

3 Cosmologia

3.1 Introdução

Muitos anos antes que de os neutrinos fossem detectados experimentalmente, Alpher et al [119] notaram que eles estariam em equilíbrio térmico nos primórdios do Universo. Também notaram que a aniquilação dos pares $e^+ - e^-$ aumentaria a temperatura dos fótons, mas não dos neutrinos já desacoplados. Logo depois, Chiu e Morrison [120] calcularam a razão da interação $e^+e^- \rightarrow \nu_e\bar{\nu}_e$ no plasma, encontraram $\Gamma_\nu \sim G_F^2 T^5$. Zeldovich usou isso para calcular a temperatura em que os neutrinos desacoplaram, isto igualando a razão das interações acima mencionadas com a razão da expansão de Hubble na época onde a radiação foi dominante. Alguns anos depois, Pontecorvo e Smorodinski discutiram a possibilidade de obter limites na densidade de energia cosmológica com energia dos neutrinos com a massa da ordem de MeV, usando dados provenientes do experimento de Reines-Cowan. Anos depois, Gerstein e Zeldovich fizeram a conexão que se os neutrinos oriundos do Universo primordial quente (“neutrinos reliquia”) são massivos, então um limite sobre a soma da massa dos neutrinos poderia ser obtida com a condição que $n_\nu m_\nu < \rho_0$, sendo ρ_0 como a densidade de energia cosmológica total.

Um melhor limite de $m_\nu < 130\text{eV}$ foi encontrado por Marx e Szalat. Eles integraram numericamente a equação de Friedmann desde o desacoplamento do neutrino de múon até a época atual, colocando a condição que $t_0 < 4.5\text{Gyr}^1$. Separadamente, Cowsik e McClelland usaram diretamente limites sobre Ω e h para assim obter $m_\nu < 8\text{eV}$, assumindo que $m_\nu = m_{\nu_e} = m_{\nu_\mu}$, mas assumiram de forma errada que $T_\gamma = T_\nu$. Chegamos assim a versão moderna do limite Gerstein-Zeldovich. Eles usaram $t_0 > 10\text{Gyr}$ e $h > 0.4$ com $\Omega h^2 < 1$, e $\rho < 10.54\text{keVcm}^{-3}$, com isto eles encontraram $\Omega_\nu h^2 \sim \sum(m_\nu/94.14\text{eV})$.

Em anos recentes, cosmólogos notaram a importância que têm os neutrinos no início do Universo, em muitas formas, por exemplo, o número de espécies de neutrinos

¹1yr = 31556925.2s

afeta a nucleossíntese do Big Bang (Big Bang Nucleosynthesis-BBN), a qual define a composição dos elementos leves no Universo. Com esse argumento pode se dizer que o número de espécies dos neutrinos é de três, sendo de acordo com o número determinado no CERN, no experimento LEP, no qual mediram a largura invisível do espectro de bóson Z. Também nas anisotropias da Radiação Cósmica de Fundo de Microondas (Cosmic Microwave Background Radiation-CMBR), na formação de estruturas a grandes escalas (Large Scale Structure-LSS), sob forma de matéria escura quente.

Os neutrinos relíquia que desacoplaram do resto do plasma primordial quando o Universo tinha cerca de um segundo de idade, são a segunda partícula mais abundante no Universo depois dos fótons, com a densidade de número um pouco menor, só por um fator de 3/11 por cada família. Mas detectar diretamente os neutrinos relíquia é um dos grandes desafios científicos nos inícios do século 20, isto devido à interação fraca que eles tem com a matéria.

Neste capítulo fazemos uma breve revisão do modelo padrão da cosmologia. Começamos revisando alguns elementos da Relatividade Geral, logo obtemos a métrica de Robertson-Walker. A partir desta métrica, discutimos algumas propriedades da propagação da luz, e construímos a expressão para a distância de luminosidade, a qual usaremos no capítulo 5 onde mostramos os resultados. Ainda neste capítulo, estudamos a função de distribuição dos neutrinos, com o qual concluiremos que, mesmo que os neutrinos sejam hoje não-relativísticos, eles são descritos pela mesma função de distribuição usada para partículas relativísticas.

3.2 Elementos de Relatividade Geral

O modelo Cosmológico está baseado na solução das equações de Einstein, levando em consideração o princípio cosmológico de homogeneidade e isotropia. A equação da gravidade de Einstein é dado por

$$\mathcal{R}^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\mathcal{R}g^{\mu\nu} = 8\pi G_N T^{\mu\nu} + \Lambda g^{\mu\nu}, \quad (3.1)$$

onde $g^{\mu\nu}$ é o tensor métrico² do espaço-tempo, Λ e G_N são a constante cosmológica e a constante de Newton; $T^{\mu\nu}$ é tensor momento-energia. Em um espaço-tempo plano³ $g^{\mu\nu}$ se reduz ao limite de Minkowski definido como $diag(1, -1, -1, -1)$, isso é o tensor

²Aqui as letras gregas definem o espaço quadridimensional $\alpha, \beta=0,1,2,3$

³o qual depende do observador

métrico da relatividade especial. O *tensor de Ricci*⁴ $\mathcal{R}^{\mu\nu}$ e o *escalar de Ricci* \mathcal{R} são definidos por

$$\mathcal{R}^{\mu\nu} = \mathcal{R}_\alpha^{\alpha\nu\mu}, \mathcal{R} = \mathcal{R}_\nu^\nu, \quad (3.2)$$

onde $\mathcal{R}_{\nu\rho\sigma}^\mu$ é o tensor de *Riemann* definido como

$$\mathcal{R}_{\nu\rho\sigma}^\mu = \frac{\partial\Gamma_{\nu\sigma}^\mu}{\partial x^\rho} - \frac{\partial\Gamma_{\nu\rho}^\mu}{\partial x^\sigma} + \Gamma_{\eta\rho}^\mu\Gamma_{\nu\sigma}^\eta - \Gamma_{\eta\sigma}^\mu\Gamma_{\nu\rho}^\eta. \quad (3.3)$$

O símbolo de Christoffel é definido como

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\mu = \frac{1}{2}g^{\mu\rho} \left(\frac{\partial g_{\beta\rho}}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial g_{\alpha\rho}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\rho} \right), \quad (3.4)$$

e o intervalo de tempo próprio $d\tau$ é:

$$d\tau^2 = g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta. \quad (3.5)$$

