

Referências bibliográficas

- 1 Bar-Cohen Y. **Electroactive Polymer (EAP) Actuators as Artificial Muscles: Reality, Potential, and Challenges**. Washington: SPIE, 2004.
- 2 Wingert A. R., **Development of a Polymer-Actuated Binary Manipulator**. Submitted to the Department of the Requirements for the Degree of Master of Science in Mechanical Engineering at the Massachusetts Institute of Technology, June, 2002.
- 3 Bystronski M. **Desenvolvimento de Sistema de Atuação Linear Baseado em Músculos Artificiais Poliméricos de Efeito Capacitivo**. Submetido ao departamento de Graduação em Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica de Rio de Janeiro, como requisito para a obtenção do título em Engenharia Mecânica, dezembro, 2005.
- 4 Assis, Pedro F.B. **Desenvolvimento de Circuitos para Músculos Artificiais Poliméricos por Efeito Capacitivo**. Submetido ao departamento de Graduação em Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica de Rio de Janeiro, como requisito para a obtenção do título em Engenharia Mecânica, dezembro 2005.
- 5 Assis, Pedro F.B. **Caracterização de Atuadores Baseados em Músculos Artificiais Poliméricos por Efeito Capacitivo (EAP)**. Submetido ao departamento de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica de Rio de Janeiro, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica, Setembro, 2007.
- 6 Castro, J. T. P., Meggiolaro, M. A. **Fadiga - Técnicas e Práticas de Dimensionamento Estrutural sob Cargas Reais de Serviço**. Volumes I e II, Editora CreateSpace/ Amazon, Scotts Valley, CA, EUA, 2009.
- 7 Adi B. Modified Newton-Raphson Method for the Solution of Systems of Equations. **Israel Journal of Mathematics**, Haifa, February, 1965. Vol. 3, No. 2, pp. 94-98.
- 8 Newmark N.M. A method of computation for structural dynamics. **Journal of Engineering mechanics Division**, Colorado, 1959, Vol. 85 No. EM3, pp.67-94.
- 9 Forsyth D.; Ponce J. **Computer Vision - A modern approach**. New Jersey: Prentice Hall, 2003.

- 10 Otsu N. A Threshold Selection Method From Gray-level histograms. **IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics**. January, 1979, Vol. 9(1), pp. 62-67.
- 11 Gonzalez R. G.; Woods R. E. Ponce. **Digital Image Processing**. New Jersey: Prentice Hall, 2002.
- 12 INDUSTRIAL LIGHT & MAGIC. **Fast Normalized Cross-Correlation..** California, 1995.
- 13 Gang X.; Yuki I.; Hirohisa T. Determining Camera Intrinsic and Extrinsic Parameters from Multiple Images of Multiple Balls. **Journal IEICE Transactions on Information and Systems, Pt.2 (Japanese Edition)**, Tokyo, 2004, VOL.J87-D-2, No. 5, pp. 1071-1082.
- 14 Christoph M. Hackl, Hong-Yue Tang. A Multidomain Model of Planar Electro-Active Polymer Actuators. **Journal IEEE transactions on industry applications, IEEE**, New York, September, 2005, vol. 41, n^o5, pp. 1142-1148.
- 15 PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO RIO DE JANEIRO. Departamento de Engenharia Mecânica. **Raciocinando Dinâmica De Rotação**. Rio de Janeiro, 2008.
- 16 Meriam J. L; Kraige L. G., **Engineering mechanics, Dynamics**. New Jersey: John Wiley & Sons, 2001.
- 17 NATIONAL UNIVERSITY OF IRELAND GALWAY. Department of Electronic Engineering. **Materials and Technologies for Artificial Muscle: A Review for the Mechatronic**, Ireland, 2004.
- 18 Hirai S.; Cusin P.; Tanigawa H.; Masui T. ;Konishi S.; Kawamura S. Qualitative Synthesis of Deformable Cylindrical Actuators through Constraint. **Intelligent Robots and Systems, 2000. (IROS 2000). Proceedings. 2000 IEEE/RSJ International Conference on**, Takamatsu, October, 2000. Vol. 1(1), pp. 197-202.
- 19 Castelman K. R. **Digital Image Processing**. New Jersey: Prentice Hall, 1995.
- 20 Duda R. O.; Hart P. E.; Stork D. G. **Pattern Classification**. Wiley-Interscience, 2000.
- 21 Fukunaga K. **Introduction to Statistical Pattern Recognition**. Academic Press, 1990.
- 22 Nixon M.; Aguado A. **Feature Extraction & Image Processing**. Newnes, 2002.
- 23 L. O'Donnell. Phase-Based User-Steered Image Segmentation. **Fourth International Conference on Medical Image Computing and Computer-Assisted Intervention**, Utrecht, October 2000. Vol. 2208, pp. 1022-1030.

- 24 Trucco E.; Verri A. **Introductory Techniques for 3-D Computer Vision**. New Jersey: Prentice Hall, 1998.
- 25 Shapiro L. G.; Stockman G. **Computer Vision**. New Jersey: Prentice Hall, 2001.
- 26 Yi M.; Soatto S.; Kosecká J.; Sastry S. **An Invitation to 3-D Vision – From Images to Geometric Models**. Springer, 2004.
- 27 Schweitzer H.; Dell J. W.; Wu F. Very Fast Template Matching. **Proceedings of the 7th European Conference on Computer Vision-Part IV**, London, 2002. Vol. 2353, pp. 358 - 372.
- 28 Shinichi Y.; Takeo K. Fast Template Matching on the Normalized Correlation by Using Multiresolution Eigenimages. **Intelligent Robots and Systems '94. 'Advanced Robotic Systems and the Real World', IROS '94. Proceedings of the IEEE/RSJ/GI International Conference on**. Munich, December 1994. Vol.3(3), pp. 2086-2093.
- 29 Sears F. W.; Zemansky M. W.; Young H. D. **Física Universitária**. Traduzido por Roberto Escalona Garcia. Mexico: Pearson, 2004.
- 30 Timoshenko S. **Resistencia de Materiales**. Traduzido por Tomas Delgado P. Madrid: Espasa-Calpe, 1957.
- 31 Kane C.; Marsden J.; Ortiz M.; West. M. Variational Integrators and the Newmark Algorithm for Conservative and Dissipative Mechanical Systems. **Inter-National Journal for Numerical Methods in Engineering**, Published Online, 13 October 2000, Vol. 49(1), pp. 1295 - 1325.

