

3 Modelagem da Turbulência

Segundo Piomelli (1999), soluções analíticas e numéricas para problemas de escoamento turbulento podem ser conseguidas através de vários níveis de aproximação, adotando-se maior ou menor descrição no detalhamento das características do escoamento.

Atualmente existe uma grande quantidade de modelos de turbulência disponível. Porém, apesar de muita pesquisa no campo da turbulência, não há nenhum modelo de turbulência que possa ser aplicado adequadamente a todos os tipos de escoamento. A modelagem da turbulência pode ser dividida nos seguintes campos primários (ordenados de acordo com a exigência computacional):

1. Simulação Numérica de Escoamentos Turbulentos via Equações de Médias de Reynolds (RANS - *Reynolds Averaged Navier-Stokes*).
As equações da técnica RANS são obtidas através de um conjunto de médias das equações do Navier-Stokes e da continuidade. O elemento crítico da modelagem RANS é a representação das tensões de Reynolds ou tensões turbulentas que descrevem os efeitos das flutuações turbulentas de pressão e velocidades;
2. Simulação de Grandes Escalas (LES – *Large Eddy Simulation*).
Nesta técnica, as grandes escalas, consideradas como os turbilhões que contém energia, são calculadas diretamente e para as pequenas escalas utilizam-se modelos de escalas sub-malha (Rodi, 2006). Neste caso, a formulação é necessariamente transiente e tridimensional;
3. Simulação Numérica Direta (DNS – *Direct Numerical Simulation*),
onde as equações de Navier-Stokes tridimensionais e transientes são resolvidas sem modelagem, em malhas bastante refinadas com passos de tempo bem pequenos, a fim de capturar toda a gama de escalas turbulentas.

A simulação numérica direta da turbulência é a técnica mais natural para resolver o escoamento turbulento. Na DNS as equações de Navier-Stokes são discretizadas diretamente e resolvidas numericamente. A malha deve ser suficientemente refinada para a solução das menores escalas do movimento, resultando no campo completo do escoamento turbulento, tridimensional, transiente, o qual é livre de qualquer tipo de modelagem, possuindo somente os erros da aproximação numérica. Porém, devido às grandes exigências de resolução espacial e temporal, a utilização prática da DNS limita-se aos escoamentos com baixo ou moderado número de Reynolds, Re_L , pois o número mínimo de pontos de discretização necessários para uma perfeita resolução espacial do escoamento é proporcional a $Re_L^{9/4}$ (Silveira Neto, 1998). Considerando o estágio atual da computação e a previsão para a sua expansão, as aplicações DNS estarão limitadas a escoamentos turbulentos em regime de baixo número de Reynolds e geometrias simples por alguns anos.

Uma vez que a turbulência é qualificada por um grande número de escalas temporais e espaciais, as quais aumentam rapidamente com o número de Reynolds, a simulação direta DNS torna-se inviável do ponto de vista prático e as simulações RANS e LES tornam-se as melhores alternativas de predição numérica. Estas técnicas fazem à decomposição das equações governantes em um campo médio ou filtrado e um campo de flutuações.

Esta decomposição das equações de Navier-Stokes provoca o aparecimento de momentos de segunda ordem ou mais, os quais envolvem flutuações, obtendo-se mais incógnitas que equações. Este é o conhecido problema de fechamento da turbulência. É exatamente sobre este problema que a maior parte das pesquisas reside, ou seja, na investigação por melhores modelos de turbulência que solucionem o problema de fechamento. Métodos experimentais e a simulação direta são instrumentos utilizados neste esforço, para validar as modelagens propostas.

Assim, o RANS e o LES são as duas abordagens para predição de escoamentos turbulentos que possuem o problema de fechamento da turbulência. Na modelagem RANS todas as informações espectrais são perdidas. As quantidades estatísticas são médias sobre todas as escalas de turbulência. Já a metodologia LES é intermediária tanto em custo como em esforço computacional entre o DNS e a modelagem RANS, uma vez que prediz a dinâmica das grandes escalas (Figura 3.1).

Um campo relativamente novo na pesquisa é a utilização de um modelo híbrido RANS/LES proposto por Spalart et al. em 1997 (Apparao, 2004)

denominado DES (*Detached Eddy Simulation*), onde a técnica de simulação de grandes escalas é usada em regiões fora da camada limite e dentro desta região utiliza-se um modelo RANS.

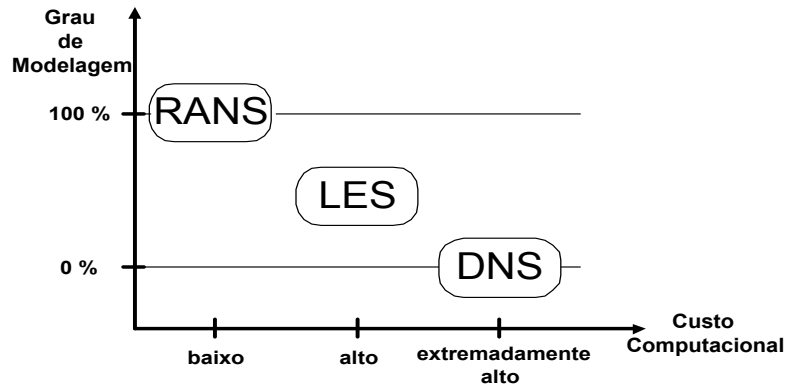


Figura 3.1 – Grau de modelagem e custo computacional dos modelos de turbulência.

Neste trabalho foram utilizados os seguintes modelos RANS: Spalart-Allmaras (Spalart & Allmaras, 1992), SST $\kappa-\omega$ (Shear-Stress Transport $\kappa-\omega$) (Menter, 2003) e RSM (Reynolds Stress Model) (Launder et al, 1975; Launder & Shima, 1989). Tais modelos foram selecionados pois a literatura mostra que são os mais indicados para aplicações aerodinâmicas.

Para simulação LES selecionou-se o modelo Smagorinsky Dinâmico (Germano et al, 1991; Lilly, 1992).

Estas técnicas de modelagem da turbulência e algumas de suas ramificações serão apresentadas resumidamente nas seções seguintes, após a apresentação das equações de governo.

3.1. Equações de Governo

As equações que descrevem o movimento de um fluido incompressível são as equações de conservação de massa e quantidade de movimento linear:

Equação de Conservação de Massa:

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (3.1)$$

Equação de Conservação de Quantidade de Movimento Linear

$$\frac{Du_i}{Dt} = g_i - \frac{1}{\nu} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \quad (3.2)$$

onde u_i e g_i são os componentes da velocidade e aceleração da gravidade na direção i , p é a pressão termodinâmica, ν é a viscosidade cinemática e σ_{ij} é o tensor viscoso. D/Dt é a derivada material,

$$\frac{Du_i}{Dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (3.3)$$

No caso de fluido Newtoniano, a equação constitutiva da tensão viscosa é dada por

$$\sigma_{ij} = \nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \nu \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \quad (3.4)$$

sendo δ_{ij} é o delta de Kronecker.

Combinando as Eqs. (3.1) a (3.4), obtém-se a seguinte forma da equação de Navier-Stokes

$$\left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_j u_i}{\partial x_j} \right) = g_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \quad (3.5)$$

3.2. Equações de Médias de Reynolds – RANS

As equações para valores médios do escoamento são obtidas aplicando-se a decomposição de Reynolds às equações de Navier-Stokes. Esta decomposição descreve os valores instantâneos das variáveis do movimento turbulento como uma variação randômica em torno dos valores médios:

$$u_i = \bar{u}_i + u_i' \quad (3.6)$$

$$p = \bar{p} + p' \quad (3.7)$$

Generalizando

$$\phi = \bar{\phi} + \phi' \quad (3.8)$$

onde a barra sobre a incógnita indica o valor médio e a aspa indica a flutuação instantânea em torno da média. Define-se o operador de média como:

$$\bar{\phi} = \frac{1}{\Delta t} \int_{\Delta t} \phi dt \quad (3.9)$$

Sendo a média das flutuações nula, pela própria definição,

$$\overline{\phi'} = 0 \quad (3.10)$$

As equações de Reynolds (equações de Navier-Stokes com média de Reynolds, também conhecidas como RANS - *Reynolds Averaged Navier-Stokes*) são obtidas a partir das equações de Navier-Stokes para fluidos incompressíveis, Eqs. (3.1) e (3.5), substituindo os valores instantâneos das variáveis pelos valores médios mais suas flutuações e avaliando-se as médias temporais das equações. Desta forma, as equações de continuidade e quantidade de movimento linear obtidas são:

$$\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_j} = 0 \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \overline{u'_i u'_j} \right) + g_i \quad (3.12)$$

As equações RANS, Eqs. (3.11) e (3.12), são semelhantes às equações de Navier-Stokes, Eqs. (3.1) e (3.5). Uma diferença entre estas equações encontra-se no fato de que as variáveis dependentes nas equações RANS são as velocidades médias e pressão média, ao invés dos valores instantâneos das Eqs. (3.1) e (3.5). A outra distinção é o aparecimento do termo $-\overline{u'_i u'_j}$,

conhecido como tensão de Reynolds, que representa a influência das flutuações turbulentas no fluxo médio. Com o aparecimento do tensor de Reynolds e como não há nenhuma equação adicional ao sistema, existem mais variáveis do que equações, gerando o chamado problema de fechamento matemático da turbulência. Para solucionar este problema é preciso introduzir modelos para avaliar o tensor de Reynolds.

