidade no contorno e a velocidade do contorno.

O ângulo que a superfície livre forma com o substrato nesta região deve ser fixado como condição de contorno. Neste trabalho foi assumido $\theta_d=120^\circ$, conforme proposto por Romero & Carvalho (2008).

$$\mathbf{n}_w \bullet \mathbf{n}_{fs} = \cos(\theta_d) \quad (17)$$

$$\beta \mathbf{t}_w \bullet (\mathbf{v} - V_w \mathbf{i}) = \mathbf{t}_w \bullet (\mathbf{n}_w \bullet \mathbf{T}) \quad (18)$$

onde: β = coeficiente de escorregamento, assumido 10^5 , conforme proposto por Romero & Carvalho (2008);

\mathbf{t}_w = vetor unitário na direção tangente ao substrato;

\mathbf{n}_w = vetor unitário na direção normal ao substrato.

A malha se ajusta a cada passo de tempo. Portanto, cada ponto nodal muda de posição com relação ao referencial considerado.

A derivada local, $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$, deve ser ajustada para representar a taxa local de variação da velocidade em cada ponto do domínio do escoamento. Conforme descrito por Christodoulou & Scriven (1992), o ajuste é feito por:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \overset{0}{\mathbf{v}} - \overset{0}{\mathbf{x}} \bullet \nabla \mathbf{v} \quad (19)$$

onde: $\overset{0}{\mathbf{v}}$ = taxa de variação local da velocidade no ponto nodal da malha;

$\overset{0}{\mathbf{x}}$ = velocidade da malha.

A substituição da eq. (19) na equação da conservação da quantidade de movimento linear, eq. (2), leva a:

$$\rho \left[\overset{0}{\mathbf{v}} + (\mathbf{v} - \overset{0}{\mathbf{x}}) \bullet \nabla \mathbf{v} \right] = \nabla \bullet \mathbf{T} \quad (20)$$

A condição inicial é necessária para a resolução do problema transiente. Esta condição é dada pela solução do escoamento em regime permanente, onde a fresta de alimentação é constante e igual a H_0 .

$$\mathbf{v}(t=0) = \mathbf{v}_0(x,y) \quad (21)$$

$$p(t=0) = p_0(x,y) \quad (22)$$

2.1

Formulação de problemas de escoamento com superfície livre

O escoamento com superfície livre representado na fig. (16) é modelado pela equação de conservação da quantidade de movimento, eq. (2), equação constitutiva do fluido, eq. (3), equação da continuidade, eq. (1), e as demais condições de contornos do modelo matemático. Estas equações formam um sistema de equações diferenciais parciais não lineares definidas no domínio físico Ω , que é desconhecido em decorrência da existência da superfície livre e se altera a cada passo de tempo pela oscilação da fresta de revestimento.

Para a solução do modelo matemático é necessário reescrever o sistema de equações diferenciais parciais não lineares em um domínio de referência fixo, Ω , com o custo adicional da inclusão de expressões que relacionam o domínio físico e o de referência. Estas expressões formam o mapeamento do domínio físico no domínio de referência ou computacional.

O mapeamento relaciona cada ponto do domínio de referência ao correspondente no domínio físico e também é parte da solução do problema.

A presença de superfícies livres e a conseqüente necessidade do mapeamento entre o domínio físico desconhecido e o domínio de referência conhecido acentuam o caráter não linear do sistema de equações que representam um escoamento. Técnicas analíticas para a solução deste tipo de escoamento são raras e existem somente para casos especiais.

As equações de mapeamento são bijeções na forma $\mathbf{x}(\xi)$, onde \mathbf{x} é a coordenada de um ponto no domínio físico e ξ é a coordenada deste mesmo ponto no domínio de referência conhecido.

Não há um formato único para o domínio de referência. Porém, é comum a definição de um domínio quadrangular, pela sua simplicidade.

Muitas vezes não é possível mapear todo o domínio físico em um único domínio de referência quadrangular. Nestes casos, o domínio físico é dividido em partes e cada parte é mapeada em um domínio quadrangular de referência.

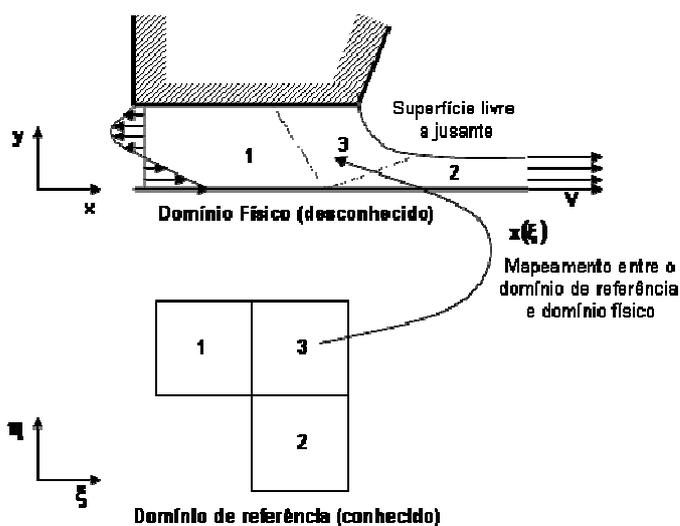


Figura 17 – Mapeamento entre o domínio físico e de referência (Carvalho, 1995) (Romero & Carvalho, 2005)

Existem algumas técnicas para definição de equações de mapeamento e todas devem obedecer a dois critérios:

- 1) Os contornos do domínio físico devem ser mapeados em contornos do domínio de referência;
- 2) O mapeamento deve ser inversível para todos os pontos do domínio de referência;

O critério 2 é satisfeito se:

$$\det(\mathbf{J}) \neq 0 \quad (23)$$

onde \mathbf{J} é a matriz Jacobiana da transformação $\mathbf{x}(\xi)$ e seus componentes são as derivadas parciais das coordenadas do domínio físico em relação às coordenadas do domínio de referência. Em duas dimensões, \mathbf{J} é representado por:

$$\nabla_{\xi} \mathbf{x} \equiv \mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{pmatrix} \quad (24)$$

Todas as derivadas espaciais no domínio físico Ω podem ser representadas por derivadas espaciais no domínio de referência Ω_0 , através da equação:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{pmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \end{pmatrix} \quad (25)$$

$$\mathbf{J}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{J})} \begin{pmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{pmatrix} \quad (26)$$

Diferenciais de área no domínio físico são representados da seguinte forma no domínio de referência:

$$d\Omega = Jd\Omega_0 \quad (27)$$

$$J = \det(\mathbf{J}) \quad (28)$$

As eq. (25), (26) e (27) possibilitam a formulação do sistema no domínio de referência.