Apêndice A - Construção do Atuador

O material usado para as bases e os fixadores é a garolite, uma versão mais resistente da fenolite. Ele foi escolhido por ser um material muito leve e resistente, apesar de possuir uma espessura muito pequena. Para o atuador foi usado garolite de 0.9 mm de espessura. As medidas para as peças estão em mm e em graus sexagesimais. A Figura 86 mostra as medidas da base inferior em escala 1:1 com duas vistas em detalhe em escala 4:1 e duas seções para cada detalhe também em escala 4:1. A Figura 87 mostra as medidas da base superior em escala 1:1 com um vista em detalhe em escala 4:1 e uma seção para o detalhe também em escala 4:1. A Figura 88 mostra as medidas do anel fixador pequeno inferior em escala 1:1 com um vista em detalhe em escala 4:1 e uma seção para o detalhe também em escala 4:1. A Figura 89 mostra as medidas do anel fixador pequeno superior em escala 1:1. A Figura 90 mostra as medidas do anel fixador maior inferior em escala 1:1 com um vista em detalhe em escala 4:1 e uma seção para o detalhe também em escala 4:1. E, finalmente a Figura 91 mostra as medidas do anel fixador maior superior em escala 1:1.

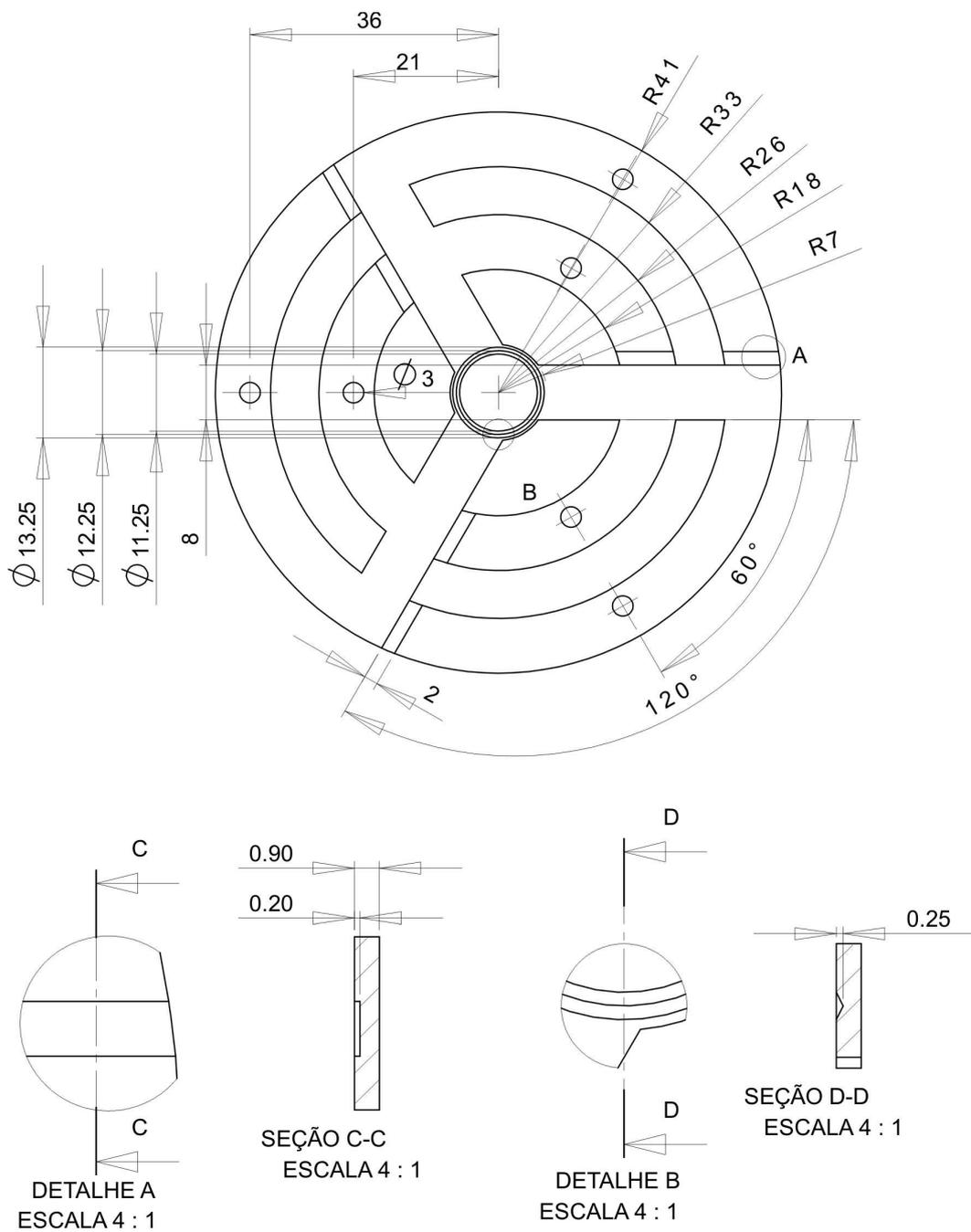


Figura 86: Medidas da base inferior em escala 1:1 com duas vistas em detalhe em escala 4:1 e duas seções para cada detalhe também em escala 4:1.

