7 Referências Bibliográficas

1. **ADVANCED REAL TIME TRACKING GmbH**, http://www.ar-tracking.de/, Julho, 2009.
2. BAZARAA M.S., SHERALI D. H., SHETTY C. M. **Nonlinear Programming Theory and Algorithms**. Second Edition. John Wiley & Sons, Inc. ISBN 0-471-55793-5.
3. BOGGS P.T., BYRD R.H., ROGERS J.E. AND SCHNABL R.B., **User's reference guide for ODRPACK**. Software for weighted orthogonal distance regression, version 2.01, National Institute of Standards and Technology, Gaithersburg, USA (1992).
4. BORGHESE A. and CERVERI P., **Calibrating a video camera pair with a rigid bar**. Pattern Recognition, 2000.
5. BOUGUET J. Y., **Camera Calibration Toolbox for Matlab**, http://www.vision.caltech.edu/bouguetj/calib_doc/htmls/example5.html, Julho, 2009.
6. DEVERNAY F., **C/C++ Minpack**, http://devernay.free.fr/hacks/cminpack.html, Julho 2009.
7. DORFMÜLLER, K., WIRTH, H., **Real-Time Hand and Head Tracking for Virtual Environments Using Infrared Beacons**, Proceedings of the International Workshop on Modelling and Motion Capture Techniques for Virtual Environments, pp. 113 – 127, London, UK, 1998.
8. DORFMÜLLER-ULHAAS, K., **Optical Tracking - From User Motion To 3D Interaction**, Tese de Doutorado, Vienna University of Technology, Institut 186 für Computergraphik und Algorithmen, Novembro, 2002.
9. FISCHLER, M. A., BOLLES, R. C. **Random Sample Consensus: A Paradigm for Model Fitting with Applications to Image**

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0510968/CA

Analysis and Automated Cartography. Comm. of the ACM, Vol 24, pp 381-395, 1981.

10. HARTLEY R. and ZISSERMAN A. **Multiple View Geometry in Computer Vision**. Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
11. HEIKKILA J., SILVEN O., **A Four-Step Camera Calibration Procedure with Implicit Image Correction**. In Proc. of IEEE Computer Vision and Pattern Recognition, pp. 1106-1112, 1997.
12. **Intel Open Source Computer Vision Library**, Intel Research, http://www.intel.com/technology/computing/opencv/index.htm, Julho 2009.
13. **IOTRACKER ADVANCED OPTICAL MOTION**, http://www.iotracker.com/, June 2009.
14. KURILLO G., Li Z., BAJCSY R., **Wide-Area External Multi-Camera Calibration Using Vision Graphs and Virtual Calibration Object,** In Proceedings of 2nd ACM/IEEE International Conference on Distributed Smart Cameras (ICDSC '08), Stanford, CA, 2008.
15. LOAIZA M., RAPOSO B. A., GATTASS M., **A Novel Optical Tracking Algorithm for Point-Based Projective Invariant Marker Patterns**, 3rd International Symposium on Visual Computing – ISVC 2007, Lake Tahoe, Nevada/California, EUA. Advances in Visual Computing - Lecture Notes in Computer Science. Vol. 4841, pp. 160-169. Springer-Verlag, 2007.
16. LOAIZA, M. E., RAPOSO, A. B., GATTASS, M. **A Novel Optical Tracking Algorithm for Point-Based Projective Invariant Marker Patterns**. In: C. J. P. de Lucena (ed.), Monografias em Ciência da Computação, n.31/07. Departamento de Informática, PUC-Rio, Rio de Janeiro, 2007 (ISSN 0103-9741)
17. LOAIZA, M. E. F.. **Implementação de um Dispositivo de Rastreamento Óptico com 6 Graus de Liberdade para Interação com Aplicações de Realidade Virtual**, Dissertação de Mestrado, DI, PUC / RJ, Abril, 2005.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0510968/CA