De um modo geral, um tensor possui nove componentes, no entanto, como o tensor de Reynolds é simétrico, a presença deste tensor nas equações médias somente introduz seis novas incógnitas.

Na metodologia estatística clássica são empregados duas classes de modelos: modelos de viscosidade turbulenta e modelos de fechamento de segunda ordem. Os modelos de viscosidade turbulenta relacionam a tensão de Reynolds com uma função da viscosidade turbulenta e do tensor taxa de deformação do escoamento médio. Os modelos de fechamento de segunda ordem resolvem versões simplificadas do tensor de Reynolds utilizando vários tipos de aproximações e hipóteses. Em Craft e Launder (1996), pode-se encontrar uma revisão de modelos de fechamento segunda de ordem.

No presente trabalho, selecionou-se investigar o escoamento com a técnica RANS utilizando três classes de modelos, descritas nas seções seguintes.

3.2.1. Hipótese de Boussinesq

A abordagem mais comum para a modelagem da tensão de Reynolds é conhecida como hipótese de Boussinesq (Launder & Sandham, 2001). Esta hipótese proposta por Boussinesq em 1877, baseia-se em uma analogia entre as tensões turbulentas e as tensões viscosas do escoamento laminar, onde assume-se que as tensões turbulentas são proporcionais ao gradiente de velocidade média do escoamento, e o coeficiente de proporcionalidade é chamado de viscosidade turbulenta ν_t .

Desta forma, realizando-se uma analogia com a Eq. (3.4) e assumindo escoamento incompressível, tem-se que a tensão turbulenta é definida por

$$-\overline{u'_i u'_j} = \nu_t \left(\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \kappa \delta_{ij} \quad (3.13)$$

onde o último termo representa a pressão dinâmica dos turbilhões, em analogia à pressão estática termodinâmica, sendo κ a energia cinética turbulenta definida como

$$\kappa = \frac{1}{2} \left(\overline{u'_i u'_i} \right) = \frac{1}{2} \left(\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2} \right) \quad (3.14)$$

A viscosidade turbulenta é uma função do escoamento, ao contrário da viscosidade molecular que é uma propriedade do fluido. De acordo com o estado local, o valor de ν_t varia ponto a ponto no escoamento.

A hipótese de Boussinesq não constitui um modelo de turbulência. Os modelos propostos determinarão o valor da viscosidade turbulenta em função de valores calculados do escoamento médio.

Neste contexto, a equação de conservação de quantidade de movimento linear para regime turbulento baseada no conceito da viscosidade turbulenta é obtida pela substituição da Eq. (3.13) na Eq. (3.12), ou seja,

$$\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial t} + \overline{u}_j \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu_{ef} \left[\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_i} \right] \right) + g_i \quad (3.15)$$

onde P é a pressão modificada, definida de forma a incorporar o termo da pressão dinâmica turbulenta como

$$P = \frac{1}{\rho} \overline{p} + \frac{2}{3} \kappa \quad (3.16)$$

e a viscosidade efetiva ν_{ef}

$$\nu_{ef} = \nu + \nu_t \quad (3.17)$$

A utilização da hipótese de Boussinesq simplifica significativamente o problema de fechamento, pois ao invés de ser necessário introduzir seis equações adicionais para cada um dos componentes do tensor de Reynolds, basta introduzir uma equação para a viscosidade turbulenta. Em 1925, Prandtl

(Sreenivasan, 1999) desenvolveu a primeira formulação de viscosidade turbulenta com a hipótese de comprimento de mistura. Através da analogia com o transporte molecular, Prandtl assumiu que a viscosidade turbulenta era proporcional à velocidade e ao comprimento da escala de movimento, ou seja,

$$\nu_t \approx V_c L_c \quad (3.18)$$

onde o L_c é o comprimento característico ou típico da da escala de movimento.

Dependendo do tipo de equação utilizada para determinar as grandezas característica (V_c e L_c), tem-se um tipo diferente de modelo. Os três principais tipos de modelos de viscosidade turbulenta são os modelos algébricos (ou modelos de zero equação diferencial), modelos de uma equação diferencial e modelos de duas equações diferenciais.

Os modelos algébricos usam uma especificação algébrica para a velocidade e comprimento característico, a qual está relacionada com o escoamento médio e propriedades geométricas. Por exemplo, o modelo algébrico mais tradicional é o modelo de comprimento de mistura de Prandtl, no qual a velocidade característica é determinada em função do gradiente de velocidade

$$V_c \approx \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} L_c \quad (3.19)$$

enquanto que o comprimento característico é estimado algebricamente, de forma empírica, tomando diferentes formas para cada tipo de escoamento.

A maioria dos modelos de uma equação resolvem uma equação diferencial parcial que descreve o transporte de uma única escala turbulenta, utilizada frequentemente na avaliação da viscosidade turbulenta, juntamente com uma segunda escala que é determinada usando relações algébricas. Em modelos de duas equações a segunda escala de turbulência também é determinada empregando-se uma segunda equação diferencial parcial.

Os modelos de turbulência descrevem aproximadamente o escoamento, e com certo conjunto de constantes empíricas, são válidos somente para determinado escoamento, ou na melhor das hipóteses, para um conjunto de escoamentos. O ideal é que o modelo proposto possa descrever com boa

aproximação um grande número de escoamentos com um único conjunto de constantes.

O modelo mais geral possível pode não ser o mais adequado para determinado problema. Na prática, o custo computacional e simplicidade de uso de um modelo são fatores importantes, e os modelos mais universais são geralmente os mais complexos e requerem mais tempo de processamento. A qualidade da simulação da turbulência, necessária para obter uma simulação precisa do escoamento médio, depende da importância dos termos do transporte turbulento nas equações do escoamento. Concluindo, o melhor modelo depende do problema a ser tratado.

A seguir serão apresentados os modelos RANS utilizados neste trabalho.

3.2.1.1.

Modelo Spalart-Allmaras

Desenvolvido por Spalart e Allmaras (1992), este é um modelo relativamente simples que resolve uma equação diferencial de transporte para a viscosidade turbulenta e, portanto, requer menor esforço computacional. Neste modelo não há necessidade de calcular o comprimento de escala relacionado com a espessura da camada cisalhante local.

O modelo de Spalart-Allmaras foi especificamente projetado para aplicações aerodinâmicas envolvendo escoamento com fronteiras sólidas e tem apresentado bons resultados para escoamentos com gradiente adversos de pressão. Neste modelo, somente a parte anisotrópica do tensor de Reynolds é modelada

$$-\overline{u'_i u'_j} = \nu_t \left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right) \quad (3.20)$$

Conseqüentemente a pressão modificada é simplesmente igual a $P=p/\rho$. O modelo foi basicamente desenvolvido de forma empírica. A equação de transporte resultante para a viscosidade turbulenta é

$$\frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial t} + \frac{\partial (\overline{u_i \tilde{\nu}})}{\partial x_j} = G_\nu + \frac{1}{\sigma_{\tilde{\nu}}} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\nu + \tilde{\nu}) \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \right] + C_{b2} \left(\frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \right)^2 \right\} - Y_\nu \quad (3.21)$$

sendo $\tilde{\nu}$ uma variável auxiliar calculada neste modelo de turbulência. O coeficiente de viscosidade turbulenta é calculado por

$$\nu_t = \tilde{\nu} f_{\nu 1} \quad (3.22)$$

onde $f_{\nu 1}$ é a função de amortecimento viscoso utilizada para tratar de forma mais apropriada a camada amortecedora e a subcamada laminar, sendo definida como

$$f_{\nu 1} = \frac{\chi^3}{\chi^3 + C_{\nu 1}^3} \quad \text{com} \quad \chi \equiv \frac{\tilde{\nu}}{\nu} \quad (3.23)$$

sendo $C_{\nu 1}$ uma constante empírica.