Na relatividade geral, vetores e tensores têm propriedades de transformação definidas sob transformações de coordenadas $x \rightarrow x'$, vetores contravariantes V^μ e covariantes W_μ seguem as leis de transformação

$$V'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} V^\nu, \quad W'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} W_\nu, \quad (3.6)$$

assim o produto $V.W = V^\mu W_\mu$ é invariante sob transformações de coordenadas. As transformações anteriores podem ser generalizadas para tensores com índices contravariantes e covariantes. Um tensor covariante $V_{\gamma\lambda}$ transforma como

$$V'_{\gamma\lambda} = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\gamma} \frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\lambda} V_{\rho\tau}, \quad (3.7)$$

um tensor contravariante transformaria como

$$U'^{\alpha\beta} = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\kappa} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\sigma} U^{\kappa\sigma}. \quad (3.8)$$

Como um exemplo, podemos transformar o tensor métrico que aparece em (3.1), ele é um tensor contravariante e transforma segundo (3.9), assim

$$g'^{\mu\nu} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\xi} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\delta} g^{\xi\delta}, \quad (3.9)$$

$g^{\alpha\beta}$ tem uma matriz inversa que é um tensor covariante, isso é

$$g^{\mu\nu} g_{\mu\beta} = \delta_\beta^\nu. \quad (3.10)$$

⁴Estamos considerando a notação de soma de Einstein:

$$A'_i = \sum_j \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} A_j \quad \rightarrow \quad A'_i = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} A_j,$$

quando um índice no termo principal aparece duas vezes então a soma é feita sobre estes índices, e o sinal de somatória não é necessário.

Já o símbolo de Christoffel não é um tensor porque ele transforma como:

$$\Gamma'_{\alpha\beta}{}^{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\beta}} \Gamma_{\rho\sigma}{}^{\nu} + \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial^2 x^{\nu}}{\partial x'^{\alpha} \partial x'^{\beta}}. \quad (3.11)$$

Muitos sistemas macroscópicos podem ser considerados com boa aproximação como *fluidos perfeitos*, isso quer dizer, sistemas no qual um observador viajando à velocidade do fluido, o vê como isotrópico. O tensor que descreve este tipo de fluido é o tensor energia momentum, e é definido por:

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)u^{\mu}u^{\nu} - pg^{\mu\nu}, \quad (3.12)$$

onde ρ é a densidade de energia, p é a pressão e u é a quadri-velocidade do fluido.

A conservação da energia implica que para um volume V

$$d(\rho a^3) + Pd(a^3) = 0, \quad (3.13)$$

onde a é o fator de escala do Universo que será definido na seção 3.3 e $V \propto a^3$. A equação (3.13) é a equivalente à primeira lei da termodinâmica

$$dQ = dU + dL, \quad (3.14)$$

onde $dQ = 0$ é o calor dado ao sistema, $dU = d(\rho a^3)$ é a variação da energia interna, e $dL = pd(a^3)$ é o trabalho feito pelo sistema. Temos

$$d(\rho a^3) = -pd(a^3), \quad (3.15)$$

abrindo estas derivadas temos

$$\rho d(a^3) + a^3 d\rho = -pd(a^3), \quad (3.16)$$

somando $a^3 d\rho$ a cada lado da equação (3.16) obtemos

$$(\rho + p)d(a^3) + a^3 d\rho + a^3 d\rho = a^3 d\rho. \quad (3.17)$$

Assim, podemos escrever (3.15) de outra forma

$$d[a^3(\rho + p)] = a^3 d\rho. \quad (3.18)$$

Para uma equação de estado $p = w\rho$ onde w é constante, temos

$$d[a^3(1 + w)\rho] = a^3 d\rho \quad (3.19)$$

e abrindo a equação (3.19) para reagrupar termos e lembrando que $p = w\rho$, com w constante

$$(1 + w)\rho d(a^3) + a^3(1 + w)d\rho = a^3 w d\rho. \quad (3.20)$$

Reordenando termos em (3.20)

$$(1 + w)\rho d(a^3) = -a^3 d\rho \quad (3.21)$$

e integrando (3.21) obtemos

$$\rho \propto a^{3(1+w)}. \quad (3.22)$$

Matéria implica partículas não-relativísticas e pressão zero $p_M = 0$, enquanto radiação implica $p_R = \frac{1}{3}\rho_R$.

$$\rho_M \propto a^3 \quad (\text{matéria}), \quad (3.23)$$

$$\rho_R \propto a^4 \quad (\text{radiação}), \quad (3.24)$$

$$\rho_\Lambda \propto \text{constante} \quad (\text{energia do vácuo}). \quad (3.25)$$

3.3

A métrica Robertson-Walker

No modelo padrão da cosmologia supõe-se que a matéria e a radiação podem ser aproximadas a um fluido perfeito, em grandes escalas, e seguidamente, basamos-nos em recentes resultados de experimentos como WMAP, Boomerang e outros (e os quais estão em acordo com o princípio cosmológico de homogeneidade e isotropia em grandes escalas (da orden de 100Mpc)). Definimos a geometria do espaço-tempo, que pode ser descrita pela métrica de Robertson-Walker representando um Universo espacialmente homogêneo e isotrópico, o qual será discutido nesta seção.

Em um espaço tridimensional com curvatura constante o tensor de Riemann é dado por

$$R_{abcd} = K(g_{ac}g_{bd} - g_{ad}g_{bc}), \quad (3.26)$$

onde os índices romanos variam de 1 a 3, e K é uma constante chamada de curvatura. A geometria do espaço é assim definida pelo sinal de K .

Contraindo (3.26) com g^{ac} temos

$$g^{ac}R_{abcd} = R_{bd},$$

de modo que

$$R_{bd} = K(3g_{bd} - g_{bd}), \quad (3.27)$$

$$R_{bd} = 2K g_{bd}.$$

Como o espaço tridimensional é isotrópico em torno de cada ponto, o elemento pode ser escrito na forma

$$d\sigma^2 = g_{ab}dx^a dx^b = e^\lambda dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (3.28)$$

Com (3.28) consegue-se manter a condição de isotropia, pois $r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$ tem simetria esférica e é invariante sob rotações, com isto, embora o sistema rode vamos ter a mesma medida para dois observadores em uma posição diferente com um r

constante.

