

4

A densidade de energia e pressão dos neutrinos

4.1

Introdução

O objetivo central deste capítulo é apresentar de uma forma generalizada a densidade de energia e a pressão dos neutrinos nos limites relativísticos e não-relativísticos, onde o comportamento das funções da densidade de energia e a pressão não dependerão diretamente da massa do neutrino, mas somente da razão $R = m_\nu/T_\gamma$. As aproximações relativísticas e não-relativísticas da densidade de energia e da pressão são feitas para evitar erros de arredondamento devido ao uso de um método numérico, e devido ao computador trabalhar com um número de casas finitas¹

Nesta dissertação vamos considerar os erros de arredondamento, porque nossa análise compreende as regiões de $R \gg 1$ e $R \ll 1$ das funções da densidade de energia e pressão (3.137) e (3.138), como será mostrado adiante, esses erros são dominantes nos limites citados.

¹Um método numérico é um método não analítico, que tem como objetivo determinar um ou mais valores numéricos, que são soluções de um certo problema. Ao contrário das metodologias analíticas, que conduzem a soluções exatas para os problemas, os métodos numéricos produzem, em geral, apenas soluções aproximadas com erros que podem ser devidos a vários fatores:

1. *Erros de truncamento*: Muitas equações têm soluções que apenas podem ser construídas no sentido que um processo infinito possa ser descrito como um limite da solução em questão. Por definição, um processo infinito não pode ser completado, por isso tem que ser truncado após certo número finito de operações. Esta substituição de um processo infinito por um processo finito, produz certo tipo de erros chamados de truncamento.
2. *Erros de arredondamento*: Que os cálculos sejam efetuados manualmente ou por computador, somos conduzidos a usar uma precisão finita, ou seja, que apenas podemos ter em consideração um número finito de dígitos.

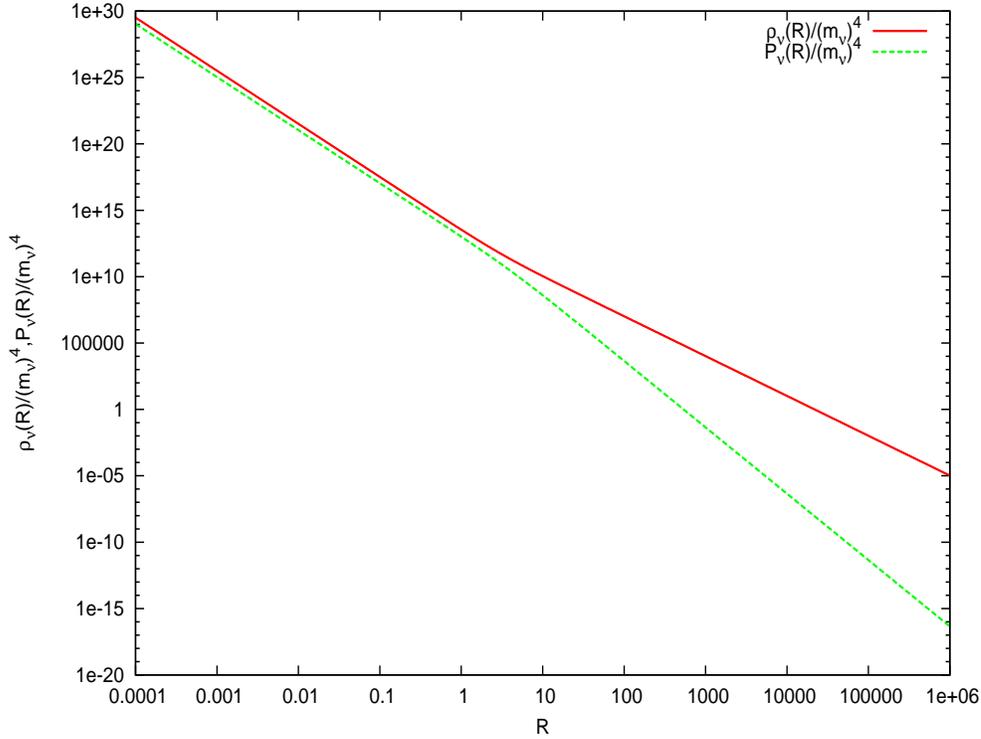


Figura 4.1: Gráfico em escala logarítmica da Densidade de energia e da Pressão em função de $R = m_\nu/T_\nu$. É possível ver a mudança de comportamento da situação relativística para $R \ll 1$ e a não-relativística para $R \gg 1$. A diferença entre as curvas em $R \gg 1$ é devida ao fator de $1/3$ entre ρ e P , lembrando que $w = P/\rho = 1/3$.

4.2 Densidade e pressão dos neutrinos

4.2.1 Caso geral

A partir da equação (3.137), onde definimos² $R = \frac{m_\nu}{T_\nu}$ e $\xi = \frac{p_\nu}{T_\nu}$, e fazendo a mudança de variáveis obtemos a equação

$$\rho_\nu(R) = \frac{g_\nu T_\nu^4}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{R}{\xi}\right)^2}}{e^\xi + 1} \xi^3 d\xi. \quad (4.1)$$

Da mesma forma faz-se para a pressão

$$P_\nu(R) = \frac{g_\nu T_\nu^4}{6\pi^2} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{R}{\xi}\right)^2}} \frac{\xi^3 d\xi}{e^\xi + 1}. \quad (4.2)$$

²Lembrando que estamos trabalhando em unidades naturais onde c, \hbar, k_B são 1.

O comportamento de (4.1) e (4.2) está representado na figura 4.1. Estas duas equações são as que vamos usar para fazer o cálculo numérico, onde o integrando é adimensional e a constante fora da integral é quem tem as unidades físicas da função, isto é

$$\frac{g_\nu (4/11)^{4/3} T_{0\gamma}^4}{2\pi^2} := 3.21 \times 10^{-2} \left[\frac{\text{eV}}{\text{cm}^3} \right]. \quad (4.3)$$

O método usado para o cálculo numérico foi o de Simpson feito com a linguagem de fortran onde a função da densidade de energia do neutrino e a pressão descrevem curvas suaves e bem comportadas sem nenhum tipo de descontinuidade ou mudança forte. Por isto o método de integração escolhido dará uma boa aproximação do comportamento da função. As curvas da densidade de energia e da pressão são comparadas com o aplicativo Mathematica 6.0.

4.2.2

Caso não-relativístico

Para evitar os erros de arredondamento nas equações (4.1) e (4.2), faremos uma expansão em séries da raiz quadrada na equação (3.137), e com $R \gg 1$ que é $T_\gamma \ll m_\nu$ ou $p_\nu \ll m_\nu$ temos

$$(m_\nu^2 + p_\nu^2)^{\frac{1}{2}} = m_\nu \left(1 + \frac{p_\nu^2}{m_\nu^2} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (4.4)$$

com $1 \gg \frac{p_\nu^2}{m_\nu^2}$,

$$(m_\nu^2 + p_\nu^2)^{\frac{1}{2}} \approx m_\nu \left(1 + \frac{p_\nu^2}{2m_\nu^2} + \dots \right). \quad (4.5)$$

Desta expansão só usamos os dois primeiros termos, pois como o primeiro termo é muitíssimo maior que o segundo, então o terceiro termo não vai contribuir de uma forma representativa.

Substituindo (4.5) na equação (3.137) obtemos

$$\rho_\nu(T_\nu) = \frac{g_\nu}{2\pi^2} \left(\int \frac{m_\nu p_\nu^2 dp_\nu}{e^{\frac{p_\nu}{T_\nu}} + 1} + \frac{1}{2m_\nu} \int \frac{p_\nu^4 dp_\nu}{e^{\frac{p_\nu}{T_\nu}} + 1} \right). \quad (4.6)$$

Vamos agora deixar a (4.6) como função de R , para isso temos que fazer algumas substituições, isto é

$$\rho_\nu(T_\nu) = \frac{g_\nu}{2\pi^2} \left(m_\nu \left(\frac{T_\nu}{T_\nu} \right)^3 \int \frac{p_\nu^2 dp_\nu}{e^{\frac{p_\nu}{T_\nu}} + 1} + \frac{1}{2m_\nu} \left(\frac{T_\nu}{T_\nu} \right)^5 \int \frac{p_\nu^4 dp_\nu}{e^{\frac{p_\nu}{T_\nu}} + 1} \right), \quad (4.7)$$

e lembrando que $\xi = \frac{p_\nu}{T_\nu}$ obtemos

$$\rho_\nu(T_\nu) = \frac{g_\nu}{2\pi^2} \left(m_\nu T_\nu^3 \int \frac{\xi^2 d\xi}{e^\xi + 1} + \frac{T_\nu^5}{2m_\nu} \int \frac{\xi^4 d\xi}{e^\xi + 1} \right). \quad (4.8)$$

Para obter $R = \frac{m_\nu}{T_\nu}$ temos que multiplicar por $\frac{T_\nu}{T_\nu}$ cada integral

$$\rho_\nu(R, T_\nu) = \frac{g_\nu}{2\pi^2} \left(RT_\nu^4 \int \frac{\xi^2 d\xi}{e^\xi + 1} + \left(\frac{T_\nu^4}{2R} \right) \int \frac{\xi^4 d\xi}{e^\xi + 1} \right). \quad (4.9)$$