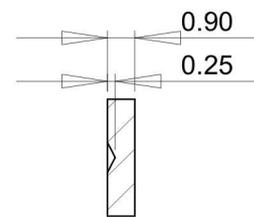
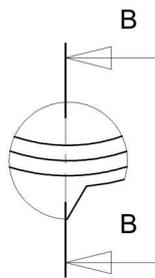
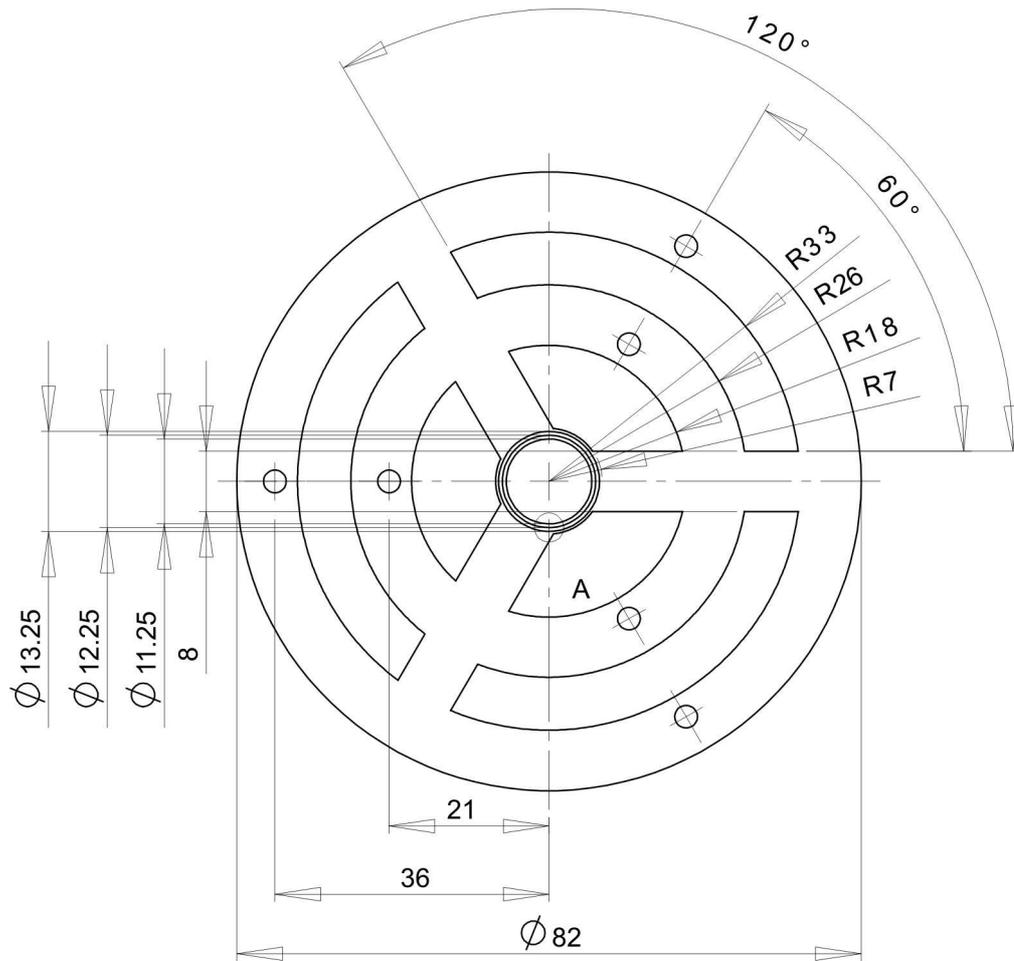


Figura 87: Medidas da base superior em escala 1:1 com uma vista em detalhe em escala 4:1 e uma seção para o detalhe também em escala 4:1.

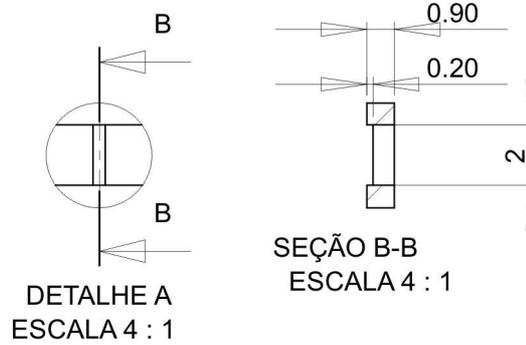
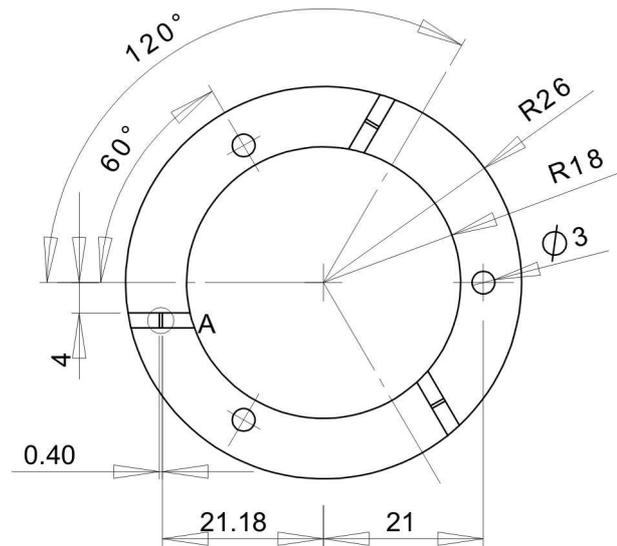


Figura 88: Medidas do anel fixador pequeno inferior em escala 1:1 com uma vista em detalhe em escala 4:1 e uma seção para o detalhe também em escala 4:1.

