2
Métodos de Repartição de Custos

2.1
Introdução

Neste capítulo apresenta-se uma revisão de conceitos e métodos de repartição de custos que serviram de embasamento teórico para o desenvolvimento dos métodos propostos nesta tese. Deve-se mencionar que a teoria apresentada neste capítulo foi extraída de [Ribeiro, 2005].

Quando um determinado serviço é contratado por um único agente, seja uma pessoa física ou empresa, este deve arcar com os custos do serviço de forma integral. Entretanto, os custos individuais dos agentes podem ser reduzidos quando estes realizam parcerias, devido à economia de escala obtida na utilização do serviço.

A partir da idéia de se obter vantagens econômicas por meio da realização de parcerias para utilização de um determinado serviço, surgiu o conceito de repartição de custos. A repartição de custos consiste na solução de um problema onde os agentes buscam repartir seus custos de forma eficiente e justa, isto é, sem que determinados agentes sejam beneficiados em detrimento dos demais.

A noção de repartição de custos será utilizada neste trabalho para determinar as participações dos agentes (geradores e cargas) nas perdas do sistema de transmissão, assim como determinar que parcela da potência fornecida pelos geradores efetivamente chega às cargas. A determinação de métodos justos e eficientes para o cálculo destas participações é de suma importância para a alocação de custos nestes problemas.

Os conceitos básicos a respeito do problema de repartição de custos, tais como a formação de coalizões entre agentes e a noção de núcleo, são descritos na Seção 2.2. Na Seção 2.3 é apresentado um exemplo ilustrativo de um problema de repartição de custos, ressaltando os conceitos apresentados na seção anterior.

Nas Seções 2.4 a 2.8, são descritos os principais métodos utilizados no problema de repartição de custos: *Nucleolus*, Custos Marginais, Custos Incrementais, *Shapley* e *Aumman-Shapley*. Finalmente, na Seção 2.9 apresenta-se as principais conclusões obtidas neste capítulo.

2.2
Conceitos Básicos

Quando agentes se unem com o objetivo de maximizar ou minimizar uma função característica, como o custo (ou benefício) de um serviço, por exemplo, diz-se que estes agentes estão realizando coalizões ou agrupamentos entre si.

Matematicamente, uma coalizão é um subconjunto S do conjunto original de N agentes. Os agentes podem se agrupar de diferentes maneiras, de acordo com seus interesses e conveniências. Para formar uma coalizão é necessário que todos os jogadores envolvidos firmem acordos entre si e, uma vez que todos concordem, a coalizão é estabelecida. As coalizões são mutuamente exclusivas, ou seja, formar uma coalizão S implica que não há possibilidade de seus participantes fazerem acordos com participantes fora dela.

Para um conjunto de N agentes existem 2^N diferentes coalizões possíveis. A coalizão formada por todos os N agentes é chamada de grande coalizão ou coalizão N. A coalizão vazia (ϕ) é aquela onde nenhum agente participa.

A maneira pela qual todos os agentes formam m coalizões pode ser descrita pelo conjunto $S = \{S_1, S_2, ..., S_m\}$, conhecido como o conjunto das configurações das possíveis coalizões. Este conjunto S satisfaz três condições:

$$S_i \neq \varnothing \quad i=1,2, ... , m \tag{2.1}$$

$$S_i \cap S_j = \varnothing \text{ para todo } i \neq j \tag{2.2}$$

$$\bigcup_{i=1}^{m} S_i = N \tag{2.3}$$

Von Neumann e Morgenstern [Neumann, 1947] introduziram pela primeira vez, em 1947, o termo função característica, que calcula para cada coalizão (argumento da função) o menor custo associado a ela. Em outras palavras, a função característica fornece o valor do mínimo custo que os agentes pertencentes a uma determinada coalizão conseguem obter por meio de uma ação cooperativa entre eles. A definição formal da função característica é:

Definição: Para cada subconjunto *S* de *N*, a função característica fornece o menor valor *c(s)* que os agentes de *S* podem obter se formarem uma coalizão e agirem juntos, cooperando entre si, sem a ajuda de qualquer agente externo. Esta definição leva em conta uma restrição que requer que o valor da função característica da coalizão vazia seja zero, ou seja, c(ϕ) = 0.

Outro requisito a ser atendido pela função característica é a subaditividade, determinante para que o custo associado a qualquer coalizão seja sempre menor que a soma dos custos associados às subcoalizões que a fragmentam. A subaditividade pode ser expressa da seguinte forma:

$$c(S \cup T) \leq c(S) + c(T) \ \forall\, S, T \subseteq N, \text{tal que } S \cap T = \phi \qquad (2.4)$$

Como a subaditividade deve ser atendida para quaisquer subconjuntos *S* e *T*, uma simples manipulação permite generalizar a expressão (2.4), cuja soma dos custos de qualquer conjunto de coalizões que particiona $S \cup T$ equivale a:

$$\begin{aligned} &c(s) \leq c(S_1) + c(S_2) + \ldots + c(S_m) \ \forall S \\ &\text{Tal que } S_i \cap S_j = \varnothing \ \text{e} \bigcup_{i=1}^{m} S_i = S \end{aligned} \qquad (2.5)$$

A subaditividade garante, portanto, que a cooperação entre os jogadores sempre gera uma redução do custo global: a cooperação entre os agentes produz uma “sinergia”, que implica na redução do custo total.

Note que em (2.4) não é requerido que $S \cup T$ seja igual a *N*, e, portanto, a subaditividade deve ser válida não somente para a grande coalizão, mas para qualquer outra coalizão possível.

Assumindo que a função característica do problema de repartição de custos apresenta subaditividade, a grande coalizão será sempre formada ao final do problema. Portanto, a pergunta natural que surge, após o cálculo do custo total, é como dividi-lo de modo justo e eficiente entre os agentes que formam esta grande coalizão. A divisão do custo *c(N)* entre eles, representada pelo vetor de repartições $\phi = (\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n)$, não é evidente.