18. MA, Y., SOATTO, S., KOSECKÁ, J., SASTRY, S.S. **An Invitation to 3-D Vision: From Images to Geometric Models**, Springer-Verlag, 2005.
19. MARQUES C.C.C., **Um Sistema de Calibração de Câmera**, Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Universidade Federal de Alagoas, AL, Fevereiro, 2007.
20. MEER P., LENZ R. AND RAMAKRISHNA S. **Efficient Invariant Representations**. International Journal of Computer Vision 26, 137–152, 1998.
21. MEER P., LENZ R. AND RAMAKRISHNA S. **Correspondence of Coplanar Features through P2-Invariant Representations**. In Applications of Invariance in Computer Vision, Springer, Heidelberg, 473– 492, 1993.
22. MITCHELSON J., HILTON A., **Wand-based multiple camera studio calibration**. CVSSP Technical Report VSSP-TR-2/2003.
23. MURRAY, N., GOULERMAS, Y., FERNANDO, T. **Visual Tracking for a Virtual Environment**, HCI International, Vol. 1, pp. 1198-1202, 2003.
24. NELDER J. A. and MEAD R., **A simplex method for function minimization**. Computer Journal, vol. 7:308-313, 1965.
25. OLSEN B.D. and HOOVER A., **Calibrating a camera network using a domino grid**, Pattern Recognition Journal, Vol. 34, 1105-1117, 2001.
26. **Optical Motion Capture Solution - OptiTrack**, http://www.naturalpoint.com/optitrack/, Junho 2009.
27. PRESS W.H., TEUKOLSKY S.A., VETTERLING W.T., AND FLANNERY B.P. **Numerical Recipes in C**. The Art of Scientific Computing. Cambridge University Press, Cambridge, 2 edition, 1999.
28. PINTARIC T. and KAUFMANN H., **Affordable Infrared-Optical Pose Tracking for Virtual and Augmented Reality**, IEEE VR Workshop on Trends and Issues in Tracking for Virtual Environments, Charlotte, NC (USA), 2007.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0510968/CA

29. RIBO, M., PINZ, A., FUHRMANN, A.L., **A New Optical Tracking System for Virtual and Augmented Reality Applications**, IEEE Instrumentation and Measurement Technology Conference, Budapest, Hungary, Maio, 2001.
30. ROTHWELL, C., FAUGERAS, O., CSURKA, G., **A Comparison of Projective Reconstruction Methods for Pairs of Views**, Computer Vision and Image Understanding, vol. 68, No 1, pp. 37-58, Outubro, 1997
31. SALVI, J., ARMANGUE, X.,PAGES, J., **A Survey Addressing The Fundamental Matrix Estimation Problem**, IEEE International Conference on Image Processing, Thessaloniki, Greece ,Vol. 2, No 8, pp. 209-212, Outubro, 2001.
32. SVOBODA T., MARTINEC D. and PAJDLA T., **A Convenient Multi-Camera Self-Calibration for Virtual Environments**, PRESENCE: Teleoperators and Virtual Environments, MIT Press, August 2005.
33. TEIXEIRA, L., LOAIZA, M., RAPOSO, A. B., GATTASS, M. **Augmented Reality Using Projective Invariant Patterns**. 4th International Symposium on Visual Computing – ISVC 2008 (Advances in Visual Computing - Lecture Notes in Computer Science, vol. 5358), Las Vegas, Nevada, EUA., p.520-529. Springer-Verlag, 2008.
34. TORR, P.H.S. , MURRAY, D.W., **The Development and Comparison of Robust Methods for Estimating the Fundamental Matrix**, International Journal Computer Vision , pp.1-33, July 1996.
35. TSAI, R.Y. **An Efficient and Accurate Camera Calibration Technique for 3D Machine Vision**, CVPR'86 Proceeding, IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, FL, Junho 22-26, pp. 364-373, 1986.
36. TSAI, R.Y., **Metrology Using Off-the-Shelf TV Cameras and Lenses**, IEEE Journal of Robotics and Automation, Vol. 3, No. 4, pp. 323-344, August 1987.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0510968/CA

37. UEMATSU Y., TESHIMA T., SAITO H., HONGHUA C., **D-Calib: Calibration Software for Multiple Cameras System,** 14th International Conference on Image Analysis and Processing (ICIAP 2007), 285-290, 2007.
38. VELHO L., CARVALHO P., SOARES E., SA A., MONTENEGRO A., PEIXOTO A., and RIVERA L. A. **Fotografia 3D**. 25 Colóquio Brasileiro de Matemática - IMPA, Rio de Janeiro, 2005.
39. **Vicon Motion Systems**, http://www.vicon.com/. Julho 2009.
40. ZHANG Z., **A Flexible New Technique For Camera Calibration**, IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 22(11):1330-1334, 2000.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0510968/CA

8 Apêndice A: Modelo de câmera

Um modelo de câmera é uma forma conceitual de definir e detalhar como funciona internamente um dispositivo de captura de imagem como, por exemplo, uma câmera fotográfica ou de vídeo. O objetivo do modelo é ajudar a compreender o processo que leva um ponto tridimensional do espaço físico enxergado por uma câmera para um ponto bidimensional posicionado dentro da imagem capturada desse mesmo espaço físico visto pela câmera.

