

## 2

### **Análise de refletores circularmente simétricos alimentados por diagrama $n=1$**

#### 2.1.

##### **Introdução**

As aproximações da Ótica Física (PO) associadas às correntes de franja são extensamente utilizadas para determinar o diagrama de radiação de antenas refletoras. O cálculo do espalhamento produzido por refletores envolve a determinação de integrais de superfície que podem demandar considerável tempo de computação dependendo das dimensões das superfícies refletoras. Isto pode ser um fator limitante no processo de exploração das características de radiação e da busca de configurações mais compactas para antenas com feixe modelado, usualmente sintetizadas através de um processo de otimização que exige o uso recursivo do cálculo do diagrama de radiação. Para o caso de superfícies circularmente simétricas iluminados por fontes com distribuições de campos circularmente simétricas, as propriedades de simetrias podem ser utilizadas para simplificar a integração superficial de correntes, transformando a integral dupla em um integral simples. Isto reduz significante o esforço numérico necessário para determinar o diagrama de radiação permitindo que as aproximações da PO+Correntes de Franja possam ser utilizadas em um intenso processo de otimização de forma eficiente.

#### 2.2.

##### **Modelo de alimentador para $n=1$**

Para a análise a ser desenvolvida neste trabalho será considerado que refletores estão na região de campo distante das fontes e iluminados por uma onda

esférica com centro de fase na origem. Em termos da coordenadas esféricas, os campos radiados pelas fontes primárias serão descritos através do seguinte modelo:

$$\vec{E}^i(\vec{r}') = E_0 F(\theta') \frac{e^{-jkr'}}{r'} \hat{i}_p(\theta', \phi') \quad (2.1)$$

onde, o termo  $E_0$  esta associado à potência radiada,  $r'$  representa a distância do ponto de observação à origem e o vetor  $\hat{i}_p$  representa a polarização da fonte. Neste trabalho será suposto que a fonte radia uma onda linearmente polarizada, segundo a terceira definição de Ludwig [9], e com polarização principal paralela ao plano xz. Desta forma o vetor polarização é descrito pela seguinte expressão;

$$\hat{i}_p = \cos \phi' \hat{i}_{\theta'} - \text{sen} \phi' \hat{i}_{\phi'} \quad (2.2)$$

onde  $\hat{i}_{\theta'}$  e  $\hat{i}_{\phi'}$  são vetores unitários nas direções  $\theta'$  e  $\phi'$ . Para este tipo de polarização, as componentes de campo  $E_{\theta'}^i$  e  $E_{\phi'}^i$  apresentam dependência azimutal do tipo  $\begin{bmatrix} \cos n\phi' \\ \text{sen} n\phi' \end{bmatrix}$  onde  $n=1$ . Esta dependência azimutal será idêntica a do campo espalhado pelo refletor como será demonstrado nas próximas seções.

Em termos de uma base de vetores associadas às coordenadas retangulares, este vetor  $\hat{i}_p$  seria dado por:

$$\hat{i}_p = i_{px} \hat{i}_x + i_{py} \hat{i}_y + i_{pz} \hat{i}_z \quad (2.3)$$

onde,

$$\begin{aligned} i_{px} &= \cos^2 \phi' \cos \theta' + \text{sen}^2 \phi' \\ i_{py} &= \cos \phi' \text{sen} \phi' \cos \theta' - \cos \phi' \text{sen} \phi' \\ i_{pz} &= -\cos \phi' \text{sen} \theta' \end{aligned} \quad (2.4)$$

De posse das componentes retangulares das polarizações, pode-se reescrever o campo elétrico em termos de suas componentes retangulares:

$$\vec{E} = E_x^i \hat{i}_x + E_y^i \hat{i}_y + E_z^i \hat{i}_z \quad (2.5)$$

onde,

$$\begin{aligned} E_x^i &= E_0 F(\theta') \frac{e^{-jkr'}}{r'} i_{px} \\ E_y^i &= E_0 F(\theta') \frac{e^{-jkr'}}{r'} i_{py} \\ E_z^i &= E_0 F(\theta') \frac{e^{-jkr'}}{r'} i_{pz} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Este modelo de fonte radia uma onda esférica TEM com centro de fase na origem e com vetor de Pointyng radial. Desta forma, o campo magnético pode ser descrito por:

$$\vec{H}^i(\vec{r}') = \hat{i}_r \times \frac{\vec{E}^i(\vec{r}')}{\eta} \quad (2.7)$$

onde  $\hat{i}_r$  é vetor unitário na direção radial mostrado em (2.8) e  $\eta$  representa a impedância intrínseca do meio. Em termos de uma base de vetores associados ao sistema de coordenadas retangulares:

$$\hat{i}_r = \text{sen}\theta' \cos\phi' \hat{i}_x + \text{sen}\theta' \text{sen}\phi' \hat{i}_y + \cos\theta' \hat{i}_z \quad (2.8)$$

Realizando o produto vetorial da Equação (2.7) utilizado-se das equações (2.6) e (2.8) encontram-se as componentes retangulares do campo magnético,

As equações (2.6) e (2.8) podem ser utilizadas para determinar o produto vetorial da Equação (2.7) e expressar o campo magnético em termos das componentes retangulares:

$$\begin{aligned}
 H_x^i &= \frac{1}{\eta} \left( \sin\theta' \sin\phi' E_z^i - \cos\theta' E_y^i \right) \\
 H_y^i &= \frac{1}{\eta} \left( \cos\theta' E_x^i - \sin\theta' \cos\phi' E_z^i \right) \\
 H_z^i &= \frac{1}{\eta} \left( \sin\theta' \cos\phi' E_y^i - \sin\theta' \sin\phi' E_x^i \right)
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

Em termos de  $F(\theta')$ , estas componentes podem ser re-expressas como se segue:

$$\begin{aligned}
 H_x^i &= \frac{1}{2} \left[ (\cos\theta' - 1) \sin 2\phi' \right] F(\theta') \frac{e^{-jkr'}}{r'} \\
 H_y^i &= \frac{1}{2} \left[ \cos 2\phi' (1 - \cos\theta') + (1 + \cos\theta') \right] F(\theta') \frac{e^{-jkr'}}{r'} \\
 H_z^i &= - \left[ \sin\theta' \sin\phi' \right] F(\theta') \frac{e^{-jkr'}}{r'}
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

### 2.3.

#### Refletores circularmente simétricos

Como mencionado na seção 2.1, neste trabalho as superfícies refletoras são circularmente simétricas e descritas a partir da rotação de uma geratriz  $z'(\rho')$  em torno do eixo de simetria da superfície, eixo-z, conforme ilustrado na Figura 2.1.