Resolvendo as integrais e fatorizando os termos comuns, obtemos

$$\rho_\nu(R, T_\nu) = \frac{g_\nu T_\nu^4}{2\pi^2} \left(\frac{3R\zeta(3)}{2} + \frac{15\zeta(45)}{4R} \right), \quad (4.10)$$

onde³ $\zeta(3) = 1.20205$ e $\zeta(5) = 1.03692$, e usando (3.135) para colocar a temperatura dos fótons

$$\rho_\nu(R, T_\gamma) = \frac{g_\nu(4/11)^{\frac{4}{3}} T_\gamma^4}{2\pi^2} \left(\frac{3R\zeta(3)}{2} + \frac{45\zeta(5)}{4R} \right) \quad (4.11)$$

É interessante ver que a equação para a densidade de energia de um gás clássico é $\rho = mn$ onde m é a massa das partículas que compõem o gás e n é a densidade de número. Comparando isso com (4.11) e desprezando o segundo termo da aproximação (lembrando que $R = m_\nu/T_\gamma$), temos que

$$n = \frac{3\zeta(3)g_\nu(4/11) m_\nu\zeta(3)}{4\pi^2} (T_\gamma^3), \quad (4.12)$$

que seria a densidade de número para partículas relativísticas. Mas $\rho = m_\nu n$, como esperávamos, é a densidade de energia para partículas não-relativísticas, pois estamos fazendo o limite $R \gg 1$.

A fim de explicar os gráficos vamos definir a expressão (4.11) da seguinte forma

$$Ap = 3.21 \left(\frac{3R\zeta(3)}{2} \right) \times 10^{-2} \left[\frac{\text{eV}}{\text{cm}^3} \right], \quad (4.13)$$

$$Ap_2 = 3.21 \left(\frac{3R\zeta(3)}{2} + \frac{15\zeta(5)}{2R} \right) \times 10^{-2} \left[\frac{\text{eV}}{\text{cm}^3} \right]. \quad (4.14)$$

Na figura (4.2) podemos ver o comportamento de Ap e Ap_2 junto com a curva numérica da função (4.1), onde notamos como a expressão Ap_2 em (4.14), fica mais próxima da curva numérica. De maneira a apreciar melhor as aproximações definidas em (4.13) e (4.14), podemos ver a figura (4.3), onde observamos mais claramente como a expressão Ap_2 se aproxima mais à curva numérica do que a expressão Ap .

Para a função da pressão faz-se a mesma coisa. Usando (3.92) temos

$$P_\nu(T_\nu) = \frac{g_\nu}{6\pi^2} \int \frac{p_\nu^4 dp_\nu}{(\sqrt{p_\nu^2 + m_\nu^2})(e^{\frac{p_\nu}{T_\nu}} + 1)}, \quad (4.15)$$

e como estamos considerando a aproximação $R \gg 1$, expandimos a raiz quadrada de (4.15), que é

$$(m_\nu^2 + p_\nu^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{m_\nu} \left(1 + \frac{p_\nu^2}{m_\nu^2} \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (4.16)$$

Expandindo (4.16) obtemos

$$(m_\nu^2 + p_\nu^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{m_\nu} \left(1 - \frac{p_\nu^2}{2m_\nu^2} \dots \right). \quad (4.17)$$

³ $\zeta(n)$ é a função zeta de Riemman, definida por $\zeta(n) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^n}$.

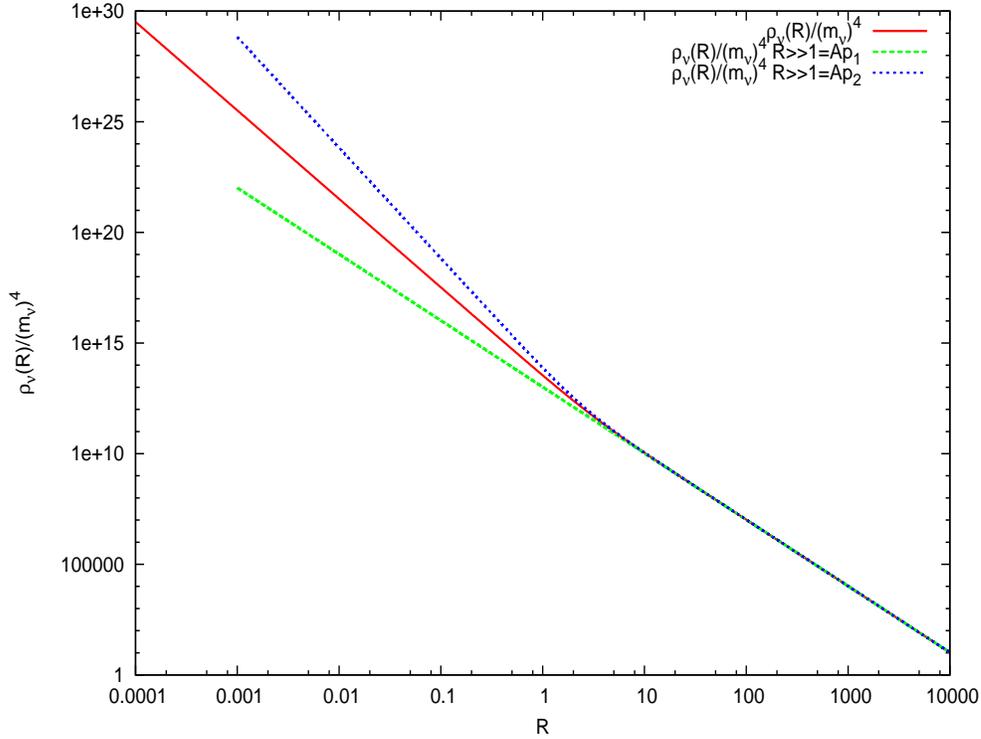


Figura 4.2: Gráfico comparativo entre a densidade de energia numérica e as aproximações analíticas. Para $R \gg 1$ pode-se ver que a linha vermelha é a curva da densidade de energia feita numericamente, e as linhas verde e azul são as aproximações feitas em primeiro e segundo grau chamadas no gráfico Ap e Ap_2 , ver (4.13).

Assim como fizemos para a aproximação em séries da densidade de energia, somente consideramos o primeiro e o segundo termo em (4.17), pois os termos superiores a esses dois são muito pequenos para que façam uma contribuição representativa na aproximação da pressão. Substituindo (4.17) em (4.15) temos

$$P_\nu(T_\nu) = \frac{g_\nu}{6\pi^2} \left(\frac{1}{m_\nu} \int \frac{p_\nu^4 dp_\nu}{e^{\frac{p_\nu}{T_\nu}} + 1} - \frac{1}{2m_\nu^3} \int \frac{p_\nu^6 dp_\nu}{e^{\frac{p_\nu}{T_\nu}} + 1} \right). \quad (4.18)$$

Vamos agora deixar a (4.18) como função de R , então vamos proceder de forma análoga ao feito para a densidade de energia. Multiplicando a primeira integral por $\left(\frac{T_\nu}{T_\nu}\right)^5$ e a segunda integral por $\left(\frac{T_\nu}{T_\nu}\right)^7$ para poder escrever a p_ν como ξ , temos

$$P_\nu(T_\nu) = \frac{g_\nu}{6\pi^2} \left(\frac{1}{m_\nu} \left(\frac{T_\nu}{T_\nu}\right)^5 \int \frac{p_\nu^4 dp_\nu}{e^{\frac{p_\nu}{T_\nu}} + 1} - \frac{1}{2m_\nu^3} \left(\frac{T_\nu}{T_\nu}\right)^7 \int \frac{p_\nu^6 dp_\nu}{e^{\frac{p_\nu}{T_\nu}} + 1} \right), \quad (4.19)$$