Uma forma de modelar esse processo é usar um modelo básico de câmera conhecido como câmera Pinhole (Figura A1). O modelo de câmera Pinhole é definido como uma transformação em perspectiva composta por um conjunto de transformações entre sistemas distintos de coordenadas que permitem modelar a correspondência entre pontos do espaço e pontos da imagem. Primeiramente, definiremos esses sistemas de coordenadas tal como apresentados em [38] e depois descreveremos as transformações correspondentes entre esses sistemas.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0510968/CA

8.1.1. Sistemas de coordenadas

Os sistemas de coordenadas considerados no processo de modelagem de uma câmera são descritos a seguir:

1. **Sistema de coordenadas do mundo** (SCM) é um sistema tridimensional estabelecido para modelar o nosso cenário real ou cenário físico enxergado pela câmera. É definido num sistema de unidade de medida métrico e é mostrado na Figura A1 como o sistema de coordenadas definido pelos eixos (Xw, Yw, Zw).
2. **Sistema de coordenadas da câmera** (SCC) é um sistema tridimensional cuja origem fica definida pelo centro óptico da câmera. Os eixos X e Y são definidos de modo a serem paralelos às bordas da imagem formada sobre o plano da imagem. A distância entre o centro óptico da câmera e o plano da imagem é chamada

distância focal. Esse sistema de coordenadas está definido pelos eixos (Xc, Yc, Zc) na Figura A1.

3. **Sistema de coordenadas da imagem** (SCI) é um sistema bidimensional definido sobre o plano da imagem ou plano de projeção, cuja origem fica determinada pela projeção da origem do sistema da câmera sobre o plano de imagem. Esse sistema de coordenadas está definido pelos eixos (u', v') na Figura A1.
4. **Sistema de coordenadas em pixel** (SCP) é um sistema bidimensional com coordenadas são expressadas em pixels. Esse sistema permite definir a posição de um ponto na imagem com relação à grade de pixels do sensor óptico da câmera. A origem desse sistema costuma ser definida no canto superior ou inferior esquerdo da imagem. Esse sistema de coordenadas está definido pelos eixos (u, v) na Figura A1.

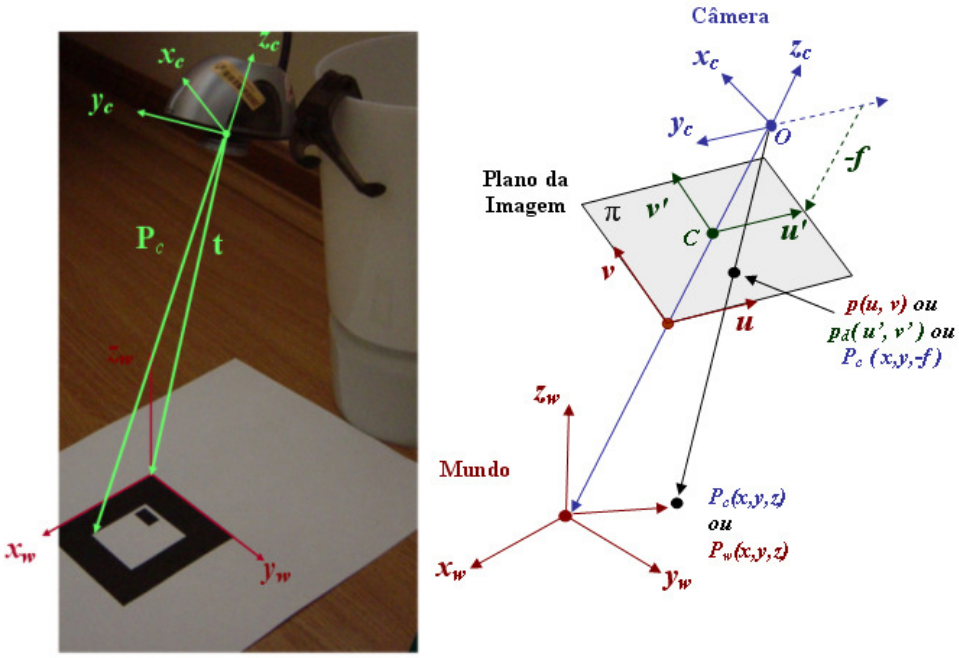

Figura A1: Modelo de captura da câmera Pinhole [17].