Na Eq. (3.21), G_ν é a produção da viscosidade turbulenta e Y_ν é a destruição da viscosidade turbulenta que ocorre na região próxima da parede devido ao bloqueio pela parede e amortecimento viscoso. A produção da viscosidade turbulenta é

$$G_\nu = \frac{1}{\rho} C_{b1} \tilde{S} \tilde{\nu} \quad (3.24)$$

onde C_{b1} uma constante empírica e

$$\tilde{S} = S_{SA} + \frac{\tilde{\nu}}{k^2 d^2} f_{\nu 2} \quad \text{e} \quad f_{\nu 2} = 1 - \frac{\chi}{1 + \chi f_{\nu 1}} \quad (3.25)$$

sendo k a constante de Von Kármán, d a distância da parede e S_{SA} uma medida escalar do tensor deformação, que no modelo de Spalart-Allmaras, é baseada no módulo do tensor vorticidade.

$$S_{SA} = \left| \boldsymbol{\Omega}_{ij} \right| \quad ; \quad \left| \boldsymbol{\Omega}_{ij} \right| = \sqrt{2 \boldsymbol{\Omega}_{ij} \boldsymbol{\Omega}_{ij}} \quad (3.26)$$

onde o tensor taxa de rotação do escoamento médio é definido por

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.27)$$

Recomenda-se (Deck et al, 2002) a expressão definida pela Eq. (3.26) para S_{SA} quando a turbulência é devido somente à geração de vorticidade nas regiões próximas as paredes. No entanto, os resultados obtidos com esta expressão, tendem a superestimar a produção da viscosidade turbulenta e desta forma aumentar o valor da viscosidade turbulenta.

Pode-se combinar os efeitos dos tensores rotação e deformação na definição de S_{SA} (Deck et al, 2002).

$$S_{SA} = |\Omega_{ij}| + C_{prod} \min(0, |S_{ij}| - |\Omega_{ij}|) \quad (3.28)$$

onde $C_{prod} = 2,0$ e

$$|S_{ij}| = \sqrt{2 S_{ij} S_{ij}} \quad (3.29)$$

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \quad (3.30)$$

A inclusão de ambos os tensores, rotação e deformação, diminui a produção da viscosidade turbulenta e conseqüentemente reduz a viscosidade turbulenta, nas regiões onde a medida de vorticidade excede a taxa de deformação.

O termo de destruição Y_v é modelado como

$$Y_v = \frac{1}{\rho} C_{w1} f_w \left(\frac{\tilde{v}}{d} \right)^2 \quad (3.31)$$

onde

$$f_w = g \left[\frac{1 + C_{w3}^6}{g^6 + C_{w3}^6} \right]^{1/6} ;$$

$$g = r + C_{w2} (r^6 - r) ;$$

$$r = \frac{\tilde{\nu}}{\tilde{S} k^2 d^2} \quad (3.32)$$

As constantes empíricas do modelo são dadas na Tabela 3.1.

Tabela 3.1 - Constantes Empíricas do Modelo Spalart Allmaras (Deck et al, 2002)

Constante	Valor
C_{b1}	0,1355
C_{b2}	0,622
C_{w1}	$\frac{C_{b1}}{k^2} + \frac{(1 + C_{b2})}{\sigma_{\tilde{\nu}}}$
C_{w2}	0,3
C_{w3}	2,0
C_{v1}	7,1
$\sigma_{\tilde{\nu}}$	2 / 3
k	0,41

3.2.1.2.**Modelo SST $\kappa - \omega$**

No modelo SST $\kappa - \omega$, a tensão turbulenta de Reynolds é modelada pela Eq. (3.13), sendo a viscosidade turbulenta modelada em função da energia cinética turbulenta κ e da taxa de dissipação específica da energia cinética turbulenta ω . Este modelo foi proposto para simulações de escoamentos aerodinâmicos com gradiente adverso de pressão e separação da camada limite, utilizando as maiores vantagens dos modelos $\kappa - \omega$ e $\kappa - \varepsilon$.

Para escoamentos onde há formação de camada limite, o modelo $\kappa - \omega$ tradicional é superior ao modelo $\kappa - \varepsilon$ na solução da região viscosa próxima a parede, e tem demonstrado sucesso nos problemas envolvendo gradiente adverso de pressão. Entretanto, o modelo $\kappa - \omega$ requer uma condição de contorno diferente de zero para ω na corrente livre, e a solução final do escoamento é muito sensível ao valor especificado (Menter, 1992). Também foi demonstrado (Cazalbou *et al*, 1993) que o modelo $\kappa - \varepsilon$ não sofre esta deficiência.

Assim, o modelo SST mistura a formulação robusta e precisa do modelo $\kappa - \omega$ próximo a parede com a independência do modelo $\kappa - \varepsilon$ na corrente livre. Para realizar isto, o modelo $\kappa - \varepsilon$ é escrito em termos de ω . Então o modelo $\kappa - \omega$ e o modelo $\kappa - \varepsilon$ transformado são ambos multiplicados por uma função de mistura e somados. Esta função de mistura F_1 vale um (conduzindo ao modelo $\kappa - \omega$ padrão) na extremidade interna da camada de limite turbulenta e tem um valor zero (correspondendo ao modelo $\kappa - \varepsilon$ padrão) na parte externa à camada. Desta forma, a energia cinética turbulenta κ e taxa de dissipação específica ω do modelo de SST são determinadas por (Menter *et al.*, 2003):

$$\frac{\partial \kappa}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \kappa}{\partial x_j} = \tilde{P}_\kappa - \beta^* \kappa \omega + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(v + \sigma_\kappa \nu_t) \frac{\partial \kappa}{\partial x_j} \right] \quad (3.33)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \omega}{\partial x_j} = & \alpha S^2 - \beta \omega^2 + \\ & + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(v + \sigma_\omega \nu_t) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] + (1 - F_1) 2 \sigma_d \frac{1}{\omega} \frac{\partial \kappa}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \end{aligned} \quad (3.34)$$

O último termo do lado direito da Eq. (3.34) é conhecido como termo de difusão cruzada. Menter (1992) demonstrou que introduzindo o termo de difusão cruzada na equação, a dependência da corrente livre do modelo $\kappa - \omega$ é reduzida. O principal efeito de difusão cruzada em escoamentos livres é aumentar a produção de ω e, conseqüentemente, aumentar a dissipação de κ . Na Eq. (3.34) a difusão cruzada está multiplicando função de mistura F_1 , que é função da distância à parede. Como explicado anteriormente, F_1 é igual a zero afastado da parede (modelo $\kappa - \varepsilon$), e muda para o valor um dentro da camada limite (modelo $\kappa - \omega$). A função de mistura F_1 é definida como

$$F_1 = \tanh\left\{(arg_1)^4\right\} \quad (3.35)$$

$$arg_1 = \min\left[\max\left(\frac{\sqrt{\kappa}}{\beta^* \omega y}; \frac{500\nu}{y^2 \omega}\right); \frac{4\rho\sigma_{\omega 2}\kappa}{CD_{\kappa\omega} y^2}\right] \quad (3.36)$$

onde y é a distância à parede, β^* e $\sigma_{\omega 2}$ são constantes empíricas e $CD_{\kappa\omega}$ é a parte positiva do termo de difusão cruzada, dada por

$$CD_{\kappa\omega} = \max\left(2\rho\sigma_d \frac{1}{\omega} \frac{\partial\kappa}{\partial x_j} \frac{\partial\omega}{\partial x_j}; 10^{-10}\right) \quad (3.37)$$

onde σ_d é uma constante empírica.