e lembrando que $\xi = \frac{p_\nu}{T_\nu}$ obtemos

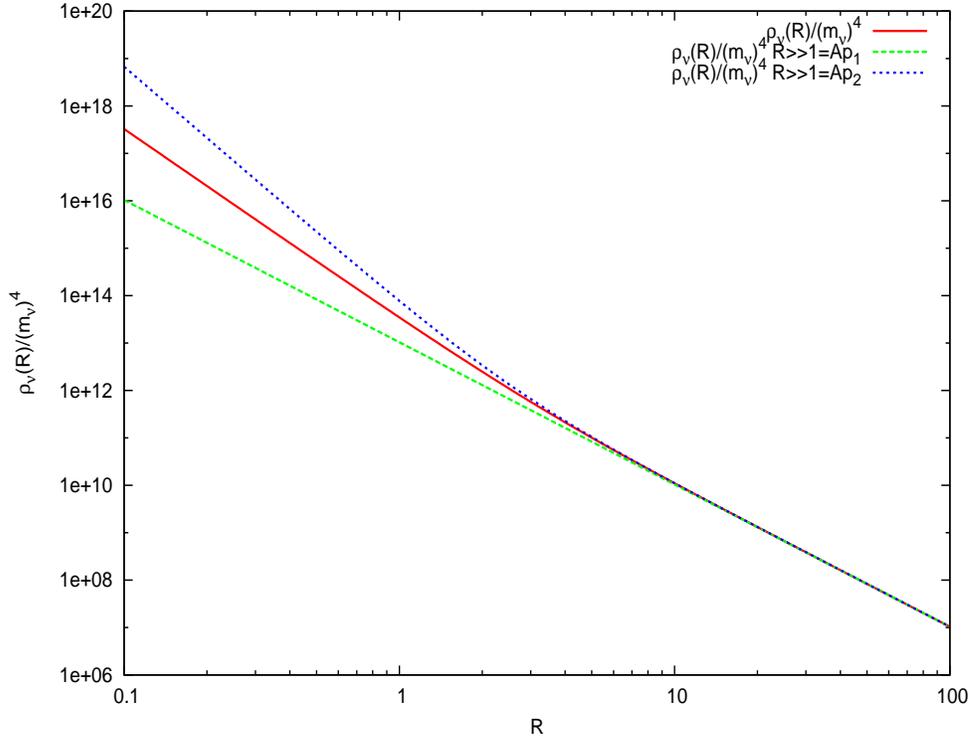


Figura 4.3: Ampliação da figura (4.2) na região próxima a $R = 1$. Podemos ver como Ap se afasta da curva numérica $\rho_\nu(R)$ mais que Ap_2 . Vemos também como as aproximações deixam de ser válidas em $R \simeq 3$.

$$P_\nu(T_\nu) = \frac{g_\nu}{6\pi^2} \left(\frac{1}{m_\nu} (T_\nu)^5 \int \frac{\xi^4 d\xi}{e^\xi + 1} - \frac{1}{2m_\nu^3} (T_\nu)^7 \int \frac{\xi^6 d\xi}{e^\xi + 1} \right), \quad (4.20)$$

e para obter $R = \frac{m_\nu}{T_\nu}$ temos que multiplicar por $\frac{T_\nu}{T_\nu}$ a primeira integral e por $\left(\frac{T_\nu}{T_\nu}\right)^3$ a segunda integral obtendo

$$P_\nu(R, T_\nu) = \frac{g_\nu}{6\pi^2} \left(\left(\frac{T_\nu^4}{R}\right) \int \frac{\xi^4 d\xi}{e^\xi + 1} - \left(\frac{T_\nu^4}{2R^3}\right) \int \frac{\xi^6 d\xi}{e^\xi + 1} \right). \quad (4.21)$$

Resolvendo as integrais e fatorizando os termos comuns, obtemos

$$P_\nu(R, T_\nu) = \frac{g_\nu (T_\nu)^4}{6\pi^2} \left(\frac{45\zeta(5)}{2R} - \frac{2835\zeta(7)}{8R^3} \right), \quad (4.22)$$

onde $\zeta(5) = 1.036927$ e $\zeta(7) = 1.00834927$.

E colocando explicitamente o valor da constante dimensional temos

$$P_\nu(R, z) = 1.07 \times 10^{-2} (1+z)^4 \left(\frac{3\zeta(5)}{R} - \frac{189\zeta(7)}{4R^3} \right) \left[\frac{\text{eV}}{\text{cm}^3} \right]. \quad (4.23)$$

Usando as equações (4.14) e (4.22), obtemos uma expansão para a chamada equação de estado w :

$$w := \frac{P}{\rho} = \frac{5\zeta(5)}{R^2\zeta(3)} - \left[\frac{75}{2} \left(\frac{5\zeta(5)}{\zeta(3)} \right)^2 + \frac{315}{4} \frac{\zeta(7)}{\zeta(3)} \right] \frac{1}{R^4}, \quad (4.24)$$

e o primeiro termo dessa expansão é dado por:

$$w = \frac{5\zeta(5)}{\zeta(3)} \left(\frac{T_\gamma}{m_\nu} \right)^2. \quad (4.25)$$

A equação de estado (4.25) é para neutrinos não-relativísticos.

É interessante ressaltar que a equação de estado para um gás não-relativístico em equilíbrio térmico é diferente de (4.25). A pressão de um gás clássico é $P = nT$, onde n é a densidade de número, e a densidade de energia é $\rho = mn$, com isto temos

$$\frac{P}{\rho} = \frac{T}{m}, \quad (4.26)$$

Temos em (4.26) a equação de estado para um gás não-relativístico, a qual é diferente da equação de estado (4.25) (primeiro termo em (4.24) mas desprezando o segundo termo na aproximação) para os neutrinos não-relativísticos ($R \gg 1$). Isto porque a função de distribuição dada para os neutrinos relativísticos, na época em que estavam em equilíbrio térmico com os fótons, elétrons e pósitrons, não muda embora sofra um desvio para o vermelho, e o neutrino seja agora não-relativístico, com foi discutido no capítulo 3.

Podemos ver na figura (4.4) o comportamento da equação de estado $w = \frac{P_\nu}{\rho_\nu}$, onde P_ν e ρ_ν são definidas por (4.1) e (4.2) respectivamente. Esta curva foi feita numericamente usando a linguagem de fortran 77 e comparada com o aplicativo de Mathematica 6.0.

Para ver os termos da aproximação na equação de estado (4.24), junto com a cálculo numérico da equação de estado $w = \frac{P_\nu}{\rho_\nu}$, usamos a equação (4.24) para definir os termos Ap e Ap_2 que aparecem na figura 4.5. Fazemos para o primeiro termo na aproximação

$$Ap = \frac{5\zeta(5)}{R^2\zeta(3)} \quad (4.27)$$

e Ap_2 com o primeiro e o segundo termo na aproximação da equação de estado (4.24)

$$Ap_2 = \frac{5\zeta(5)}{R^2\zeta(3)} - \left[\frac{75}{2} \left(\frac{5\zeta(5)}{\zeta(3)} \right)^2 + \frac{315}{4} \frac{\zeta(7)}{\zeta(3)} \right] \frac{1}{R^4}. \quad (4.28)$$

Vemos na figura (4.5) como as aproximações deixam de ser válidas em torno de $R \sim 10$. Para poder ver de uma forma mais clara como é que as aproximações se comportam junto à curva numérica temos que fazer uma ampliação da Figura 4.5 em torno de $1 \leq R \leq 100$, isto está representado na Figura 4.6.

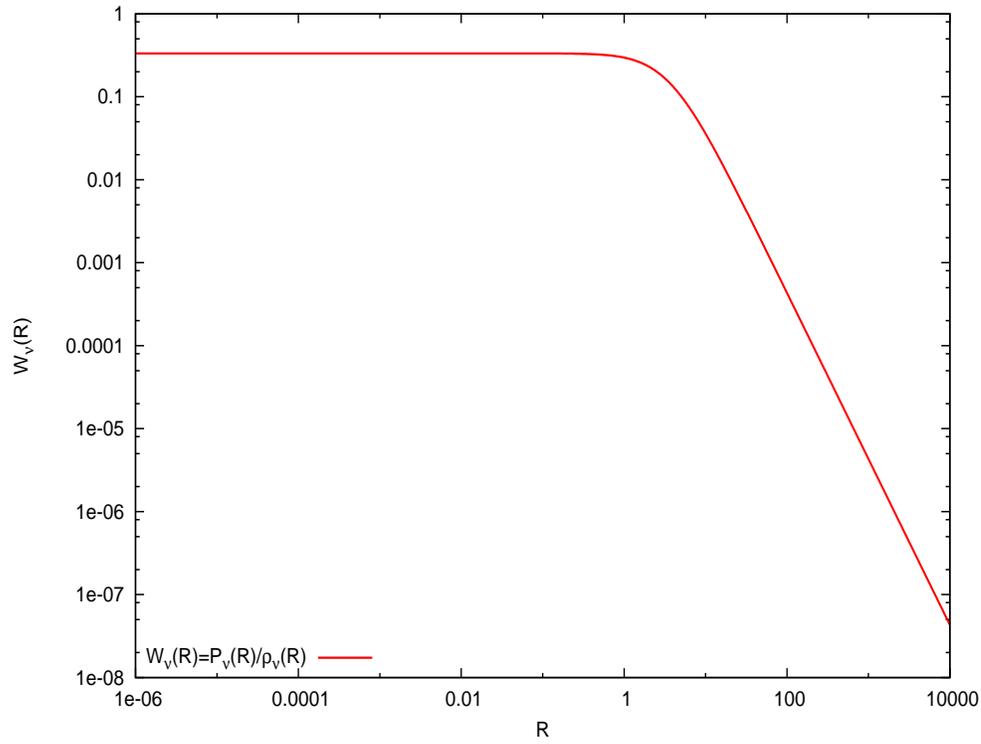


Figura 4.4: Gráfico da equação de estado w em função de R .