Entre as formas de mapeamento $\mathbf{x}(\xi)$, o uso de equações parciais elípticas relacionando pontos do domínio físico a pontos do domínio de referência tem apresentado bons resultados em termos da qualidade da malha gerada, tais como suavidade e ortogonalidade (Carvalho, 2002). O estudo das formas de mapeamento é conhecido como geração de malha.

As equações que representam a geração de malha elíptica são:

$$\nabla \cdot [D_\xi \nabla \xi] = 0 \quad (29)$$

$$\nabla \cdot [D_\eta \nabla \eta] = 0 \quad (30)$$

onde D_ξ e D_η são coeficientes análogos aos coeficientes de difusão em problemas de transporte de massa ou calor. Eles controlam o espaçamento entre as curvas de $\xi = cte$ e $\eta = cte$. Seus valores são escolhidos de forma a concentrar a malha em regiões que apresentam gradiente de velocidade acentuados.

Como as equações de geração de malha também estão postas no domínio físico em termos do mapeamento inverso $\xi(\mathbf{x})$, elas devem ser reescritas no domínio de referência para fornecer $\mathbf{x}(\xi)$.

As eq. (29) e (30) devem ser incluídas no sistema de equações diferenciais do modelo matemático e resolvidas simultaneamente a cada passo de tempo, para determinação da posição dos pontos nodais da malha no domínio físico, ou seja, a configuração do domínio físico. As condições de contorno necessárias para a solução das eq. (29) e (30) são apresentadas na seção 2.3.

2.2

Método para solução do escoamento transiente com superfície livre

Todas as equações do modelo matemático que descrevem o escoamento podem ser agrupadas no seguinte sistema de equações diferenciais parciais no tempo e no espaço.

$$\rho \left[\overset{0}{\mathbf{v}} + (\mathbf{v} - \overset{0}{\mathbf{x}}) \bullet \nabla \mathbf{v} \right] = \nabla \bullet \mathbf{T} \quad (20)$$

$$\nabla \bullet \mathbf{v} = 0 \quad (1)$$

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \mu[\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T] \quad (3)$$

$$\nabla \bullet [D_\xi \nabla \xi] = 0 \quad (29)$$

$$\nabla \bullet [D_\eta \nabla \eta] = 0 \quad (30)$$

A solução do sistema de equações acima fornece a posição de cada ponto nodal da malha, o campo de velocidade e de pressão do escoamento.

O método dos resíduos ponderados acoplado ao método dos elementos finitos e funções base de Galerkin foi utilizado para solução deste sistema de equações diferenciais parciais não lineares.

No método dos resíduos ponderados todas as equações diferenciais devem ser reescritas na sua respectiva formulação fraca. Por exemplo, se $F(u', u, f(x)) = 0$ é a equação diferencial com incógnita $u(x)$ posta em um intervalo real $[x_1, x_2]$, então a sua formulação fraca é:

$$\int_{x_1}^{x_2} \omega F(u', u, f(x)) dx = 0 \quad (31)$$

onde ω é uma função peso adequadamente escolhida (Carvalho, 2002).

É possível demonstrar que a solução de uma equação na formulação forte também é solução da formulação fraca e vice-versa.

A incógnita $u(x)$ é aproximada por uma combinação linear de funções base conhecidas de um espaço apropriado de dimensão finita (Carvalho, 2002).

$$u(x) \approx \tilde{u}(x) = \sum_{i=1}^N c_i \phi_i(x) \quad (32)$$

A substituição da solução por sua aproximação $\tilde{u}(x) = \sum_{i=1}^N c_i \phi_i(x)$ na equação diferencial e a utilização de N funções peso φ_i leva a um sistema de N equações algébricas onde cada equação é dada por $\int_{x_1}^{x_2} \varphi_i F(\tilde{u}', \tilde{u}, f(x)) dx = 0$, sendo chamada de resíduo ponderado.

As N funções peso φ_i formam uma base do espaço que contém ω .

O método dos elementos finitos consiste na escolha apropriada das funções φ_i e ϕ_i de forma que as funções e suas derivadas só sejam diferentes de zero em uma pequena parte do domínio (Carvalho, 2002).

O método dos elementos finitos introduz uma visão local ou elementar do problema.

No método de Galerkin, o espaço das funções peso é o mesmo das funções base de interpolação das incógnitas, portanto $\varphi_i = \phi_i$.

(1) Formulação fraca da equação de conservação da quantidade de movimento.

$$\int_{\Omega} \left(\rho \left[\overset{0}{\mathbf{v}} + (\mathbf{v} - \overset{0}{\mathbf{x}}) \bullet \nabla \mathbf{v} \right] - \nabla \bullet \mathbf{T} \right) \bullet \mathbf{W} d\Omega = 0 \quad (33)$$

Rearranjando os termos, tem-se:

$$\int_{\Omega} \rho \left[\overset{0}{\mathbf{v}} - \overset{0}{\mathbf{x}} \bullet \nabla \mathbf{v} \right] \bullet \mathbf{W} d\Omega + \int_{\Omega} \rho [\mathbf{v} \bullet \nabla \mathbf{v}] \bullet \mathbf{W} d\Omega - \int_{\Omega} [\nabla \bullet \mathbf{T}] \bullet \mathbf{W} d\Omega = 0 \quad (34)$$

onde \mathbf{W} é a função vetorial peso, com componentes W_1 e W_2 .

A fim de aliviar a restrição ao tipo de funções base a serem utilizadas para interpolar o campo de velocidade, é necessário trabalhar na expressão $\nabla \bullet \mathbf{T}$ para evitar o aparecimento de derivadas parciais de segunda ordem da velocidade. Para tanto, pode-se utilizar a igualdade tensorial abaixo:

$$\mathbf{T} : \nabla \mathbf{W} = \nabla \bullet (\mathbf{T} \bullet \mathbf{W}) - (\nabla \bullet \mathbf{T}) \bullet \mathbf{W} \quad (35)$$

Tem-se então:

$$\int_{\Omega} \rho \left[\overset{0}{\mathbf{v}} - \overset{0}{\mathbf{x}} \bullet \nabla \mathbf{v} \right] \bullet \mathbf{W} d\Omega + \int_{\Omega} \rho [\mathbf{v} \bullet \nabla \mathbf{v}] \bullet \mathbf{W} d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{T} : \nabla \mathbf{W} d\Omega +$$

$$- \int_{\Omega} \nabla \bullet (\mathbf{T} \bullet \mathbf{W}) d\Omega = 0 \quad (36)$$

Mas, pelo teorema de Gauss:

$$\int_{\Omega} \nabla \bullet (\mathbf{T} \bullet \mathbf{W}) d\Omega = \int_{\Gamma} (\mathbf{n} \bullet \mathbf{T}) \bullet \mathbf{W} d\Gamma \quad (37)$$

onde Γ é o contorno do domínio Ω .