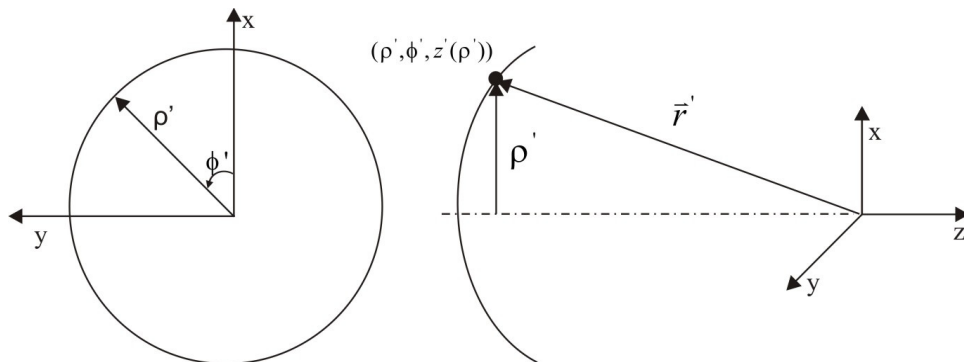


Figura 2.1 – Refletor circularmente simétrico

Os pontos sobre a superfície são descritos pelo vetor  $\bar{r}'$ , que pode ser caracterizado por:

$$\bar{r}' = \rho' \cos \phi' \hat{i}_x + \rho' \text{sen} \phi' \hat{i}_y + z'(\rho') \hat{i}_z, \quad (2.11)$$

onde  $\rho'$  é a distância do ponto ao eixo de simetria da superfície.

As superfícies a serem consideradas são contínuas, suaves, exceto sobre o eixo de simetria. Desta forma, a função  $z'(\rho')$  que representa a superfície tem derivadas de primeira e segunda ordem em  $\rho'$  contínuas no intervalo a ser considerado. A partir das derivadas de primeira ordem pode-se estabelecer as seguintes expressões para as componentes do vetor normal a superfície na base cilíndrica:

$$\begin{aligned} n_\rho &= \frac{\mp z'_\rho}{\sqrt{z'^2_\rho + 1}} \\ n_z &= \frac{\pm 1}{\sqrt{z'^2_\rho + 1}} \end{aligned} \quad (2.12)$$

E na base retangular,

$$\begin{aligned} n_x &= \frac{\mp z'_\rho \cos \phi'}{\sqrt{z'^2_\rho + 1}} \\ n_y &= \frac{\mp z'_\rho \text{sen} \phi'}{\sqrt{z'^2_\rho + 1}} \\ n_z &= \frac{\pm 1}{\sqrt{z'^2_\rho + 1}} \end{aligned} \quad (2.13)$$

A opção de sinal +/- nas expressões acima está associada ao sentido do vetor normal a superfície conforme ilustrado na Figura 2.2.

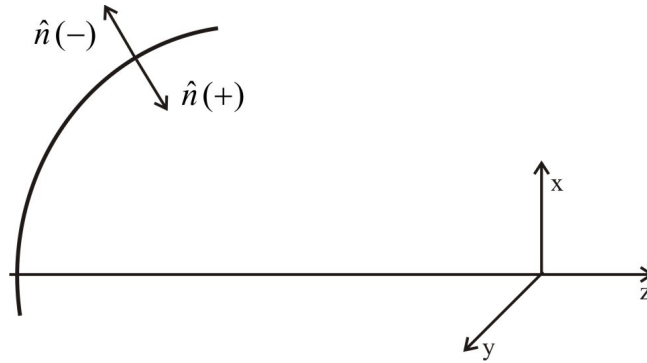


Figura 2.2 – Orientação do vetor unitário normal a superfície.

## 2.4.

### Determinação do campo distante usando Aproximações da Ótica Física (PO)

Para muitas aplicações, as aproximações da Ótica Física se constituem em uma ferramenta adequada e eficiente para determinar o lobo principal e os primeiros lóbulos de antenas refletoras. Como descrito na literatura [5], energia radiada pelo alimentador ao incidir sobre o refletor induz sobre este uma distribuição de corrente superficial que é aproximadamente dada pela seguinte expressão:

$$\vec{J}_s(\vec{r}') = \begin{cases} 2\hat{n} \times \vec{H}^i(\vec{r}'), & \text{na região iluminada} \\ 0, & \text{nas demais} \end{cases} \quad (2.14)$$

onde vetor unitário  $\hat{n}$  representa a normal à superfície no ponto  $\vec{r}'$ , e  $\vec{H}^i(\vec{r}')$  representa o campo magnético do alimentador incidente sobre o refletor. A partir destas correntes superficiais induzidas, o campo espalhado é obtido pela integração destas correntes  $\vec{J}_s(\vec{r}')$  sobre o corpo espalhador. Na região de campo distante, a expressão para o campo espalhado é dada por

$$\vec{E}^i(\vec{r}') = -\frac{j\eta}{2\lambda} \frac{e^{-jkr'}}{r'} \iint [\vec{J}_s(\vec{r}') - (\vec{J}_s(\vec{r}') \cdot \hat{i}_r) \hat{i}_r] e^{jk\delta} ds' \quad (2.15)$$

onde,

$$\delta = \hat{i}_r \cdot \vec{r}' \quad (2.16)$$

com  $\vec{r}'$  é dado por  $x', y', z'$ ;

$$\hat{i}_r = \text{sen}\theta \cos\phi \hat{i}_x + \text{sen}\theta \text{sen}\phi \hat{i}_y + \cos\theta \hat{i}_z \quad (2.17)$$

Logo,

$$\delta = (x' \cos\phi + y' \text{sen}\phi) \text{sen}\theta + z' \cos\theta \quad (2.18)$$