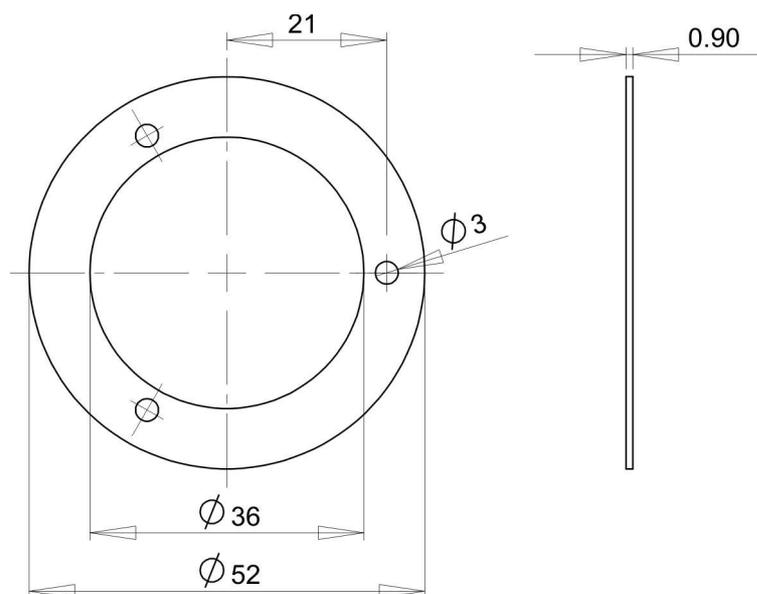


Figura 89: Medidas do anel fixador pequeno superior em escala 1:1

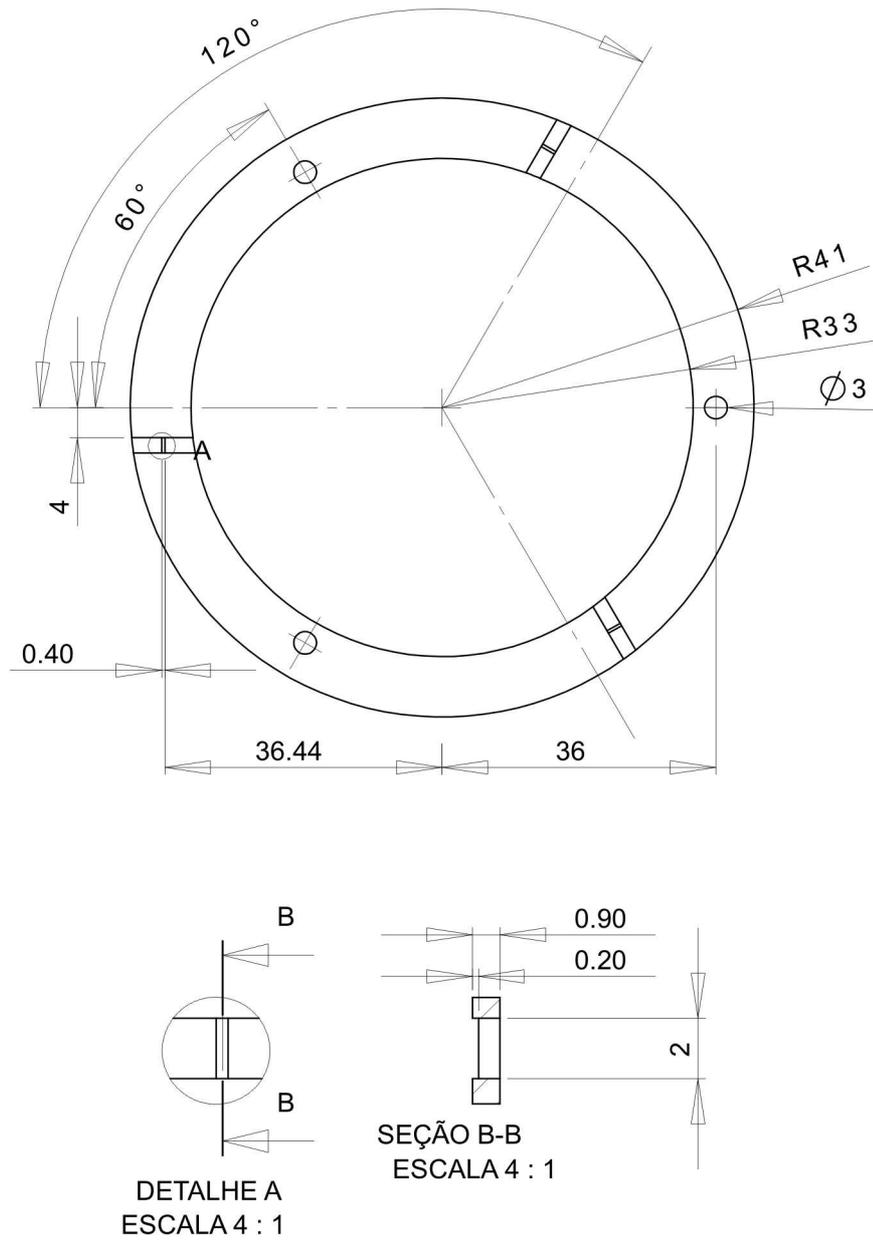


Figura 90: Medidas do anel fixador maior inferior em escala 1:1 com uma vista em detalhe em escala 4:1 e uma seção para o detalhe também em escala 4:1.