Portanto:

$$\int_{\Omega} \rho \left[\overset{0}{\mathbf{v}} - \overset{0}{\mathbf{x}} \bullet \nabla \mathbf{v} \right] \bullet \mathbf{W} d\Omega + \int_{\Omega} \rho [\mathbf{v} \bullet \nabla \mathbf{v}] \bullet \mathbf{W} d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{T} : \nabla \mathbf{W} d\Omega +$$

$$- \int_{\Gamma} (\mathbf{n} \bullet \mathbf{T}) \bullet \mathbf{W} d\Gamma = 0 \quad (38)$$

Considerando um sistema de coordenadas cartesiano, os termos que aparecem nas integrais, são:

$$\left[\overset{0}{\mathbf{v}} - \overset{0}{\mathbf{x}} \bullet \nabla \mathbf{v} \right] \bullet \mathbf{W} = \left(u - x \frac{\partial u}{\partial x} - y \frac{\partial u}{\partial y} \right) W_1 + \left(v - x \frac{\partial v}{\partial x} - y \frac{\partial v}{\partial y} \right) W_2 \quad (39)$$

$$[\mathbf{v} \bullet \nabla \mathbf{v}] \bullet \mathbf{W} = \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) W_1 + \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) W_2 \quad (40)$$

$$\mathbf{T} : \nabla \mathbf{W} = \frac{\partial W_1}{\partial x} \left[-p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right] + \frac{\partial W_1}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] +$$

$$+ \frac{\partial W_2}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial W_2}{\partial y} \left[-p + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right] \quad (41)$$

$$(\mathbf{n} \cdot \mathbf{T}) \cdot \mathbf{W} = f_x W_1 + f_y W_2 \quad (42)$$

onde f_x e f_y são os componentes da força atuando no contorno do domínio. Nas superfícies livres, os componentes da força assumem a seguinte forma:

$$f_x = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{T})_x = \frac{1}{Ca} \frac{dt_x}{ds} - n_x P_0 \quad (43)$$

$$f_y = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{T})_y = \frac{1}{Ca} \frac{dt_y}{ds} - n_y P_0 \quad (44)$$

A função vetorial peso \mathbf{W} pode ser escolhida de tal modo que sua base seja formada pelo conjunto:

$$\left\{ \begin{bmatrix} \psi_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \psi_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} \psi_N \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ \psi_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ \psi_2 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 0 \\ \psi_N \end{bmatrix} \right\} \quad (45)$$

A equação de conservação da quantidade de movimento linear pode ser separada nos componentes x e y , dados por:

$$\int_{\Omega} \rho \left(u - x \frac{\partial u}{\partial x} - y \frac{\partial u}{\partial y} \right) \psi_i d\Omega + \int_{\Omega} \rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) \psi_i d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \left[-p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right] + \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] d\Omega - \int_{\Gamma} f_x \psi_i d\Gamma = 0 \quad (46)$$

$$\int_{\Omega} \rho \left(v - x \frac{\partial v}{\partial x} - y \frac{\partial v}{\partial y} \right) \psi_i d\Omega + \int_{\Omega} \rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) \psi_i d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \left[-p + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right] d\Omega - \int_{\Gamma} f_y \psi_i d\Gamma = 0 \quad (47)$$

As integrais de linha $\int_{\Gamma} f_x \psi_i d\Gamma$ e $\int_{\Gamma} f_y \psi_i d\Gamma$ são calculadas usando as condições de contorno naturais ou de Newman, e aparecem nos elementos que fazem parte do contorno das superfícies livres. Nos elementos internos ao domínio, as integrais de linha de dois elementos vizinhos se cancelam e desta forma não precisam ser calculadas.

(2) Formulação fraca da equação da continuidade.

$$\int_{\Omega} w_c (\nabla \cdot \mathbf{v}) d\Omega = 0 \quad (48)$$

Novamente, assumindo um sistema de coordenadas cartesiano:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \quad (49)$$

A função peso w_c pertence a um espaço de funções com funções base χ_1, χ_2, χ_3 , que são as mesmas utilizadas na interpolação do campo de pressão. Assim, tem-se:

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \chi_i d\Omega = 0 \quad (50)$$

(3) Formulação fraca das equações de geração de malha.

$$\int_{\Omega} (\nabla \cdot D_{\xi} \nabla \xi) \psi_i d\Omega = 0, \quad (51)$$

$$\int_{\Omega} (\nabla \cdot D_{\eta} \nabla \eta) \psi_i d\Omega = 0, \quad (52)$$

onde ψ_i são funções base do espaço da função peso. No caso do método de Garlekin estas funções base são exatamente as mesmas utilizadas para interpolar o campo de posição dos nós.

$$\int_{\Omega} (\nabla \cdot D_{\xi} \nabla \xi) \psi_i d\Omega = \int_{\Omega} (D_{\xi} \nabla^2 \xi + \nabla \xi \nabla D_{\xi}) \psi_i d\Omega = 0 \quad (53)$$

$$\int_{\Omega} (\nabla \cdot D_{\eta} \nabla \eta) \psi_i d\Omega = \int_{\Omega} (D_{\eta} \nabla^2 \eta + \nabla \eta \nabla D_{\eta}) \psi_i d\Omega = 0 \quad (54)$$

A fim de aliviar a restrição ao tipo de funções base a serem utilizadas para interpolar a posição dos nós da malha, é necessário trabalhar nas expressões $(\nabla^2 \xi) \psi_i$ e $(\nabla^2 \eta) \psi_i$ para evitar o aparecimento de derivadas parciais de segunda ordem da posição. Utilizando integração por partes, tem-se:

$$-\int_{\Omega} D_{\xi} \nabla \psi_i \cdot \nabla \xi d\Omega + \int_{\Omega} (\nabla \xi \cdot \nabla D_{\xi}) \psi_i d\Omega + \int_{\Omega} D_{\xi} \nabla \cdot (\psi_i \nabla \xi) d\Omega = 0 \quad (55)$$

$$-\int_{\Omega} D_{\eta} \nabla \psi_i \cdot \nabla \eta d\Omega + \int_{\Omega} (\nabla \eta \cdot \nabla D_{\eta}) \psi_i d\Omega + \int_{\Omega} D_{\eta} \nabla \cdot (\psi_i \nabla \eta) d\Omega = 0 \quad (56)$$

Pelo teorema de Gauss:

$$\int_{\Omega} D \nabla \cdot (\psi_i \nabla \gamma) d\Omega = \int_{\Gamma} D \psi_i \mathbf{n} \cdot \nabla \gamma d\Gamma, \quad (57)$$

onde Γ é o contorno do domínio Ω .