As componentes não-nulas do tensor de Ricci são

$$R_{11} = \frac{\lambda}{r}, \quad (3.29)$$

$$R_{22} = \text{cosec}^2\theta, \quad (3.30)$$

$$R_{33} = 1 + \frac{1}{2}re^{-\lambda}\lambda - e^{-\lambda}. \quad (3.31)$$

Segundo a condição (3.27) para o espaço curvo teremos apenas duas equações não triviais

$$\frac{\lambda}{r} = 2Ke^\lambda, \quad (3.32)$$

$$1 + \frac{1}{2}re^{-\lambda}\lambda - e^{-\lambda} = 2Kr^2. \quad (3.33)$$

De (3.32) temos

$$e^{-\lambda}d\lambda = 2Krd r \quad (3.34)$$

$$-e^{-\lambda} = Kr^2 + C \quad (3.35)$$

$$e^\lambda = \frac{1}{Kr^2 + C} \quad (3.36)$$

com $r \ll 1$ para um espaço de Minkowski plano $C = 1$, com esta aproximação temos

$$e^\lambda = \frac{1}{1 - Kr^2}. \quad (3.37)$$

Assim obtém-se que a métrica para um espaço com curvatura constante é

$$d\sigma^2 = \frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (3.38)$$

O elemento de linha pode ser escrito como

$$ds^2 = f(x^a, t)dt^2 - h_{ab}(x^a, t)dx^a dx^b. \quad (3.39)$$

Para um observador co-móvel ($dx^a = 0$), o elemento de linha representa o tempo próprio medido por esse observador, pela condição de isotropia e homogeneidade, todos os observadores têm que medir o mesmo tempo, de modo que $f(x^a, t)$ não pode depender da posição x^a . Assim, a função deve depender somente do tempo $f(t)$. Com isto o elemento de linha (3.39) fica

$$ds^2 = f(t)dt^2 - h_{ab}(x^a, t)dx^a dx^b. \quad (3.40)$$

Podemos redefinir a variável temporal como $dt' = \sqrt{f(t)}dt$ de modo que

$$ds^2 = dt'^2 - h(x^a, t)_{ab}dx^a dx^b. \quad (3.41)$$

Consideremos que temos três pontos em um espaço tridimensional e um tempo t_1 ,

cada um separados por uma distância fixa co-móvel δx^a . A distância própria de cada ponto evolui de tal forma que ela tem que depender somente do tempo e não da posição, isto devido à homogeneidade e isotropia do espaço. Desta forma, se consideramos os 3 pontos em um tempo t_2 , a forma geométrica será igual a vista no tempo t_1 , mas o tamanho não será o mesmo, estando multiplicado por um fator chamado de “fator de escala” $a(t)$. Com isto teremos

$$h_{ab} = [a(t)]^2 d\sigma(x^a), \quad (3.42)$$

e das equações (3.42), (3.38) e (3.41) obteremos o elemento de linha

$$ds^2 = dt^2 - [a(t)]^2 \left(\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2) \right). \quad (3.43)$$

Esta é a conhecida métrica de Robertson-Walker.

Na média, as galáxias estão em repouso no referencial co-móvel que descreve a métrica Robertson-Walker, o qual é definido como o sistema de referência no qual a radiação cósmica de fundo é isotrópica. K é definida como:

$$K = \begin{cases} < 0 & \text{universo hiperbólico,} \\ 0 & \text{universo plano,} \\ > 0 & \text{universo esférico} \end{cases} \quad (3.44)$$

3.4

Propagação da luz

Na seção 3.3 definimos o fator de escala $a(t)$, mas não sabemos se esse fator de escala está crescendo ou diminuindo. A maneira que temos para determinar isto é analisando a informação que nos chega do Universo em forma de “luz”. A análise consiste em comparar a mudança nas linhas espectrais da frequência da luz, de alguma fonte no Universo (uma galáxia por exemplo) com os dados observados na Terra. Nesta seção vamos discutir essa mudança nas linhas espectrais relacionando o fator de escala com a frequência da luz emitida pela fonte e a observada na Terra. Concluiremos que o fator de escala está crescendo e como consequência disso a frequência da luz terá um aumento, isso é chamado de “desvio para o vermelho”.

Uma forma simples de ver o desvio para o vermelho é a partir da mecânica quântica, quando a partícula propaga, o comprimento de onda associado a ela é

proporcional a $\lambda = h/p$, onde h é a constante de Planck e p é o momento da partícula. Como discutir-se-á na seção 3.6, o momento devido à expansão do Universo é escalado por a^{-1} , se o momento muda então o comprimento de onda tem que mudar também. O comprimento de onda em um tempo t_0 que é quando o raio de luz chega ao observador terá um comprimento de onda λ_0 , para um tempo t_1 que é quando o raio sai da fonte terá um comprimento de onda λ_1 , isto pode ser relacionado da seguinte forma

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_0} = \frac{a(t_1)}{a(t_0)}. \quad (3.45)$$

Quando o Universo se expande, o comprimento de onda mudará com esta expressão. Neste caso, o comprimento de onda aumentará e isto é conhecido como desvio para o vermelho.

Se consideramos a métrica de Robertson-Walker (3.43), podemos chegar ao mesmo resultado mas a partir de um ponto de vista clássico. Se consideramos que a luz que sai de um ponto P , descreve uma trajetória radial até o observador que está na origem de coordenadas O , fazemos na métrica (3.43) $d\theta = \phi = 0$, e com $d^2S = 0$ para obter uma geodésica radial nula. Teremos

$$\frac{dt}{a(t)} = \pm \frac{dr}{(1 - Kr^2)^{\frac{1}{2}}}. \quad (3.46)$$

Considerando um raio saindo de uma galáxia P com uma linha de Universo r_1 em um tempo t_a e chegando em O em um tempo t_b , então

$$\int_{t_a}^{t_b} \frac{dt}{a(t)} = - \int_{r_1}^0 \frac{dr}{(1 - Kr^2)^{\frac{1}{2}}} = f(r_1), \quad (3.47)$$

onde

$$f(r_1) = \begin{cases} \sqrt{K} \operatorname{sen}^{-1} r_1 & K > 0, \\ r_1 & K = 0, \\ \sqrt{K} \operatorname{senh}^{-1} r_1 & K < 0. \end{cases} \quad (3.48)$$

Agora, vamos considerar dois raios de luz, um saindo de P em um tempo t_1 e outro em um tempo $t_1 + dt$ e chegando em O nos tempos t_0 e $t_0 + dt_0$. Então da equação (3.47) temos que

$$\int_{t_1+dt_1}^{t_0+dt_0} \frac{dt}{a(t)} - \int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_0}^{t_0+dt_0} \frac{dt}{a(t)} - \int_{t_1}^{t_1+dt_1} \frac{dt}{a(t)} = 0. \quad (3.49)$$

Se dt_0 é muito pequeno, $\lambda = \delta t \ll t$ temos que

$$\frac{dt_0}{a(t_0)} = \frac{dt_1}{a(t_1)}. \quad (3.50)$$

Desta forma os intervalos dt_1 e dt_2 são os intervalos de tempo próprios entre

o raio medido pela fonte e o observador, por isso o intervalo medido por O é $\frac{a(t_0)}{a(t_1)}$ vezes o intervalo medido por P .