Um vetor de repartições ϕ só é considerado "justo" quando satisfaz às três expressões abaixo:

$$\sum_{i=1}^{n} \phi_i = c(N) \qquad \text{(Racionalidade de grupo)} \qquad (2.6)$$

$$\phi_i \leq c(\{i\}), \forall i \in N \qquad \text{(Racionalidade Individual)} \qquad (2.7)$$

$$\sum \phi_i \leq c(S), \forall i \in S \text{ e } \forall S \subset N \qquad \text{(Racionalidade das Coalizões)} \qquad (2.8)$$

A equação (2.6) determina que a soma dos custos que cabe a cada um dos agentes (ϕ_i) deve ser igual ao custo da grande coalizão *c(N)*, ou seja, o custo total do serviço deve ser repartido entre os agentes. Por sua vez, em (2.7) determina-se que cada agente deve pagar no máximo um custo igual ao que ele obteria agindo individualmente (*c{i}*), o que garante o incentivo aos agentes que participam da coalizão.

A inequação (2.8) determina que a soma dos custos que cabe aos agentes (ϕ_i) de qualquer subcoalizão *S* deve ser menor ou igual ao custo obtido se estes agentes formassem um "consórcio" independente *c(S)*. Vale notar que (2.7) é apenas um caso particular de (2.8).

Quando uma repartição atende a (2.6) e (2.8), diz-se que ela pertence ao núcleo do problema de repartição de custos. O núcleo formaliza a idéia de justiça em uma repartição de custos. Se uma determinada repartição pertence ao núcleo, pode-se dizer que o custo atribuído a qualquer agente não é superior ao que estes agentes conseguiriam obter se formassem um "consórcio" separado ou se atuassem "individualmente" (fora da coalizão). Deste modo, uma repartição de custos é justa se todos os participantes recebem mais benefícios por estarem no “grande consórcio” do que fora dele.

2.3
Exemplo Ilustrativo

Para ilustrar a aplicação do conceito de repartição de custos, considere que duas cidades vizinhas desejam construir um sistema de distribuição de água [Young, 1994] [Ribeiro, 2005]. A cidade *A* poderia construir o seu sistema de distribuição por um custo de $11 milhões, enquanto que a cidade *B* poderia construí-lo por $7 milhões. Entretanto, o custo seria de $15 milhões se o sistema de distribuição fosse construído em conjunto pelas duas cidades, o que representaria uma economia de $3 milhões. Observa-se, portanto, que a cooperação entre as cidades é vantajosa e que o custo do empreendimento deve ser repartido de forma justa e eficiente entre elas, de forma que as duas cidades sejam beneficiadas.

Uma solução seria dividir o custo do empreendimento igualmente entre as cidades, onde cada cidade pagaria $7,5 milhões. Porém, esta solução seria rejeitada pela cidade *B*, que poderia construir seu próprio sistema de distribuição por $7 milhões. Outra solução seria repartir o custo do empreendimento de forma proporcional ao número de habitantes de cada cidade. Assim, considerando que a cidade *A* possua 36 mil habitantes e a cidade *B* possua 12 mil habitantes, o custo por habitante seria igual a $312,50 ($15 milhões/48 mil habitantes). Logo, a cidade *A* pagaria $11,25 milhões e a cidade *B* pagaria $3,75 milhões. Neste caso a solução seria rejeitada pela cidade *A*, que poderia construir o seu sistema de distribuição por um custo de $11 milhões sem a participação da cidade *B*.

Nas duas soluções apresentadas, a construção do sistema de distribuição de água torna-se mais econômico quando realizado de forma isolada pelas cidades do que em conjunto. Isto ocorre porque a repartição de custos não é eficiente, isto é, não cria incentivos para que a cooperação entre as cidades ocorra de forma espontânea.

Uma alternativa para incentivar as cidades a construir o empreendimento em conjunto é aplicar as duas alternativas anteriores ao montante economizado pelas cidades, em lugar do montante pago.

Na primeira alternativa, o montante economizado ($3 milhões) seria dividido igualmente entre as duas cidades. Assim, cada cidade pagaria:

Cidade A:

$$\$11 milhões - \left[\frac{\$3}{2} milhões\right] = \$9,5 milhões$$

Cidade B:

$$\$7 milhões - \left[\frac{\$3}{2} milhões\right] = \$5,5 milhões$$

Na segunda alternativa, o custo economizado por habitante seria igual a $ 62,50 ($3 milhões/48 mil habitantes) e cada cidade pagaria:

Cidade A:

$$\$11\, milhões - 36000 \times \left[\frac{\$3\ milhões}{48000}\right] = \$8,75\ milhões$$

Cidade B:

$$\$7\ milhões - 12000 \times \left[\frac{\$3\ milhões}{48000}\right] = \$6,25\ milhões$$

Uma terceira solução seria repartir o montante economizado proporcionalmente ao custo de oportunidade da cidade, ou seja, ao ganho obtido pela cidade ao construir o empreendimento em parceria. Assim:

Cidade A:

$$\$11\, milhões - \$3\ milhões \times \left[\frac{11}{18}\right] = \$9,17\ milhões$$

<u>*Cidade B:*</u>

$$\$7\ milhões - \$3\ milhões \times \left[\frac{7}{18}\right] = \$5{,}83\ milhões$$

Na Tabela 2.1 são apresentados os resultados obtidos pelas alternativas propostas para repartir o custo de construção do sistema de distribuição de água entre as duas cidades:

Tabela 2.1 - Resultado da Repartição de Custos (milhões)

Critério		Cidade A ($)	Cidade B ($)
I	Divisão igualitária do custo entre as cidades	7,50	7,50
II	Divisão igualitária do custo entre os habitantes	11,25	3,75
III	Divisão igualitária do montante economizado entre as cidades	9,50	5,50
IV	Divisão igualitária do montante economizado entre os habitantes	8,75	6,25
V	Divisão do montante economizado proporcional ao custo de oportunidade	9,17	5,83

As três últimas soluções propostas criam incentivos à cooperação, pois possibilitam que as duas cidades construam um sistema de distribuição de água em parceria, visando um custo inferior do que seria pago se cada cidade construísse o seu próprio sistema de distribuição. Estas três soluções são consideradas justas e eficientes, pois garantem a redução do custo individual dos agentes que participam da coalizão (ou agrupamento), sem que sejam criados subsídios cruzados entre eles.

Conforme visto na Seção 2.2, o conjunto de soluções que atende às restrições (2.6) a (2.8), ou seja, que fornece um incentivo à cooperação entre os agentes, pertence ao núcleo do problema de repartição de custos. O núcleo do problema de repartição do custo do sistema de distribuição de água entre as cidades *A* e *B* é ilustrado na Figura 2.1, juntamente com as cinco soluções propostas.