Então:

$$-\int_{\Omega} D_{\xi} \nabla \psi_i \cdot \nabla \xi d\Omega + \int_{\Omega} (\nabla \xi \cdot \nabla D_{\xi}) \psi_i d\Omega + \int_{\Gamma} D_{\xi} \psi_i \mathbf{n} \cdot \nabla \xi d\Gamma = 0 \quad (58)$$

$$-\int_{\Omega} D_{\eta} \nabla \psi_i \cdot \nabla \eta d\Omega + \int_{\Omega} (\nabla \eta \cdot \nabla D_{\eta}) \psi_i d\Omega + \int_{\Gamma} D_{\eta} \psi_i \mathbf{n} \cdot \nabla \eta d\Gamma = 0 \quad (59)$$

Considerando um sistema de coordenadas cartesiano, os termos que aparecem nas integrais, são:

$$\nabla \psi_i \cdot \nabla \xi = \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) \quad (60)$$

$$\nabla \xi \bullet \nabla D_\xi = \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial D_\xi}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial D_\xi}{\partial y} \right) \quad (61)$$

$$\mathbf{n} \bullet \nabla \xi = n_x \frac{\partial \xi}{\partial x} + n_y \frac{\partial \xi}{\partial y} \quad (62)$$

Então:

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega} D_\xi \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) d\Omega + \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial D_\xi}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial D_\xi}{\partial y} \right) \psi_i d\Omega + \\ & + \int_{\Gamma} D_\xi \psi_i \left(n_x \frac{\partial \xi}{\partial x} + n_y \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (63)$$

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega} D_\eta \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) d\Omega + \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial D_\eta}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial D_\eta}{\partial y} \right) \psi_i d\Omega + \\ & + \int_{\Gamma} D_\eta \psi_i \left(n_x \frac{\partial \eta}{\partial x} + n_y \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (64)$$

As integrais $\int_{\Gamma} D_\xi \psi_i \left(n_x \frac{\partial \xi}{\partial x} + n_y \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) d\Gamma$ e $\int_{\Gamma} D_\eta \psi_i \left(n_x \frac{\partial \eta}{\partial x} + n_y \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) d\Gamma$ são calculadas utilizando as condições de contorno que controlam o ângulo entre uma linha de $\xi = cte$ ou $\eta = cte$ em relação ao contorno. Se a parcela relativa a estas integrais for ignorada no cálculo do resíduo, a malha será perpendicular ao contorno. O ângulo entre a malha e o contorno (θ), pode ser controlado impondo-se o valor de $\cos \theta$.

$$\mathbf{n} \bullet \nabla \xi = \cos \theta \quad \text{ou} \quad \mathbf{n} \bullet \nabla \eta = \cos \theta \quad (65)$$

(4) Formulação fraca da condição de contorno cinemática.

$$\int_{\Gamma_L} \left[\mathbf{n} \bullet \left(\mathbf{v} - \mathbf{x}^0 \right) \right] \psi_i d\Gamma_L = 0, \quad (66)$$

onde ψ_i são funções base do espaço de funções peso. No caso do método de Garlekin, estas funções base são exatamente as mesmas utilizadas para interpolar o campo de posição dos nós.

Em coordenadas cartesianas o integrando é escrito como:

$$\mathbf{n} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{v} - \mathbf{x} \\ 0 \end{pmatrix} = n_x \begin{pmatrix} u - x \\ 0 \end{pmatrix} + n_y \begin{pmatrix} v - y \\ 0 \end{pmatrix} \quad (67)$$

$$R_i^k \equiv \int_{\Gamma_L} \left[\mathbf{n} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{v} - \mathbf{x} \\ 0 \end{pmatrix} \right] \psi_i d\Gamma_L = \int_{\Gamma_L} \left[n_x \begin{pmatrix} u - x \\ 0 \end{pmatrix} + n_y \begin{pmatrix} v - y \\ 0 \end{pmatrix} \right] \psi_i d\Gamma_L = 0 \quad (68)$$

Com mais algum trabalho algébrico:

$$- \int_{\Gamma_L} \begin{bmatrix} n_x & 0 \\ n_x & n_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & 0 \\ y & 0 \end{bmatrix} \psi_i d\Gamma_L + \int_{\Gamma_L} [n_x u + n_y v] \psi_i d\Gamma_L = 0 \quad (69)$$

onde Γ_L é o contorno da superfície livre.

O próximo passo na resolução do problema é reescrever todas as equações no domínio de referência Ω_0 .

Conforme exposto na seção 2.1, as derivadas no domínio físico desconhecido, $\frac{\partial}{\partial x}$ e $\frac{\partial}{\partial y}$, devem ser reescritas em termos das coordenadas do

domínio de referência fixo, $\frac{\partial}{\partial \xi}$ e $\frac{\partial}{\partial \eta}$, de acordo com as equações.

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{pmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \end{pmatrix} \quad (25)$$

$$\mathbf{J}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{J})} \begin{pmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{pmatrix} \quad (26)$$

$$\nabla_{\xi} \mathbf{x} \equiv \mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{pmatrix} \quad (24)$$

Diferenciais de área no domínio físico são representados da seguinte forma no domínio de referência:

$$d\Omega = Jd\Omega_0 \quad (27)$$

$$J = \det(\mathbf{J}) \quad (28)$$

As equações são reescritas como:

a) Componente x da equação da conservação da quantidade de movimento.

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_0} \rho \left(u - x \frac{\partial u}{\partial x} - y \frac{\partial u}{\partial y} \right) \psi_i J d\Omega_0 + \int_{\Omega_0} \rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) \psi_i J d\Omega_0 + \\ & + \int_{\Omega_0} \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \left[-p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right] + \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] J d\Omega_0 - \int_{\Gamma_0} f_x \psi_i \frac{d\Gamma}{d\Gamma_0} d\Gamma_0 = 0 \end{aligned} \quad (70)$$

b) Componente y da equação da conservação da quantidade de movimento.