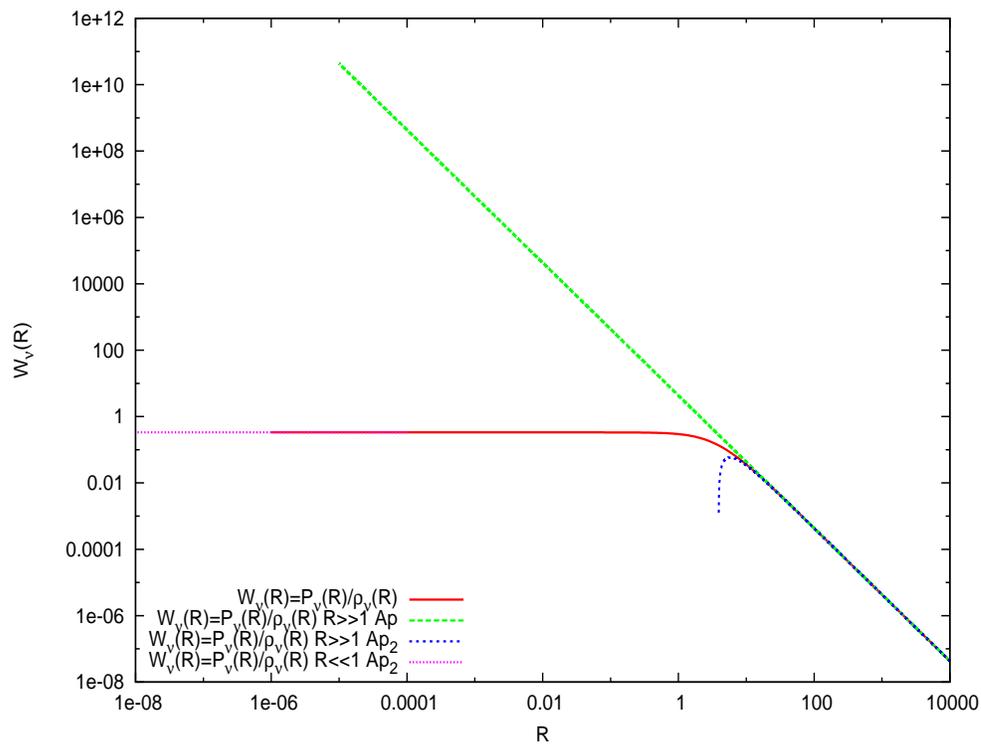


Figura 4.5: Gráfico da equação de estado w junto com as aproximações para primeira e segunda ordem

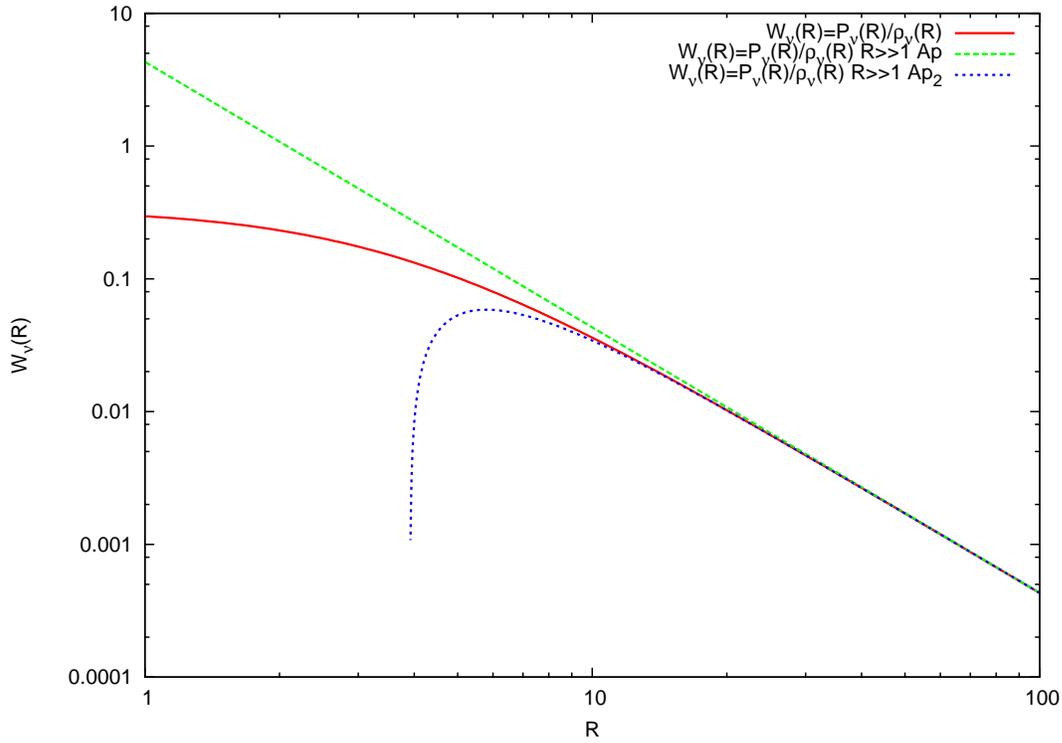


Figura 4.6: Ampliação da figura (4.5) na região de $1 \leq R \leq 100$, onde a aproximação Ap_2 que é quem tem as duas ordens da aproximação da equação linha vermelha é a feita numericamente, a verde é a aproximação em primeira ordem e a azul é a aproximação em segunda ordem, para a aproximação de $R \gg 1$.

4.2.3 Caso relativístico

Trabalhamos até agora só as aproximações para $R \gg 1$, vamos agora fazer as aproximações para $R \ll 1$ que é o caso relativístico. Usando (3.137) obtemos

$$(m_\nu^2 + p_\nu^2)^{\frac{1}{2}} = p_\nu \left(1 + \frac{m_\nu^2}{p_\nu^2} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (4.29)$$

e com $1 \gg \frac{m_\nu^2}{p_\nu^2}$ temos

$$(m_\nu^2 + p_\nu^2)^{\frac{1}{2}} \approx p_\nu \left(1 + \frac{m_\nu^2}{2p_\nu^2} + \dots \right). \quad (4.30)$$

Desta expansão só usamos os dois primeiros termos, pois como o primeiro termo é muitíssimo maior que o segundo, então o terceiro termo não vai contribuir de forma representativa na densidade de energia.

Substituindo (4.30) na equação (3.137) obtemos

$$\rho(T_\nu) = \frac{g_\nu}{2\pi^2} \left(\int \frac{p_\nu^3 dp_\nu}{e^{\frac{p_\nu}{T_\nu}} + 1} + \frac{m_\nu^2}{2} \int \frac{p_\nu dp_\nu}{e^{\frac{p_\nu}{T_\nu}} + 1} \right). \quad (4.31)$$

Vamos agora deixar a (4.31) como função de R , para isso temos que fazer algumas substituições. Multiplicando o primeiro e o segundo termos do lado direito de (4.31) por $(\frac{T_\nu}{T_\nu})^4$ e $(\frac{T_\nu}{T_\nu})^2$ respectivamente

$$\rho(T_\nu) = \frac{g_\nu}{2\pi^2} \left(\left(\frac{T_\nu}{T_\nu} \right)^4 \int \frac{p_\nu^3 dp_\nu}{e^{\frac{p_\nu}{T_\nu}} + 1} + \frac{m_\nu^2}{2} \left(\frac{T_\nu}{T_\nu} \right)^2 \int \frac{p_\nu dp_\nu}{e^{\frac{p_\nu}{T_\nu}} + 1} \right), \quad (4.32)$$

e lembrando que $\xi = \frac{p_\nu}{T_\nu}$ obtemos

$$\rho(T_\nu) = \frac{g_\nu}{2\pi^2} \left(T_\nu^4 \int \frac{\xi^3 d\xi}{e^\xi + 1} + \frac{m_\nu^2 T_\nu^2}{2} \int \frac{\xi d\xi}{e^\xi + 1} \right). \quad (4.33)$$

Para obter $R = \frac{m_\nu}{T_\nu}$ temos que multiplicar por $(\frac{T_\nu}{T_\nu})^2$ o segundo termo à direita de (4.33)

$$\rho(T_\nu) = \frac{g_\nu}{2\pi^2} \left(T_\nu^4 \int \frac{\xi^3 d\xi}{e^\xi + 1} + \frac{m_\nu^2 T_\nu^4}{2 T_\nu^2} \int \frac{\xi d\xi}{e^\xi + 1} \right). \quad (4.34)$$

Reorganizando o segundo termo do lado direito em (4.34), a fim de obter R temos

$$\rho(T_\nu) = \frac{g_\nu}{2\pi^2} \left(T_\nu^4 \int \frac{\xi^3 d\xi}{e^\xi + 1} + \frac{R^2}{2} T_\nu^4 \int \frac{\xi d\xi}{e^\xi + 1} \right). \quad (4.35)$$

Resolvendo as integrais em (4.35) e fatorizando os termos comuns

$$\rho(T_\nu) = \frac{g_\nu T_\nu^4}{2\pi^2} \left(\frac{7\pi^4}{120} + \frac{R^2}{2} \left(\frac{\pi^2}{12} \right) \right), \quad (4.36)$$

e usando (3.135) para colocar a temperatura dos fótons

$$\rho(R, T_\nu) = \frac{g_\nu ((4/11)^{4/3}) T_\nu^4}{2\pi^2} \left(\frac{7\pi^4}{120} + \frac{R^2}{2} \left(\frac{\pi^2}{12} \right) \right). \quad (4.37)$$

É apropriado dizer que o primeiro termo em (4.37) tem a forma de uma expressão que descreve um gás relativístico.

$$\rho(R, z) := 3.21(1+z)^4 \left(\frac{7\pi^4}{120} + \frac{R^2}{2} \left(\frac{\pi^2}{12} \right) \right) \times 10^{-2} \left[\frac{\text{eV}}{\text{cm}^3} \right]. \quad (4.38)$$

A aproximação (4.38) está representada na figura (4.7).