A definição da viscosidade turbulenta apresenta um tratamento melhor para o transporte das tensões de Reynolds em camada limite sujeita a gradiente adverso de pressão. Esta definição está baseada na hipótese de Bradshaw (1967) que para escoamento em camada de limite as tensões de Reynolds são proporcionais à energia cinética turbulenta. A viscosidade turbulenta é formulada como segue

$$\nu_t = \frac{a_1 \kappa}{\max(a_1 \omega; S F_2)} \quad (3.38)$$

onde a_1 é uma constante empírica igual a 0,3 e S é o módulo do tensor deformação do escoamento médio S_{ij} , definidos pelas Eqs. (3.30) e (3.31). F_2 é a função de mistura para viscosidade turbulenta no modelo SST, definida como

$$F_2 = \tanh\left\{\left(\arg_2\right)^2\right\} \quad (3.39)$$

$$\arg_2 = \max\left(\frac{\sqrt{\kappa}}{\beta^* \omega y}; \frac{500 \nu}{y^2 \omega}\right) \quad (3.40)$$

No modelo SST a produção de energia cinética turbulenta é limitada para prevenir um acúmulo de turbulência em regiões de estagnação

$$\tilde{P}_k = \min\left(\nu_t S^2; 10\beta^* \kappa \omega\right) \quad (3.41)$$

As constantes empíricas do modelo, são obtida combinando as constantes empíricas dos modelos $\kappa - \varepsilon$ e $\kappa - \omega$. Seja ϕ uma constante do modelo SST e sejam ϕ_1 e ϕ_2 constantes dos modelos $\kappa - \omega$ e $\kappa - \varepsilon$, respectivamente. As constantes ϕ são calculadas usando a função de mistura entre as constantes ϕ_1 ($\kappa - \omega$) e ϕ_2 ($\kappa - \varepsilon$), que encontram-se na Tabela 3.2.

$$\phi = F_1 \phi_1 + (1 - F_1) \phi_2 \quad (3.42)$$

Tabela 3.2 – Coeficientes do modelo SST

Constante	ϕ_1 ($\kappa - \omega$)	ϕ_2 ($\kappa - \varepsilon$)
β	0,075	0,0828
β^*	0,09	0,09
σ_κ	0,5	1,0
σ_ω	0,5	0,856
σ_d	0,856	0,856
α	5/9	0,44

3.2.2. Equações de Transporte do Tensor de Reynolds - RSM

Os modelos de turbulência fundamentados na hipótese de Boussinesq representam uma solução consolidada para o problema de fechamento das equações de médias de Reynolds. Entretanto, apesar do reconhecido desempenho na solução de diversos tipos de escoamentos turbulentos, tais modelos apresentam algumas deficiências, normalmente associadas às limitações impostas pelo conceito de viscosidade turbulenta. Os escoamentos que apresentam forte comportamento anisotrópico da turbulência são exemplos típicos em que a hipótese de Boussinesq é falha.

Uma alternativa para o fechamento das equações RANS consiste na obtenção de equações diretas para o transporte das tensões de Reynolds (*Reynolds Stress Model* – RSM). Em virtude disto, tais modelos são usualmente referenciados na literatura como modelos de fechamento direto ou de segunda ordem (Launder, 1989 ; Launder & Shima, 1989).

As equações de transporte para as tensões de Reynolds podem ser obtidas a partir das equações de Navier-Stokes e das equações de médias de Reynolds, Eqs. (3.5) e (3.12) respectivamente, conforme mostrado em Alho & Ilha (2006). Estas equações para escoamentos incompressíveis são apresentadas a seguir

$$\frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial t} + \overline{u_\ell} \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_\ell} = D_{ij} + P_{ij} + \Phi_{ij} - \varepsilon_{ij} \quad (3.43)$$

onde D_{ij} é o termo de transporte difusivo,

$$D_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_\ell} \left[\nu \frac{\partial}{\partial x_\ell} (\overline{u'_i u'_j}) \right] - \frac{\partial}{\partial x_\ell} \left[\overline{u'_i u'_j u'_\ell} + \frac{\overline{p'}}{\rho} (\delta_{\ell j} u'_i + \delta_{i \ell} u'_j) \right] \quad (3.44)$$

P_{ij} é o termo de produção de tensão

$$P_{ij} = - \left[\overline{u'_i u'_\ell} \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_\ell} + \overline{u'_j u'_\ell} \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_\ell} \right] \quad (3.45)$$

Φ_{ij} é o termo de pressão

$$\Phi_{ij} = \frac{\overline{p'}}{\rho} \left[\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right] \quad (3.46)$$

ε_{ij} é o termo de dissipação viscosa

$$\varepsilon_{ij} = 2 \nu \left[\frac{\partial u'_i}{\partial x_\ell} \frac{\partial u'_j}{\partial x_\ell} \right] \quad (3.47)$$

O lado esquerdo da Eq. (3.43) representa o transporte convectivo do tensor de Reynolds (ou seja, da turbulência) ao longo do escoamento médio. Naturalmente, esse movimento convectivo provém do balanço de todos os processos presentes do lado direito da equação de transporte, Eq. (3.43).

A Eq. (3.44) é a taxa de difusão do tensor de Reynolds devido a viscosidade molecular μ do fluido, às flutuações p' da pressão e à própria turbulência (em realidade uma convecção ao nível das flutuações de velocidade, representadas pelo termo de correlação tripla $\overline{u'_i u'_j u'_\ell}$).

O termo P_{ij} , Eq. (3.45), é a taxa de produção (criação ou destruição) da tensão turbulenta à medida que esta é transportada ao longo do escoamento, sendo influenciada pelos gradientes de velocidade média $\partial \overline{u}_j / \partial x_\ell$. Havendo gradientes de velocidade média maiores em algumas direções do que em outras e existindo contornos físicos que causem o amortecimento seletivo das flutuações turbulentas em direções específicas, a turbulência gerada pelos termos acima é, em geral, anisotrópica.

O termo adicional de pressão Φ_{ij} da Eq. (3.46) envolve correlações entre as flutuações da pressão e taxas de deformação. Este termo não se encontra presente na equação da energia cinética turbulenta κ , já que não contribui para o balanço total de energia. A soma do termo de pressão para $i=1, 2$ e 3 leva a

$\Phi_{ij} = 2(\overline{p' / \rho})[\partial u'_i / \partial x_j] = 0$, pela equação da continuidade. Este termo age somente para redistribuir a energia entre os componentes normais da tensão de Reynolds quando $i = j$ e para reduzir a tensão cisalhante quando $i \neq j$. Este termo tende a tornar a turbulência mais isotrópica.

Finalmente, ε_{ij} representa a taxa de dissipação do tensor de Reynolds devido à viscosidade ν .

Os termos correspondentes aos processos de difusão (D_{ij}), redistribuição (Φ_{ij}) e dissipação (ε_{ij}) possuem quantidades desconhecidas e necessitam de uma modelagem específica. Usualmente, a modelagem dos termos D_{ij} e ε_{ij} apresentam um caráter mais geral, sendo basicamente igual aos principais modelos existentes. Entretanto, a modelagem do termo Φ_{ij} tem sido objeto de diversos trabalhos, representando um tema central no desenvolvimento desses modelos de fechamento de segunda ordem. Nas seções seguintes serão abordadas estas modelagens.

Normalmente, o início da produção de turbulência ocorre através de instabilidades no escoamento, relacionadas aos gradientes de velocidade média (descritas pelo termo de produção P_{ij}), que por sua vez originam novas instabilidades em escalas menores. Este processo continua até que as escalas se tornem muito pequenas e, conseqüentemente, os gradientes de flutuação da velocidade sejam suficientemente grandes a tal ponto que os efeitos viscosos dominem o escoamento, fazendo com que a energia turbulenta seja dissipada na forma de energia interna e calor. Este processo contínuo de transferência de energia turbulenta das maiores escalas para as menores até a sua dissipação viscosa final é conhecido como cascata de energia turbulenta.

Na Eq. (3.43) os termos de convecção e produção não necessitam de modelagem, pois são exatos e dependem apenas dos componentes do tensor de Reynolds. Entretanto, os termos de redistribuição, difusão e dissipação requerem modelagem fenomenológica extensiva, como será visto nas próximas sessões.

Como comentário final, vale mencionar que na derivação da equação de transporte para o tensor de Reynolds $-\overline{u'_i u'_j}$, obtém um termo de correlação tripla entre as flutuações de velocidade, $\overline{u'_i u'_j u'_\ell}$. De forma análoga, a equação

de transporte para esta correlação tripla dá origem a um termo de correlação quádrupla,

$$\frac{\bar{D}}{Dt} \left(\overline{u'_i u'_j u'_\ell} \right) = \frac{\partial}{\partial x_m} \left(\overline{u'_i u'_j u'_\ell u'_m} \right) + (\dots) \quad (3.48)$$

Ou seja, cada equação para um momento estatístico de ordem N envolve necessariamente um termo com um momento de ordem $N + 1$. Isso ilustra mais uma vez o problema de fechamento matemático da turbulência.