Em um Universo em expansão

$$t_0 > t_1 \rightarrow a(t_0) > a(t_1),$$

de (3.50) pode-se dizer que a luz sofre um desvio para o vermelho z dado por

$$1 + z = \frac{\nu_1}{\nu_0} = \frac{a(t_0)}{a(t_1)}, \quad (3.51)$$

onde ν_1 e ν_0 são, respectivamente, as frequências do sinal emitido pela fonte em $t = t_1$, e medido pelo observador em $t = t_0$. O desvio para o vermelho será

$$z = \frac{\lambda_0 - \lambda_1}{\lambda_1}. \quad (3.52)$$

Como a frequência ν é inversamente proporcional ao comprimento de onda λ , pode ser reescrita como

$$z = \frac{\nu_1}{\nu_0} - 1. \quad (3.53)$$

3.5

Distância de Luminosidade.

Uma das formas que temos de conhecer qual é a distância entre uma fonte que está fora de nossa galáxia e nós, é medindo a luminosidade aparente da fonte, que é o valor medido a partir da Terra. Isso é possível se já conhecemos a luminosidade absoluta, que é aquela medida por um observador co-móvel à fonte. Nesta seção veremos como é possível fazer este tipo de medida, isto usando o fator de escala $a(t)$ e o desvio para o vermelho z definido na seção 3.4.

Consideremos um detector com um espelho de raio b , o qual detectará os raios de luz vindos de uma fonte localmente inercial. Consideremos agora um vetor unitário que sai do centro do detector até o centro da fonte. Este vetor unitário fará um ângulo sólido com os raios de luz vindos da fonte, os quais serão paralelos a este vetor unitário e tangentes ao espelho do detector. Esse ângulo sólido está dado por

$$\pi|\epsilon|^2 = \frac{\pi b^2}{a^2(t_0)r_1^2}, \quad (3.54)$$

onde r_1 é o raio que sai do detector até a fonte, e $a(t_0)$ é o fator de escala.

A fração de raios distribuídos isotropicamente no espelho do detector é

$$\frac{|\epsilon|^2}{4} = \frac{A}{4\pi a^2(t_0)r_1^2}, \quad (3.55)$$

onde A é a área própria do espelho no detector $A = \pi b^2$.

Cada fóton emitido com energia $h\nu_1$ terá uma energia desviada para o vermelho dada por $h\nu_1 \frac{a(t_1)}{a(t_0)}$, e fótons emitidos num intervalo de tempo δt_1 chegarão em intervalos de tempo $\delta t_1 \frac{a(t_0)}{a(t_1)}$, onde t_1 é o tempo em que o fóton é emitido e t_0 é o tempo em que o fóton é detectado. Então, a potência recebida pelo espelho é

$$P = L \left(\frac{a(t_1)}{a(t_0)} \right)^2 \left(\frac{A}{4\pi a^2(t_0) r_1^2} \right), \quad (3.56)$$

e a luminosidade aparente é

$$l = \frac{P}{A} = \left(\frac{L a^2(t_1)}{4\pi a^4(t_0) r_1^2} \right). \quad (3.57)$$

Num espaço Euclidiano a luminosidade aparente de uma fonte em repouso a uma distância d é $L/4\pi d^2$, desta forma podemos definir a distância de luminosidade como

$$d_L = \left(\frac{L}{4\pi l} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (3.58)$$

e usando (3.57) podemos reescrevê-la como

$$d_L = a^2(t_0) \frac{r_1}{a(t_1)}. \quad (3.59)$$

Usando as equações (3.51), (3.46) e (3.47) obtemos

$$d_L(z) = a(t_0)(1+z)r_1. \quad (3.60)$$

A distância de luminosidade d_L deve ser escrita em termos de quantidades observáveis independentes do sistema de coordenadas, por isso temos que reescrever o termo $a(t_0)r_1$. Para isso usa-se um resultado para os fótons que viajam em geodésicas nulas radiais, dados por (3.46) e (3.47)

$$\chi = \int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \frac{1}{a(t_0)} \int_0^z \frac{dz'}{H(z')}, \quad (3.61)$$

onde usamos a relação entre a e z (3.51), e a definição $H = \dot{a}/a$. A quantidade χ é chamada distância própria.

$$\chi = f(r_1) \rightarrow \sqrt{k}r_1 = f_k(\sqrt{k}\chi), \quad (3.62)$$

onde

$$f_k(x) = \begin{cases} \text{sen}(x) & k > 0, \\ x & k = 0, \\ \text{senh}(x) & k < 0 \end{cases} \quad (3.63)$$

Para expressar k em termos de observáveis usamos a equação de Friedmann

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2}, \quad (3.64)$$

escrita como

$$(\Omega - 1)a^2H^2 = k, \quad (3.65)$$

onde se vê que a curvatura é nula se $\Omega = 1$, e Ω é a soma de todas as componentes da densidade de energia. Isto é

$$\Omega = \sum_i \Omega_i = \sum_i \frac{\rho_i}{\rho_c}, \quad (3.66)$$

onde $\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}$ é a densidade de energia crítica e $i = m, r, \Lambda, \nu$. Usando (3.65) podemos escrever

$$\sqrt{k} = a(t_0)H_0\sqrt{\Omega_0 - 1}. \quad (3.67)$$

Sendo Ω_0 o parâmetro de densidade atual e H_0 a constante de Hubble, podemos agora escrever

$$a(t_0)r_1 = \frac{1}{H_0\sqrt{\Omega_0 - 1}}f_K \left(H_0\sqrt{\Omega_0 - 1} \int_0^z \frac{dz'}{H(z')} \right), \quad (3.68)$$

e a distância de luminosidade será então

$$d_L(z) = \frac{(1+z)}{H_0\sqrt{\Omega_0 - 1}}f_K \left(H_0\sqrt{\Omega_0 - 1} \int_0^z \frac{dz'}{H(z')} \right). \quad (3.69)$$