A expressão 2.16 para o campo espalhado pode ser re-expressa como,

$$\vec{E}^i(\vec{r}') = -\frac{j\eta}{2\lambda} \frac{e^{-jkr'}}{r} \left[ \vec{I}(\vec{r}') - (\vec{I}(\vec{r}') \cdot \hat{i}_r) \hat{i}_r \right] \quad (2.19)$$

onde,

$$\vec{I}(\vec{r}') = \iint \vec{J}_s(\vec{r}') e^{jk\delta} ds' \quad (2.20)$$

#### 2.4.1.

##### Formulação para um único refletor circularmente simétrico

As propriedades de simetria das fontes e das superfícies refletoras apresentadas nas Seções 2.1 e 2.2, respectivamente, permitem que sejam introduzidas simplificações nas equações de espalhamento descritas pela Equação

(2.20), as quais devido às características de simetria possibilita se resolver analiticamente uma das integrais, o que reduz significativamente o tempo computacional necessário para a integração numérica.

Para realização das simplificações analíticas primeiramente se reexpressa a Equação (2.14) explicitando o produto vetorial entre as expressões do vetor unitário normal e do vetor campo magnético dadas pelas Equações (2.13) e (2.10), respectivamente, mostrado nas equações (2.21) a (2.23) na forma de suas componentes retangulares. Nota-se que a além de explicitar o produto vetorial entre vetor unitário e o vetor campo magnético, todas as funções serão descritas pelas das coordenadas dos pontos sobre a superfície,  $\rho'$  e  $\phi'$ . Assim, as coordenadas retangulares do vetor  $\vec{J}_s$ , Equação (2.14), são dadas por:

$$J_{sx}(\rho', \phi') = 2[n_y(\rho', \phi')\bar{H}_z^i(\rho', \phi') - n_z(\rho', \phi')H_y^i(\rho', \phi')] \quad (2.21)$$

$$J_{sy}(\rho', \phi') = 2[n_z(\rho', \phi')H_x^i(\rho', \phi') - n_x(\rho', \phi')H_z^i(\rho', \phi')] \quad (2.22)$$

$$J_{sz}(\rho', \phi') = 2[n_x(\rho', \phi')H_y^i(\rho', \phi') - n_y(\rho', \phi')H_x^i(\rho', \phi')] \quad (2.23)$$

A substituição das componentes de campo magnético, Equação (2.9), e do vetor normal, Equação (2.13) nas equações (2.21) a (2.23) permite reorganizar as componentes de corrente superficial conforme:

$$J_{sx} = -\frac{1}{2} \left[ n_\rho (1 - \cos 2\phi') \sin \theta' + n_z \left[ \cos 2\phi' (1 - \cos \theta') + (1 + \cos \theta') \right] \right] F(\theta') \left[ \frac{e^{-ikr'}}{r'} \right] \quad (2.24)$$

$$J_{sy} = -\frac{1}{2} \left[ n_z (1 - \cos \theta') - n_\rho \sin \theta' \right] \sin 2\phi' F(\theta') \left[ \frac{e^{-ikr'}}{r'} \right] \quad (2.25)$$

$$J_{sz} = \frac{1}{2} \left[ n_\rho \cos \phi' \left[ \cos 2\phi' (1 - \cos \theta') + (1 + \cos \theta') \right] - n_\rho \sin \phi' (\cos \theta' - 1) \sin 2\phi' \right] F(\theta') \left[ \frac{e^{-ikr'}}{r'} \right] \quad (2.26)$$

As dependências em  $\rho'$  e  $\phi'$  podem ser reagrupadas como segue,

$$\begin{aligned} J_{sx}(\rho', \phi') &= A_{x0}(\rho') + A_{x2}(\rho') \cos 2\phi' \\ J_{sy}(\rho', \phi') &= B_{y2}(\rho') \sin 2\phi' \\ J_{sz}(\rho', \phi') &= C_{z1}(\rho') \cos \phi' \end{aligned} \quad (2.27)$$

onde,



$$\begin{aligned} A_{x0}(\rho') &= -\frac{1}{2} \left[ n_z(\rho') \left[ (1 + \cos \theta'(\rho')) \right] + n_\rho(\rho') \sin \theta'(\rho') \right] G(\rho') \\ A_{x2}(\rho') &= -\frac{1}{2} \left[ n_z(\rho') (1 - \cos \theta'(\rho')) - n_\rho(\rho') \sin \theta'(\rho') \right] G(\rho') \end{aligned} \quad (2.28)$$

$$B_{y2}(\rho') = -\frac{1}{2} \left[ n_z(\rho') (1 - \cos \theta'(\rho')) - n_\rho(\rho') \sin \theta'(\rho') \right] G(\rho') \quad (2.29)$$

$$C_{z1}(\rho') = n_\rho(\rho') G(\rho'), \quad (2.30)$$

sendo,

$$G(\rho') = F(\theta'(\rho')) \left[ \frac{e^{-ikr(\rho')}}{r(\rho')} \right]. \quad (2.31)$$

A substituição das Equações (2.28) a (2.30) nas componentes da corrente induzida na integral de radiação (2.20), resulta em:

$$\vec{I} = \int_0^{\rho_0} e^{ikz'(\rho') \cos \theta} \left[ \int_0^{2\pi} \vec{J}_S(\rho', \phi') e^{ik\rho' \sin \theta \cos(\phi' - \theta)} d\phi' \right] \frac{1}{n_z} \rho' d\rho' \quad (2.32)$$

que permite escrever as expressões para cada uma das componentes, separar as funções dependentes de  $\rho'$  e  $\phi'$  no integrando.