3.2.2.1.

Modelagem do Termo de Transporte Difusivo D_{ij}

Um dos problemas inerentes a elaboração de modelagens para o processo de difusão turbulenta é a presença do termo de correlação tripla entre as flutuações de velocidade, $\overline{u'_i u'_j u'_\ell}$. Para tratar deste termo, Daly & Harlow (1970), propuseram o seguinte modelo baseado na hipótese da difusão gradiente generalizada

$$D_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_\ell} \left[\nu \frac{\partial}{\partial x_\ell} \left(\overline{u'_i u'_j} \right) \right] + c_s \frac{\partial}{\partial x_\ell} \left[\frac{\kappa}{\varepsilon} \overline{u'_k u'_\ell} \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_k} \right] \quad (3.49)$$

Entretanto, a utilização da Eq. (3.49) pode resultar em instabilidades numéricas. Esta pode ser modificada através de um modelo de difusão gradiente simplificada (Lien & Leschziner, 1994), com uma difusividade turbulenta escalar (isotrópica)

$$D_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_\ell} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\kappa} \right) \frac{\partial}{\partial x_\ell} \left(\overline{u'_i u'_j} \right) \right] \quad (3.50)$$

onde $\sigma_\kappa = 0,82$, sendo a viscosidade turbulenta dada como no modelo $\kappa - \varepsilon$ por

$$\nu_t = C_\mu \frac{\kappa^2}{\varepsilon} \quad (3.51)$$

sendo $C_\mu = 0,09$. A equação de transporte para a taxa de dissipação da energia cinética turbulenta ε será tema da próxima seção. A energia cinética turbulenta κ é obtida através do traço do tensor de Reynolds, Eq. (3.14).

3.2.2.2.

Modelagem do Termo de Dissipação Turbulenta ε_{ij}

O tratamento do termo dissipativo é semelhante ao empregado no modelo $\kappa - \varepsilon$, sendo assumido que o processo de dissipação viscosa ocorre de uma forma isotrópica nas menores escalas. Isso implica que

$$\varepsilon_{ij} = \frac{2}{3} \varepsilon \delta_{ij} \quad (3.52)$$

A taxa de dissipação da energia cinética turbulenta, ε , continua sendo uma quantidade desconhecida, que é calculada através de sua equação de transporte (Hanjalic, 1994)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial \overline{u_j \varepsilon}}{\partial x_j} = \\ = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] + \left[\frac{c_{1\varepsilon} P_{ii}}{\rho} - c_{2\varepsilon} \varepsilon \right] \frac{\varepsilon}{\kappa} \end{aligned} \quad (3.53)$$

sendo as constantes dadas pela Tabela 3.3.

Tabela 3.3 - Coeficientes do modelo RSM para equação de ε

Constante	Valor
$c_{1\varepsilon}$	1,44
$c_{2\varepsilon}$	1,92

σ_ε	0,5
----------------------	-----

3.2.2.3.

Modelagem do Termo de Pressão Φ_{ij} - Modelo LRR

O modelo LRR (Launder, Reece & Rody, 1975) foi um dos primeiros modelos de segunda ordem a ser formulado.

Utilizando-se um processo de eliminação da flutuação da pressão através da equação de Poisson (Launder & Sandham, 2001), conclui-se que a correlação pressão-deformação pode ser descomposta em dois termos distintos

$$\Phi_{ij} = \Phi_{ij,1} + \Phi_{ij,2} \quad (3.54)$$

O termo $\Phi_{ij,1}$ representa a contribuição das interações das flutuações da velocidade (turbulência pura) para a redistribuição, e $\Phi_{ij,2}$ é a contribuição dependente do gradiente de velocidade média (deformação média).

Fisicamente, o termo Φ_{ij} atua no sentido de distribuir a energia turbulenta entre os diversos componentes do tensor de Reynolds. Inicialmente, a turbulência é fortemente anisotrópica, com determinados componentes de $-\overline{u'_i u'_j}$ apresentando magnitudes superiores aos demais. No entanto, através do processo de decomposição proposto na Eq. (3.54), a energia turbulenta tende a ser distribuída de uma forma mais equilibrada entre todas os componentes do tensor de Reynolds, levando, portanto, a um comportamento isotrópico da turbulência. Obviamente, quanto maior for o comportamento anisotrópico do escoamento, maior será a influência de Φ_{ij} ; se a turbulência for mais isotrópica, menor será a importância do termo de redistribuição.

Cada contribuição da Eq. (3.54) é em geral modelada separadamente. Rotta (1951) propôs modelar a primeira parte, considerando que $\Phi_{ij,1}$ é proporcional a anisotropia da turbulência, como

$$\Phi_{ij,1} = -C_{LRR,1} \frac{\varepsilon}{\kappa} \left[\overline{u'_i u'_j} - \frac{2}{3} \kappa \delta_{ij} \right] \quad (3.55)$$

Nota-se que $\Phi_{ij,1}$ é um termo de fonte para a equação de $\overline{u_i'^2}$ quando $\overline{u_i'^2} < (2/3) \kappa$ e um sorvedouro quando $\overline{u_i'^2} > (2/3) \kappa$, de tal forma que este termo realmente age no sentido de redistribuir a energia entre seus componentes ($\overline{u_i'^2} = (2/3) \kappa$ na turbulência isotrópica).

Para a segunda parcela da Eq. (3.54), referente ao gradiente da velocidade média, tem-se o seguinte modelo (Launder et al., 1975; Naot et al., 1970)

$$\Phi_{ij,2} = -C_{LRR,2} \left(P_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} P_{kk} \right) \quad (3.56)$$

Esta parcela é a contrapartida direta de $\Phi_{ij,1}$, porque assume que a parcela da deformação média do termo de esforço de pressão é proporcional a anisotropia da produção de $-\overline{u_i' u_j'}$.

O modelo LRR foi posteriormente modificado (Gibson & Launder, 1978) a fim de serem incorporados os efeitos de parede, como

$$\Phi_{ij} = \Phi_{ij,1} + \Phi_{ij,2} + \Phi_{ij,w} \quad (3.57)$$

O termo $\Phi_{ij,w}$ é responsável pela redistribuição da tensão normal próximo a parede. Ele amortece a tensão normal perpendicular à parede, enquanto aumenta as tensões cisalhantes paralelas à parede. É dado por (Gibson & Launder, 1978)

$$\begin{aligned} \Phi_{ij,w} = & C_{LRR,3} \frac{\varepsilon}{\kappa} \left(\overline{u_k' u_m'} n_k n_m \delta_{ij} - \frac{3}{2} \overline{u_i' u_k'} n_j n_k - \frac{3}{2} \overline{u_i' u_k'} n_j n_k \right) f_w + \\ & + C_{LRR,4} \left(\phi_{km,2} n_k n_m \delta_{ij} - \frac{3}{2} \phi_{ik,2} n_j n_k - \frac{3}{2} \phi_{jk,2} n_i n_k \right) f_w \end{aligned} \quad (3.58)$$

onde n_i é o componente unitário da direção i normal à parede.

A função de escala f_w promove o amortecimento da contribuição do termo $\Phi_{ij,w}$ a medida que o escoamento se afasta da parede, sendo igual a

$$f_w = \frac{\kappa^{3/2}/\varepsilon}{2,5d} \quad (3.59)$$

onde d é a distância a parede.