Assim $d_L(z)$ fica expressa somente em função de quantidades físicas de sistema de coordenadas que podem ser, em princípio, medidas observacionalmente. Vê-se que a equação (3.69) depende de $H(z)$, para encontrar essa relação temos que expressar a equação de Friedmann

$$H^2(a) = \frac{8\pi G}{3} \sum_i \rho_i - \frac{k}{a^2} = H_0^2 \left(\sum_i \Omega_{i0} \frac{\rho_i}{\rho_{i0}} + \Omega_{k0} \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-2} \right). \quad (3.70)$$

A densidade de energia em função do fator de escala $\rho(a)$ pode ser obtida a partir da equação (3.22), como também a partir da equação da conservação da energia $\dot{\rho} = -3H(\rho + P)$. Fazendo

$$\dot{\rho} = -3\frac{\dot{a}}{a}\rho(1+w), \quad (3.71)$$

onde $w = P/\rho$ é a equação de estado. Se w é constante, integrando temos:

$$\int \frac{d\rho}{\rho} = -3(1+w) \int \frac{da}{a}, \quad (3.72)$$

$$\ln(\rho) = -3(1+w)\ln(a) + C,$$

$$\rho(a) = Ca^{-3(1+w)},$$

onde o valor de C é:

$$C = \frac{\rho_o}{a_o^{-3(1+w)}},$$

e substituindo o valor de C temos:

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-3(1+w)}. \quad (3.73)$$

Já com esta equação podemos ver a dependência das diferentes densidades de energia com o parâmetro de escala a . Por exemplo, para a radiação a equação de estado é $w = 1/3$, então

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-4} \quad (3.74)$$

e para bárions $w = 0$

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-3}. \quad (3.75)$$

Para a densidade de energia escura temos $w = -1$

$$\frac{\rho}{\rho_0} = 1. \quad (3.76)$$

Ou seja, vemos que ela não depende do parâmetro de escala.

A densidade de alguma outra componente será denotada por ρ_x para diferenciá-la das demais densidades de energia, onde

$$g_x = \frac{\rho_x}{\rho_{x0}}. \quad (3.77)$$

Com (3.74), (3.75), (3.76) e (3.70) escrevemos o parâmetro de Hubble como:

$$H(z) = H_0 \sqrt{\Omega_{x0} g_x(z') + \Omega_{m0}(1+z')^3 + \Omega_{r0}(1+z')^4 + \Omega_{k0}(1+z')^2 + \Omega_{\Lambda}}. \quad (3.78)$$

Finalmente a distância de luminosidade pode ser escrita da seguinte forma

$$d_L(z) = \frac{(1+z)}{H_0 \sqrt{\Omega_0 - 1}} f_K \left(\sqrt{\Omega_0 - 1} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')} \right), \quad (3.79)$$

onde

$$E(z') = \sqrt{\Omega_{x0} g_x(z') + \Omega_{m0}(1+z')^3 + \Omega_{r0}(1+z')^4 + \Omega_{k0}(1+z')^2 + \Omega_{\Lambda}}, \quad (3.80)$$

e Ω_{k0} é definido como

$$\Omega_{k0} = 1 - \Omega_0 = 1 - \Omega_{x0} - \Omega_{m0} - \Omega_{r0} - \Omega_{\Lambda}. \quad (3.81)$$

Em (3.80) temos que Ω_{m0} é a densidade de matéria, Ω_{r0} é a densidade de energia da radiação, Ω_0 é a densidade de energia total no Universo e Ω_{Λ} é a densidade de energia do vácuo. Com isso determina-se por completo a distância de luminosidade prevista por um modelo teórico, e portanto podem-se comparar os dados de um determinado modelo com os dados observacionais e ver a consistência entre eles.

3.6 Movimento Geodésico

Em um espaço de Minkowski, uma geodésica é definida como a reta que une dois pontos, já para um espaço curvo, uma geodésica é a menor curva que une dois pontos e que não necessariamente é uma reta.

Nesta seção apresentaremos uma discussão acerca do movimento geodésico, representado pela equação:

$$\frac{du^\mu}{d\tau} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu u^\alpha u^\beta = 0 \quad (3.82)$$

onde $u^\mu = (u^0, u^i) = (\gamma, \gamma v^i)$ é a quadrivelocidade da partícula, com $v^i = dx^i/dt$ e $\gamma = (1 - |\vec{v}|^2)^{-1/2}$. No caso do Universo homogêneo e isotrópico descrito pela métrica de Robertson-Walker (3.43), a componente $\mu = 0$ e as componentes que ficam no símbolo de Christoffel são $\Gamma_{kj}^0 = -g_{kj}\dot{a}/a$, assim temos

$$\frac{du^0}{d\tau} + \frac{\dot{a}}{a} |\vec{u}|^2 = 0, \quad (3.83)$$

onde $|\vec{u}|^2 = -g_{kj}u^k u^j$, se temos $(u^0)^2 - |\vec{u}|^2 = 1$ e $u^0 du^0 = |\vec{u}| d|\vec{u}|$. Substituindo em (3.83) temos

$$\frac{1}{u^0} \frac{d|\vec{u}|}{d\tau} + \frac{\dot{a}}{a} |\vec{u}| = 0. \quad (3.84)$$

Finalmente, com $u^\mu = \frac{dx^\mu}{dt}$ como a quadrivelocidade, podemos fazer $u^0 = \frac{dt}{d\tau}$ obtendo

$$\frac{|\dot{\vec{u}}|}{|\vec{u}|} = -\frac{\dot{a}}{a}. \quad (3.85)$$

Integrando temos

$$\ln(|\vec{u}|) \sim -\ln(a(t)), \quad (3.86)$$

isto é

$$|\vec{u}| \sim a^{-1}, \quad (3.87)$$

com $p^\mu = mu^\mu$ podemos fazer

$$|\vec{p}| \propto a^{-1}. \quad (3.88)$$

Assim, para um Universo em expansão teríamos

$$|\vec{p}| = |\vec{p}|_{\nu-des} \left(\frac{a}{a_{\nu-des}} \right)^{-1}. \quad (3.89)$$

Quando os neutrinos sofrem o desacoplamento do plasma primordial eles ficam livres e têm um momento com um desvio para o vermelho dado por (3.89).