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_0} \rho \left(v - x \frac{\partial v}{\partial x} - y \frac{\partial v}{\partial y} \right) \psi_i J d\Omega_0 + \int_{\Omega_0} \rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) \psi_i J d\Omega_0 + \\ & + \int_{\Omega_0} \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \left[-p + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right] J d\Omega_0 - \int_{\Gamma_0} f_y \psi_i \frac{d\Gamma}{d\Gamma_0} d\Gamma_0 = 0 \end{aligned} \quad (71)$$

c) Equação da continuidade.

$$\int_{\Omega_0} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \chi_i J d\Omega_0 = 0 \quad (72)$$

d) Componente x da equação da malha.

$$\begin{aligned}
 & - \int_{\Omega_0} D_\xi \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) J d\Omega_0 + \int_{\Omega_0} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial D_\xi}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial D_\xi}{\partial y} \right) \psi_i J d\Omega_0 + \\
 & + \int_{\Gamma_0} D_\xi \psi_i \left(n_x \frac{\partial \xi}{\partial x} + n_y \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) \frac{d\Gamma}{d\Gamma_0} d\Gamma_0 = 0
 \end{aligned} \tag{73}$$

e) Componente y da equação da malha.

$$\begin{aligned}
 & - \int_{\Omega_0} D_\eta \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) J d\Omega_0 + \int_{\Omega_0} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial D_\eta}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial D_\eta}{\partial y} \right) \psi_i J d\Omega_0 + \\
 & + \int_{\Gamma_0} D_\eta \psi_i \left(n_x \frac{\partial \eta}{\partial x} + n_y \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \frac{d\Gamma}{d\Gamma_0} d\Gamma_0 = 0
 \end{aligned} \tag{74}$$

f) Condição de contorno cinemática.

$$- \int_{\Gamma_{0L}} \begin{bmatrix} n_x & 0 \\ 0 & n_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix} \psi_i \frac{d\Gamma_L}{d\Gamma_{0L}} d\Gamma_{0L} + \int_{\Gamma_{0L}} [n_x u + n_y v] \psi_i \frac{d\Gamma_L}{d\Gamma_{0L}} d\Gamma_{0L} = 0 \tag{75}$$

Com todas as derivadas $\frac{\partial}{\partial x}$ e $\frac{\partial}{\partial y}$ substituídas por $\frac{\partial}{\partial \xi}$ e $\frac{\partial}{\partial \eta}$ de acordo

com a eq. (25).

As incógnitas do problema são u e v (componentes da velocidade em cada ponto nodal), x e y (componentes do ponto nodal) e p (pressão em cada elemento).

O próximo passo é restringir a procura dos campos desconhecidos em um espaço de dimensão finita. Os campos são aproximados por uma combinação linear de funções base conhecidas e escolhidas apropriadamente.

Conforme o método dos elementos finitos, o domínio é dividido em elementos, formando uma malha.

No problema em questão a malha é formada por elementos quadrangulares com nove nós por elemento, conforme proposto por Carvalho (2002).

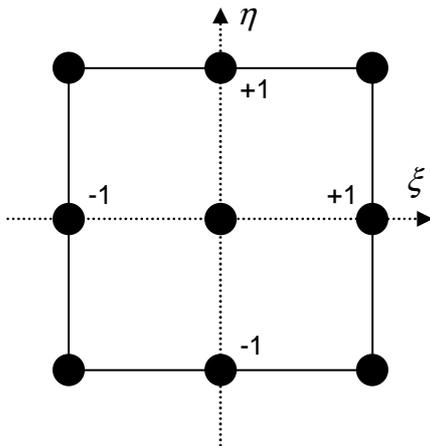


Figura 18 – Elemento quadrangular

Dentro de cada elemento são consideradas nove funções base $\{ \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_9 \}$ para representar os campos de velocidade e posição nodal.

$$\tilde{u} = \sum_{i=1}^9 U_i(t) \phi_i(\xi, \eta) \quad (76)$$

$$\tilde{v} = \sum_{i=1}^9 V_i(t) \phi_i(\xi, \eta) \quad (77)$$

$$\tilde{x} = \sum_{i=1}^9 X_i(t) \phi_i(\xi, \eta) \quad (78)$$

$$\tilde{y} = \sum_{i=1}^9 Y_i(t) \phi_i(\xi, \eta) \quad (79)$$

As funções base ϕ_i escolhidas são bi-quadráticas e estão associadas aos nós do elemento da malha. Assumem valor 1 nos seus respectivos nós e 0 no restante do domínio.

$$\phi_i(\mathbf{x}_j) = \delta_{ij} \quad (80)$$

$$\begin{aligned} \delta_{ij} &= 1 \quad \text{se } i = j \quad \text{ou;} \\ \delta_{ij} &= 0 \quad \text{se } i \neq j \end{aligned} \quad (81)$$

As funções base bi-quadráticas elementares ϕ_i são definidas como:

$$\begin{aligned}
\phi_1(\xi, \eta) &= \frac{\xi(\xi-1)\eta(\eta-1)}{4} & \phi_2(\xi, \eta) &= \frac{\xi(\xi+1)\eta(\eta-1)}{4} \\
\phi_3(\xi, \eta) &= \frac{\xi(\xi+1)\eta(\eta+1)}{4} & \phi_4(\xi, \eta) &= \frac{\xi(\xi-1)\eta(\eta+1)}{4} \\
\phi_5(\xi, \eta) &= \frac{(1-\xi^2)\eta(\eta-1)}{2} & \phi_6(\xi, \eta) &= \frac{\xi(\xi+1)(1-\eta^2)}{2} \\
\phi_7(\xi, \eta) &= \frac{(1-\xi^2)\eta(\eta+1)}{2} & \phi_8(\xi, \eta) &= \frac{\xi(\xi-1)(1-\eta^2)}{2} \\
\phi_9(\xi, \eta) &= (1-\xi^2)(1-\eta^2) & &
\end{aligned} \tag{82}$$

Dentro de cada elemento, o campo de pressão é interpolado pelas funções base lineares descontínuas $\{\chi_1, \chi_2, \chi_3\}$ da seguinte forma:

$$\tilde{p} = \sum_{j=1}^3 P_j(t) \chi_j(\xi, \eta) \tag{83}$$

$$\chi_1(\xi, \eta) = 1 \quad \chi_2(\xi, \eta) = \eta \quad \chi_3(\xi, \eta) = \xi \tag{84}$$

Assim, P_1 é a pressão no nó central do elemento, P_2 é a variação da pressão na direção de η e P_3 é a variação de pressão na direção de ξ .

Desta forma, cada elemento possui 39 incógnitas ou graus de liberdade.

$$U_i, V_i, X_i, Y_i, P_j \quad i = 1 \text{ a } 9 \quad \text{e} \quad j = 1 \text{ a } 3 \tag{85}$$

No método de Garlekin, as funções peso são iguais às funções base usadas para aproximar os campos desconhecidos.

A substituição das aproximações dos campos desconhecidos transforma o sistema de equações diferenciais parciais não lineares num sistema de equações diferenciais ordinárias não lineares nas variáveis U_i, V_i, X_i, Y_i, P_j .