Visando melhorar o modelo LRR para solução de escoamentos com camada limite via RSM, Launder & Shima (1989) propuseram que os valores de $C_{LRR,1}$, $C_{LRR,2}$, $C_{LRR,3}$ e $C_{LRR,4}$ sejam funções de invariantes das tensões de Reynolds e do número de Reynolds turbulento,

$$Re_t = (\kappa^2/\nu\varepsilon) \quad (3.60)$$

sendo definidas por

$$C_{LRR,1} = 1 + 2,58A\sqrt{A_2} \left\{ 1 - \exp\left[-(0,0067 Re_t)^2\right] \right\} \quad (3.61)$$

$$C_{LRR,2} = 0,75\sqrt{A_2} \quad (3.62)$$

$$C_{LRR,3} = -\frac{2}{3}C_{LRR,1} + 1,67 \quad (3.63)$$

$$C_{LRR,4} = \max \left[\frac{\frac{2}{3}C_{LRR,2} - \frac{1}{6}, 0}{C_{LRR,2}} \right] \quad (3.64)$$

O parâmetro A e os invariantes A_2 e A_3 são definidos como

$$A = \left[1 - \frac{9}{8}(A_2 - A_3) \right] \quad (3.65)$$

$$A_2 = a_{ik}a_{ki} \quad (3.66)$$

$$A_3 = a_{ik}a_{kj}a_{ji} \quad (3.67)$$

onde a_{ij} é o tensor anisotrópico

$$a_{ij} = - \left(\frac{-\overline{u'_i u'_j} + \frac{2}{3} \kappa \delta_{ij}}{\kappa} \right) \quad (3.68)$$

3.2.2.4. Equação de Transporte do Modelo RSM

Considerando as observações apresentadas nas seções anteriores, o modelo RSM consiste na solução da seguinte equação de transporte para cada um dos componentes do tensor de Reynolds, $\overline{u'_i u'_j}$, $\overline{v'_i v'_j}$, $\overline{w'_i w'_j}$ e $\overline{u'_i v'_j}$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial t} + \overline{u'_\ell} \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_\ell} = \frac{\partial}{\partial x_\ell} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\kappa} \right) \frac{\partial}{\partial x_\ell} (\overline{u'_i u'_j}) \right] - \\ - \left[\overline{u'_i u'_\ell} \frac{\partial \overline{u'_j}}{\partial x_\ell} + \overline{u'_j u'_\ell} \frac{\partial \overline{u'_i}}{\partial x_\ell} \right] + \Phi_{ij,1} + \Phi_{ij,2} + \Phi_{ij,w} - \frac{2}{3} \varepsilon \delta_{ij} \end{aligned} \quad (3.69)$$

juntamente com a solução da equação para ε .

No caso 2D, considera-se desprezível a contribuição dos tensores $\overline{u'_i w'_j}$ e $\overline{u'_i v'_j}$, resultando em um conjunto de cinco equações juntamente com as equações da continuidade e quantidade de movimento

3.2.2.5. Tratamento do Modelo RSM Próximo à Parede

Os modelos Spalart-Allmaras e SST foram projetados para serem aplicados ao longo da camada limite, desta forma há necessidade de um maior refinamento da malha próximo à região da parede, ou seja, $y^+ \cong 1$. O valor de y^+ é dado através da expressão a seguir

$$y^+ = \frac{u_\tau d}{\nu} \quad ; \quad u_\tau = \sqrt{\frac{|\tau_s|}{\rho}} \quad ; \quad \tau_s = \mu \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)_{d=0} \quad (3.70)$$

Na Eq. (3.70), u_τ é a velocidade de atrito, τ_s é a tensão cisalhante na parede e d é a distância à parede.

No caso da placa plana em estudo são utilizadas malhas com $y^+ \cong 1$.

O modelo RSM foi inicialmente desenvolvido para escoamentos turbulentos sem a influência da região da parede. Como as malhas neste trabalho possuem $y^+ \cong 1$, é conveniente que haja um tratamento específico deste modelo para esta região. Este tratamento será descrito a seguir.

Para simular o comportamento do escoamento próximo à parede ($y^+ \cong 1$) no modelo RSM (Chen & Patel, 1988), o domínio inteiro é subdividido em duas regiões. A primeira região localiza-se próxima à parede e o escoamento é afetado pela viscosidade do fluido. A outra região, denominada totalmente turbulenta, está afastada da parede. A definição das duas regiões é determinada através da seguinte definição para o número de Reynolds

$$Re_y = \frac{d\sqrt{\kappa}}{\nu} \quad (3.71)$$

onde d é a distância à parede e κ a energia cinética turbulenta definida pela Eq. (3.14).

Na região totalmente turbulenta ($Re_y > 200$), o escoamento é resolvido normalmente pelo modelo RSM conforme as seções anteriores.

Na região próxima à parede ($Re_y < 200$) é aplicado o modelo de Wolfshtein (1969). No modelo de Wolfshtein são adotadas as mesmas equações de transporte de quantidade de movimento e para o cálculo de κ , Eq. (3.14), do modelo RSM, porém o valor da viscosidade turbulenta é

$$\nu_{t,2r} = C_\nu \ell_{2r} \sqrt{\kappa} \quad (3.72)$$

sendo $C_\nu = 0,09$ e o comprimento de escala ℓ_{2r} dado por (Chen & Patel, 1988)

$$\ell_{2r} = dC_\ell^* \left(1 - e^{-(Re_y / A_\nu)} \right) \quad (3.73)$$

Para uma suave transição do valor da viscosidade turbulenta da região próxima a parede para região totalmente turbulenta, utiliza-se o seguinte esquema (Jongen & Marx, 1997)

$$v_{t,transição} = \lambda_\varepsilon v_t + (1 - \lambda_\varepsilon) v_{t,2r} \quad (3.74)$$

onde v_t foi definida na Eq. (3.51). Na Eq. (3.74) a função de mistura, λ_ε , é definida de tal forma que seja igual a unidade na região totalmente turbulenta e zero nas regiões próximas à parede, ou seja

$$\lambda_\varepsilon = \frac{1}{2} \left[1 + \tanh \left(\frac{Re_y - 200}{A} \right) \right] \quad (3.75)$$

A constante $A = 26,558$ é ajustada de tal forma a controlar a suavidade da transição entre as duas regiões.

O campo da taxa de dissipação da energia cinética turbulenta ε é dado por

$$\varepsilon = \frac{\kappa^{3/2}}{\ell_\varepsilon} \quad (3.76)$$

o comprimento de escala ℓ_ε é dado por (Chen & Patel, 1988)

$$\ell_\varepsilon = dC_\ell^* \left(1 - e^{\frac{-Re_y}{A_\varepsilon}} \right) \quad (3.77)$$

O valor de ε calculado pela Eq. (3.76) é utilizado apenas na região próxima à parede. Um procedimento análogo ao realizado com o valor de μ_t , através da Eq. (3.74), é usado na especificação do valor de ε , com a mesma finalidade de tornar suave a transição do valor calculado através da expressão

algébrica da Eq. (3.76) para o valor de ε obtido através da equação de transporte, Eq. (3.53), na região totalmente turbulenta.

As constantes do modelo são fornecidas na Tabela 3.4.

Tabela 3.4 - Coeficientes para tratamento do modelo RSM próximo à parede

Constante	Valor
C_D	0,09
C_ℓ^*	$C_\ell^* = \kappa C_D^{-3/4}$
A_D	70
A_ε	$2C_\ell^*$

3.3. Simulação de Grandes Escalas – LES

As equações que governam as grandes escalas de escoamentos turbulentos são derivadas através da aplicação de um operador filtro espacial nas equações de continuidade, Eq. (3.1), e quantidade de movimento linear, Eq. (3.5), apresentadas na seção 3.1 .

A primeira etapa (Findikakis & Street, 1982) desta metodologia é a separação das variáveis de campo em componentes correspondentes às grandes escalas $\bar{f}(\bar{x}, t)$ e às escalas sub-malha $f''(\bar{x}, t)$, ou seja,

$$f(\bar{x}, t) = \bar{f}(\bar{x}, t) + f''(\bar{x}, t) \quad (3.78)$$

A função filtro define o campo das grandes escalas. A função filtrada $\bar{f}(\bar{x}, t)$, que é a variável a ser resolvida, é então dada por:

$$\bar{f}(\bar{x}, t) = \iint G(\vec{x} - \vec{x}'', t - t'') f(\vec{x}'', t'') dx'' dt'' \quad (3.79)$$

onde G é o filtro. Uma vez que o método de volumes finitos foi selecionado para ser utilizado neste trabalho, usou-se a função filtro por volume, pois o método já utiliza implicitamente este filtro. Neste caso, a função filtro somente não se anula na região onde se realiza o processo de média. Por exemplo, para uma malha uniforme, define-se a função filtro como:

$$G(\vec{x} - \vec{x}'') = \begin{cases} \frac{1}{\Delta^3} & \text{se } |\vec{x} - \vec{x}''| \leq \frac{\Delta}{2} \\ 0 & \text{se } |\vec{x} - \vec{x}''| > \frac{\Delta}{2} \end{cases} \quad (3.80)$$

onde Δ é a dimensão do filtro característico. Desta forma, sobre qualquer tipo de malha o operador reduz-se a uma integral da variável sobre uma extensão espacial finita

$$\bar{f}(\vec{x}, t) = \frac{1}{\Delta^3} \int_{\Delta} f(\vec{x}'', t) d\vec{x}'' \quad (3.81)$$