3.7 A função de distribuição dos neutrinos

A evolução da densidade de energia e da pressão dos neutrinos tem duas épocas bem definidas: a primeira, no Universo primordial quando os elétrons, fótons

e neutrinos estavam em equilíbrio térmico; a segunda, quando os neutrinos se desacoplaram e ficaram livres do plasma primordial. Esse desacoplamento foi devido ao caminho médio dos neutrinos tornar-se comparável em ordem de grandeza à taxa de expansão do Universo.

Nesta seção vamos discutir a evolução da densidade de energia e da pressão dos neutrinos para as duas épocas, a do equilíbrio térmico e a do desacoplamento dos neutrinos.

3.7.1

A função de distribuição no equilíbrio térmico

A matéria e radiação nos primórdios do Universo estiveram em equilíbrio térmico devido à rápida interação das partículas. Neste caso, cada espécie das partículas presentes no Universo primordial formavam um gás o qual interagia muito fortemente, com densidade de número n_χ , densidade de energia ρ_χ e pressão P_χ dados por:

$$n_\chi = \frac{g_\chi}{(2\pi)^3} \int f_\chi(\vec{p}) d^3p, \quad (3.90)$$

$$\rho_\chi = \frac{g_\chi}{(2\pi)^3} \int E_\chi(\vec{p}) f_\chi(\vec{p}) d^3p, \quad (3.91)$$

um

$$P_\chi = \frac{g_\chi}{(2\pi)^3} \int \frac{|\vec{p}|^2}{3E_\chi(\vec{p})} f_\chi(\vec{p}) d^3p, \quad (3.92)$$

onde g_χ é o número de graus internos de liberdade (spin), e $E_\chi(\vec{p})^2 = |\vec{p}|^2 + m_\chi^2$ é a energia de cada espécie no plasma primordial.

A função de distribuição $f_\chi(\vec{p})$, é dada por:

$$f_\chi(\vec{p}) = \frac{1}{\exp(E_\chi - \mu_\chi)/T_\chi \pm 1}, \quad (3.93)$$

onde E_χ é a energia de cada espécie, μ_χ é o potencial químico de cada espécie, e o sinal positivo corresponde aos férmions, caso do neutrino, e o sinal negativo corresponde aos bósons, como no caso do fóton.

O potencial químico

É normalmente assumido que a assimetria da carga leptônica é muito pequena, pois a contribuição do elétron para a assimetria dos léptons é desprezada devido à neutralidade do Universo, portanto o potencial químico do elétron também deve ser desprezado. Então, a contribuição para a assimetria leptônica (se não for muito pequena) é feita pelos neutrinos. A carga leptônica é a diferença entre os neutrinos e anti-neutrinos.

Embora os neutrinos de fundo cosmológico não podem ser observados diretamente, sua assimetria pode ser estimada. Hoje sabemos que a assimetria do

número bariônico é muito pequena, e portanto, os potenciais químicos dos bárions também. Isto é conferido por vários resultados de dados cosmológicos como WMAP e é coerente com o modelo de BBN⁵. A expressão

$$\eta \sim \frac{n_B}{n_\gamma} \sim 10^{-9} \quad (3.94)$$

é a comparação entre a carga bariônica e bosônica [7].

Por outro lado, a assimetria dos léptons está diretamente relacionada com os potenciais químicos dos neutrinos, e não necessariamente é igual ou comparável à assimetria dos bárions. Como não existe uma única teoria sólida que nos diga o valor numérico do potencial químico dos neutrinos, ele tem que ser determinado a partir de dados cosmológicos observados (as abundâncias dos elementos leves) e a teoria que conhecemos como BBN.

Se olharmos o gráfico (FIG 1) do artigo[121], vemos a abundância de He como função de $\xi = \mu_\nu/T$. Se o valor de ξ for grande(pequeno), esperar-se-ia menos(mais) He no Universo. Se ξ for grande(pequeno) ter-se-ia mais ν_e de que $\bar{\nu}_e$ (mais $\bar{\nu}_e$ do que ν_e), isto influencia a razão entre o nêutron e o próton (n/p) através das reações



Para que os dados de abundância de He concordem com os dados da previsão teórica que vem do modelo de BBN, os valores de ξ têm que estar em certo intervalo que é $-0.046 < \xi < 0.072$ [121]. Deste modo podemos fazer o potencial químico $\mu \simeq 0$ na função de distribuição da equação para a densidade de energia (3.91).

3.7.2

A função de distribuição dos neutrinos depois do desacoplamento

As equações (3.90), (3.91) e (3.92) são as que descrevem o comportamento de cada espécie de partícula na época do equilíbrio térmico (elétrons, fótons e neutrinos). E pelas razões apresentadas na seção anterior, pode-se aproximar o potencial químico a $\mu = 0$. Nesta seção vamos discutir qual a temperatura em que os neutrinos sofrem

⁵O BBN é uma teoria a qual foi desenvolvida por Alpher, Bethe, Gamow e Herman, eles disseram que devido a certas condições que aconteceram no Universo primordial, fez-se possível a formação de núcleos leves. A sua intuição os levou à predição da existência da CMBR (radiação cósmica de fundo), a qual foi descoberta anos depois por Penzias e Wilson. Os estudos deixaram claro que o BBN é responsável pela formação de 4 isótopos leves ^2He , ^3He , ^4He e ^7Li .

o desacoplamento e qual será a função que descreverá seu comportamento depois do desacoplamento.

O Universo esteve em equilíbrio térmico devido à rápida interação das partículas que nesse momento o compõem. Como foi visto na seção 3.4, o Universo está se expandindo e a temperatura cai como $T \propto a^{-1}$, então ele está se esfriando. Enquanto o Universo continua se expandindo as partículas continuam sua interação até que o neutrino, devido à sua interação fraca com as outras partículas, desacopla do plasma primordial de uma forma quase instantânea. Quando o neutrino se desacopla ainda é relativístico, pois se comparamos a temperatura do Universo primordial com a energia da massa em repouso do neutrino, esta última pode ser desprezada, ou seja, o neutrino seria considerado como de massa zero e por isso relativístico; esse neutrino é chamado de “reliquia quente”.