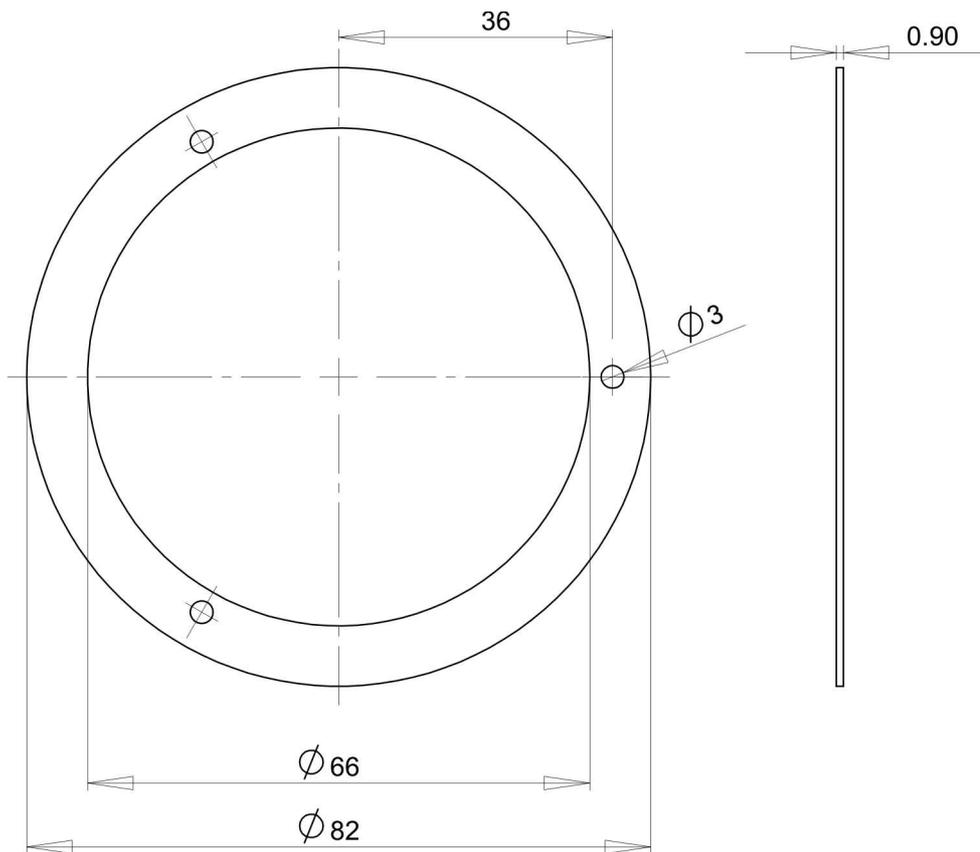


Figura 91: medidas do fixador maior superior em escala 1:1.

As seis peças de garolite são apresentadas na Figura 92. Para sua construção foram usados, principalmente, um torno e uma fresadora.



Figura 92: As seis peças de garolite.

Inicia-se a construção do atuador colocando os fixadores pequenos a 5 mm de distância. Para isto, se colocam parafusos e se prendem os fixadores de forma sua conexão fique rígida (Figura 34).



Figura 93: Anéis Fixadores separados 5 mm com ajuda de parafusos.

Rolam-se os fixadores sobre o músculo artificial para que ele seja aderido ao seu perímetro, como se observa na Figura 94a. Posicionam-se então os fios condutores de corrente elétrica que comunicam as paredes interiores com a parte interna do atuador na disposição mostrada na Figura 94b.

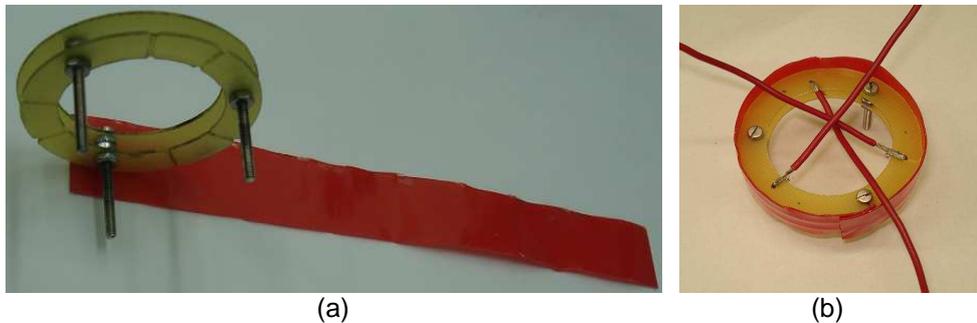


Figura 94: (a) Fixadores e músculos prontos para serem colados. (b) Fios condutores em um fixador.

O envoltório que protege o músculo auxilia seu manuseio, pois o músculo já é um adesivo. Se Corta parte da superfície para evitar acumulação de material (Figura 18a). Retiram-se o envoltório para que o músculo fique colado e pronto para ser pré-tensionado (Figura 95b).



Figura 95: (a) Superfície cortada para evitar acumulação de material. (b) Músculo colado aos fixadores, pronto para ser esticado.

Com ajuda dos parafusos estica-se o músculo em 200%, ou seja, até 15 mm de distância entre fixadores (Figura 96a). Então se usa um pincel para cobrir em três partes as paredes externas e três partes correspondentes nas paredes internas para assim formar três capacitores como mostrado na Figura 96b.

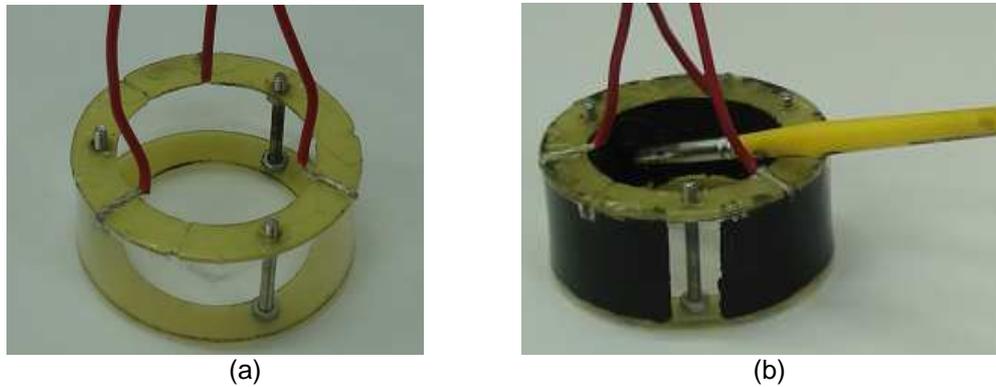


Figura 96: (a) Músculo esticado. (b) Músculo com três capacitores feitos de graxa condutora.

Com os fixadores maiores, repete-se o mesmo procedimento anterior para assim construir a camada maior, também com três capacitores. Usando os furos circulares dos fixadores e da base como guias, se prendem as duas camadas na base inferior (Figura 97) e a superior. A mola pode ser introduzida por espaços perto do centro das bases. A Figura 97b mostra o atuador totalmente construído.