$$I_x = \int_0^{\rho_0} e^{ikz'(\rho') \cos \theta} \left[ A_{x0}(\rho') \int_0^{2\pi} e^{ik\rho' \sin \theta \cos(\phi' - \theta)} d\phi' + A_{x2}(\rho') \int_0^{2\pi} e^{ik\rho' \sin \theta \cos(\phi' - \theta)} \cos 2\phi' d\phi' \right] \frac{1}{n_z} \rho' d\rho' \quad (2.33)$$

$$I_y = \int_0^{\rho_0} e^{ikz'(\rho') \cos \theta} \left[ B_{y2}(\rho') \int_0^{2\pi} e^{ik\rho' \sin \theta \cos(\phi' - \theta)} \sin 2\phi' d\phi' \right] \frac{1}{n_z} \rho' d\rho' \quad (2.34)$$

$$I_z = \int_0^{\rho_0} e^{ikz'(\rho') \cos \theta} \left[ C_{z1}(\rho') \int_0^{2\pi} e^{ik\rho' \sin \theta \cos(\phi' - \theta)} \cos \phi' d\phi' \right] \frac{1}{n_z} \rho' d\rho' \quad (2.35)$$

Com o auxílio das transformações apresentadas no Apêndice B, as integrais em  $\phi'$  podem ser representadas por funções de Bessel com argumento dependente de  $\rho'$ , como se segue,

$$I_x = 2\pi \int_0^{\rho_0} e^{ikz(\rho')\cos\theta} \left[ A_{x0}(\rho')J_0(u) - A_{x2}(\rho')J_2(u)\cos 2\phi \right] \frac{1}{n_z} \rho' d\rho' \quad (2.36)$$

$$I_y = -2\pi \int_0^{\rho_0} B_{y2}(\rho')J_2(u)e^{ikz(\rho')\cos\theta} \sin 2\phi \frac{1}{n_z} \rho' d\rho' \quad (2.37)$$

$$I_z = 2\pi i \int_0^{\rho_0} C_{z1}(\rho')J_1(u)e^{ikz(\rho')\cos\theta} \cos\phi \frac{1}{n_z} \rho' d\rho' \quad (2.38)$$

onde,

$$u = k\rho' \sin\theta. \quad (2.39)$$

Desta forma, as componentes da integral de radiação podem ser escritas como:

$$\begin{aligned} I_x(\vec{r}) &= - \int_0^{\rho_0} e^{ikz(\rho')\cos\theta} \left[ A_{x0}J_0(u) - A_{x2}J_2(u)\cos 2\phi \right] \frac{1}{n_z} \rho' d\rho' \\ I_y(\vec{r}) &= \int_0^{\rho_0} B_{y2}J_2(u)e^{ikz(\rho')\cos\theta} \sin 2\phi \frac{1}{n_z} \rho' d\rho' \\ I_z(\vec{r}) &= -i \int_0^{\rho_0} C_{z1}J_1(u)e^{ikz(\rho')\cos\theta} \cos\phi \frac{1}{n_z} \rho' d\rho' \end{aligned} \quad (2.40)$$

#### 2.4.2.

#### Determinação das correntes equivalentes de borda e correntes de franja

As aproximações da Ótica Física (PO) aplicadas para obtenção do campo espalhado em antenas refletoras apresentam imperfeições em regiões de observação afastadas do lóbulo principal, o que se deve à PO não aproximar com eficiência as correntes próximas às bordas da superfície. Uma opção para corrigir essa deficiência da PO são as correntes equivalentes. Em busca de soluções, autores como Michaeli [2,6,7,10] e Mitzner [11] desenvolveram formulações que

se baseiam em pontos no Método das Correntes Equivalentes – MEC [12-16] e na Teoria Física da Difração (PTD) desenvolvida por Ufimtsev [17-18].

O MEC foi desenvolvido no intuito de descrever correntes equivalentes sobre as bordas (curvas) de superfícies condutoras, cujo campo irradiado simulasse um campo difratado segundo os métodos de rastreio de raios, porém com a melhora de não apresentar irregularidades sobre cáusticas. A PTD, por sua vez, oferece um aperfeiçoamento da PO, de modo que a inclusão da contribuição das correntes induzidas sobre a borda da superfície condutora produza um campo total irradiado mais preciso que o previsto pela PO. Ufimtsev [17], em sua formulação, leva em conta, não uniformidades dessas correntes próximas às bordas de modo a reduzir as imperfeições das correntes da PO e Michaeli [2,6,7,10], cuja, formulação será utilizada neste trabalho, obteve uma representação assintótica de sua contribuição, conforme recentemente implementado na Tese de Doutorado de Rego[1], com o objetivo de apresentar soluções pertinentes ao campo irradiado por antenas refletoras, empregando refletores simples e duplos, com o refinamento da PO pelas Correntes de Franja.

Michaeli desenvolveu expressões para as correntes equivalentes, como visto nas expressões (2.41) e (2.42), através da comparação entre o campo difratado pela borda de uma cunha curva condutora iluminada por uma onda plana, descrito por uma integral de radiação de correntes equivalentes de borda, e o campo total espalhado por ela conforme radiado por correntes superficiais induzidas sobre as faces da cunha. O campo total é então escrito na forma de uma integral de superfície que, no limite de ser executada apenas sobre uma região muito próxima à borda da cunha, fornece apenas o campo difratado. Igualando a integral de radiação das correntes equivalentes de borda com esta última, obtêm-se expressões para as correntes equivalentes de borda, as quais podem ser utilizadas para substituir o campo difratado obtido pelos métodos de rastreamento de raios (GTD, UTD, UAT) em pontos de observação localizados sobre cáusticas. As correntes equivalentes de borda assim obtidas podem ser escritas como a soma de duas parcelas: uma não-uniforme, as “Correntes de Franja”, que podem ser utilizadas para corrigir as correntes induzidas pela Ótica Física na proximidade das bordas do espalhador, e uma parcela uniforme de correntes induzidas obtidas a partir do campo magnético incidente, correspondendo a correntes da PO. Ambas as parcelas possuem singularidades para pontos de observação sobre as fronteiras

de sombra, as quais podem ser eliminadas a partir de um tratamento adequado dos parâmetros geométricos envolvidos (sistemas de coordenadas locais e correção da fase dos campos incidentes). Resulta:

$$M^{Eq}(\vec{r}') = M^f(\vec{r}') + M^{PO}(\vec{r}') \quad (2.41)$$

$$I^{Eq}(\vec{r}') = I^f(\vec{r}') + I^{PO}(\vec{r}') \quad (2.42)$$

onde  $M^{Eq}(\vec{r}')$  e  $I^{Eq}(\vec{r}')$  representam as correntes equivalentes de borda, para cunhas condutoras de faces curvas ilustradas na Figura 2.3, sendo expressas [1] por

$$M^{Eq}(\vec{r}') = [\vec{H}_i(\vec{r}) \cdot \hat{t}] \eta \frac{D_h^M(\beta'_0, \beta_0, \phi'_0, \phi_0)}{jk} \quad (2.43)$$

$$I^{Eq}(\vec{r}') = [\vec{E}_i(\vec{r}) \cdot \hat{t}] \frac{D_e^I(\beta'_0, \beta_0, \phi'_0, \phi_0)}{j\eta k} + [\vec{H}_i(\vec{r}) \cdot \hat{t}] \frac{D_h^I(\beta'_0, \beta_0, \phi'_0, \phi_0)}{jk} \quad (2.44)$$