Da seção 3.6 sabemos que o momento de uma partícula tem um desvio para o vermelho dado por (3.89), e da seção do potencial químico sabemos que podemos aproximá-lo a zero $\mu_\nu = 0$, com⁶ $T_\nu^{\nu-des} = T_\gamma^{\nu-des}$ no momento do desacoplamento do neutrino. Depois do desacoplamento temos:

$$f_\nu(\vec{p}) = \left[\exp \left(\frac{\sqrt{|\vec{p}|^2 (a/a_{\nu-des})^2 + m_\nu^2}}{T_\nu^{\nu-des}} \right) \pm 1 \right]^{-1}, \quad (3.98)$$

como o neutrino é relativístico então temos que $T_\gamma^{\nu-des} \gg m_\nu$. Desse modo a equação da função de distribuição fica

$$f_\nu(\vec{p}) \simeq \left[\exp \left(\frac{|\vec{p}|(a/a_{\nu-des})}{T_\nu^{\nu-des}} \right) \pm 1 \right]^{-1}, \quad (3.99)$$

utilizando que

$$T_\nu = T_\gamma^{\nu-des} \left(\frac{a}{a_{\nu-des}} \right)^{-1}, \quad (3.100)$$

obtemos a função de distribuição

$$f(\vec{p}) \simeq \frac{1}{e^{\frac{p}{T_\nu}} + 1}. \quad (3.101)$$

A partícula mantém a função de distribuição relativística depois do desacoplamento, e mesmo que a partícula chegue a ser não relativística ela continua⁷ sendo descrita pela mesma função de distribuição.

⁶ $T_\nu^{\nu-des}$ é a temperatura do neutrino no momento do seu desacoplamento e $T_\gamma^{\nu-des}$ é a temperatura do fóton no momento do desacoplamento do neutrino.

⁷a partícula chega a ser não-relativística porque sua massa se torna comparável à temperatura do Universo.

A temperatura do desacoplamento

No plasma primordial o neutrino se mantinha em equilíbrio térmico por meio das interações

$$\nu + \bar{\nu} \longleftrightarrow e^+ + e^-, \quad (3.102)$$

$$\bar{\nu} + e^\pm \longleftrightarrow \bar{\nu} + e^\pm. \quad (3.103)$$

A taxa das interações é dada por

$$\Gamma = n \langle \sigma v \rangle, \quad (3.104)$$

onde n é a densidade de número das partículas alvo, σ é a seção de choque, v é a velocidade do neutrino, e $\langle \sigma v \rangle \sim G_F^2 T_\gamma^2$, onde T_γ é a temperatura que determina a ordem de grandeza da energia das partículas que interagem no banho térmico, e $n \sim T_\gamma^3$. Com isso temos

$$\Gamma \sim G_F^2 T_\gamma^5. \quad (3.105)$$

O desacoplamento dos neutrinos acontece quando a taxa de interação Γ se torna comparável à variação da temperatura $|\dot{T}_\gamma/T_\gamma|$ ou à taxa de expansão H

$$\Gamma \sim H. \quad (3.106)$$

Isso quer dizer que o neutrino sofre o desacoplamento quando o seu caminho médio aumenta de tal forma que a interação fraca com as outras partículas seja tão pequena que eles conseguem sair do plasma primordial. Quando o neutrino sofre o desacoplamento temos que $T_\gamma \gg m_\nu$. Fazendo esta aproximação na equação⁸ (3.91), temos

$$\rho(T_\chi) = \begin{cases} \frac{\pi^2}{30} g_\chi T_\chi^4 & \text{para bósons,} \\ \frac{7\pi^2}{240} g_\chi T_\chi^4 & \text{para férmions} \end{cases} \quad (3.107)$$

e usando a equação de Friedmann (3.64) com $k = 0$, obtemos

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho, \quad (3.108)$$

Como na época considerada a densidade de energia foi dominada por partículas relativísticas, de (3.107)

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \frac{\pi^2}{30} g_\chi T_\chi^4, \quad (3.109)$$

e com $M_P = \sqrt{\hbar c/G}$ que é a massa de Planck⁹, temos

$$H = \frac{2\pi^{2/3}}{3\sqrt{5}M_P} \sqrt{g_\rho} T_\gamma^2 = 1.66 \frac{\sqrt{g_\rho}}{M_P} T_\gamma^2. \quad (3.110)$$

⁸As aproximações $T_\gamma \gg m_\nu$ e $T_\gamma \ll m_\nu$ serão discutidas em detalhe no capítulo 4.

⁹Lembrando que aqui estamos tomando as unidades naturais $\hbar = c = 1$

Por simplicidade tomaremos

$$H \sim \frac{T_\gamma^2}{M_P}, \quad (3.111)$$

isolando T_γ^2 obtemos

$$T_\gamma^2 \sim HM_P. \quad (3.112)$$

Agora usando (3.105) e o fato que a taxa de interação torna-se comparável à taxa de expansão do Universo (3.106) obtemos $H \sim G_F^2 T_\gamma^5$. Substituindo isto temos

$$T_\gamma^2 \sim G_F^2 T_\gamma^5 M_P, \quad (3.113)$$

cancelando a temperatura obtemos

$$(T_\gamma^{\nu_{des}})^3 \sim \frac{1}{G_F^2 M_P}, \quad (3.114)$$

onde $T_\gamma^{\nu_{des}}$ seria a temperatura da radiação cósmica de fundo por fótons quando o neutrino sofre o desacoplamento. A temperatura na qual o neutrino se desacopla é

$$T_\gamma^{\nu_{des}} \sim 1MeV. \quad (3.115)$$

Relação da temperatura do neutrino e do fóton

Vimos na equação (3.100) que a temperatura do neutrino está relacionada com a temperatura do fóton, veremos isso de uma forma mais detalhada. Vamos usar a primeira e a segunda lei da termodinâmica a qual dizem, respectivamente, $dQ = dU + dL$ e $dQ = TdS$ onde $S(T, V)$ é a função de estado chamada *entropia*, com

$$dU = d[\rho(T)V] \quad dL = p(T)dV. \quad (3.116)$$

Fazendo $TdS = dU + dL$ temos

$$TdS(T, V) = d[\rho(T)V] + p(T)dV, \quad (3.117)$$

abrindo o primeiro termo $d[\rho(T)V] = Vd\rho + \rho dV$, e organizando os termos