Para a pressão procedemos de forma análoga ao feito para a densidade de energia. Partimos da equação (4.15) e expandimos sua raiz quadrada, visto que estamos considerando a aproximação $R \ll 1$

$$(m_\nu^2 + p_\nu^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{p_\nu} \left(1 + \frac{m_\nu^2}{2p_\nu^2} \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (4.39)$$

Expandindo (4.39), obtemos

$$(m_\nu^2 + p_\nu^2)^{-\frac{1}{2}} \approx \frac{1}{p_\nu} \left(1 - \frac{m_\nu^2}{2p_\nu^2} + \dots \right), \quad (4.40)$$

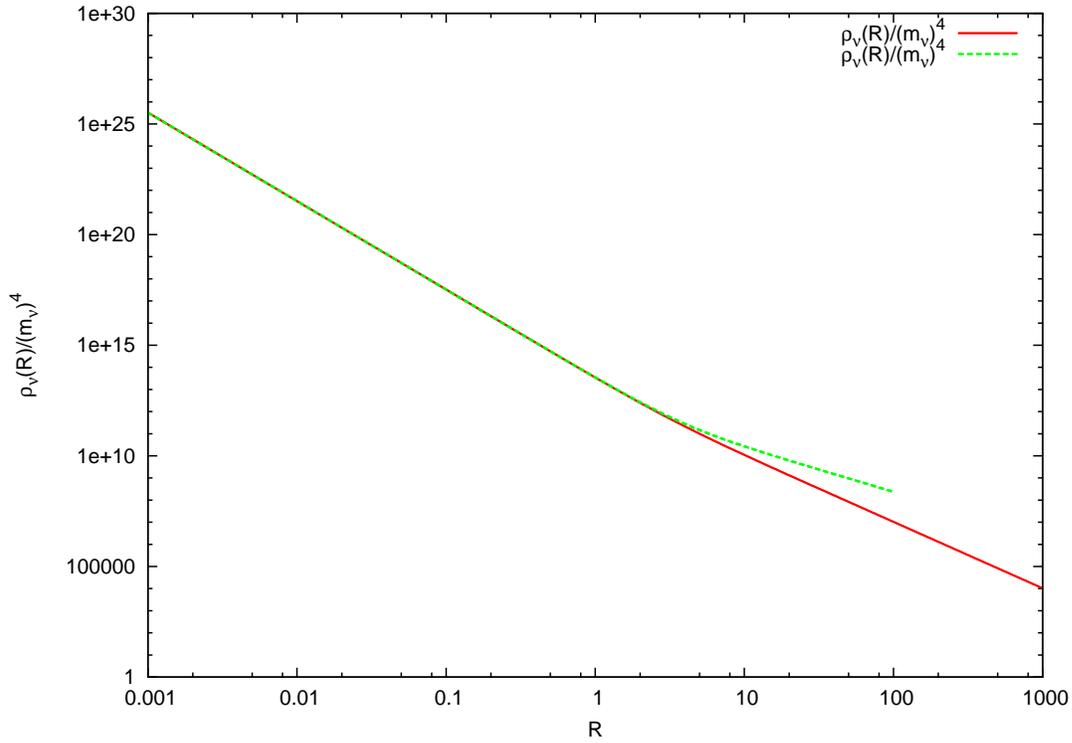


Figura 4.7: Gráfico onde se apresentam as curvas feitas analiticamente para $R \ll 1$ e numericamente.

onde só consideraremos os dois primeiros termos do lado direito de (4.40), pois como já dissemos, os termos superiores são muito pequenos para que façam alguma contribuição representativa à pressão. Substituindo (4.40) em (4.15) temos

$$P_\nu(T_\nu) = \frac{g_\nu}{6\pi^2} \left(\int \frac{p_\nu^3 dp_\nu}{e^{\frac{p_\nu}{T_\nu}} + 1} - \frac{m_\nu^2}{2} \int \frac{p_\nu dp_\nu}{e^{\frac{p_\nu}{T_\nu}} + 1} \right). \quad (4.41)$$

Vamos agora deixar a (4.41) como função de R , para isso temos que fazer algumas substituições. Multiplicando o primeiro e o segundo termos do lado direito de (4.31) por $(\frac{T_\nu}{T_\nu})^4$ e $(\frac{T_\nu}{T_\nu})^2$ respectivamente

$$P(T_\nu) = \frac{g_\nu}{6\pi^2} \left(\left(\frac{T_\nu}{T_\nu} \right)^4 \int \frac{p_\nu^3 dp_\nu}{e^{\frac{p_\nu}{T_\nu}} + 1} - \frac{m_\nu^2}{2} \left(\frac{T_\nu}{T_\nu} \right)^2 \int \frac{p_\nu dp_\nu}{e^{\frac{p_\nu}{T_\nu}} + 1} \right), \quad (4.42)$$

e lembrando que $\xi = \frac{p_\nu}{T_\nu}$ obtemos

$$P(T_\nu) = \frac{g_\nu}{6\pi^2} \left(T_\nu^4 \int \frac{\xi^3 d\xi}{e^\xi + 1} - \frac{m_\nu^2 T_\nu^2}{2} \int \frac{\xi d\xi}{e^\xi + 1} \right). \quad (4.43)$$

Para obter $R = \frac{m_\nu}{T_\nu}$ temos que multiplicar por $(\frac{T_\nu}{T_\nu})^2$ o segundo termo à direita de (4.43). Assim

$$P(T_\nu) = \frac{g_\nu}{6\pi^2} \left(T_\nu^4 \int \frac{\xi^3 d\xi}{e^\xi + 1} - \frac{m_\nu^2 T_\nu^4}{2 T_\nu^2} \int \frac{\xi d\xi}{e^\xi + 1} \right). \quad (4.44)$$

Reorganizando o segundo termo do lado direito em (4.44), a fim de obter R temos

$$P(T_\nu) = \frac{g_\nu}{6\pi^2} \left(T_\nu^4 \int \frac{\xi^3 d\xi}{e^\xi + 1} - \frac{R^2}{2} T_\nu^4 \int \frac{\xi d\xi}{e^\xi + 1} \right), \quad (4.45)$$

resolvendo as integrais em (4.45) e fatorizando os termos comuns

$$P(R, T_\nu) = \frac{g_\nu (T_\nu)^4}{6\pi^2} \left(\frac{7\pi^4}{120} - \frac{R^2}{2} \left(\frac{\pi^2}{12} \right) \right), \quad (4.46)$$

e usando (3.135) para colocar a temperatura dos fótons

$$P(R, T_\gamma) = \frac{g_\nu (4/11)^{4/3} T_\gamma^4}{6\pi^2} \left(\frac{7\pi^4}{120} - \frac{R^2}{2} \left(\frac{\pi^2}{12} \right) \right). \quad (4.47)$$

Colocando explicitamente o valor da constante dimensional em (4.47) temos

$$P(R, z) := 1.07(1+z)^4 \left(\frac{7\pi^4}{120} - \frac{R^2}{2} \left(\frac{\pi^2}{12} \right) \right) \times 10^{-2} \left[\frac{\text{eV}}{\text{cm}^3} \right]. \quad (4.48)$$

Com (4.47) e (4.37), obtemos uma expansão para a equação de estado w

$$w = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{10}{7\pi^2} R^2 \right), \quad (4.49)$$

considerando o primeiro termo da aproximação e

$$w = \frac{1}{3}, \quad (4.50)$$

temos que (4.50) é a expressão que se esperaria ter para uma equação de estado constante para partículas relativísticas, onde o segundo termo é só devido à aproximação feita. O gráfico desta equação pode ser visto na figura (4.5) com a curva Ap_2 e $R \ll 1$.