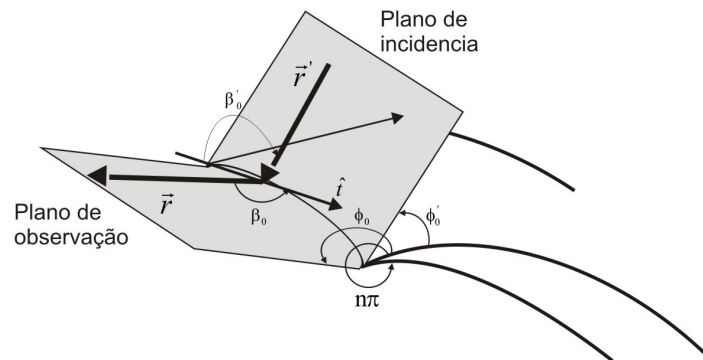


Figura 2.3 – Ângulos e vetores utilizados nas equações das correntes e do coeficiente de difração por uma cunha curva.

Os vetores  $\vec{H}^i$  e  $\vec{E}^i$  em (2.43) e (2.44) correspondem aos campos incidentes sobre a superfície e são desenvolvidos na seção 2.1. Os termos  $D_h^M$  e  $D_e^I$  e  $D_h^I$ , chamados de coeficientes de difração das correntes equivalentes, são expressos em (2.45) a (2.47) em função dos ângulos que relacionam os “raios” incidentes e

difratados com os parâmetros geométricos descritivos da borda da cunha condutora de ângulos externo igual a  $m\pi$ :

$$D_h^M(\beta'_0, \beta_0, \phi'_0, \phi_0) = -\frac{2}{m \operatorname{sen} \beta_0 \operatorname{sen} \beta'_0} \left\{ \frac{\operatorname{sen} \phi_0}{\operatorname{sen} \alpha_1} \cdot \frac{\operatorname{sen}[(\pi - \alpha_1)/m]}{\cos[(\pi - \alpha_1)/m] - \cos(\phi'_0/m)} + \frac{\operatorname{sen}(m\pi - \phi_0)}{\operatorname{sen} \alpha_2} \cdot \frac{\operatorname{sen}[(\pi - \alpha_2)/m]}{\cos[(\pi - \alpha_2)/m] - \cos(\phi'_0/m)} \right\} \quad (2.45)$$

$$D_e^I(\beta'_0, \beta_0, \phi'_0, \phi_0) = \frac{2 \operatorname{sen}(\phi'_0/m)}{m \operatorname{sen}^2 \beta'_0} \left\{ \frac{1}{\cos[(\pi - \alpha_1)/m] - \cos(\phi'_0/m)} + \frac{1}{\cos[(\pi - \alpha_2)/m] + \cos(\phi'_0/m)} \right\} \quad (2.46)$$

$$D_h^I(\beta'_0, \beta_0, \phi'_0, \phi_0) = \frac{2}{m \operatorname{sen} \beta'_0} \left\{ \frac{\mu_1 \cot \beta'_0 - \cot \beta_0 \cos \phi_0}{\operatorname{sen} \alpha_1} \cdot \frac{\operatorname{sen}[(\pi - \alpha_1)/m]}{\cos[(\pi - \alpha_1)/m] - \cos(\phi'_0/m)} - \frac{\mu_2 \cot \beta'_0 - \cot \beta_0 \cos(m\pi - \phi_0)}{\operatorname{sen} \alpha_2} \cdot \frac{\operatorname{sen}[(\pi - \alpha_2)/m]}{\cos[(\pi - \alpha_2)/m] - \cos(\phi'_0/m)} \right\} \quad (2.47)$$

onde

$\beta'_0$  : ângulo entre direção de incidência e direção tangente a aresta da cunha;

$\beta_0$  : ângulo entre direção de difração e direção tangente a aresta da cunha;

$\phi'_0$  : ângulo entre plano de incidência e fase 1(um) da cunha ;

$\phi_0$  : ângulo entre plano de observação face 1(um) da cunha.

com

$$\beta'_0 = \arccos \left( \frac{\vec{r}'}{|\vec{r}'|} \cdot \hat{t} \right) \quad (2.48)$$

$$\beta_0 = \arccos \left( \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \cdot \hat{t} \right) \quad (2.49)$$

$$\cos \phi_0' = \frac{-\vec{r}' \cdot (\hat{N} \times \hat{t})}{|\vec{r}'| \text{sen} \beta_0'} \quad (2.50)$$

$$\text{sen} \phi_0' = \frac{-\vec{r}' \cdot \hat{N}}{|\vec{r}'| \text{sen} \beta_0'} \quad (2.51)$$

$$\cos \phi_0 = \frac{-\vec{r} \cdot (\hat{N} \times \hat{t})}{|\vec{r}| \text{sen} \beta_0} \quad (2.52)$$

$$\text{sen} \phi_0 = \frac{-\vec{r} \cdot \hat{N}}{|\vec{r}| \text{sen} \beta_0} \quad (2.53)$$

e, ainda,

$$\alpha_1 = \arccos \mu_1 \quad (2.54)$$

$$\alpha_2 = \arccos \mu_2, \quad (2.55)$$

onde

$$\mu_1 = \frac{\text{sen} \beta_0 \cos \phi_0}{\text{sen} \beta_0'} \quad (2.56)$$

$$\mu_2 = \frac{\text{sen} \beta_0 \cos(n\pi - \phi_0)}{\text{sen} \beta_0'} \quad (2.57)$$