Quando um filtro uniforme é empregado, as operações matemáticas de filtro e derivadas parciais são comutativas (Ghosal & Moin, 1995), porém, se o filtro não for uniforme, diversas outras operações de filtro espacial não são comutativas, como por exemplo as operações ilustradas a seguir:

$$\overline{\overline{u_i u_j}} \neq \overline{\overline{u_i} \overline{u_j}} \quad (3.82)$$

$$\overline{\overline{u_i'' u_j''}} \neq \overline{\overline{u_i''} \overline{u_j''}} \quad (3.83)$$

Adicionalmente, o filtro da parcela não resolvida, da sub-malha não é nulo,

$$\overline{u_j''} \neq 0 \quad (3.84)$$

Procedendo a filtragem das Eqs. (3.1) e (3.5) e considerando a Eq. (3.78) para as variáveis de velocidade e pressão, obtêm-se as equações de governo das escalas resolvidas:

$$\frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_j} = 0 \quad (3.85)$$

$$\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} \right) + g_i \quad (3.86)$$

As Eqs. (3.85) e (3.86) modelam o transporte da velocidade filtrada ou das grandes escalas, variável $\overline{u_i}$. Verifica-se que o termo convectivo não linear apresenta-se na forma de produto filtrado, e uma vez que o filtro e o produto não são comutativos, surge o mesmo problema de fechamento das equações RANS. O termo não linear ou de transporte convectivo destas equações pode ser escrito da seguinte forma:

$$\overline{\overline{u_i u_j}} = \overline{\overline{u_i u_j}} + \overline{u_i'' u_j''} + \overline{u_i'' u_j} + \overline{u_i u_j''} \quad (3.87)$$

Devido aos valores das variáveis filtradas não serem constantes no espaço, o filtro do produto de duas variáveis filtradas é diferente do produto das variáveis filtradas: $\overline{\overline{u_i u_j}} \neq \overline{\overline{u_i}} \overline{\overline{u_j}}$. Esta observação foi feita por Leonard em 1974, que definiu o tensor das tensões residuais (Pope, 2000) através da Eq. (3.87) da seguinte forma

$$\tau_{ij} = \overline{\overline{u_i u_j}} + \overline{u_i'' u_j''} + \overline{u_i'' u_j} + \overline{u_i u_j''} - \overline{\overline{u_i}} \overline{\overline{u_j}} \quad (3.88)$$

ou

$$\tau_{ij} = \overline{\overline{u_i u_j}} - \overline{\overline{u_i}} \overline{\overline{u_j}} = L_{ij} + C_{ij} + R_{ij} \quad (3.89)$$

onde

$$L_{ij} = \overline{\overline{u_i u_j}} - \overline{\overline{u_i}} \overline{\overline{u_j}} \quad (3.90)$$

$$C_{ij} = \overline{u_i'' u_j''} + \overline{u_i'' u_j} + \overline{u_i u_j''} \quad (3.91)$$

$$R_{ij} = \overline{u_i'' u_j''} \quad (3.92)$$

L_{ij} é o tensor de Leonard, e representa a parcela das interações entre escalas resolvidas que resultam em contribuições sub-filtro. O tensor cruzado, C_{ij} , corresponde às interações entre as escalas resolvidas e as modeladas. O tensor de Reynolds sub-malha R_{ij} considera as interações entre as escalas modeladas.

Desta forma, substituindo-se as Eqs. (3.89), (3.90), (3.91) e (3.92) na Eq. (3.86), obtém-se a seguinte equação de conservação de quantidade de movimento filtrada

$$\left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}_i \bar{u}_j}{\partial x_j} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \tau_{ij} \right) + g_i \quad (3.93)$$

O tensor das tensões residuais τ_{ij} representa a influência das escalas filtradas no transporte das grandes escalas e precisa ser modelado, a fim de solucionar o problema de fechamento criado no sistema de equações formado pelas Eqs. (3.85) e (3.93).

3.3.1. Modelagem Sub-Malha no LES

O objetivo dos modelos sub-malha é simular a transferência de energia entre as escalas filtradas e as escalas sub-malha. Uma vez que somente as pequenas escalas precisam ser modeladas, modelos simples podem ser desenvolvidos. Adicionalmente, os modelos podem ser independentes da geometria, pois as pequenas escalas são de natureza muito mais universal que a turbulência total.

Os modelos mais tradicionais para o tensor sub-malha também são baseados no conceito de viscosidade turbulenta, de acordo com a hipótese de Boussinesq. Aplicando-se esta hipótese para escoamentos incompressíveis, o tensor de Reynolds sub-malha é normalmente modelado por:

$$R_{ij} = -\nu_{SM} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) + \frac{2}{3} \left(\frac{\overline{u_k'' u_k''}}{2} \right) \delta_{ij} \quad (3.94)$$

onde ν_{SM} é a viscosidade turbulenta sub-malha que será modelada.

O termo isotrópico, $(\overline{u_k'' u_k''})/2$, pode ser incorporado à pressão estática, como no caso dos modelos RANS.

A soma dos tensores de Leonard e cruzado podem ser modelados através de uma expansão de Taylor do campo de velocidade filtrado, podendo ser calculado explicitamente em função do campo resolvido de velocidade, de acordo com (Findikakis e Street, 1979)

$$L_{ij} + C_{ij} \cong \frac{\overline{\Delta}}{12} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k} \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_k} \quad (3.95)$$

No entanto, segundo Shaanan et al. (1975), os tensores L_{ij} e C_{ij} podem ser desprezados quando se utiliza um esquema de discretização do termo de transporte convectivo de segunda ordem ou inferior. Porém, em esquemas de ordens mais elevadas ou métodos espectrais estes tensores não podem ser desprezados. Portanto, como no presente trabalho será empregado discretizações de no máximo segunda ordem, o tensor de sub-malha será estimado de acordo com

$$\tau_{ij} = R_{ij} \quad (3.96)$$

O resultado da Eq. (3.96) tem efeito na nomenclatura do termo de tensões residuais τ_{ij} , pois muitos autores denominam diretamente este termo diretamente de tensor de Reynolds sub-malha (*Sub Grid Scale Reynolds Stress - SGS*), podendo ser usado sem perda de caracterização.

A seguir, o primeiro modelo desenvolvido a viscosidade turbulenta sub-malha, Modelo de Smagorinsky, é descrito, seguido pela descrição do modelo empregado neste trabalho, Modelo de Smagorinsky Dinâmico.

3.3.1.1. Modelo de Smagorinsky

O modelo de Smagorinsky (1963) tem sido tradicionalmente empregado para representar os efeitos das escalas sub-malha, em simulação de grandes escalas. A hipótese de equilíbrio local para pequenas escalas é aplicada e a viscosidade cinemática turbulenta de sub-malha ν_{SM} é dada por

$$\nu_{SM} = (L_s)^2 \sqrt{2 \overline{S_{ij}} \overline{S_{ij}}} \quad (3.97)$$

onde $\overline{S_{ij}}$ é o tensor de deformação das escalas resolvidas, dado por

$$\overline{S_{ij}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right) \quad (3.98)$$

e o termo L_s é o comprimento de mistura associado às escalas sub-malha, definido como

$$L_s = \min \left(k_v d, C_s \nabla^{1/3} \right) \quad (3.99)$$

sendo k_v a constante de von Kármán, d é a distância à parede, C_s é a constante de Smagorinsky e ∇ é o volume do volume de controle da discretização.

Lilly (1967) admitindo turbulência isotrópica e homogênea, determinou o valor de C_s como sendo igual a 0,18. Porém, este valor causa um excessivo amortecimento nas flutuações das grandes escalas em escoamentos cisalhantes ou com fronteiras sólidas, devendo este valor ser reduzido nestes casos. Em resumo, C_s não é uma constante universal, tornando-se um dos problemas mais sérios deste modelo.

Apesar desta limitação, o modelo Smagorinsky tem sido bastante utilizado e é a base de outro modelo sub-malha, denominado modelo Smagorinsky dinâmico. Nesta nova concepção de modelagem, o parâmetro C_s é substituído por uma função avaliada dinamicamente durante a simulação.

3.3.1.2. Modelo de Smagorinsky Dinâmico

O modelo sub-malha de Smagorinsky tem como maior limitação a representação de diferentes campos de fluxo turbulento, tais como recirculação, recolamento, escoamento próximo à parede, devido a utilização de uma única constante.