Por exemplo, o resíduo ponderado do componente x da equação da conservação da quantidade de movimento R_i^{mx} é dado pela seguinte equação:

$$\begin{aligned}
R_i^{mx} = & \int_{\Omega_0} \rho \phi_i \left[\left(\sum_{j=1}^9 U_j^0 \phi_j \right) - \left(\sum_{j=1}^9 X_j^0 \phi_j \right) \left(\sum_{m=1}^9 U_m \frac{\partial \phi_m}{\partial x} \right) - \left(\sum_{j=1}^9 Y_j^0 \phi_j \right) \left(\sum_{m=1}^9 U_m \frac{\partial \phi_m}{\partial y} \right) \right] J d\Omega_0 + \\
& + \int_{\Omega_0} \rho \phi_i \left[\left(\sum_{j=1}^9 U_j \phi_j \right) \left(\sum_{m=1}^9 U_m \frac{\partial \phi_m}{\partial x} \right) + \left(\sum_{j=1}^9 V_j \phi_j \right) \left(\sum_{m=1}^9 U_m \frac{\partial \phi_m}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \left[- \left(\sum_{j=1}^3 P_j \chi_j \right) + 2\mu \left(\sum_{j=1}^9 U_j \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \right) \right] + \\
& + \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \left\{ \mu \left[\left(\sum_{j=1}^9 U_j \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \right) + \left(\sum_{j=1}^9 V_j \frac{\partial \phi_j}{\partial x} \right) \right] \right\} J d\Omega_0 - \int_{\Gamma_0} f_x \phi_i \frac{d\Gamma}{d\Gamma_0} d\Gamma_0
\end{aligned} \tag{86}$$

A aproximação para as derivadas temporais da velocidade e da posição nodal são feitas por diferenças finitas para trás.

$$\overset{0}{U} \equiv \frac{U_{n+1} - U_n}{t_{n+1} - t_n} = f(U_{n+1}, t_{n+1}); \tag{87}$$

$$\overset{0}{V} \equiv \frac{V_{n+1} - V_n}{t_{n+1} - t_n} = f(V_{n+1}, t_{n+1}); \tag{88}$$

$$\overset{0}{X} \equiv \frac{X_{n+1} - X_n}{t_{n+1} - t_n} = f(X_{n+1}, t_{n+1}); \tag{89}$$

$$\overset{0}{Y} \equiv \frac{Y_{n+1} - Y_n}{t_{n+1} - t_n} = f(Y_{n+1}, t_{n+1}); \tag{90}$$

onde $n+1$ é o instante de tempo atual e n é o instante de tempo anterior.

A substituição das aproximações das derivadas temporais no sistema de equações diferenciais ordinárias não lineares o transforma em um sistema de equações algébricas não lineares nas variáveis $U_{n+1}, V_{n+1}, X_{n+1}, Y_{n+1}, P_{n+1}$.

O método de Newton é uma boa opção para resolução de sistemas de equações algébricas não lineares.

Para aplicação do método de Newton, é necessário calcular a matriz Jacobiana dos resíduos, $J_{ij} = \frac{\partial R_i}{\partial C_j}$, onde C_j são as incógnitas do problema. Em

linguagem matricial, é necessário resolver o seguinte sistema linear a cada passo do método de Newton.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{R}_{mx}}{\partial \mathbf{U}} & \frac{\partial \mathbf{R}_{mx}}{\partial \mathbf{V}} & \frac{\partial \mathbf{R}_{mx}}{\partial \mathbf{P}} & \frac{\partial \mathbf{R}_{mx}}{\partial \mathbf{X}} & \frac{\partial \mathbf{R}_{mx}}{\partial \mathbf{Y}} \\ \frac{\partial \mathbf{R}_{my}}{\partial \mathbf{U}} & \frac{\partial \mathbf{R}_{my}}{\partial \mathbf{V}} & \frac{\partial \mathbf{R}_{my}}{\partial \mathbf{P}} & \frac{\partial \mathbf{R}_{my}}{\partial \mathbf{X}} & \frac{\partial \mathbf{R}_{my}}{\partial \mathbf{Y}} \\ \frac{\partial \mathbf{R}_c}{\partial \mathbf{U}} & \frac{\partial \mathbf{R}_c}{\partial \mathbf{V}} & \frac{\partial \mathbf{R}_c}{\partial \mathbf{P}} & \frac{\partial \mathbf{R}_c}{\partial \mathbf{X}} & \frac{\partial \mathbf{R}_c}{\partial \mathbf{Y}} \\ \frac{\partial \mathbf{R}_\xi}{\partial \mathbf{U}} & \frac{\partial \mathbf{R}_\xi}{\partial \mathbf{V}} & \frac{\partial \mathbf{R}_\xi}{\partial \mathbf{P}} & \frac{\partial \mathbf{R}_\xi}{\partial \mathbf{X}} & \frac{\partial \mathbf{R}_\xi}{\partial \mathbf{Y}} \\ \frac{\partial \mathbf{R}_\eta}{\partial \mathbf{U}} & \frac{\partial \mathbf{R}_\eta}{\partial \mathbf{V}} & \frac{\partial \mathbf{R}_\eta}{\partial \mathbf{P}} & \frac{\partial \mathbf{R}_\eta}{\partial \mathbf{X}} & \frac{\partial \mathbf{R}_\eta}{\partial \mathbf{Y}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{U} \\ \Delta \mathbf{V} \\ \Delta \mathbf{P} \\ \Delta \mathbf{X} \\ \Delta \mathbf{Y} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{mx} \\ \mathbf{R}_{my} \\ \mathbf{R}_c \\ \mathbf{R}_\xi \\ \mathbf{R}_\eta \end{bmatrix} \quad (91)$$

onde: $\mathbf{R}_{mx} \equiv R_i^{mx}$; $\mathbf{R}_{my} \equiv R_i^{my}$; $\mathbf{R}_c \equiv R_i^c$; $\mathbf{R}_\xi \equiv R_i^\xi$; $\mathbf{R}_\eta \equiv R_i^\eta$; $\mathbf{U} \equiv U_{n+1}^i$;
 $\mathbf{V} \equiv V_{n+1}^i$; $\mathbf{P} \equiv P_{n+1}^j$; $\mathbf{X} \equiv X_{n+1}^i$; $\mathbf{Y} \equiv Y_{n+1}^i$.

Na prática, a matriz Jacobiana global e o vetor resíduo global, conforme representados acima, são montados através de um processo no qual a matriz Jacobiana e o vetor resíduo são calculados para cada elemento da malha, e então os respectivos elementos da matriz/vetor são copiados na sua posição respectiva da matriz/vetor global.

A matriz Jacobiana para cada elemento da malha do problema em questão é uma matriz 39 x 39, enquanto o vetor resíduo elementar é um vetor 39 x 1.