Inicialmente, os parâmetros  $\mu_1$  e  $\mu_2$  dados por (2.56) e (2.57), apresentavam singularidades para o caso canônico aplicado a uma cunha reta, em pontos de observação sobre as fronteiras de sombra. Estas singularidades ligadas à fronteira de sombra ocorrem em situações particulares, como em  $\phi_0 = 0$  ou  $\pi$ , a direção do raio difratado é tangente à face da cunha e que, aplicadas nas equações (2.56) e (2.57), acarretam em  $\mu_1$  e  $\mu_2 = \pm 1$ . Por conseguinte, em (2.54) e (2.55), resulta  $\alpha_1$  e  $\alpha_2 = 0^\circ$ , valores que, aplicados no cálculo dos coeficientes de difração dados em (2.45) e (2.47), levá-los-á a tenderem ao infinito, inviabilizando o cálculo das correntes  $I^f$  e  $M^f$ , em (2.41) e (2.42) naquela situação, assim Michaeli [7] descreve manipulações matemáticas para extrair estas singularidades,

através de um processo analítico continuado para o plano complexo, as extrai, gerando novas expressões para  $\mu_1$  e  $\mu_2$ , conforme descritas pelas equações (2.58) e (2.59)

$$\mu_1 = \frac{\text{sen}\beta_0 \cos\phi_0 + \cot\beta'_0(\cos\beta_0 - \cos\beta'_0)}{\text{sen}\beta'_0} \quad (2.58)$$

$$\mu_2 = \frac{\text{sen}\beta_0 \cos(m\pi - \phi_0) + \cot\beta'_0(\cos\beta_0 - \cos\beta'_0)}{\text{sen}\beta'_0} \quad (2.59)$$

No processo em que se extraíram as singularidades, Michaeli também evidencia situações em que os termos  $\mu_1$  e  $\mu_2$  podem assumir valores maiores que 1, o que acarretaria em  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  imaginários. Assim, uma solução encontrada foi expressar  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  em termos da representação logarítmica da função arccos [19, seção 4.4], mostrada em (2.60).

$$\alpha_{1,2} = -j \ln \mu'_{1,2} \quad (2.60)$$

onde

$$\mu'_{1,2} = \begin{cases} \mu_{1,2} - \sqrt{\mu_{1,2}^2 - 1}, & \text{para } \mu_{1,2} < -1 \\ \mu_{1,2} + j\sqrt{1 - \mu_{1,2}^2}, & \text{para } -1 \leq \mu_{1,2} \leq 1, \\ \mu_{1,2} + \sqrt{\mu_{1,2}^2 - 1}, & \text{para } \mu_{1,2} > 1 \end{cases} \quad (2.61)$$

com

$$0 \leq \arg(\mu_{1,2}) \leq \pi \quad (2.62)$$

As parcelas uniformes das correntes equivalentes em (2.41) e (2.42) são expressas por [1]:

$$M^{po}(\vec{r}_e) = [\vec{H}_i(\vec{r}_e) \cdot \hat{x}] \frac{2j\eta \text{sen}\phi_0}{k \text{sen}\beta_0 \text{sen}\beta'_0 (\cos\phi'_0 + \mu_1)} \quad (2.63)$$

$$I^{PO}(\vec{r}_e) = \left\{ [\vec{E}_i(\vec{r}_e)\hat{i}] \frac{\text{sen}\phi'_0}{\eta \text{sen}\beta'_0} - [\vec{H}_i(\vec{r}_e)\hat{i}] \left( \cot\beta'_0 \cos\phi'_0 + \frac{\cos\beta_0}{\text{sen}\beta'_0} \cos\phi_0 \right) \right\} \quad (2.64)$$

A partir de (2.43) e (2.44) e (2.63) e (2.64), obtêm-se as expressões para as correntes de franja na forma [1]:

$$\begin{aligned} M^f(\vec{r}'_e) &= M^{Eq}(\vec{r}'_e) - M^{PO}(\vec{r}'_e) = \\ &= [\vec{H}_i(\vec{r}_e)\hat{i}] \eta \frac{D_h^{M,f}(\beta'_0, \beta_0, \phi'_0, \phi_0)}{jk} \end{aligned} \quad (2.65)$$

$$\begin{aligned} I^f(\vec{r}'_e) &= I^{Eq}(\vec{r}'_e) - I^{PO}(\vec{r}'_e) = \\ &= [\vec{E}_i(\vec{r}_e)\hat{i}] \frac{D_e^{I,f}(\beta'_0, \beta_0, \phi'_0, \phi_0)}{j\eta k} + [\vec{H}_i(\vec{r}_e)\hat{i}] \frac{D_h^{I,f}(\beta'_0, \beta_0, \phi'_0, \phi_0)}{jk} \end{aligned} \quad (2.66)$$

onde

$$\begin{aligned} D_h^{M,f}(\beta'_0, \beta_0, \phi'_0, \phi_0) &= -\frac{2}{m \text{sen}\beta_0 \text{sen}\beta'_0} \left\{ \frac{\text{sen}\phi'_0}{\text{sen}\alpha_1} \cdot \frac{\text{sen}[(\pi - \alpha_1)/m]}{\cos[(\pi - \alpha_1)/m] - \cos(\phi'_0/m)} + \right. \\ &\quad \left. \frac{\text{sen}(m\pi - \phi_0)}{\text{sen}\alpha_2} \cdot \frac{\text{sen}[(\pi - \alpha_2)/m]}{\cos[(\pi - \alpha_2)/m] - \cos(\phi'_0/m)} - \frac{m \text{sen}\phi_0}{\cos\phi' + \mu_1} \right\} \end{aligned} \quad (2.67)$$

$$\begin{aligned} D_e^{I,f}(\beta'_0, \beta_0, \phi'_0, \phi_0) &= \frac{2 \text{sen}(\phi'_0/m)}{m \text{sen}^2\beta'_0} \left\{ \frac{1}{\cos[(\pi - \alpha_1)/m] - \cos(\phi'_0/m)} + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{\cos[(\pi - \alpha_2)/m] + \cos(\phi'_0/m)} + \frac{n \text{sen}\phi'}{\text{sen}(\phi'_0/m)(\cos\phi' + \mu_1)} \right\} \end{aligned} \quad (2.68)$$