Observa-se, portanto, que as soluções III, IV e V pertencem ao núcleo, pois atendem as restrições (2.6) a (2.8); por outro lado, as soluções I e II não pertencem ao núcleo, pois violam a restrição (2.8). Isto é coerente com os conceitos apresentados na Seção 2.2, já que as repartições pertencentes ao núcleo fornecem incentivos à cooperação.

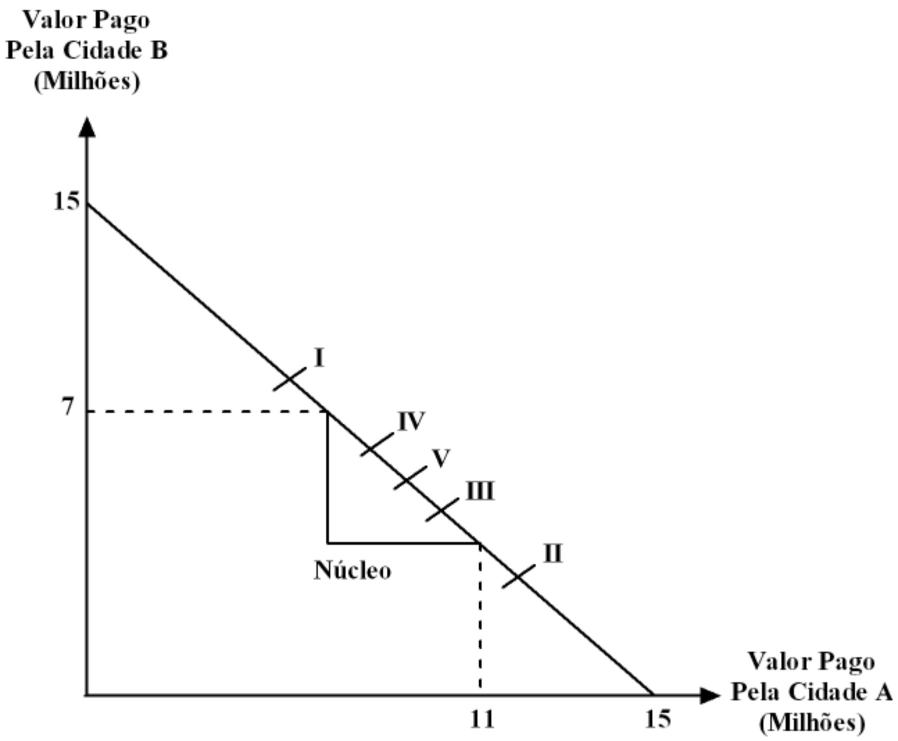

Figura 2.1 - Representação Geométrica do Núcleo

Desta forma, um dos desafios do problema de repartição de custos é a definição de repartições que pertençam ao núcleo do problema, ou seja, que garantam os critérios de justiça e eficiência quando aplicados aos mais diversos agentes. Nas seções a seguir serão apresentados alguns dos principais métodos utilizados no problema de repartição de custos, ressaltando suas vantagens e desvantagens.

2.4
Método *Nucleolus*

Foi visto que repartições pertencentes ao núcleo fornecem incentivos à cooperação. São também justas, no sentido de que não há subsídio cruzado. Mas se o núcleo existir poderá haver uma infinidade de soluções. Qual delas será então a mais justa? Esta questão pode ser resolvida pelo método *nucleolus*, que fornece uma solução única e pertencente ao núcleo.

No exemplo, apresentado em [Faria, 2004], onde se determina a repartição de energia firme de um sistema hidroelétrico, assuma-se que foi escolhida uma solução $\phi = \left(\phi_{p1}, \phi_{p2}, \phi_{p3}\right)$ pertencente ao núcleo. Suponha-se agora que um subconjunto de agentes {1; 3}, propõe uma solução alternativa $\phi = \left(\phi_{q1}, \phi_{q2}, \phi_{q3}\right)$ que também pertence ao núcleo, mas que reduz o custo que cabe a este subconjunto, ou seja:

$$\phi_{q1} + \phi_{q3} < \phi_{p1} + \phi_{p3} \tag{2.9}$$

Contudo, esta nova solução proposta eleva o custo do agente 2, isto é:

$$\phi_{q2} > \phi_{p2} \tag{2.10}$$

Neste caso, o agente 2 vai preferir a alocação original, pois não concordaria com a proposta do subconjunto {1;3}.

O método *nucleolus* resolve este tipo de problema fornecendo uma solução para o problema de repartição de custos por meio da maximização lexicográfica (conforme explicado adiante) da menor “vantagem” que cada subconjunto possui ao pertencer à coalizão, comparado com o custo que o mesmo subconjunto possuiria fora da coalizão. Este método, além de forçar que a solução pertença ao núcleo, garante que a repartição obtida seja única.

O método *nucleolus* é calculado por meio da resolução de uma seqüência de subproblemas de programação linear. O primeiro problema a ser resolvido é mostrado a seguir para um caso com três agentes, onde δ e os φs são variáveis, e os *f(.)*s são constantes:

Max δ

s.a.

$$\begin{aligned}
&\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 = f(H_1, H_2, H_3) \\
&\delta \le f(H_1) - \phi_1 \\
&\delta \le f(H_2) - \phi_2 \\
&\delta \le f(H_3) - \phi_3 \\
&\delta \le f(H_1, H_2) - \phi_1 - \phi_2 \\
&\delta \le f(H_1, H_3) - \phi_1 - \phi_3 \\
&\delta \le f(H_2, H_3) - \phi_2 - \phi_3 \\
&\delta \ge 0
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Observa-se que o lado direito das desigualdades representa a "vantagem" que os subconjuntos possuem por pertencer à coalizão menos o "benefício" que possuiriam fora da coalizão. Por exemplo, a diferença $f(H_1, H_3) - \phi_1 - \phi_3$ representa o custo economizado ("vantagem") pelo subconjunto $\{H_1, H_3\}$ ao participar da coalizão, comparado ao custo economizado se o subconjunto estivesse isolado, $f(H_1, H_3)$.

- O escalar δ representa a maximização da menor "vantagem". A restrição δ ≥ 0 garante que a "vantagem" seja sempre positiva para qualquer subconjunto, o que corresponde a pertencer ao núcleo do jogo.