O Jacobiano elementar da equação do resíduo do componente x da equação da quantidade de movimento associada ao grau de liberdade i , R_i^{mx} , em relação à incógnita U_{n+1} associada ao grau de liberdade j , é dado por:

$$\begin{aligned} J_{ij}^{mx} &\equiv \frac{1}{\Delta t} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \rho \phi_i \left[\phi_j - \left(\sum_{j=1}^9 (X_{n+1}^j - X_n^j) X_j \phi_j \right) \frac{\partial \phi_j}{\partial x} - \left(\sum_{j=1}^9 (Y_{n+1}^j - Y_n^j) \phi_j \right) \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \right] J d\xi d\eta + \\ &+ \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \rho \phi_i \left[\phi_j \left(\sum_{m=1}^9 U_{n+1}^m \frac{\partial \phi_m}{\partial x} \right) + \left(\sum_{j=1}^9 U_{n+1}^j \phi_j \right) \frac{\partial \phi_j}{\partial x} + \left(\sum_{j=1}^9 V_j \phi_j \right) \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \right] + \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \left[2\mu \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \right] + \\ &+ \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \left[\mu \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \right] J d\xi d\eta \end{aligned} \quad (92)$$

É necessário uma aproximação inicial para o valor das incógnitas $U_{n+1}, V_{n+1}, X_{n+1}, Y_{n+1}, P_{n+1}$, para que a matriz Jacobiana elementar e o vetor resíduo elementar sejam calculados. O valor das integrais é calculado por quadratura Gaussiana.

Calculados os valores dos resíduos e da matriz Jacobiana elementar, deve-se montar o vetor resíduo global e a matriz Jacobiana global para a solução do sistema linear resultante.

$$J_{ij}^n \Delta C_{n+1}^{j+1} = -R_i^n$$

$$C_{n+1}^{j+1} = C_{n+1}^j + \Delta C_{n+1}^{j+1} \quad (93)$$

A atualização do vetor solução ocorre até que a norma do vetor resíduo seja menor que 10^{-6} .

O tamanho do sistema linear a ser resolvido está ligado ao número de elementos da malha escolhida, que será abordado no próximo capítulo.

O espaço em memória necessário para resolução deste sistema geralmente é da ordem de centenas de Mbytes.

2.3 Implementação das condições de contorno da equação da conservação da quantidade de movimento

As condições de contorno da equação da conservação da quantidade de movimento e da malha são impostas no vetor resíduo elementar dos nós que pertencem ao contorno.

Conforme visto na seção anterior, a equação do resíduo para o componente x da velocidade em cada nó do elemento da malha é dado por:

$$\begin{aligned}
R_i^{mx} = & \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \rho \phi_i \left[\left(\sum_{j=1}^9 U_j^0 \phi_j \right) - \left(\sum_{j=1}^9 X_j^0 \phi_j \right) \left(\sum_{m=1}^9 U_m \frac{\partial \phi_m}{\partial x} \right) - \left(\sum_{j=1}^9 Y_j^0 \phi_j \right) \left(\sum_{m=1}^9 U_m \frac{\partial \phi_m}{\partial y} \right) \right] J d\xi d\eta + \\
& + \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \rho \phi_i \left[\left(\sum_{j=1}^9 U_j \phi_j \right) \left(\sum_{m=1}^9 U_m \frac{\partial \phi_m}{\partial x} \right) + \left(\sum_{j=1}^9 V_j \phi_j \right) \left(\sum_{m=1}^9 U_m \frac{\partial \phi_m}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \left[- \left(\sum_{j=1}^3 P_j \chi_j \right) + 2\mu \left(\sum_{j=1}^9 U_j \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \right) \right] + \\
& + \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \left\{ \mu \left[\left(\sum_{j=1}^9 U_j \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \right) + \left(\sum_{j=1}^9 V_j \frac{\partial \phi_j}{\partial x} \right) \right] \right\} J d\xi d\eta - \int_{\Gamma_0} f_x \phi_i \frac{d\Gamma}{d\Gamma_0} d\Gamma_0 \quad (94)
\end{aligned}$$

Obviamente, não há necessidade de se preocupar com as condições de contorno para nós internos ao domínio. O valor do resíduo elementar é calculado normalmente desconsiderando-se a integral de linha $\int_{\Gamma_0} f_x \phi_i \frac{d\Gamma}{d\Gamma_0} d\Gamma_0$.

Para nós pertencentes ao contorno, as duas condições de contorno aplicáveis à equação de conservação da quantidade de movimento são:

- a) Essenciais ou de Dirichlet: quando a velocidade é imposta no contorno em questão.
- b) Naturais ou de Newman: quando a força é conhecida no contorno.

As condições de contorno de Dirichlet são impostas substituindo-se o resíduo ponderado elementar correspondente ao grau de liberdade com velocidade conhecida por:

$$R_i^{mx} = U_{n+1}^i - U^*, \quad (95)$$

onde U^* é o valor do componente x da velocidade no nó i pertencente ao contorno. A linha da matriz jacobiana também deve ser alterada. A linha da matriz correspondente a este resíduo é zerada e a entrada na diagonal recebe valor igual a um.

Para condições de contorno de Newman, é necessário considerar o valor da integral de linha $\int_{\Gamma_0} f_x \phi_i \frac{d\Gamma}{d\Gamma_0} d\Gamma_0$ no resíduo da equação da conservação da quantidade de movimento.

O contorno Γ_0 é uma linha de ξ constante ou η constante. Supondo-se que Γ_0 é uma linha de ξ constante, o cálculo da integral de linha acima é dado por:

$$\int_{-1}^1 f_x \phi_i \frac{d\Gamma}{d\eta} d\eta \quad (96)$$

No caso da superfície livre do problema em questão, o componente x da força na superfície é dada por:

$$f_x = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{T})_x = \frac{1}{Ca} \frac{dt_x}{ds} - n_x P_{amb} \quad (43)$$

$$\frac{d\Gamma}{d\eta} = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2} \quad (97)$$

$$\frac{\partial x}{\partial \eta} = \sum_{k=1}^9 X_{n+1}^k \frac{\partial \phi_k}{\partial \eta} \quad (98)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \eta} = \sum_{k=1}^9 Y_{n+1}^k \frac{\partial \phi_k}{\partial \eta} \quad (99)$$

O valor da integral de linha acima é determinado por quadratura Gaussiana a partir da aproximação inicial do valor das variáveis X_{n+1}^k e Y_{n+1}^k .

2.4

Implementação das condições de contorno da equação de geração da malha

O contorno de um domínio físico bidimensional é uma curva $f(x, y) = 0$ mapeada a partir do contorno do domínio de referência.

A posição de um nó i pertencente ao contorno do domínio físico é definida pelos resíduos ponderados R_i^ξ e R_i^η .

Supondo que o contorno do domínio físico corresponda à linha de $\xi = 1$ nos elementos da malha que pertencem ao contorno do domínio de referência, conforme fig. (19), os resíduos R_i^ξ relativos aos nós que estão sobre o contorno devem ser substituídos pela curva $f(x(\eta), y(\eta)) = 0$ que representa o contorno (no caso de contornos fixos), ou pela condição de contorno cinemática, eq. (101), no caso de superfície livre.