8.1.2. Transformações

As transformações do processo de imageamento de um ponto no mundo através dos diferentes sistemas de coordenadas expostas na seção anterior são descritas a seguir:

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0510968/CA

- A primeira transformação permite expressar as coordenadas de um ponto no mundo (SCM) no sistema de coordenadas da câmera (SCC). Essa mudança de coordenadas é definida por uma transformação que inclui uma matriz de rotação e um vetor de translação.
- A segunda transformação permite expressar a projeção em perspectiva de um ponto definido em coordenadas da câmera (SCC) para uma posição 2D sobre o plano da imagem (SCI).
- A terceira transformação permite expressar um ponto definido no plano da imagem (SCI) em uma posição na superfície de células fotosensíveis que o sensor óptico da câmera possui (SCP).
- Uma última transformação que pode ser considerada no processo de imageamento é a correção da distorção da lente. No modelo de câmera Pinhole, essá distorção não é considerada porque o componente responsável, ou seja a lente, só está presente nas câmera reais. O objetivo da lente é controlar a incidência dos raios de luz sobre o sensor óptico da câmera, mas nesse processo a lente gera um tipo de distorção que muda a posição de um ponto que foi projetado sobre o plano da imagem, afetando especialmente a transformação entre o SCC e o SCI.

Para moldar cada uma das transformações intermediárias definidas entre o sistema de coordenadas do mundo, da câmera, do plano da imagem e do sensor óptico, é necessário definir alguns parâmetros que nos ajudem a modelar teoricamente cada uma dessas transformações. Explicaremos a seguir estes três tipos de parâmetros:

1. Parâmetros extrínsecos.
2. Parâmetros intrínsecos.
3. Coeficientes de distorção da lente.

8.1.3. Parâmetros extrínsecos

Os parâmetros extrínsecos permitem modelar a transformação rígida de uma posição 3D expressa no SCM para uma outra posição 3D correspondente expressa no SCC.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0510968/CA

Esse tipo de parâmetros são definido por dois componentes:

- Uma matriz de rotação, que permite rodar o sistema de eixos base do SCM para deixá-los alinhados com os eixos base do SCC.
- Um vetor de translação, que permite trasladar o centro do SCM para a mesma posição do centro do SCC.

Esses parâmetros e sua aplicação no processo de transformação entre coordenadas do sistema do mundo e da câmera são modelados matematicamente na equação 1a, e exemplificados visualmente na Figura A2.

$$P_c \begin{bmatrix} X_c \\ Y_c \\ Z_c \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} P_W \begin{bmatrix} X_W \\ Y_W \\ Z_W \\ 1 \end{bmatrix} \tag{1a}$$

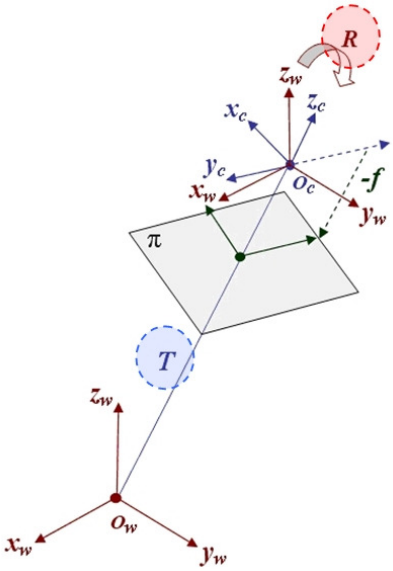

Figura A2: Parâmetros extrínsecos na modelagem da transformação entre os SCM para o SCC [17].

8.1.4. Parâmetros intrínsecos

Este tipo de parâmetro é o utilizado para representar as características internas da câmera, como distância focal f e centro da imagem O (Figura A3) . Os parâmetros intrínsecos modelam a projeção de pontos 3D expressos no SCC para pontos correspondentes 2D posicionados sobre o plano da imagem definido no SCI (Figura A3).

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0510968/CA

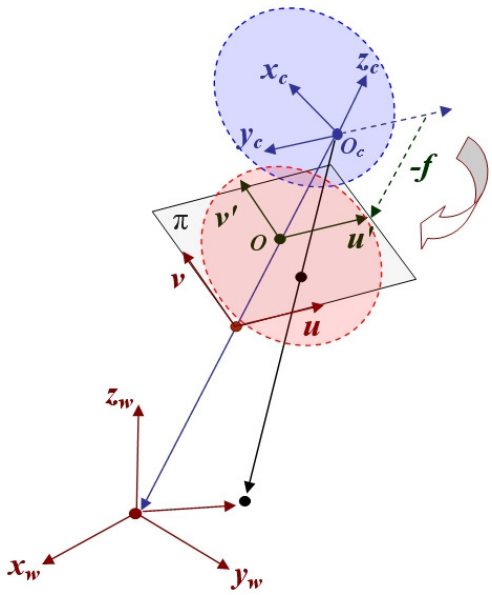

Figura A3: Parâmetros intrínsecos na modelagem da transformação entre o SCC para o SCI [17].