$$\begin{aligned} D_h^{I,f}(\beta'_0, \beta_0, \phi'_0, \phi_0) &= \frac{2}{m \text{sen}\beta'_0} \left\{ \frac{\mu_1 \cot\beta'_0 - \cot\beta_0 \cos\phi_0}{\text{sen}\alpha_1} \cdot \frac{\text{sen}[(\pi - \alpha_1)/m]}{\cos[(\pi - \alpha_1)/m] - \cos(\phi'_0/m)} - \right. \\ &\quad \frac{\mu_2 \cot\beta'_0 - \cot\beta_0 \cos(m\pi - \phi_0)}{\text{sen}\alpha_2} \cdot \frac{\text{sen}[(\pi - \alpha_2)/m]}{\cos[(\pi - \alpha_2)/m] - \cos(\phi'_0/m)} + \\ &\quad \left. \frac{m(\cot\beta'_0 \cos\phi'_0 + \cot\beta_0 \cos\phi_0)}{\cos\phi' + \mu_1} \right\} \end{aligned} \quad (2.69)$$



As expressões (2.65) e (2.66) para as correntes de franja, podem ser aplicadas ao caso de interesse de uma antena refletora, Figura 2.4, realizando considerações como  $m=2$ ,  $\mu = \mu_1 = \mu_2$  e  $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2$  nas expressões (2.67) a (2.69) dos coeficientes de difração, reescrevendo-os na forma,

$$D_h^{M,f}(\beta'_0, \beta_0, \phi'_0, \phi_0) = \frac{\text{sen}\phi_0}{\text{sen}\beta'_0 \text{sen}\beta_0 \text{sen}(\alpha/2) [\cos(\phi'_0/2) + \text{sen}(\alpha/2)]} \quad (2.70)$$

$$D_e^{I,f}(\beta'_0, \beta_0, \phi'_0, \phi_0) = \frac{\text{sen}(\phi'_0/2)}{\text{sen}^2\beta'_0 [\cos(\phi'_0/2) + \text{sen}(\alpha/2)]} \quad (2.71)$$

$$D_h^{I,f}(\beta'_0, \beta_0, \phi'_0, \phi_0) = \left\{ \frac{\cot\beta'_0 [1 + 2\text{sen}(\alpha/2)\cos(\phi'_0/2)]}{\text{sen}\beta'_0 \text{sen}(\alpha/2) [\cos(\phi'_0/2) + \text{sen}(\alpha/2)]} \frac{\cot\beta_0 \cos(\phi_0)}{\text{sen}\beta'_0 \text{sen}(\alpha/2)} \right\} \frac{1}{[\cos(\phi'_0/2) + \text{sen}(\alpha/2)]} \quad (2.72)$$

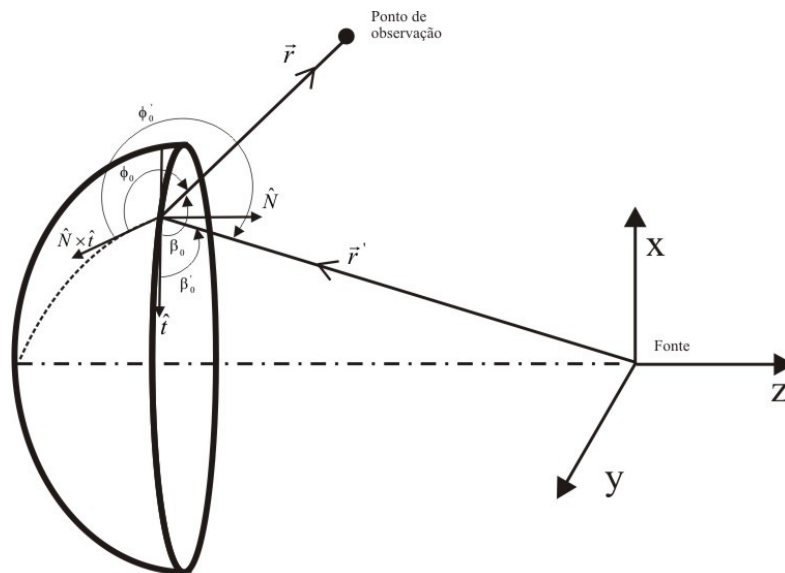


Figura 2.4 – Ângulos e vetores utilizados nas equações das correntes e dos coeficientes de difração por borda de uma antena refletora.

Integrando as expressões das correntes de franja em (2.65) e (2.66) sobre a borda da antena, obtém-se o campo radiado por elas na forma [1]

$$\begin{aligned} \vec{E}^{cf}(\vec{r}) = & -\frac{1}{4\pi r_c'} \int \left\{ [\vec{E}_i(\vec{r}_e') \cdot \hat{t}] D_e'(\beta_0', \beta_0, \phi_0', \phi_0) + \right. \\ & \left. [\vec{H}_i(\vec{r}_e') \cdot \hat{t}] \eta D_h'(\beta_0', \beta_0, \phi_0', \phi_0) \right\} [\hat{t} - (\hat{t} \cdot \hat{i}_r) \hat{i}_r] e^{-jk|\vec{r}-\vec{r}_e'|} dl' + \\ & \frac{1}{4\pi r_c'} \int (\hat{i}_r \times \hat{t}) [\vec{H}_i(\vec{r}_e') \cdot \hat{t}] \eta D_h^M(\beta_0', \beta_0, \phi_0', \phi_0) e^{-jk|\vec{r}-\vec{r}_e'|} dl' \end{aligned} \quad (2.73)$$

O campo radiado pelas correntes de franja em (2.73), somado ao campo gerado pela Ótica Física – PO, o qual é gerado pela integração das correntes mostradas em (2.40), fornece o campo total espalhado pelo refletor, representado por:

$$\vec{E}^{STotal}(\vec{r}) = \vec{E}^{PO}(\vec{r}) + \vec{E}^{cf}(\vec{r}) \quad (2.74)$$