Note que se o procedimento fosse apenas resolver este primeiro problema, ainda assim poderia haver duas repartições diferentes e ambas com menores "vantagens" iguais. Portanto, para que a repartição de custos obtida pelo método seja única, deve haver um critério para decidir qual das duas escolher. Isto é feito por meio da maximização lexicográfica das "vantagens" [Young, 1994] [Ribeiro, 2005].

Esta maximização é feita da seguinte forma: suponha que todas as "vantagens" de cada coalizão são ordenadas, da menor para a maior, em um vetor θ*(x)* de dimensão (2^n-2). O *nucleolus* é a alocação *x* que maximiza θ*(x)* lexicograficamente, caso a seguinte expressão seja satisfeita: se y é qualquer outra alocação e *k* é o primeiro índice tal que $\theta_k(x) \neq \theta_k(y)$, então $\theta(x) > \theta_k(y)$ [Schmeider, 1969].

Outra forma de se entender a ordem lexicográfica entre repartições é fazer analogia com a ordenação das palavras em um dicionário. Esta ordem se baseia na ordenação das menores "vantagens", da mesma forma que a ordem das palavras em um dicionário se baseia na ordenação das letras no alfabeto. Para comparar duas repartições *x* e *y*, por exemplo, procura-se a primeira posição, digamos *k*, onde as duas repartições diferem. Se $\theta_k(x) > \theta_k(y)$, então x é lexicograficamente maior que *y*.

Quando se resolve o primeiro problema (2.11), acha-se uma repartição cuja menor "vantagem" de todas é maximizada. Porém, o vetor ordenado de todas as "vantagens" ainda pode não estar maximizado lexicograficamente.

O próximo problema a ser resolvido é o mesmo (2.11), só que agora a restrição, ou o conjunto de restrições, que tenha atingido a igualdade no último problema resolvido, é fixado, ou seja, troca-se o "≤" por "=" e troca-se a variável δ pelo valor obtido por ela no problema anterior. O método termina quando se chega a uma solução única, ou seja, quando o número de restrições atendidas por igualdade for igual ao número de variáveis. A repartição obtida dessa forma, chamada de *nucleolus*, sempre existe, é única e pertence ao núcleo do jogo, quando este não é vazio, sendo estas características suas principais vantagens [Young, 1994] [Ribeiro, 2005].

A desvantagem do método *nucleolus* encontra-se na sua dificuldade de cálculo quando o número de agentes é elevado. O caráter combinatório das restrições, que cresce com 2^N (onde N é o número de agentes), faz com que para um sistema com 40 agentes, por exemplo, exista cerca de um trilhão de restrições, tornando a aplicação do método inviável.

2.5
Método dos Custos Marginais

Este método baseia-se no princípio de que a eficiência econômica é alcançada quando o custo que cabe a cada agente é obtido de forma proporcional a sua utilização marginal do serviço. Ou seja, a repartição de custos é realizada de acordo com taxa de variação do custo do serviço em relação ao montante utilizado pelo agente [Cigré, 1999] [Ribeiro, 2005]. Desta forma, o custo que cabe a um determinado agente *i* é dado por:

$$C_i = \frac{\partial C(b)}{\partial b_i} \times b_i \tag{2.12}$$

onde :

$C(b)$: custo total do serviço,

b_i : montante que corresponde à utilização do serviço pelo usuário *i*,

C_i : custo alocado ao usuário *i*.

O custo marginal pode ser interpretado como o coeficiente angular da curva de custo para um determinado montante *b* do serviço. Na Figura 2.2, por exemplo, o custo marginal é dado pelo ângulo θ, formado pela reta que tangencia a função de custo para o montante b' de serviço.

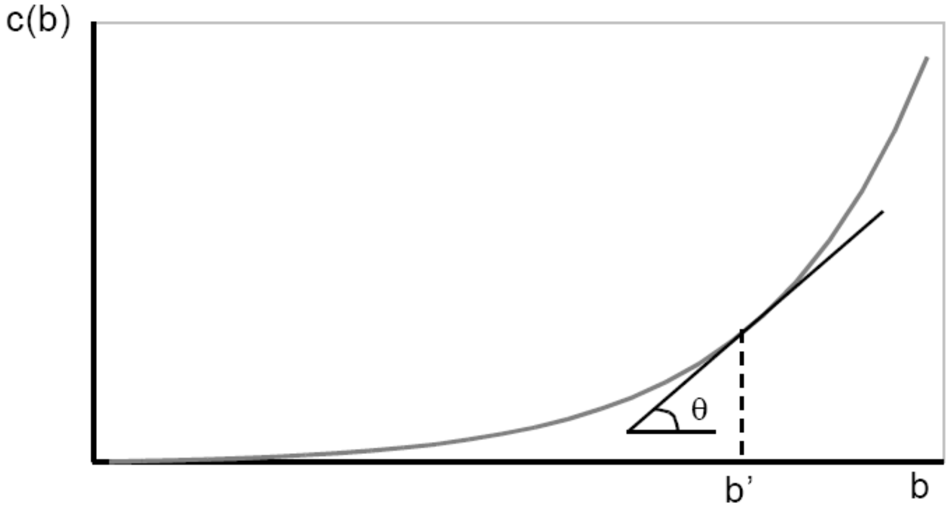

Figura 2.2 - Representação Gráfica dos Custos Marginais

Para exemplificar o método de custos marginais, considere que três agentes desejam realizar uma coalizão para contratar um determinado serviço. O custo de fornecimento deste serviço e os montantes requeridos por cada agente são apresentados a seguir:

$$b = \{b_1; b_2; b_3\} = \{1; 2; 1\}$$

$$C(b) = b_1 + (b_2 + b_3)^3 = 1 + (2 + 1)^3 = 28$$

Derivando-se a função de custo do serviço em relação ao montante requerido por cada agente, obtém-se:

<u>*Agente 1:*</u>

$$C_{b1} = \frac{\partial\, C(b)}{\partial b_1} = 1$$

Agente 2:

$$C_{b2} = \frac{\partial\ C(b)}{\partial b_2} = 3 \times \left(b_2 + b_3\right)^2$$

Agente 3:

$$C_{b3} = \frac{\partial\ C(b)}{\partial b_3} = 3 \times \left(b_2 + b_3\right)^2$$

Multiplicando-se as derivadas obtidas para cada agente por seus respectivos montantes obtêm-se os custos que cabem a cada agente, conforme demonstrado em (2.12). O resultado da repartição de custos pelo método dos custos marginais para este exemplo é apresentado na Tabela 2.2.