A função da densidade de energia dos neutrinos numérica e aproximada

A fim de calcular a distância de luminosidade e garantir que essa função seja bem comportada nos limites $R \gg 1$ e $R \ll 1$ teremos que melhorar a função para a densidade de energia (4.1). Isto pode-se fazer cortando-a nos limites, e colocando no seu lugar as aproximações calculadas (4.11) e (4.37), desta forma evitamos possíveis erros de compilação. Para isso teremos que calcular onde exatamente queremos cortar a função (4.1), e fazemo-lo da seguinte forma: de (4.11) que é a densidade de energia aproximada para $R \gg 1$ definimos

$$\rho_\nu(R, T_\gamma) = \frac{3g_\nu ((4/11)^{4/3}) T_\gamma^4}{4\pi^2} \left(R\zeta(3) + \frac{15\zeta(5)}{2R} \right) = \rho_1 + \rho_2 \quad (4.51)$$

onde ρ_1 e ρ_2 são o primeiro e o segundo termos de (4.11) respectivamente. Fazemos

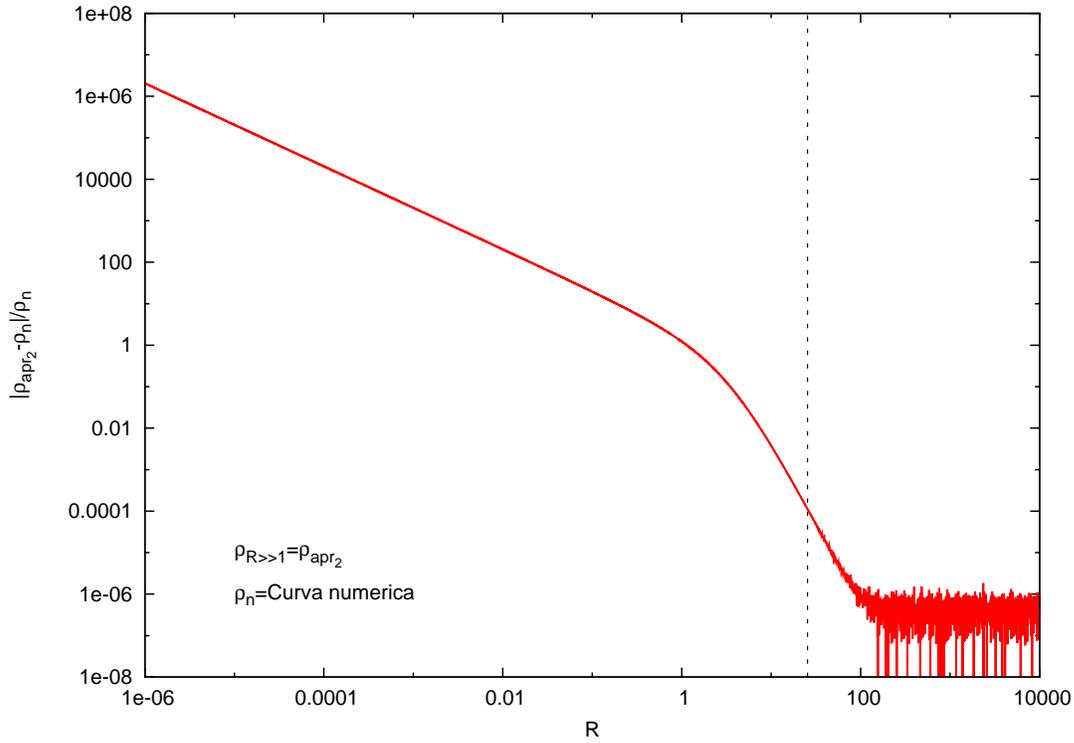


Figura 4.8: Gráfico do desvio relativo da aproximação da curva numérica. Para $R \ll 1$ o desvio relativo entre ρ_n e Ap_2 em (4.14) é quase 1 o que nos diz que a aproximação deixa de ser válida. Com a linha tracejada mostramos o valor e a região do desvio relativo que estamos usando para cortar a função da densidade de energia (4.1). Como estamos considerando a aproximação $R \ll 1$, vemos que estamos no limite onde a função aproximada (4.14) ainda é válida e não tem erros de arredondamento.

$$\eta = \frac{\rho_2}{\rho_1}, \quad (4.52)$$

usando (4.51) temos

$$\eta = \frac{15\zeta(5)}{2\zeta(3)R_{max}^2}, \quad (4.53)$$

e isolando R_{max}

$$R_{max} = \left(\frac{15\zeta(5)}{2\zeta(3)} \right)^{\frac{1}{2}} \eta^{-\frac{1}{2}}. \quad (4.54)$$

Se fizermos $\epsilon = 10^{-2}$ obtemos $R_{max} = 25.435$, isto pode ser visto na Figura (4.8).

Agora vamos calcular em que altura temos que cortar a função (4.1), mas desta vez para $R \ll 1$. Usando a equação (4.37) fazemos o mesmo processo que fizemos com (4.11), isto é

$$\rho(T_\nu) = \frac{g_\nu \left((4/11)^{4/3} \right) T_\gamma^4}{2\pi^2} \left(\frac{7\pi^4}{120} + \frac{R^2}{2} \left(\frac{\pi^2}{12} \right) \right) = \rho_1 + \rho_2. \quad (4.55)$$

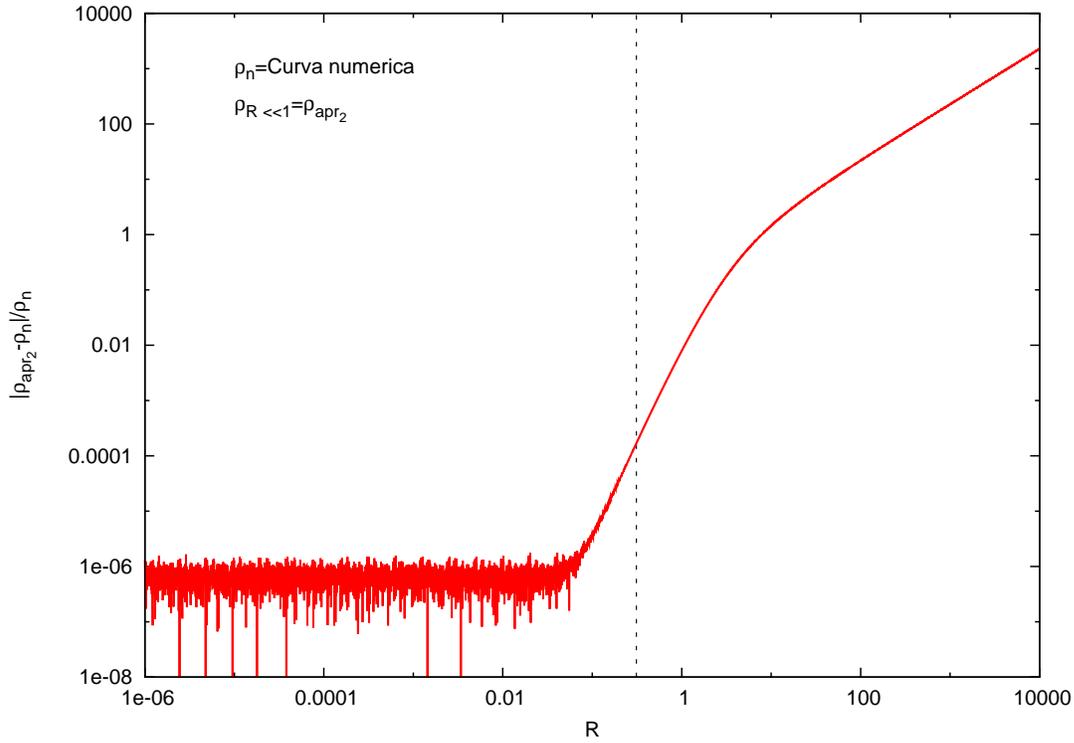


Figura 4.9: Gráfico do desvio relativo que tem a aproximação da curva numérica. Para $R \gg 1$ o desvio relativo entre ρ_n e ρ_{Ap_2} é quase 1 o que nos diz que a aproximação deixa de ser válida. Com a linha tracejada mostramos o valor e a região do desvio relativo que estamos usando para cortar a função da densidade de energia (4.1).

Desta vez, o primeiro termo ρ_1 estará representando o primeiro termo em (4.37), e equivalentemente ρ_2 representará o segundo termo na mesma equação, com isso poderemos agora fazer

$$\phi = \frac{\rho_2}{\rho_1}. \quad (4.56)$$

Substituindo os valores de ρ_1 e ρ_2 de (4.55) temos

$$\phi = \frac{10R_{min}^2}{7\pi^2} \quad (4.57)$$

e isolando R_{min} para saber qual é o valor do limite onde teremos que cortar (4.1) quando $R \ll 1$ temos

$$R_{min} = \frac{7\pi^2}{10} \phi^{\frac{1}{2}}. \quad (4.58)$$

Se $\phi = 10^{-2}$, encontramos que $R_{min} = 0.2628$, podemos ver isso representado na figura (4.9).