Um ponto p_c expressado no SCC gera um raio que sai da origem do SCC e chega a esse ponto, e no trajeto o raio intercepta o plano da imagem. O ponto de interseção *p'* representa a projeção do ponto 3D no SCC sobre o plano de imagem 2D expresso no SCI (Figura A4).

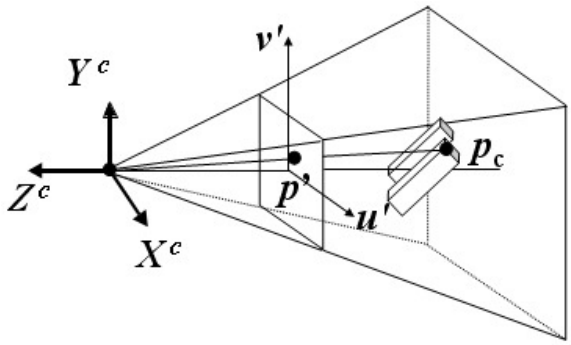

Figura A4: Projeção de um ponto *Pc* no SCC para um ponto *P'* no SCI [17].

A projeção de um ponto no SCC para o SCI é modelado matematicamente nas equações 2a e 3a.

$$p'\begin{bmatrix} u' \\ v' \\ 1 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} -f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} P_c \begin{pmatrix} X_c \\ Y_c \\ Z_c \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2a}$$

$$p'\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = -f \begin{pmatrix} X_c / Z_c \\ Y_c / Z_c \end{pmatrix} \tag{3a}$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0510968/CA

A transformação projetiva descrita na equação 2a é não inversível, e demonstra que cada ponto do espaço corresponde a um único ponto na imagem, mas um ponto na imagem pode corresponder a uma infinidade de pontos do espaço. Um ponto *(u',v')* na imagem é a projeção de todos os pontos espaço no SCC da forma $\lambda(u',v',-f)$.

Após ter projetado um ponto sobre o plano da imagem, podemos também descobrir a posição do mesmo na grade de pixels do sensor óptico da câmera. Isso é feito fazendo uma transformação entre o SCI e o SCP. Quando um raio luminoso atinge o plano de formação da imagem, ele é registrado pelo sensor óptico na câmera. Esse sensor é composto por uma matriz retangular de células fotossensíveis, mas algumas imperfeições na grade de células podem ocorrer:

- O espaçamento entre linhas pode ser diferente do espaçamento entre colunas.
- As colunas podem não ser dispostas perpendicularmente às linhas (devido a imperfeições geométricas de construção ou devido ao processo de aquisição dos valores dos sensores).

Finalmente, nós precisamos transladar a origem do SCI usualmente posicionada no centro da imagem, para a origem do SCP, que costuma se localizar num dos cantos superior ou inferior esquerdo da imagem. A transformação do SCI para SCP pode ser definida pela equação 4a.

$$p\begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & \tau & u_c \\ 0 & s_y & v_c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} P' \begin{pmatrix} u' \\ v' \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (4a)$$

Os coeficientes mostrados na matriz acima junto com a distância focal definem os parâmetros intrínsecos da câmera. Cada um dos coeficientes da matriz acima será descrito a seguir:

- s_x e s_y representam o número de pixels por unidade de comprimento nas direções horizontal e vertical respectivamente. Na maior parte das câmeras, idealmente s_x e s_y são iguais, ou seja, os pixels são quadrados.
- u_c e v_c fornecem a posição, em pixels, da projeção ortogonal da origem do SCC sobre o plano da imagem. Essa posição na maioria

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0510968/CA

das câmeras é definida pelo valor referente à metade das dimensões da imagem (largura/2, altura/2).

- τ é a tangente do ângulo que as colunas de pixels formam com a perpendicular às linhas. Na maior parte das câmeras, idealmente as colunas são perpendiculares às linhas, ou seja, $\tau = 0$.

A figura A5 exemplifica essa transformação entre o SCI e o SCP, e as equações 5a e 6a definem a transformação que modela a projeção de um ponto no SCC para um ponto no SCP, nas quais são utilizados todos os parâmetros intrínsecos antes descritos.