## 2.5.

### Validação do algoritmo de análise

Com objetivo de validar o algoritmo de análise para fontes com componentes  $E_\theta$  e  $E_\phi$  do campo que apresentam dependência azimutal  $n=1$ , como descrito nas equações (2.1) e (2.2), foram utilizados dois casos descritos em [20] e [21]. Nesta primeira referência, as correntes da PO+Corrente de Franja (CF) são utilizadas para determinar o diagrama de radiação de um sub-refletor hiperbólico alimentado no foco, conforme ilustrado na Figura 2.5. O diagrama do alimentador segue o modelo apresentado na Seção 2.1, considerando-se um diagrama de radiação isotrópico, ou seja, a função  $F(\theta')$  que descreve o diagrama de radiação é dada por

$$F(\theta') = 1 \quad 0^\circ > \theta' < 18.92^\circ \quad (2.75)$$

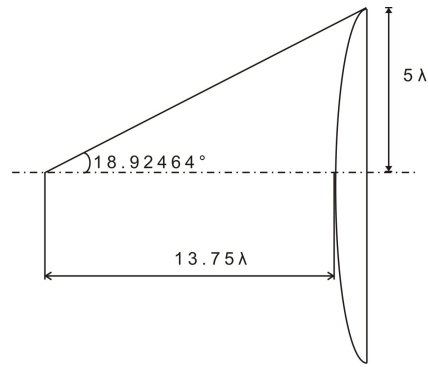


Figura 2.5 – Sub-refletor hiperbólico com excentricidade igual a,  $\varepsilon = 2$ , implementado no caso.

A Figura 2.6 ilustra o gráfico do campo espalhado para a polarização principal produzido pelo algoritmo desenvolvido neste trabalho que apresenta excelente concordância com os resultados mostrados em [20] para a mesma configuração de antena.

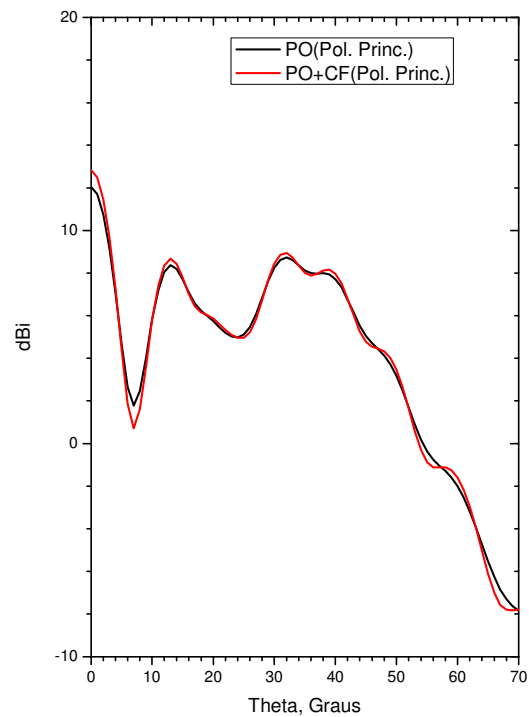


Figura 2.6 – Diagrama de campo espalhado para a polarização

Alternativamente, pode-se comparar os resultados obtidos para o diagrama de radiação via PO+CF com os obtidos utilizando Método dos Momentos (MoM) para analisar o refletor descrito no início desta seção, conforme descrito em [21]. Nesta segunda referência, os autores utilizam uma expansão de funções de base locais (pulsos e triângulos) para representar as componentes de corrente induzida transversal e azimutal, com uma taxa de dez funções por segmento de onda. O modelo de fonte é idêntico ao descrita na Seção 2.1 considerando que a função  $F(\theta') = U_0 \cos(\theta')$ . Os diagramas de espalhamento obtidos pela aplicação de PO, PO+CF e MoM estão mostrados na Figura 2.7.

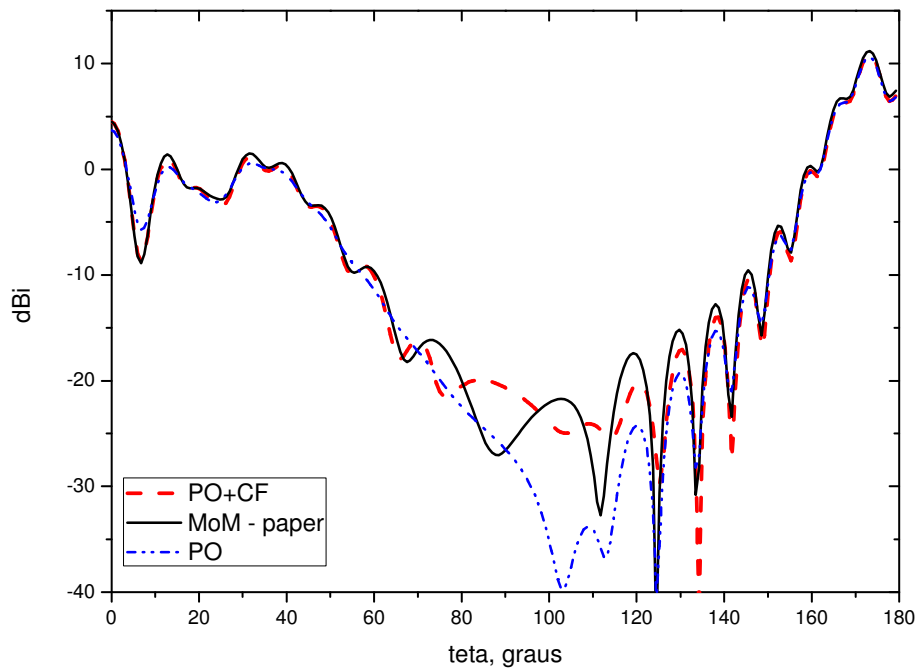


Figura 2.7 – Diagrama de espalhamento para a polarização principal.

Os resultados na Figura 2.7 mostram que as discrepâncias entre MoM e PO+CF foram menores que 1 dB no intervalo de 0 e 65 graus. Similar comportamento pode ser observado entre 120° e 180°, onde as curvas apresentam formas semelhantes e as maiores diferenças (<-3db) ocorrem nos lóbulos laterais, nos níveis abaixo de -20 dBi. Na região no entorno de 90°, como esperado, as diferenças são mais acentuadas na forma e na amplitude.