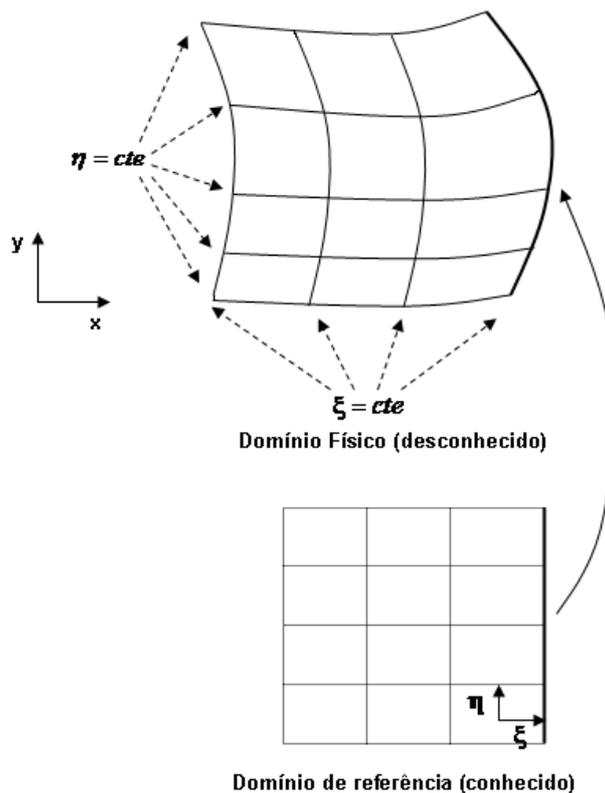


Figura 19 – Mapeamento do contorno do domínio

Existem três possibilidades para determinação do resíduo R_i^η :

(1) Localização dos nós em um contorno definido.

Esta condição de contorno pode ser aplicada a todas as situações exceto em superfícies livres.

A idéia é simplesmente fixar o nó na curva $f(x(\eta), y(\eta)) = 0$ que representa o contorno. Como o contorno é representado por $\xi = 1$ dentro do respectivo elemento da malha do domínio de referência, basta definir a coordenada η do nó

para que a coordenada respectiva no domínio físico esteja definida por $(x(\eta), y(\eta))$.

Então o resíduo R_i^η é substituído por:

$$R_i^\eta = f(x(\eta), y(\eta)) = 0 \quad (100)$$

No caso onde o contorno correspondente a $\xi = 1$ é uma superfície livre, os resíduos R_i^ξ dos nós sobre a superfície livre devem ser substituídos pela condição de contorno cinemática dada por:

$$R_k^i = \int_{\Gamma} \left\{ - \frac{\frac{\partial y}{\partial \eta}}{\sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2}} u + \frac{\frac{\partial x}{\partial \eta}}{\sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2}} v \right\} \phi d\eta \quad (101)$$

Estas equações definem uma das coordenadas. A outra coordenada é definida a partir de mais uma condição. Duas possibilidades são discutidas a seguir.

(2) Definição do ângulo formado entre o contorno e as linhas de $\eta = cte$.

O contorno corresponde a uma linha de $\xi = 1$, portanto o ângulo a ser definido é representado por:

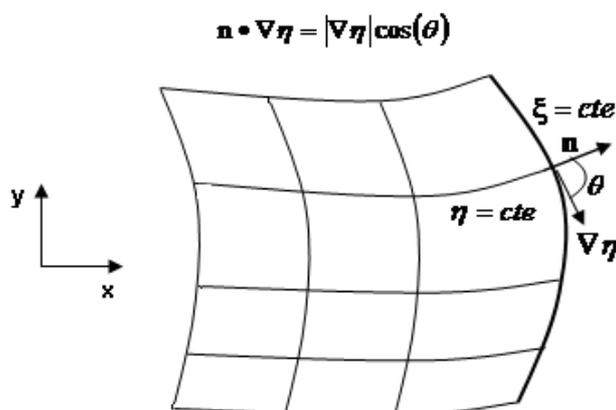


Figura 20 – Distribuição de nós em contorno.

onde \mathbf{n} é o vetor unitário normal ao contorno e θ é o ângulo entre a linha de $\eta = cte$ e o contorno.

O ângulo entre linhas de $\eta = cte$ e o contorno é imposto pela adição da parcela $\int_{-1}^1 D_\eta \phi_i \cos \theta d\eta$ à equação do resíduo R_i^η .

Se a idéia é obter uma malha ortogonal a $\xi = 1$ nos nós do contorno, basta desconsiderar a integral acima, pois $\cos 90^\circ = 0$.

(3) Distribuição dos nós em um contorno.

A distribuição dos nós ao longo do contorno pode seguir uma função $s = f(\eta)$. Neste caso a equação do resíduo R_i^η deve ser substituída por:

$$R_i^\eta \equiv \int_{-1}^1 \frac{1}{D(\eta)} \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 \right] \frac{\partial \phi_i}{\partial \eta} d\eta \quad (102)$$

onde $D(\eta)$ determina o espaçamento entre as linhas $\eta = cte$.

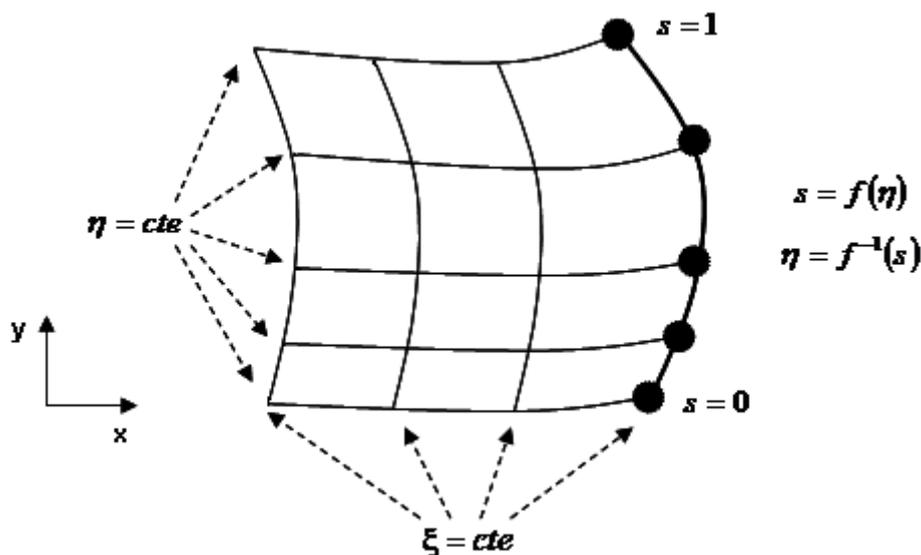


Figura 21 – Distribuição de nós em contorno