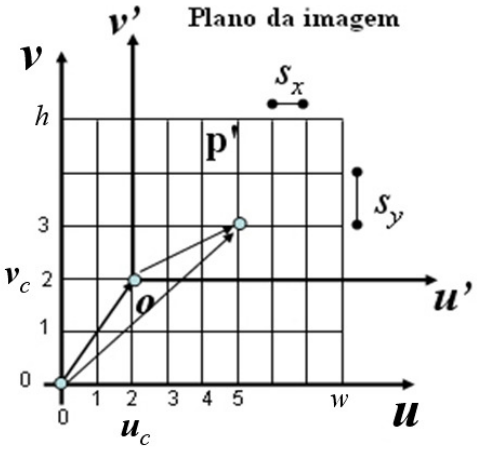

Figura A5:Transformação do SCI para o SCP [17].

$$p\begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} s_x & \tau & u_c \\ 0 & s_y & v_c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} P_c \begin{pmatrix} X_c \\ Y_c \\ Z_c \\ 1 \end{pmatrix} \tag{5a}$$

$$p\begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} f\,s_x & f\,\tau & u_c \\ 0 & f\,s_y & v_c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} P_C \begin{pmatrix} X_c \\ Y_c \\ Z_c \\ 1 \end{pmatrix} \tag{6a}$$

Finalmente, na equação 7a é definida a transformação que leva um ponto no SCM para sua projeção no SCP, o que é conseguido multiplicando as matrizes de transformação definidas pelos parâmetros intrínsecos e extrínsecos da câmera.

$$P\begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} f\,s_x & f\,\tau & u_c \\ 0 & f\,s_y & v_c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} P_W \begin{bmatrix} X_W \\ Y_W \\ Z_W \\ 1 \end{bmatrix} \tag{7a}$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0510968/CA

Como podemos observar, os parâmetros f, s_x e s_y aparecem na transformação da câmera como os produtos $f\,s_x$ e $f\,s_y$. Muitas vezes é difícil calcular os valores individuais de cada parâmetro, a menos que se tenha informação técnica dos valores s_x e s_y por parte do fabricante do sensor óptico da câmera. Por esse motivo é comum a matriz de parâmetros intrínsecos ser descrita como na equação 8a.

$$K = \begin{bmatrix} f\,s_x & f\,\tau & u_c \\ 0 & f\,s_y & v_c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_x & s & u_c \\ 0 & f_y & v_c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{8a}$$

Por fim, a multiplicação das matrizes que representam nossos parâmetros intrínsecos e extrínsecos define um novo tipo de matriz única chamada de matriz de projeção da câmera P , definida na equação 9a.

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} f_x & s & u_c \\ 0 & f_y & v_c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_W \\ Y_W \\ Z_W \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} f_x & s & u_c \\ 0 & f_y & v_c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} \cong P \begin{bmatrix} X_W \\ Y_W \\ Z_W \\ 1 \end{bmatrix} \tag{9a}$$

8.1.5.Coeficientes de distorção das lentes

Até agora, a descrição dos parâmetros usados para modelar a câmera real seguiu a definição dada pelo modelo de câmera ideal Pinhole, mas na realidade as câmeras fotográficas ou de captura de vídeo possuem mais um componente que deve ser considerado em nossa modelagem: a lente.

A lente é um equipamento usado no processo de captura óptica para controlar a incidência dos raios de luz sobre a área do sensor óptico. Controlando o grau de incidência, pode-se aumentar ou diminuir o campo de visão da câmera, mas nesse processo um tipo de distorção é inserido na imagem final vista pela câmera. Estes dois tipos de distorção visual produzidas sobre a imagem por causa das lentes tipificam bem este problema (Figura A6):

- A distorção de abaulamento (*Barrel*) está associada com as lentes grandes angulares (ou de zoom mínimo). Ela faz com que as imagens pareçam esféricas (curvadas para fora).

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0510968/CA

- Em oposição, a distorção de afunilamento (*Pincushion*) está associada com as lentes telescópicas (ou de zoom máximo) e fotos embaixo da água. As imagens parecem espremidas em torno do centro (distorcidas para dentro). O afunilamento é, muitas das vezes, menos notório que o abaulamento.

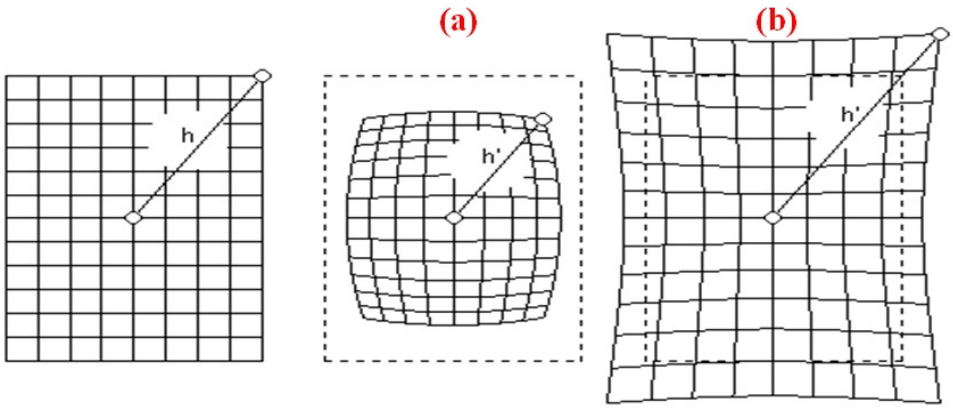

Figura A6: Distorção causada por distintos tipos de lente - (a) Barrel, (b) Pincushion.
(Fonte: http://toothwalker.org/optics/distortion.html)