Com os valores R_{min} e R_{max} definidos, podemos agora fazer a nova função da densidade de energia, a qual está representada na figura (4.10). A função da

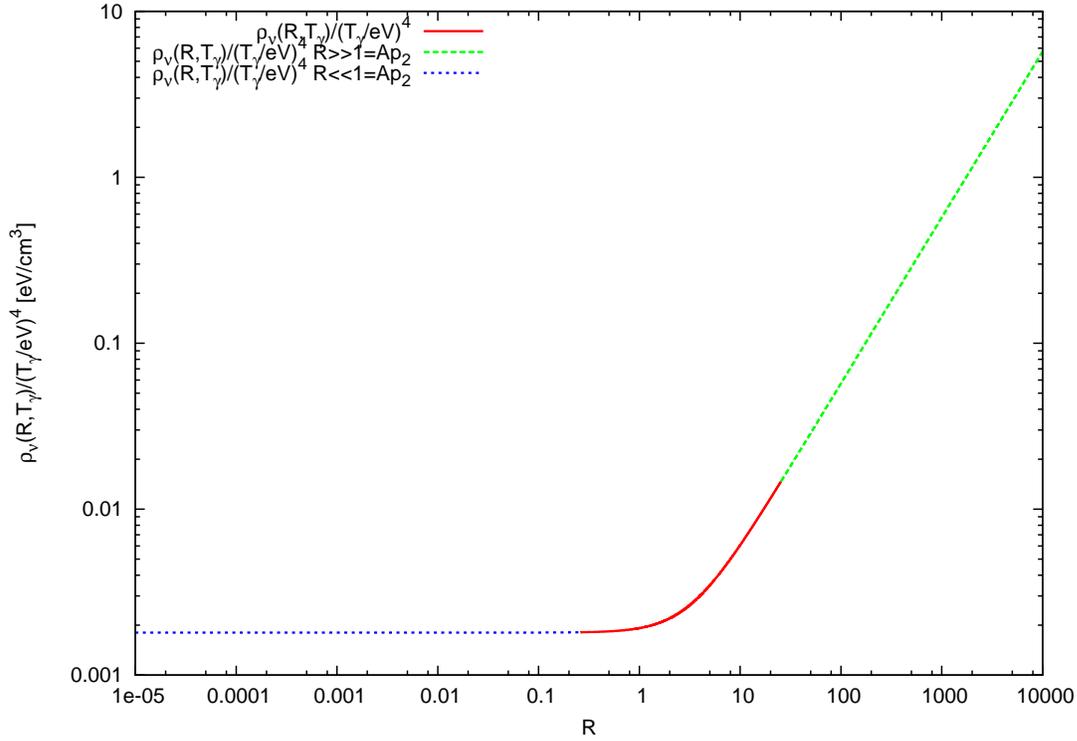


Figura 4.10: Gráfico da densidade de energia e as aproximações para $R \gg 1$ e $R \ll 1$, onde mostramos a função composta da densidade de energia. Aqui a linha verde é a aproximação para $R \gg 1$ e a linha azul é a aproximação para $R \ll 1$.

densidade de energia para os neutrinos, considerando-se as aproximações feitas para evitar os erros de arredondamento para $R \ll 1$ e $R \gg 1$ será representada como

$$\rho_\nu(R, T_\gamma) = \begin{cases} \frac{g_\nu \left(\frac{4}{11} \right)^{\frac{4}{3}} T_\gamma^4}{2\pi^2} \left(\frac{3R\zeta(3)}{2} + \frac{45\zeta(5)}{4R} \right) & R \gg 1, \\ \frac{g_\nu \left(\frac{4}{11} \right)^{\frac{4}{3}} T_\gamma^4}{2\pi^2} \int \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{R}{\xi} \right)^2}}{e^\xi + 1} \xi^3 d\xi & R \sim 1, \\ \frac{g_\nu \left(\frac{4}{11} \right)^{\frac{4}{3}} T_\gamma^4}{2\pi^2} \left(\frac{7\pi^4}{120} + \frac{R^2}{2} \left(\frac{\pi^2}{12} \right) \right) & R \ll 1. \end{cases} \quad (4.59)$$

Daqui em diante, quando nos referirmos à função da densidade de energia dos neutrinos, será entendido que nos referimos à equação (4.59).

4.2.4

Função densidade de energia para valores particulares da massa.

Na seção anterior fizemos uma descrição do comportamento da densidade de energia, da pressão e da equação de estado em forma geral, onde todas as funções ficaram dependendo de um parâmetro R . Desta forma podemos analisar o comportamento de qualquer neutrino com qualquer valor de massa, que sofreu o desacoplamento quando era relativístico, e hoje, embora seja não-relativístico, seja descrito pela distribuição de Fermi-Dirac.

Nesta seção vamos usar alguns valores das massas dos neutrinos, e com estes valores ver o comportamento da densidade de energia, da pressão e da equação de estado em função da temperatura. Os valores da massa do neutrino que usaremos são $m_\nu = 0, 0.1, 0.5, 1.0, 1.5, 2.0\text{eV}$.

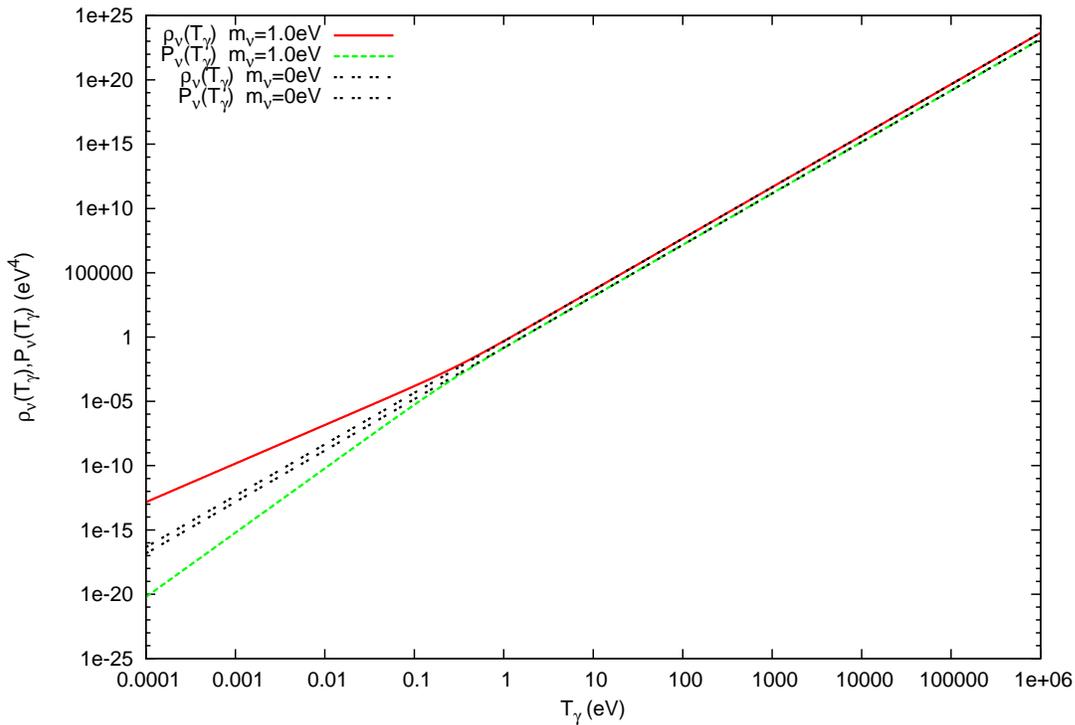


Figura 4.11: Gráfico da densidade de energia e a pressão com $m = 1\text{eV}$, onde se vê o desvio que têm as curvas em comparação com as funções calculadas com massa $m_\nu = 0\text{eV}$.

Os gráficos da equação de estado para as diferentes massas do neutrino que estamos considerando podem ser vistos nas figuras (4.14) e (4.15).

Na figura (4.14) vemos o comportamento da equação de estado, onde embora a equação da densidade de energia não dependa da massa do neutrino vê-se uma forte

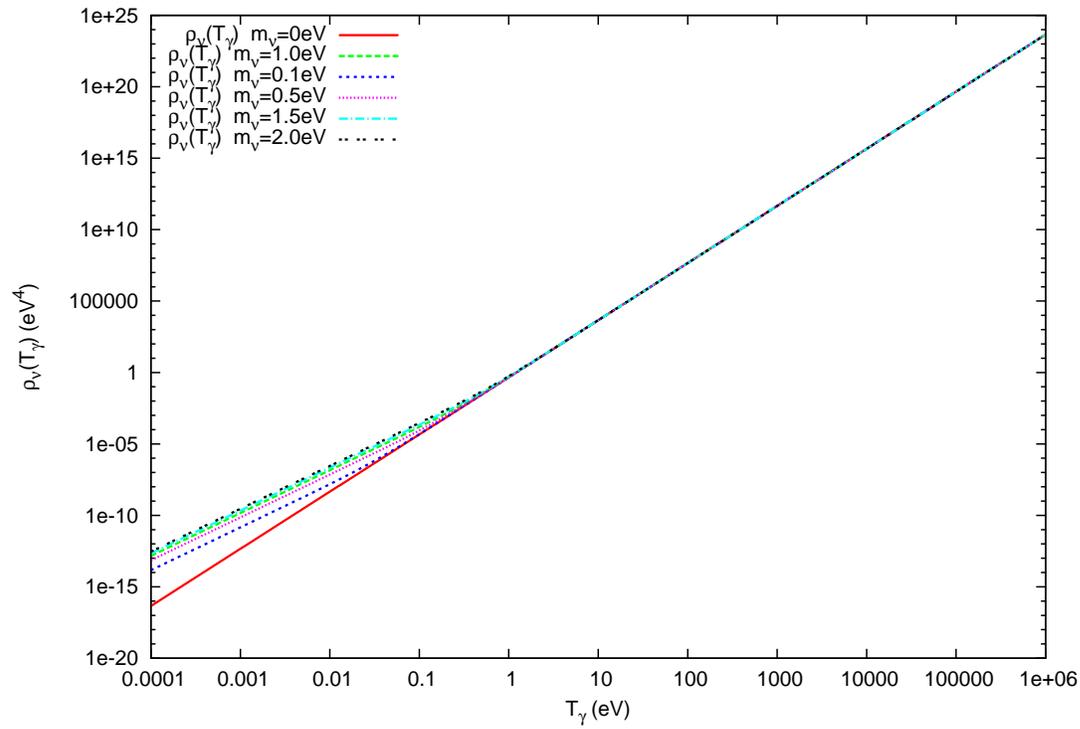


Figura 4.12: Gráfico da densidade de energia em função da temperatura e com diferentes massas do neutrino.

influência da mesma. Nota-se que para uma massa grande, de aproximadamente de $m_\nu = 2.0\text{eV}$ a curva cresce lentamente, enquanto que a curva que descreve $m_\nu = 0.1\text{eV}$ cresce mais devagar.