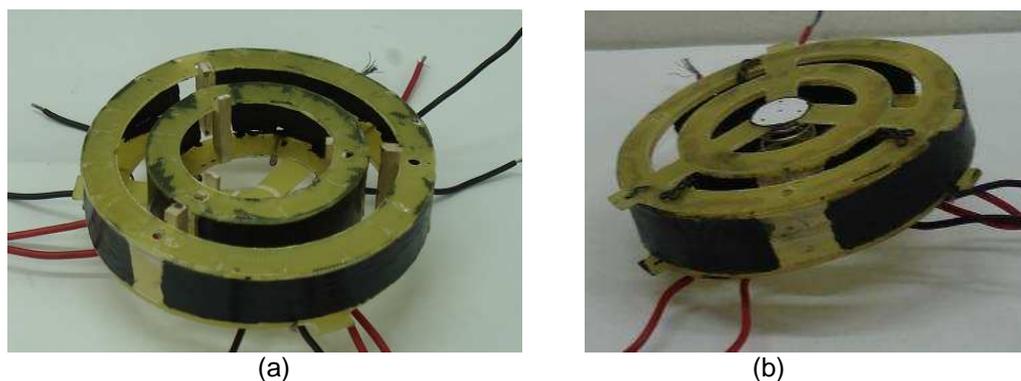


Figura 97: (a) Camadas coladas à base inferior. (b) Atuador totalmente construído.

A Figura 98 mostra um atuador com apenas a camada interna, após seu rompimento, para se ter uma idéia de como foi construída.



Figura 98: Atuador de uma camada ao final dos experimentos.

Apêndice B - Cálculo dos Parâmetros do Atuador para o modelo Kelvin- Voigt

Esta calibração é feita a partir da medição, a longo do tempo, das posições O_x , O_y , O_z e ângulos de rotação α , β , γ . Se consideram nt medições em intervalos de tempo Δt . O sub-índice j representa a parte do músculo onde não é possível aplicar tensão elétrica, o sub-índice k representa a parte do músculo onde é possível aplicar tensão elétrica. O sub-índice i representa a união dos dois grupos j e k . A Figura 99 mostra a carga que o atuador tem que mover (base inferior fixa) ademais mostra os sub-índices.

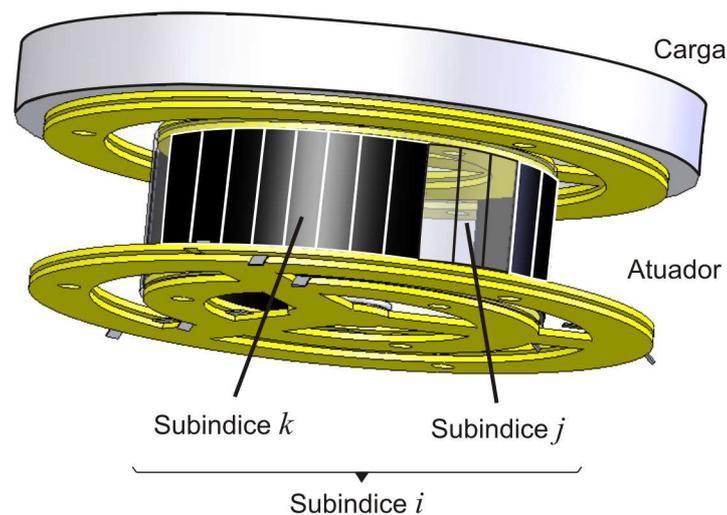


Figura 99: Sub-índice j para as partes sem tensão elétrica, k para as partes com tensão elétrica e i para todo o conjunto.

O procedimento é o seguinte.

1. Se aplica uma tensão elétrica nas paredes do músculo para assim mover a base superior do atuador e se inicia a medição dos parâmetros (ver Capítulo 4).
2. Se retira a tensão elétrica.
3. Quando a base superior fica estável terminam as medições.

4. Se tomam os dados obtidos entre os pasos 2 e 3 e se faz a calculo dos parâmetros do músculo no estado natural (sem tenção elétrica)
5. Se tomam os dados obtidos entre os pasos 1 e 2, os parâmetros calculados em 4 e se faz a calculo dos parâmetros do músculo com tenção elétrica.

O método de calibração é para o modelo Kelvin Voigt.

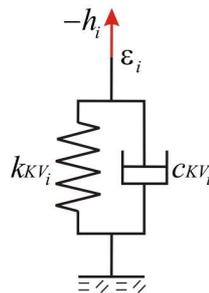


Figura 100: Modelo matemático KV.

Com equação:

$$\boxed{-k_{KV_i} \cdot \varepsilon_i - c_{KV_i} \cdot \dot{\varepsilon}_i = h_i} \quad (\text{B.1})$$

Os parâmetros que serão calculados são:

k_{KV_J} : Coeficiente de rigidez para o modelo KV sem tensão elétrica.

c_{KV_J} : Coeficiente de amortecimento para o modelo KV sem tensão elétrica.

K : Constante de rigidez da mola central.

k_{KV_K} : Coeficiente de rigidez para o modelo KV com tensão elétrica.

c_{KV_K} : Coeficiente de amortecimento para o modelo KV com tensão elétrica.

l_K : comprimento natural para o modelo KV com tensão elétrica

Primeiro se faz a calibração do músculo no estado natural (sem tensão elétrica nas suas paredes). Os parâmetros neste estado são K , k_{KV_J} e c_{KV_J} , que são calculados a partir de α , β , γ , O_x , O_y e O_z obtidos nos experimentos.