O modelo dinâmico de viscosidade turbulenta, proposto em Germano et al. (1991) e modificado por Lilly (1992), é baseado no modelo de Smagorinsky. O tensor de Reynolds sub-malha é modelado baseado na hipótese de Boussinesq

$$\tau_{ij} - \frac{\delta_{ij}}{3} \tau_{kk} = -2\nu_{SM} \overline{\overline{S_{ij}}} = -2c(\bar{x}, t) \overline{\overline{\Delta}}^2 \overline{\overline{S_{ij}}} \sqrt{2\overline{\overline{S_{ij}}} \overline{\overline{S_{ij}}}} \quad (3.100)$$

onde $\overline{\overline{S_{ij}}}$ é o tensor de deformação, dado pela Eq. (3.98). Nesse modelo o coeficiente $c(\bar{x}, t)$ é avaliado de acordo com o progresso do escoamento, sendo uma função do tempo e do espaço.

Nesta modelagem o coeficiente $c(\bar{x}, t)$ é determinado através do uso de dois filtros de diferentes comprimentos característicos. A primeira filtragem considerada é quando se faz a discretização das equações, sendo que a dimensão característica do primeiro filtro (filtro no nível de malha) possui a dimensão dos elementos da malha.

No segundo processo de filtragem, denominado filtro teste, utiliza-se um filtro com dimensão característica maior que o primeiro filtro. Baseado nestes dois níveis de escala, os modelos dinâmicos usam informações das menores escalas resolvidas (situadas entre os dois filtros) para calcular o coeficiente dinâmico e modelar a transferência de energia entre as escalas filtradas e as escalas sub-malha, conforme mostrado na Figura 3.2. No espectro de energia as duas escalas definem os dois filtros utilizados e a faixa de frequência que será utilizada para modelar a transferência de energia entre as escalas filtradas e as escalas modeladas.

Cabe ressaltar que a característica fundamental do modelo Smagorinsky dinâmico é a igualdade entre as tensões turbulentas sub-malha, que é uma propriedade das menores escalas, e a faixa do espectro delimitada pelos dois filtros de dimensões diferentes.

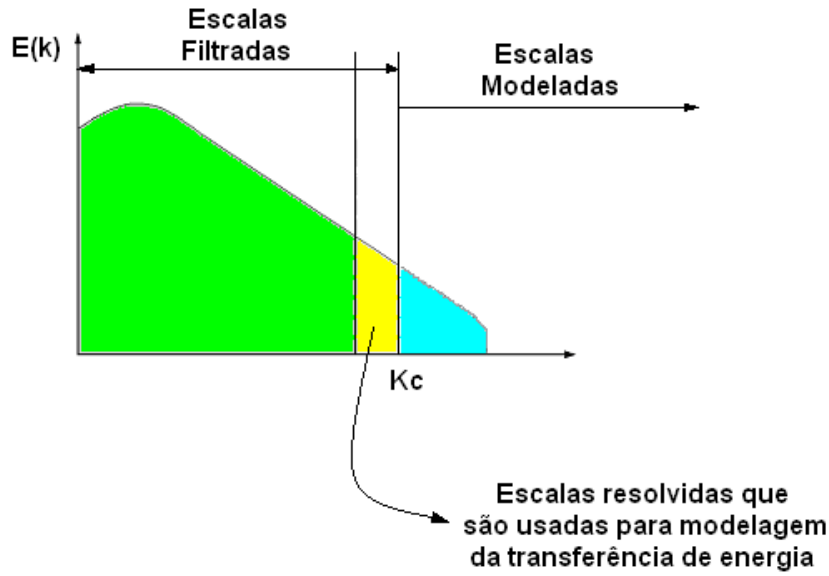


Figura 3.2 – Espectro de energia.

A fim de aplicar os dois níveis de filtragem consecutivos, utiliza-se agora um novo filtro $\langle G \rangle$ com uma nova banda $\langle \Delta \rangle > \overline{\Delta}$ sobre a Eq. (3.86)

$$\left(\frac{\partial \langle \overline{u_i} \rangle}{\partial t} + \frac{\partial \langle \overline{u_i u_j} \rangle}{\partial x_j} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle \overline{p} \rangle}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial \langle \overline{u_i} \rangle}{\partial x_j} \right) + g_i \quad (3.101)$$

onde a relação $\langle \Delta \rangle = 2\overline{\Delta}$ tem sido utilizada. O símbolo $\langle \quad \rangle$ representa o segundo filtro ou filtro de teste. Definindo o tensor das tensões do filtro teste T_{ij} como

$$T_{ij} = \langle \overline{u_i u_j} \rangle - \langle \overline{u_i} \rangle \langle \overline{u_j} \rangle \quad (3.102)$$

a Eq. (3.101) toma a seguinte forma

$$\left(\frac{\partial \langle \overline{u_i} \rangle}{\partial t} + \frac{\partial \langle \overline{u_i} \rangle \langle \overline{u_j} \rangle}{\partial x_j} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle \overline{p} \rangle}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial \langle \overline{u_i} \rangle}{\partial x_j} - T_{ij} \right) + g_i \quad (3.103)$$

Analogamente às tensões de Reynolds, modela-se as tensões turbulentas do filtro teste T_{ij} , como

$$T_{ij} - \frac{\delta_{ij}}{3} T_{ii} = -2c(\bar{x}, t) \langle \Delta \rangle^2 \langle \overline{S_{ij}} \rangle \sqrt{2 \langle \overline{S_{ij}} \rangle \langle \overline{S_{ij}} \rangle} \quad (3.104)$$

O modelo proposto por Germano et al. (1991) fornece uma forte contribuição ao problema da modelagem de escala sub-malha, através da hipótese de consistência entre os tensores modelados T_{ij} e τ_{ij} , apoiada pela escolha local do parâmetro $c(\bar{x}, t)$. Para relacionar estes tensores, aplica-se a filtragem na Eq. (3.100), obtendo-se

$$\langle \tau_{ij} \rangle - \frac{\delta_{ij}}{3} \langle \tau_{ii} \rangle = -2c(\bar{x}, t) \overline{\Delta}^2 \langle \overline{S_{ij}} \sqrt{2 \overline{S_{ij}} \overline{S_{ij}}} \rangle \quad (3.105)$$

Filtrando-se a Eq. (3.93), obtém-se

$$\left(\frac{\partial \langle \overline{u_i} \rangle}{\partial t} + \frac{\partial \langle \overline{u_i u_j} \rangle}{\partial x_j} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle \overline{p} \rangle}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial \langle \overline{u_i} \rangle}{\partial x_j} - \langle \tau_{ij} \rangle \right) + g_i \quad (3.106)$$

Subtraindo-se a Eq. (3.103) da Eq. (3.106), tem-se

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\langle \overline{u_i u_j} \rangle - \langle \overline{u_i} \rangle \langle \overline{u_j} \rangle \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} (T_{ij} - \langle \tau_{ij} \rangle) \quad (3.107)$$

Define-se o tensor de Leonard global como

$$L_{ijglobal} = \langle \overline{u_i u_j} \rangle - \langle \overline{u_i} \rangle \langle \overline{u_j} \rangle = T_{ij} - \langle \tau_{ij} \rangle \quad (3.108)$$

A Eq. (3.108) é denominada identidade de Germano, e relaciona as tensões turbulentas resolvidas $L_{ijglobal}$ (contribuição da região delimitada entre o filtro teste e o filtro sub-malha), as tensões de escala sub-malha τ_{ij} e as tensões do filtro teste T_{ij} . Os elementos de $L_{ijglobal}$ são os componentes resolvidos do tensor pertinente as escalas do movimento, entre a escala de teste e a escala sub-malha. Estes elementos podem ser avaliados explicitamente e comparados localmente com a diferença das aproximações de fechamento.

Através das Eqs. (3.105) e (3.108) obtém-se a função $c(\bar{x}, t)$ para o coeficiente dinâmico:

$$c(\bar{x}, t) = -\frac{1}{2} \frac{L_{ij}^{global} M_{ij}}{M_{ij} M_{ij}} \quad (3.109)$$

onde L_{ij}^{global} foi definido pela Eq. (3.108) e o tensor M_{ij} é dado por:

$$M_{ij} = \langle \Delta \rangle^2 \langle \overline{S_{ij}} \rangle \sqrt{2 \langle \overline{S_{ij}} \rangle \langle \overline{S_{ij}} \rangle} - \Delta^2 \langle \overline{S_{ij}} \rangle \sqrt{2 \overline{S_{ij} S_{ij}}} \quad (3.110)$$

Conclui-se que a determinação do coeficiente dinâmico $c(\bar{x}, t)$ depende apenas das grandezas resolvidas e de um duplo processo de filtragem.