Tabela 2.2 - Alocação de Custos pelo Método de Custos Marginais

Agente		Custo ($)
1	$C_1 = C_{b1}.b_1 = 1.1$	1
2	$C_2 = C_{b2}.b_2 = 3.\left(b_2 + b_3\right)^2.2$	54
3	$C_3 = C_{b3}.b_3 = 3.\left(b_2 + b_3\right)^2.1$	27
Total		82

Como se pode observar, o custo total repartido por este método ($82) é superior ao custo do serviço ($28). Logo este método não pode ser considerado justo, pois viola a condição de racionalidade do grupo expressa em (2.6), necessária para que o resultado da repartição pertença ao núcleo, que define que a soma dos custos repartidos entre os agentes seja igual ao custo total do serviço.

Esta deficiência do método de custos marginais decorre do fato de que a repartição é obtida por meio do coeficiente angular da curva de custo, verificado no ponto onde todos os agentes são atendidos. Se a curva de custo apresentasse um comportamento linear, o coeficiente angular seria constante ao longo de toda a curva de custo e o custo total repartido seria igual ao custo total do serviço. Entretanto, a função de custos do exemplo proposto apresenta um comportamento marginalmente crescente, ou seja, o coeficiente angular da curva aumenta a cada novo montante de serviço requerido pelos agentes.

Esta diferença observada entre o coeficiente angular calculado pelo método de custos marginais e os diversos coeficientes angulares observados ao longo da função de custo causa uma distorção no cálculo da repartição de custos, conforme pode ser observado na Figura 2.3.

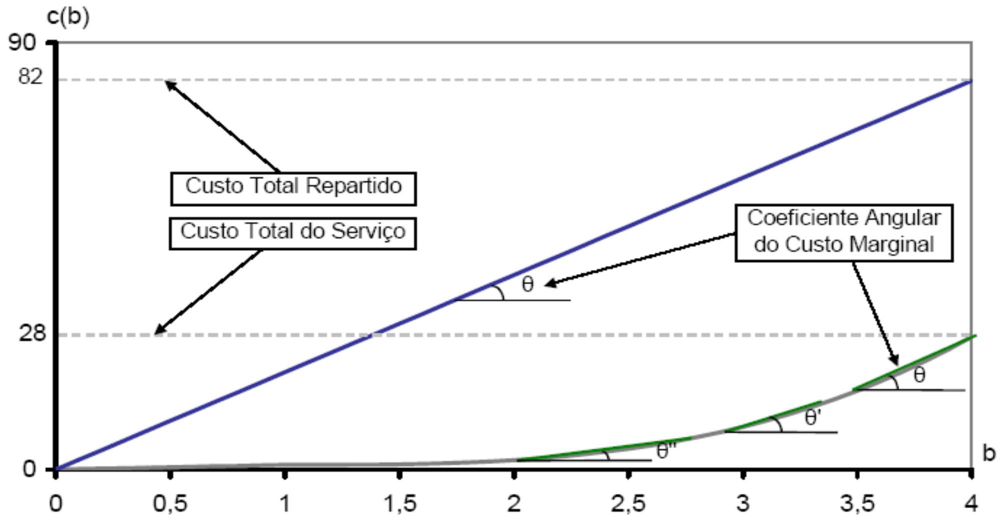

Figura 2.3 - Sobre-Remuneração do Método de Custos Marginais

Contudo, a sobre-remuneração causada por este método pode ser contornada com a aplicação de um fator de ajuste φ. Para este exemplo, o fator de ajuste é $\phi = \frac{28}{82} = 0,34$. Assim, o novo valor do custo que cabe aos agentes, ajustado pelo fator φ, será:

Tabela 2.3 – Alocação de Custos pelo Método de Custos Marginais com Fator de Ajuste ϕ

Agente		Custo ($)
1	$C_1 = C_{b1}.b_1.\phi = 1.b_1.\phi$	0,34
2	$C_2 = C_{b2}.b_2.\phi = 3.(b_2 + b_3)^2.b_2.\phi$	18,44
3	$C_3 = C_{b3}.b_3.\phi = 3.(b_2 + b_3)^2.b_3.\phi$	9,22
Total		28,00

Naturalmente, o custo total repartido é igual ao custo do serviço, o que atende ao critério (2.6) de racionalidade do grupo. Entretanto, verificam-se algumas características especiais nesta solução:

- o custo que cabe ao agente 1, $C_1 = \$0,34$, é inferior ao custo que este agente agrega à coalizão 1,2,3 (\$1). O custo deste agente na coalizão pode ser obtido diretamente, porque a parcela b_1 é separável na função de custo, $C(b) = b_1 + (b_2 + b_3)^3$;
- o custo que cabe aos agentes 2 e 3 somados, $C_2 + C_3 = \$27,66$, é superior ao custo obtido por uma coalizão formada entre estes dois agentes apenas, $C(b_2, b_3) = (b_2 + b_3)^3 = (2+1)^3 = \$27$.

Estas características demonstram que o custo que cabe ao agente 1 é subsidiado por um aumento no custo que cabe aos agentes 2 e 3. Este aumento de custos faz com que seja mais vantajoso para os agentes 2 e 3 realizarem uma coalizão em dupla, descartando o agente 1, o que viola a condição de racionalidade das coalizões expressa em (2.8), necessária para que a repartição de custos pertença ao núcleo.

Observa-se, portanto, que a aplicação de um fator de ajuste no método de custos marginais cria subsídios cruzados e não incentiva a cooperação entre os agentes, pois não pertence ao núcleo. Devido a estas características, a repartição de custos obtida pelo método de custos marginais com o fator de ajuste não atende aos critérios de justiça e eficiência.