$$TdS(T, V) = V \frac{d\rho(T)}{dT} dT + [\rho(T) + p(T)]dV. \quad (3.118)$$

Se aplicamos derivadas parciais a (3.118) em relação a T e V , obtemos que

$$\frac{\partial S(T, V)}{\partial T} = \frac{V}{T} \frac{d\rho(T)}{dT} \frac{\partial S(T, V)}{\partial V} = \frac{\rho(T) + p(T)}{dT}, \quad (3.119)$$

onde a condição de integrabilidade

$$\frac{\partial^2 S(T, V)}{\partial V \partial T} = \frac{\partial^2 S(T, V)}{\partial T \partial V}, \quad (3.120)$$

implica que

$$\frac{dp(T)}{dT} = \frac{\rho(T) + p(T)}{T}. \quad (3.121)$$

Usando a primeira lei da termodinâmica, $dQ = TdS$ e (3.119) obtemos:

$$dS = d\left(\frac{\rho + p}{T}V\right). \quad (3.122)$$

A entropia em um volume V , a uma temperatura T , pode ser escrita como

$$S(T, V) = \frac{\rho + p}{T}V, \quad (3.123)$$

$$s = \frac{S}{V} = \frac{\rho + p}{T}, \quad (3.124)$$

Em equilíbrio térmico a entropia é conservada ($TdS=dQ=0$), e a conservação da entropia s em um Universo em expansão implica que

$$s \propto a^{-3}. \quad (3.125)$$

De (3.107) e (3.123), e lembrando que para partículas relativísticas $w = 1/3$, podemos escrever a entropia como

$$s = \frac{2\pi^2}{45}g_\chi T_\gamma^3, \quad (3.126)$$

onde g_χ é a soma dos graus de liberdade das partículas que estão nesse momento interagindo no Universo primordial.

$$g_s = \sum_{\chi=\text{Bósons}} g_\chi \left(\frac{T_\chi}{T_\gamma}\right)^4 + \frac{7}{8} \sum_{\chi=\text{Férmios}} g_\chi \left(\frac{T_\chi}{T_\gamma}\right)^4. \quad (3.127)$$

Das equações (3.126) e (3.125) podemos escrever uma relação entre o fator de escala $a(t)$ e a temperatura

$$T_\gamma \propto g_s^{-\frac{1}{3}} a^{-1}. \quad (3.128)$$

Esta equação é uma generalização da relação (3.100), a qual agora inclui as possíveis variações do número de partículas relativísticas interagindo no Universo primordial.

A fim de encontrar a relação entre a temperatura do neutrino e a do fóton, temos primeiro que entender o que nos diz a relação (3.128). Durante o esfriamento do Universo devido à expansão, para qualquer espécie de partícula que está interagindo no plasma e torna-se não-relativística, sua entropia é transferida para as partículas relativísticas que ainda ficam interagindo no plasma, isto através de uma mudança do fator $(g_s)^{-\frac{1}{3}}$. Com (3.128) podemos calcular o comportamento de T_γ e $(1+z)$ fazendo

$$T_\gamma = T_\gamma^0 \left(\frac{g^0}{g}\right)^{-\frac{1}{3}} \frac{a_0}{a} = T_\gamma^0 \left(\frac{2}{g}\right)^{-\frac{1}{3}} (1+z). \quad (3.129)$$

Em (3.129) podemos determinar a temperatura do fóton para qualquer desvio para o vermelho definindo a T_γ^0 como a temperatura da radiação cósmica de fundo hoje e

$g_s^0 = 2$ como o valor de g_γ hoje. A temperatura em que os $e^- - e^+$ desacoplaram foi $T_\gamma \simeq 0.2\text{MeV}$, passando sua entropia aos fótons por meio da aniquilação de $e^- - e^+$. Isto fez que a temperatura do fóton aumentasse e ficasse diferente da temperatura do neutrino.

De (3.127) e tendo em consideração que os fótons receberam a entropia da aniquilação $e^+ - e^-$

$$g_s = g_s^\gamma + g_s^{e^\pm} = 2 + \frac{7}{8}4 = \frac{11}{2}. \quad (3.130)$$

Substituindo em (3.129) temos

$$T_\gamma = T_\gamma^0 \left(\frac{4}{11} \right)^{\frac{1}{3}} (1+z), \quad (3.131)$$

e tendo que

$$T_\nu \propto a^{-1} \quad T_\gamma \ll T_\gamma^{\nu-des} \sim 1\text{MeV}, \quad (3.132)$$

$$T_\nu = T_\nu^0(1+z) \quad T_\gamma \ll \frac{m_\mu}{3}. \quad (3.133)$$

Comparando as equações quando $T_\gamma \gg T_\gamma^{\nu-des}$ e $T_\nu = T_\gamma$, temos

$$T_\nu^0 = \left(\frac{4}{11} \right)^{\frac{1}{3}} T_\gamma^0. \quad (3.134)$$

Infelizmente, esta previsão teórica ainda não foi conferida experimentalmente isso devido à grande dificuldade para detectar os neutrinos do fundo cosmológico devido à sua interação fraca. Como a temperatura dos fótons e dos neutrinos é escalada pelo fator a^{-1} , depois da aniquilação dos $e^+ - e^-$ eles mantêm a mesma relação da época quando a neutrino desocpla

$$T_\nu = \left(\frac{4}{11} \right)^{\frac{1}{3}} T_\gamma \simeq 0.7138T_\gamma. \quad (3.135)$$

Voltando a equação da densidade de energia (3.91)

$$\rho_\nu(\vec{p}_\nu, T_\nu) = \frac{g_\nu}{(2\pi)^3} \int E_\nu(\vec{p}_\nu) f_\nu(\vec{p}_\nu, T_\nu) d^3p, \quad (3.136)$$

e usando a equação (3.101), com $d^3p = p^2 \text{sen}\theta dp d\theta d\phi$, obtemos a função da densidade de energia

$$\rho_\nu(T_\nu) = \frac{g_\nu}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{\sqrt{p_\nu^2 + m_\nu^2} p_\nu^2 dp_\nu}{e^{\frac{p_\nu}{T_\nu}} + 1}, \quad (3.137)$$

e a equação para a pressão será

$$P_\nu(T_\nu) = \frac{g_\nu}{6\pi^2} \int_0^\infty \frac{p_\nu^4 dp_\nu}{\sqrt{p_\nu^2 + m_\nu^2} (e^{\frac{p_\nu}{T_\nu}} + 1)}. \quad (3.138)$$