Na figura (4.15) vemos o comportamento da curva que descreve a equação de estado para uma massa do neutrino $m_\nu = 0.1\text{eV}$. Comparando-a com a curva que descreve a equação de estado para massa do neutrino zero, pode-se ver como são próximas uma da outra.

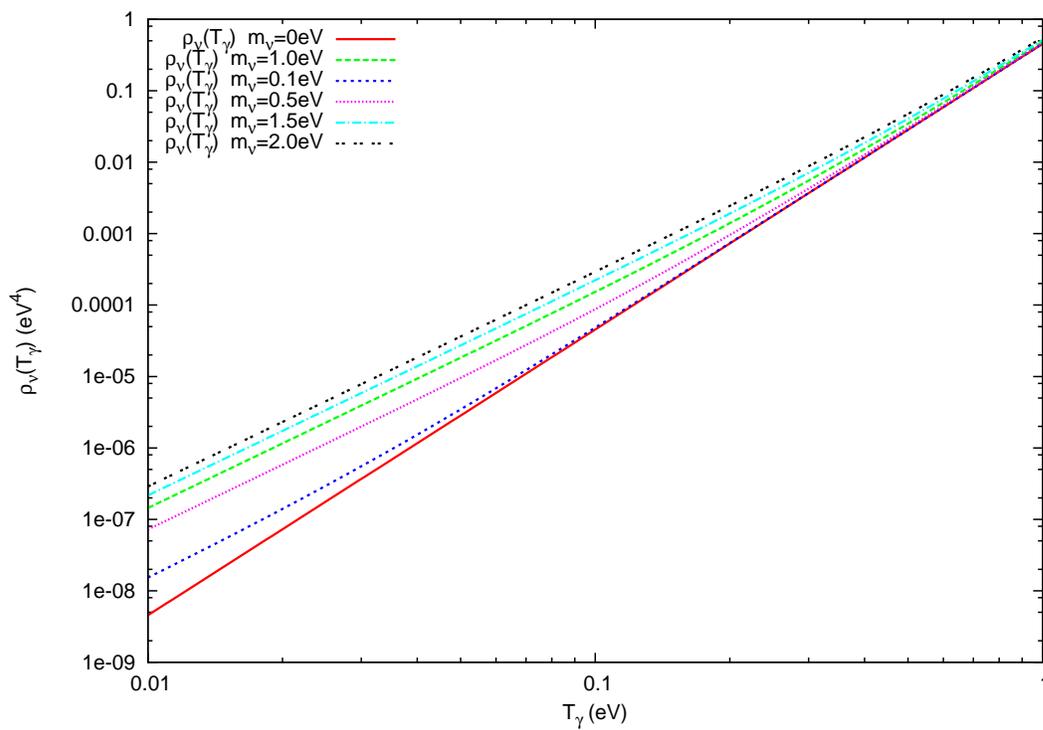


Figura 4.13: Ampliação da figura (4.12). Podemos observar que cada curva se afasta da curva $m_\nu = 0\text{eV}$ segundo sua massa. Por exemplo, a curva da densidade de energia com $m_\nu = 0.5\text{eV}$ se afasta em aproximadamente $T_\nu = 0.5\text{eV}$. O mesmo acontece com as demais curvas.

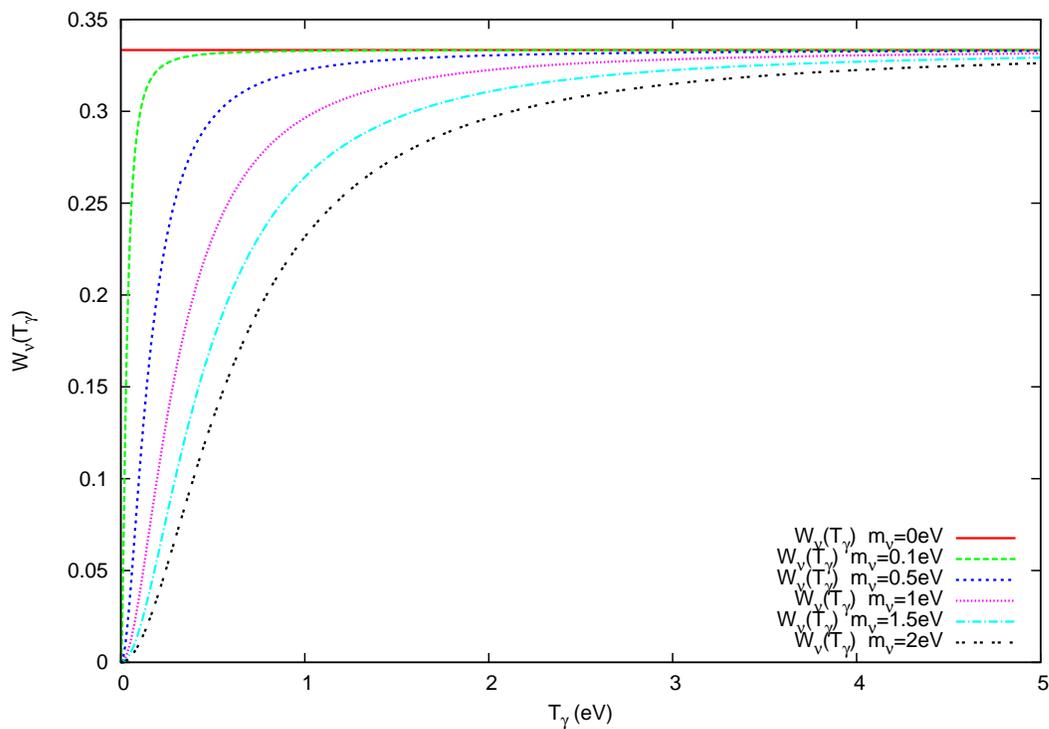


Figura 4.14: Gráfico da equação de estado com massa do neutrino $m_\nu = 0, 0.1, 0.5, 1, 1.5, 2\text{eV}$.

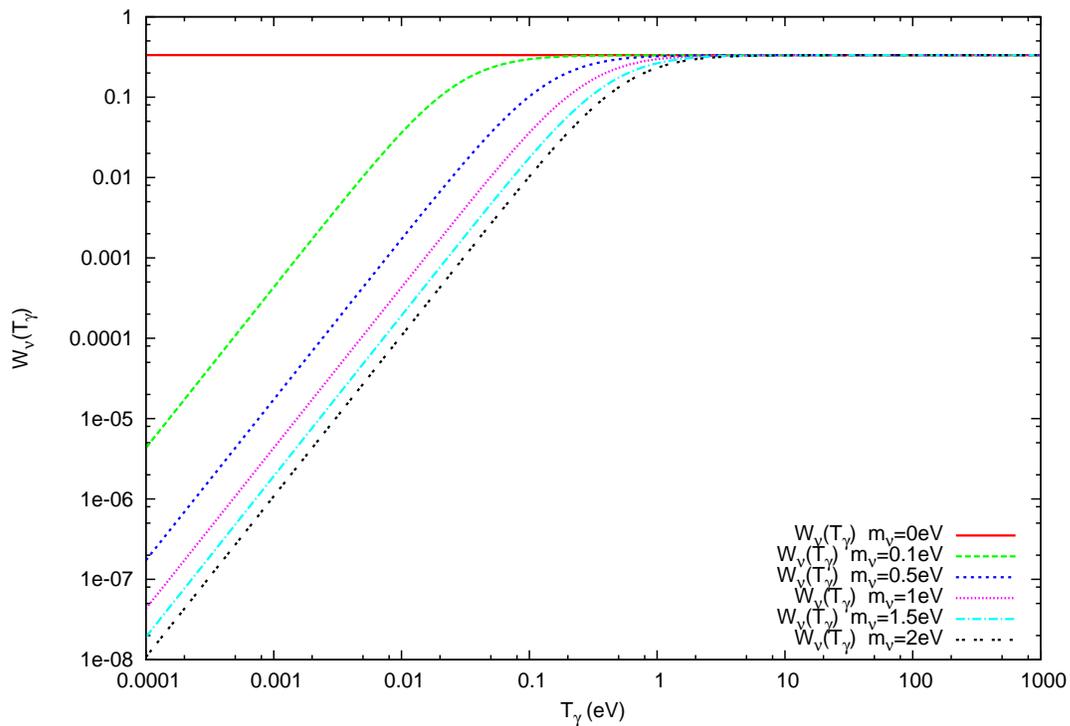


Figura 4.15: Gráfico da equação de estado (4.14) em escala logarítmica.