2.6
Método dos Custos Incrementais

Uma alternativa para repartir o custo de um serviço entre diversos agentes é analisar como a entrada de cada agente na coalizão impacta o custo de fornecimento do serviço [Cigré, 1999] [Ribeiro, 2005]. Matematicamente, o custo que cabe a cada agente é calculado da seguinte forma:

- O primeiro agente a entrar paga: $C_1 = c(b_1)$
- O segundo agente a entrar paga: $C_2 = c(b_1, b_2) - c(b_1)$
- O terceiro agente a entrar paga : $C_3 = c(b_1, b_2, b_3) - c(b_1, b_2)$
- O ultimo agente a entrar paga :
  $C_n = c(b_1, b_2, b_3, ..., b_n) - c(b_1, b_2, b_3, ..., b_{n-1})$

Assim, seguindo o exemplo apresentado no método anterior e assumindo a ordem de entrada 1-2-3, a repartição de custos para os três agentes será:

Tabela 2.4 – Alocação de Custos pelo Método de Custos Incrementais – Seqüência 1-2-3

Agentes	Custo do Serviço ($)	Custo Repartido ($)
1	$c(b_1) = 1$	$C_1 = c(b_1) = 1$
1, 2	$c(b_1, b_2) = 1 + 2^3 = 9$	$C_2 = c(b_1, b_2) - c(b_1) = 8$
1, 2, 3	$c(b_1, b_2, b_3) = 1 + (2+1)^3 = 28$	$C_3 = c(b_1, b_2, b_3) - c(b_1, b_2) = 19$
TOTAL		28

Como pode ser observado na Tabela 2.4, o custo total repartido por este método coincide com o custo do serviço, o que atende ao critério (2.6) de racionalidade do grupo. Esta é a principal vantagem deste método, que dispensa a aplicação de um fator de correção para recuperar o custo do serviço de forma integral.

Observa-se ainda que o custo que cabe ao agente 1 ($C_1 = c(b_1) = 1$) é justo, pois coincide com o seu montante de serviço utilizado. Além disso, o custo que cabe aos agentes 2 e 3 somados ($C_2 + C_3 = 27$) coincide com o custo da coalizão formada por estes dois agentes, sendo $c(b_2, b_3) = (b_2 + b_3)^3 = (2+1)^3 = 27$, que atende ao critério (2.8) de racionalidade das coalizões.

Tabela 2.5 – Alocação de Custos pelo Método de Custos Incrementais – Seqüência 1-3-2

Agentes	Custo do Serviço ($)	Custo Repartido ($)
1	$c(b_1) = 1$	$C_1 = c(b_1) = 1$
1, 3	$c(b_1, b_3) = 1 + 1^3 = 2$	$C_3 = c(b_1, b_3) - c(b_1) = 1$
1, 3, 2	$c(b_1, b_3, b_2) = 1 + (2+1)^3 = 28$	$C_2 = c(b_1, b_3, b_2) - c(b_1, b_3) = 26$
TOTAL		28

Considere agora que a ordem de entrada dos agentes seja alterada para, por exemplo, 1-3-2 (ver Tabela 2.5).

Comparando os resultados da Tabela 2.4 e Tabela 2.5, observa-se que o custo unitário que cabe ao agente 3 $\left(C_3 / b_3\right)$ foi reduzido de 19 para 1, enquanto que o agente 2 teve seu custo unitário $\left(C_2 / b_2\right)$ elevado de 4 para 13, embora os dois agentes possuam a mesma influência sobre a função de custo do serviço, $c(b_2, b_3) = (b_2 + b_3)^3$. Desta forma, o agente 2 preferiria a ordem de entrada 1-2-3, enquanto que o agente 3 decidiria pela ordem de entrada 1-3-2.

Por meio deste exemplo é possível mostrar que o método de custos incrementais é sensível à ordem de entrada dos agentes nas coalizões, fazendo com que os últimos agentes a entrarem na coalizão possuam um custo unitário superior ao daqueles que entram primeiro. Portanto, a sensibilidade verificada pelo método de custos incrementais na ordem de entrada dos agentes impõe uma deficiência ao método, pois, para cada repartição de custos obtida, um determinado agente ou grupo de agentes seria beneficiado em detrimento dos demais.

2.7
Método de Shapley

Com o intuito de eliminar a limitação do método de custos incrementais, o método de Shapley busca realizar permutações na ordem de entrada dos agentes, com o objetivo de se analisar todas as possíveis combinações [Cigré, 1999] [Ribeiro, 2005]. O valor médio dos custos incrementais calculados em cada permutação determina o custo que cabe a cada agente. Com isto, elimina-se a influência da ordem de entrada dos agentes sobre a repartição de custos.

Na Tabela 2.6 são descritas as permutações realizadas na ordem de entrada dos agentes e os seus respectivos custos incrementais, considerando o exemplo descrito anteriormente. O valor de Shapley é obtido como a média destes custos incrementais calculados em cada permutação.

Este método é intuitivamente justo, pois permite que cada agente seja o primeiro, o segundo e assim sucessivamente até ser o último a entrar na coalizão. Assim, dado que a ordem de entrada dos agentes não afeta a repartição de custos, é justo que o custo unitário seja igual para agentes que utilizam o serviço de forma semelhante.

Tabela 2.6 – Alocação de Custos pelo Método de Shapley

Seqüência dos Agentes	Custo Incremental ($)			
	Agente 1	Agente 2	Agente 3	TOTAL
1, 2, 3	1	8	19	28
1, 3, 2	1	26	1	28
2, 1, 3	1	8	19	28
2, 3, 1	1	8	19	28
3, 1, 2	1	26	1	28
3, 2, 1	1	26	1	28
Média	1	17	10	28

Tabela 2.7 – Alocação de Custos pelo Método de Shapley – Custos Unitários

Agente	Custo Incremental ($)		
	Custo repartido	Montante	Custo Unitário
2	$C_2 = 17$	$b_2 = 2$	$C_2 / b_2 = 8,5$
3	$C_3 = 10$	$b_3 = 1$	$C_3 / b_3 = 10$

Para o exemplo apresentado, verifica-se que os agentes b_2 e b_3 possuem a mesma influência sobre o custo do serviço, $c(b_2, b_3) = (b_2 + b_3)^3$, logo devem possuir o mesmo custo unitário. Entretanto, o custo unitário do agente 2 é inferior ao custo unitário do agente 3.

Os custos unitários para os agentes 2 e 3 são descritos na Tabela 2.7. Por simplificação, o custo unitário do agente 1 foi suprimido.

Isto demonstra que este método, embora não sofra influência da ordem de entrada dos agentes, é sensível ao montante de serviço utilizado por agentes que possuem o mesmo impacto sobre a função de custos. Os agentes que possuem montantes maiores são beneficiados em detrimento de agentes com montantes inferiores.