O análise inicia da equação de forças do atuador (descrito no Capítulo 2)

$$\sum_{i=1}^n f_i + F_{mol} + F_g = m \cdot \ddot{C}g \quad (\text{B.2})$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^n f_i + F_{mol} = m \cdot \ddot{C}g - Fg} \quad (B.3)$$

Analisa-se a somatória de forças f_i sabendo que $f_i = h_i \cdot \hat{b}_i$:

$$\sum_i f_i = \sum_i h_i \cdot \hat{b}_i \quad (B.4)$$

Substitui-se a força h_i segundo o modelo KV:

$$\sum_i f_i = \sum_i (-k_{KV_i} \cdot \varepsilon_i - c_{KV_i} \cdot \dot{\varepsilon}_i) \cdot \hat{b}_i \quad (B.5)$$

$$\sum_i f_i = -\sum_i k_{KV_i} \cdot \varepsilon_i \cdot \hat{b}_i - \sum_i c_{KV_i} \cdot \dot{\varepsilon}_i \cdot \hat{b}_i \quad (B.6)$$

$$\sum_i f_i = -k_{KV_I} \cdot \sum_i \varepsilon_i \cdot \hat{b}_i - c_{KV_I} \cdot \sum_i \dot{\varepsilon}_i \cdot \hat{b}_i \quad (B.7)$$

Por comodidade Definem-se:

$$CEI_F = -\sum_i \varepsilon_i \cdot \hat{b}_i \quad (B.8)$$

$$CVI_F = -\sum_i \dot{\varepsilon}_i \cdot \hat{b}_i \quad (B.9)$$

Por tanto a equação da somatória de forças no músculo é:

$$\boxed{\sum_i f_i = k_{KV_I} \cdot CEI_F + c_{KV_I} \cdot CVI_F} \quad (B.10)$$

Agora se lembra a força na mola central:

$$F_{mol} = -K \cdot (\|O\| - L) \cdot \hat{o} \quad (B.11)$$

Define-se:

$$CT_F = -(\|O\| - L) \cdot \hat{o} \quad (B.12)$$

Então a força na mola central é:

$$\boxed{F_{mol} = K \cdot CT_F} \quad (B.13)$$

Substituindo (B.10) e (B.13) em (B.3):

$$k_{KV_I} \cdot CEI_F + c_{KV_I} \cdot CVI_F + K \cdot CT_F = m \cdot \ddot{C}g - Fg \quad (B.14)$$

Definindo:

$$RF = m \cdot \ddot{C}g - Fg$$

então

$$\boxed{F_{mol} = K \cdot CT_F} \quad (B.15)$$

$$\boxed{k_{KV_I} \cdot CEI_F + c_{KV_I} \cdot CVI_F + K \cdot CT_F = RF} \quad (B.16)$$

Agora se analisam os torques

$$\boxed{\sum_{i=1}^n T_i + T_{mol} = I \cdot \dot{\omega}} \quad (\text{B.17})$$

A somatória de torques T_i sabendo que $T_i = D_i \times h_i \cdot \hat{b}_i$ é

$$\sum_i T_i = \sum_i D_i \times f_i \quad (\text{B.18})$$

$$\sum_i T_i = \sum_i D_i \times h_i \cdot \hat{b}_i \quad (\text{B.19})$$

$$\sum_i T_i = \sum_i h_i \cdot D_i \times \hat{b}_i \quad (\text{B.20})$$

Substitui-se a força h_i segundo o modelo KV:

$$\sum_i T_i = \sum_i (-k_{KV_i} \cdot \varepsilon_i - c_{KV_i} \cdot \dot{\varepsilon}_i) \cdot D_i \times \hat{b}_i \quad (\text{B.21})$$

$$\sum_i T_i = -\sum_i k_{KV_i} \cdot \varepsilon_i \cdot D_i \times \hat{b}_i - \sum_i c_{KV_i} \cdot \dot{\varepsilon}_i \cdot D_i \times \hat{b}_i \quad (\text{B.22})$$

$$\sum_i T_i = -k_{KV_I} \cdot \sum_i \varepsilon_i \cdot D_i \times \hat{b}_i - c_{KV_I} \cdot \sum_i \dot{\varepsilon}_i \cdot D_i \times \hat{b}_i \quad (\text{B.23})$$

Definem-se:

$$CEI_T = -\sum_i \varepsilon_i \cdot D_i \times \hat{b}_i \quad (\text{B.24})$$

$$CVI_T = -\sum_i \dot{\varepsilon}_i \cdot D_i \times \hat{b}_i \quad (\text{B.25})$$

Por tanto a equação da somatória de torques segundo o modelo KV é:

$$\boxed{\sum_i T_i = k_{KV_I} \cdot CEI_T + c_{KV_I} \cdot CVI_T} \quad (\text{B.26})$$

Lembra-se o torque gerado pela força da mola central:

$$T_{mol} = -A \cdot d \times (-K \cdot (\|O\| - L) \cdot \hat{o}) \quad (\text{B.27})$$

Ordena-se:

$$T_{mol} = K \cdot (A \cdot d \times (\|O\| - L) \cdot \hat{o}) \quad (\text{B.28})$$

Definem-se:

$$CT_T = A \cdot d \times (\|O\| - L) \cdot \hat{o} \quad (\text{B.29})$$

Então o torque que e gerado pela força da mola central:

$$\boxed{T_{mol} = K \cdot CT_T} \quad (\text{B.30})$$

Substituindo (B.26) e (B.30) em (B.17):

$$k_{KV_I} \cdot CEI_T + c_{KV_I} \cdot CVI_T + K \cdot CT_T = I \cdot \dot{\omega} \quad (B.31)$$

Definindo-se

$$RT = I \cdot \dot{\omega} \quad (B.32)$$

obtem-se

$$\boxed{k_{KV_I} \cdot CEI_T + c_{KV_I} \cdot CVI_T + K \cdot CT_T = RT} \quad (B.33)$$

Se Constrói o sistema de equações a partir das equações (B.16) e (B.33) para as nt medições.

$$\begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ nt \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} \begin{matrix} {}^1CEI_F & {}^1CVI_F & {}^1CT_F \\ {}^1CEI_T & {}^1CVI_T & {}^1CT_T \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ {}^{nt}CEI_F & {}^{nt}CVI_F & {}^{nt}CT_F \\ {}^{nt}CEI_T & {}^{nt}CVI_T & {}^{nt}CT_T \end{matrix} \\ \underbrace{\hspace{10em}}_{MKV_{SV}} \end{matrix} \right\} \begin{matrix} \left(\begin{matrix} k_{KV_I} \\ c_{KV_I} \\ K \end{matrix} \right) \\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ nt \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} \begin{matrix} {}^1RF \\ {}^1RT \\ \vdots \\ {}^{nt}RF \\ {}^{nt}RT \end{matrix} \\ \underbrace{\hspace{10em}}_{RKV_{SV}} \end{matrix} \right\} \quad (B.34)$$

Como há mais equações que incógnitas se usa a matriz pseudo-inversa para obter os primeiro quatro parâmetros:

$$\boxed{\left(k_{KV_I} \quad c_{KV_I} \quad K \right)^T = \left(MKV_{SV}^T \cdot MKV_{SV} \right)^{-1} \cdot MKV_{SV}^T \cdot RKV_{SV}} \quad (B.35)$$

Depois de calcular estes três primeiros parâmetros, se faz o cálculo dos três restantes que correspondem ao músculo com tensão elétrica nas suas paredes. Estes parâmetros são k_{KV_K} , c_{KV_K} e l_K , que são calculados a partir de α , β , γ , Ox , Oy , Oz , K , k_{KV_J} e c_{KV_J} .