É importante corrigir esse tipo de distorção especialmente na implementação de aplicações nas quais algum tipo de recuperação de medida será feita a partir das imagens capturadas.

Na fotogrametria, tenta-se modelar esse tipo de distorção com base em três tipos de componentes: distorção radial (*radial*), distorção de descentrada (*de-centering*) e distorção de prisma (*thin prism*). Nós consideramos nesta descrição só as duas primeiras.

Tanto a distorção radial como a descentrada são aproximadas por meio de funções polinomiais, que usam um conjunto de coeficientes definidos como $(k1,k2)$ e $(p1,p2)$ para modelar o desvio produzido pela distorção radial e descentrada respectivamente. As distorções afetam especificamente a transformação entre o SCC e o SCI, e é justamente sobre a posição 2D do ponto (u',v') projetado no plano da imagem que a distorção da lente é aplicada. Definiremos (u'_d , v'_d) como sendo igual ao ponto (u',v') , ou seja, o ponto distorcido que é capturado sobre o plano da imagem numa câmera real, e o ponto (u'_u,v'_u) como sendo o mesmo ponto, mas sem a distorção da lente.

As equações 10a, 11a, 12a descrevem essa correção da distorção que correlacionando um ponto distorcido (u'_d, v'_d) para um sem distorção definido por (u'_u, v'_u).

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0510968/CA

$$u'_u = u'_d * \left(1 + k1*r^2 + k2*r^4\right) + 2*p1*u'_d*v'_d + p2*\left(r^2 + 2*u'^{\,2}_d\right) \qquad (10a)$$

$$v'_u = v'_d * \left(1 + k1*r^2 + k2*r^4\right) + p1*\left(r^2 + 2*v'^{\,2}_d\right) + 2*p2*u'_d*v'_d \qquad (11a)$$

$$r^2 = u'^{\,2}_d + v'^{\,2}_d \qquad (12a)$$

A modelagem apresentada mostrou os diferentes sistemas de coordenadas, transformações e parâmetros a serem considerados no processo de imageamento de ponto no mundo para um ponto no plano da imagem na câmera. Essas informações serão de muita utilidade na descrição das seções seguintes, que definirão o processo de calibração de múltiplas câmeras simultaneamente.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0510968/CA

9 Apêndice B: Projetivas Invariantes

As características projetivas invariantes têm como base o estudo das propriedades da razão cruzada (*cross ratio*), a qual é definida pela razão cruzada entre as distâncias definidas por um conjunto de 4 pontos colineares. Foi baseado nesse estudo que alguns trabalhos na área de reconhecimento de padrões foram propostos. Esses trabalhos exploraram essas características como uma ferramenta para criar e reconhecer individualmente padrões de pontos definidos num formato específico. Alguns dos trabalhos mais importantes nessa linha foram desenvolvidos por Meer et al.[20][21] e como resultado foi a proposta de uma nova técnica conhecida como "P^2-invariant". Essa técnica foi testada no reconhecimento de padrões extraídos a partir de imagens aéreas de construções e campos agrícolas. As imagens aéreas têm pouca distorção por causa da distância na qual foram tomadas, o que permitiu obter bons resultados nos testes realizados. Porém, a pouca amostragem e má qualidade das imagens usadas para o cálculo do identificador "P^2-invariant" criou uma alta instabilidade no processo de reconhecimento dos padrões quando a variação entre as imagens usadas para cálculo do valor do identificador "P^2-invariant" e as de comparação era muito significativa.