O método de Shapley é definido como o valor médio dos vários custos incrementais da inclusão do novo usuário, considerando todas as coalizões que contêm tal usuário e supondo-se que cada uma dessas coalizões tem uma probabilidade de ocorrência. Matematicamente, o custo alocado para cada usuário é dado por:

$$C_i = \sum_{\Omega \subseteq N} P(\Omega)(C(\Omega + i) - C(\Omega))$$

onde:

$P(\Omega)$: probabilidade de ocorrência da coalizão Ω;

N: conjunto de usuários que usam o serviço;

$C(\Omega)$: custo devido à coalizão Ω;

C_i : custo alocado ao usuário *i.*

Com base nos conceitos de probabilidade:

$$C_i = \sum_{\Omega \subseteq N} \frac{(n_\Omega)!(n_N - n_\Omega - 1)!}{(n_N)!}(C(\Omega + i) - C(\Omega))$$

onde:

n_N : número de elementos do conjunto N;

n_Ω : número de elementos da coalizão Ω.

Apesar do método de Shapley ter eliminado as limitações do método de custos incrementais e de ser visto como um significativo progresso em relação aos métodos anteriores, ele apresenta duas limitações importantes:

i) ***Falta de isonomia* (também conhecido como requerimento de comparabilidade)** – Apresenta distorções, custos alocados com montantes diferentes para agentes com impacto similar na função de custo total – nesse caso, como mostrado, os agentes com os maiores montantes são beneficiados em relação aos demais.

ii) ***Esforço computacional* –** O esforço computacional é grande, já que o número de seqüências de entrada na coalizão cresce exponencialmente com o número de agentes que dela participam.

Para solucionar o problema de distorção entre os custos de agentes com mesmo impacto na função de custo e com montantes de diferentes magnitudes, é possível tomar-se o seguinte critério: dividir os agentes maiores em subagentes cujos montantes sejam iguais ao do menor agente de mesmo impacto na função de custo e, então, realizar o procedimento original descrito no Método de Shapley. Assim, o método passa a chamar-se ***Shapley Modificado***. Vale destacar que, embora seja notado um progresso em relação ao método de Shapley, no sentido de que o problema de distorção é eliminado, o Método de Shapley Modificado apresenta um agravante no que se refere ao esforço computacional, já que o número de elementos na coalizão aumenta significativamente quando se faz a divisão de agentes em subagentes.

2.8
Método de Aumann-Shapley

Para alguns métodos de repartição de custos apresentados nas seções anteriores, como por exemplo, o método nucleolus, é necessário que o núcleo do jogo seja não vazio. Outros métodos, como o valor Shapley e Aumann-Shapley, podem ser aplicados em qualquer tipo de função de custo [Marzano, 1998].

A repartição de custos pertencentes ao núcleo representa um incentivo para cooperação entre os agentes, pois neste caso a coalizão é de interesse dos jogadores. Entretanto, em determinadas situações nas quais surgem custos adicionais decorrentes de outros serviços, a propriedade subaditiva não é mais respeitada, isto é, não existe mais núcleo. Por exemplo, em sistemas de potência, onde o sistema de transmissão é um monopólio natural, os geradores e cargas são obrigados a compartilhar o sistema de transmissão, onde a repartição de custos não necessariamente pertence ao núcleo, como a repartição de custos das perdas de energia elétrica, custos de potência reativa, custos pelo uso da rede, etc.

O método de Aumann-Shapley é uma decorrência natural do método de Shapley [Young, 1994] [Ribeiro, 2005]. Este método surgiu a partir da idéia de se “dividir” os recursos de cada agente em vários segmentos infinitesimais e aplicar o método de Shapley a cada um deles, como se cada segmento representasse um agente individual.

Á primeira vista, as dificuldades computacionais seriam ainda maiores do que o método de Shapley modificado, pois o número de combinações aumentaria consideravelmente. Entretanto, conforme é mostrado no Apêndice A, o método de Aumann-Shapley permite que o problema de repartição de custos possua uma solução analítica.

Para ilustrar o método de Aumann-Shapley de forma intuitiva, considere que um determinado montante de serviço b^* esteja sendo solicitado por todos os agentes. Neste ponto, o custo de utilização deste serviço será igual a $c(b^*)$.

Considere agora que um determinado agente *i* solicite um acréscimo no seu montante de serviço igual a Δ_i. Como conseqüência, o custo do serviço sofrerá uma elevação de $c(b^*)$ para $c(b^* + \Delta_i)$. O custo incremental causado por este agente será então:

$$c(b^* + \Delta_i) - c(b^*) \tag{2.13}$$

Conforme foi visto nas seções anteriores, a ordem de entrada dos agentes nas coalizões afeta a repartição do custo. Da mesma forma, a ordem com que os agentes solicitam acréscimos em seus montantes de serviço deveria influenciar a repartição de custos.

Entretanto, se for considerado que o acréscimo solicitado pelo agente *i* (Δ_i) é infinitesimal, a sua ordem de entrada não mais influenciará a repartição de custos. Isto é válido porque, quando $\Delta_i \to 0$, o custo incremental obtido para o agente *i* em (2.13) se aproxima do seu próprio custo marginal. Logo:

$$\frac{c(b^* + \Delta_i) - c(b^*)}{\Delta_i} \cong \left.\frac{\partial c(b)}{\partial b_i}\right|_{b=b^*} \quad (2.14)$$

O custo unitário de Aumman-Shapley pode ser obtido, portanto, como o valor médio dos diversos custos marginais do agente. Mediante certas condições matemáticas [Marzano, 1998], pode-se mostrar que a média desses custos marginais, quando os valores de b_i aumentam de zero até seu valor total, convergem para um valor que é conhecido como o custo unitário de Aumann-Shapley. Matematicamente, se expressa como:

$$\tilde{\pi}_1 = \int_{t=0}^{1} \frac{\partial c(t \cdot b)}{\partial b_i} dt \quad (2.15)$$

onde:

b_i : montante que corresponde à utilização do serviço pelo usuário *i*;

$\tilde{\pi}_1$: custo unitário de Aumann-Shapley do usuário *i.*

O custo que cabe ao agente *i* é obtido multiplicando-se seu montante b_i pelo seu custo unitário de Aumann-Shapley $\tilde{\pi}_1$.

$$C_i = \tilde{\pi}_1 \cdot b_i \quad (2.16)$$

Para o exemplo de três agentes, o custo repartido pelo método de Aumann-Shapley seria:

Tabela 2.8 - Alocação de Custos pelo Método de Aumann-Shapley

Agentes	Custo Unitário de Aumann-Shapley	Custo Repartido ($)
1	$\tilde{\pi}_1 = \int_{t=0}^{1} \frac{\partial c(t.b)}{\partial b_1} dt = \int_{t=0}^{1} dt = 1$	$C_1 = b_1.\tilde{\pi}_1 = 1.1 = 1$
2	$\tilde{\pi}_2 = \int_{t=0}^{1} \frac{\partial c(t.b)}{\partial b_2} dt = \int_{t=0}^{1} 3.(t+2.t)^2 dt = 9$	$C_2 = b_2.\tilde{\pi}_2 = 2.9 = 18$
3	$\tilde{\pi}_3 = \int_{t=0}^{1} \frac{\partial c(t.b)}{\partial b_3} dt = \int_{t=0}^{1} 3.(t+2.t)^2 dt = 9$	$C_3 = b_3.\tilde{\pi}_3 = 1.9 = 9$
TOTAL		28

Observa-se, por meio da Tabela 2.8, que o método de Aumann-Shapley recupera integralmente o custo total do serviço requerido pelos agentes. Além disso, para agentes que possuam impacto semelhante sobre a função de custo, o custo unitário é igual $(C_3/b_3 = C_2/b_2 = 9)$.

A grande vantagem do método de Aumann-Shapley advém do fato de que a repartição de custos é obtida de forma analítica, o que dispensa a necessidade de combinações na ordem de entrada dos agentes. Esta característica permite que o esforço computacional necessário para realizar uma repartição de custos no método de Aumann-Shapley seja independente do número de agentes participantes da coalizão, o que torna este método útil em repartições de custos que possuam um número elevado de agentes.

A principal desvantagem deste método é a necessidade de resolução da integral formulada (2.15), o que nem sempre é possível computacionalmente. Uma alternativa para contornar esta deficiência do método é calcular esta integral de forma numérica, fracionando-se o montante b_i dos agentes em n partes iguais, onde n é um número suficientemente grande. Desta forma:

$$\tilde{\pi}_i = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial c}{\partial b_i}\left(\frac{j}{n}\cdot b_i\right) \tag{2.17}$$

Contudo, esta alternativa pode levar a problemas de estabilidade numérica no cálculo da integral quando a relação *j/n* se aproxima de zero, devido à dificuldade de se obter o custo marginal dos agentes quando seus montantes de utilização são nulos. Esta deficiência pode ser contornada com a adoção de simplificações durante o cálculo da integral numérica que não alterem de forma substancial a repartição de custos obtida pelo método de Aumann-Shapley, como a adoção de um limite inferior para a relação *j/n*, por exemplo.

Conclui-se, portanto, que o método de Aumann-Shapley é o mais adequado para o cálculo da repartição do custo de um determinado serviço utilizado por um conjunto de agentes. Além disto, a alocação Aumann-Shapley apresenta uma série de características desejáveis em termos de coerência econômica e isonomia.

Esse método pode ser resumido pelos seguintes pontos:

- o custo unitário de Aumann-Shapley, para um certo agente, corresponde à média de seus custos marginais obtidos quando seu montante cresce uniformemente de zero ao seu valor final;
- o custo do serviço é recuperado;
- justiça na repartição - não implica em subsídios cruzados;
- baseia-se em custos marginais ⇒ induz à eficiência econômica;
- o esforço computacional é aliviado em relação ao Método de Shapley Modificado.

2.9
Conclusões

Neste capítulo foi apresentado o problema de repartição de custos entre agentes que realizam parcerias para a utilização de um determinado serviço. É necessário que esta repartição ocorra de forma justa e eficiente, a fim de que um determinado agente ou grupo de agentes não seja beneficiado em detrimento dos demais.

Foram apresentados diversos métodos utilizados no problema de repartição de custos, concluindo-se que o método de Aumann-Shapley é o mais indicado, pois é o único que atende aos critérios de justiça e eficiência na repartição de custos com um esforço computacional razoável. Na Tabela 2.9 são apresentadas as principais vantagens e desvantagens dos métodos abordados neste capítulo.

Para exemplificar os métodos de custos marginais, custos incrementais, Shapley e Aumann-Shapley, foi usada uma função cúbica que permite mostrar as diferenças existentes entre estes métodos de alocação de custos, assim como as vantagens e desvantagens.

O método de Aumann-Shapley será empregado tanto na alocação de perdas do sistema de energia como na determinação das contribuições de potência dos geradores nas cargas. Ressalta-se que a aplicação de Aumann-Shapley para resolver esses problemas tem tratamento analítico.

Tabela 2.9 - Vantagens e Desvantagens dos Métodos de Repartição de Custos

Métodos	Vantagens	Desvantagens
Nucleolus	▪ Recupera o custo do serviço; ▪ Não há subsídio cruzado; ▪ Garante que a solução se encontra no núcleo, quando este existe.	▪ Complexidade do algoritmo cresce exponencialmente com o número de agentes; ▪ Se o núcleo for vazio a solução não existe.
Custos Marginais	▪ Induz à eficiência econômica.	▪ Não recupera integralmente o valor do serviço.
Custos Marginais com Fator de Ajuste	▪ Induz à eficiência econômica; ▪ Recupera o custo do serviço.	▪ Existência de subsídios cruzados entre os agentes.
Custos Incrementais	▪ Induz à eficiência econômica; ▪ Recupera o custo do serviço.	▪ Sensível à ordem de entrada dos agentes nas coalizões.
Shapley	▪ Induz à eficiência econômica; ▪ Recupera o custo do serviço; ▪ Não há subsídio cruzado; ▪ Não é sensível á ordem de entrada; dos agentes.	▪ Sensível aos montantes de serviço utilizados pelos agentes com impacto semelhante sobre a função-custo (não isonomia).
Aumann-Shapley	▪ Induz à eficiência econômica; ▪ Recupera o custo do serviço; ▪ Não há subsídio cruzado; ▪ Não é sensível à ordem de entrada dos agentes; ▪ Esforço computacional não é afetado pelo número de agentes; ▪ Não é sensível aos montantes de serviço utilizado pelos agentes (isonomia).	▪ Necessidade de formular a função -custo do serviço de forma analítica; ▪ Problemas de instabilidade numérica podem ser observados na repartição de custos.