Já no trabalho proposto por Loaiza et al.[15] essa mesma técnica foi testada em outro ambiente, onde se tinha total controle sobre: as imagens usadas para calcular o valor do identificador "P^2-Invariant", a definição e criação dos padrões a serem rastreados e os valores da distorção das lentes que são mais ressaltantes por conta da pouca distância de captura entre a câmera e os marcadores que compunham os padrões. Como resultado desse trabalho foi proposto um novo tipo de algoritmo baseado no valor "P^2-Invariant" que está composto por duas etapas: treinamento e reconhecimento. O trabalho desenvolvido em [15] provou que é possível criar um identificador único para padrões colineares de 4 pontos e padrões coplanares de 5 pontos baseado no valor do identificador "P^2-Invariant", tendo como procedimento chave uma robusta e bem distribuída amostragem de imagens dos padrões a serem usados para calculo do valor do identificador "P^2-

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0510968/CA

Invariant". Esse treinamento mostrou que por causa de ruídos na extração da posição 2D dos marcadores dos padrões na imagem, o cálculo do valor do identificador "P^2-invariant" não era estável e único, pelo contrario, ele precisa de um intervalo de variação que permita uma maior flexibilidade no processo de identificação dos padrões. Foi assim que o novo identificador proposto pelo trabalho de Loaiza et. al.[15] ficou definido como um intervalo entre um valor mínimo e máximo dos valores do identificador "P^2-invariant" obtido para cada imagem do padrão capturada na amostra de treinamento. Este intervalo mostrou-se bem robusto, especialmente quando foi testado o reconhecimento de mais de um padrão, previamente treinados, que compartilhavam um mesmo formato: colinear ou coplanar. O reconhecimento individual de vários padrões com formatos semelhantes usando o novo identificador definido em [15] foi realizado de forma satisfatória, mesmo quando tinha-se dentro de uma mesma imagem mais de um destes padrões simultaneamente [15][16][33].

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0510968/CA

9.1. Cálculo do P^2-Invariant para 4 pontos colineares

A seguir será descrito como é feito o cálculo do valor do identificador "P^2-invariant", base do algoritmo de reconhecimento do padrão de calibração usado neste trabalho de tese.

O valor fundamental para o cálculo da projetiva invariante "P^2-invariant" é a razão cruzada (*cross ratio*) "λ " definida por 4 pontos colineares definidos como $\boldsymbol{A_i}$ para $\boldsymbol{i}$ = 1,...,4.

$$\lambda = \frac{(A_1A_3)(A_2A_4)}{(A_3A_2)(A_4A_1)} \tag{1b}$$

Onde A_iA_j é o segmento orientado definido pelos pontos A_i e A_j. Se nós consideramos que o etiquetamento deste 4 pontos pode variar, nós teríamos 4! = 24 diferentes combinações de 4 pontos colineares a serem avaliadas. Estas 24 combinações, segundo o trabalho de Meer et. al.[20], produzem só 6 valores diferentes de razão cruzada, os quais são:

$$\lambda_1 = \lambda \qquad \lambda_2 = \frac{1}{\lambda} \qquad \lambda_3 = \frac{\lambda - 1}{\lambda} \tag{2b}$$

$$\lambda_4 = \frac{\lambda}{\lambda - 1} \qquad \lambda_5 = \frac{1}{1-\lambda} \qquad \lambda_6 = 1 - \lambda$$

As soluções de qualquer polinômio simétrico construído com alguma das 6 razões cruzadas obtidas das permutações dos nossos 4 pontos colineares é também invariante à permutação dos índices de nossos pontos [20]. Esses polinômios são também invariantes à projeção por causa da razão cruzada com base na qual são calculados. Meer et. al.[20] analisaram também como era o comportamento das soluções obtidas pelos polinômios montados com as expressões definidas nas equações 2b, onde por exemplo para um polinômio simples baseado no $\sum_{i=1}^{6}\lambda_i$ a solução trivial é 3. Já no caso de outros polinômios não triviais usando as mesmas equações 2b, foi feita uma pesquisa sistemática onde foram montados diferentes polinômios de segundo grau baseados no produto das razões como $\lambda_i\lambda_j$, e concluíram que essas variações podem ser expressas como um combinação linear dos seguintes polinômios:

$$J_1[\lambda]=\frac{\lambda^6-3\lambda^5+3\lambda^4-\lambda^3+3\lambda^2-3\lambda+1}{\lambda^2(\lambda-1)^2} \tag{3b}$$

$$J_2[\lambda]=\frac{2\lambda^6-6\lambda^5+9\lambda^4-8\lambda^3+9\lambda^2-6\lambda+2}{\lambda^2(\lambda-1)^2}$$

$$J_3[\lambda]=3$$

$$J_4[\lambda]=3$$

Como resultado, o valor utilizado para definir o valor do identificador "P^2-invariant" é a razão definida por:

$$J[\lambda]=\frac{J_2[\lambda]}{J_1[\lambda]} \tag{4b}$$

O valor obtido em diferentes testes realizados em [20] ficou sempre dentro do intervalo de 2.0 a 2.8.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0510968/CA