Da equação de forças do atuador:

$$\sum_{i=1}^n f_i + Fmol + Fg = m \cdot \ddot{C}g \quad (B.36)$$

Separam-se as forças do músculo em duas somatórias:

$$\sum_j f_j + \sum_k f_k + Fmol + Fg = m \cdot \ddot{C}g \quad (B.37)$$

$$\sum_k f_k = m \cdot \ddot{C}g - \sum_j f_j - Fg - Fmol \quad (B.38)$$

Analisa-se a somatória de forças f_k sabendo que $f_k = h_k \cdot \hat{b}_k$:

$$\sum_k f_k = \sum_k h_k \cdot \hat{b}_k \quad (B.39)$$

Substitui-se a força h_k segundo o modelo KV:

$$\sum_k f_k = \sum_k (-k_{KV_k} \cdot \varepsilon_k - c_{KV_k} \cdot \dot{\varepsilon}_k) \cdot \hat{b}_k \quad (\text{B.40})$$

$$\sum_k f_k = -k_{KV_K} \cdot \sum_k \varepsilon_k \cdot \hat{b}_k - c_{KV_K} \cdot \sum_k \dot{\varepsilon}_k \cdot \hat{b}_k \quad (\text{B.41})$$

$$\sum_k f_k = -k_{KV_K} \cdot \sum_k (B_k - l_k \cdot \hat{b}_k) - c_{KV_K} \cdot \sum_k \dot{\varepsilon}_k \cdot \hat{b}_k \quad (\text{B.42})$$

$$\sum_k f_k = -k_{KV_K} \cdot \sum_k B_k + k_{KV_K} \cdot l_K \cdot \sum_k \hat{b}_k - c_{KV_K} \cdot \sum_k \dot{\varepsilon}_k \cdot \hat{b}_k \quad (\text{B.43})$$

Definem-se:

$$CBK_F = -\sum_k B_k \quad (\text{B.44})$$

$$CDK_F = \sum_k \hat{b}_k$$

$$CVK_F = -\sum_k \dot{\varepsilon}_k \cdot \hat{b}_k$$

Por tanto a equação da somatória de forças de sub-índice k segundo o modelo KV é:

$$\boxed{\sum_k f_k = k_{KV_K} \cdot CBK_F + k_{KV_K} \cdot l_K \cdot CDK_F + c_{KV_K} \cdot CVK_F} \quad (\text{B.45})$$

Substituindo (B.45) em(B.38):

$$k_{KV_K} \cdot CBK_F + k_{KV_K} \cdot l_K \cdot CDK_F + c_{KV_K} \cdot CVK_F = m \cdot \ddot{C}g - \sum_j f_j - Fg - Fmol \quad (\text{B.46})$$

Seja:

$$RRF = m \cdot \ddot{C}g - Fmol - \sum_j f_j - Fg \quad (\text{B.47})$$

Obtém-se:

$$\boxed{k_{KV_K} \cdot CBK_F + k_{KV_K} \cdot l_K \cdot CDK_F + c_{KV_K} \cdot CVK_F = RRF} \quad (\text{B.48})$$

Agora da equação de torques do atuador:

$$\sum_{i=1}^n T_i + Tmol = I \cdot \dot{\omega} \quad (\text{B.49})$$

Separam-se os torques do músculo em duas somatórias:

$$\sum_j T_j + \sum_k T_k + Tmol = I \cdot \dot{\omega} \quad (\text{B.50})$$

$$\sum_k T_k = I \cdot \dot{\omega} - \sum_j T_j - T_{mol} \quad (B.51)$$

Analisa-se a somatória de torques T_i sabendo que $T_i = h_i \cdot D_i \times \hat{b}_i$:

$$\sum_k T_k = \sum_k h_k \cdot D_k \times \hat{b}_k \quad (B.52)$$

Substitui-se a força h_i segundo o modelo KV:

$$\sum_k T_k = \sum_k (-k_{KV_k} \cdot \varepsilon_k - c_{KV_k} \cdot \dot{\varepsilon}_k) \cdot D_k \times \hat{b}_k \quad (B.53)$$

$$\sum_k T_k = -k_{KV_K} \cdot \sum_k \varepsilon_k \cdot D_k \times \hat{b}_k - c_{KV_K} \cdot \sum_k \dot{\varepsilon}_k \cdot D_k \times \hat{b}_k \quad (B.54)$$

Definem-se:

$$CBK_T = -\sum_k D_k \times B_k \quad (B.55)$$

$$CDK_T = \sum_k D_k \times \hat{b}_k \quad (B.56)$$

$$CVK_T = -\sum_k \dot{\varepsilon}_k \cdot D_k \times \hat{b}_k \quad (B.57)$$

Por tanto a equação da somatória de torques de sub-índice k segundo o modelo KV é:

$$\boxed{\sum_k T_k = k_{KV_K} \cdot CBK + k_{KV_K} \cdot l_K \cdot CDK + c_{KV_K} \cdot CVK} \quad (B.58)$$

Substituindo (B.58) em (B.51):

$$k_{KV_K} \cdot CBK + k_{KV_K} \cdot l_K \cdot CDK + c_{KV_K} \cdot CVK = I \cdot \dot{\omega} - \sum_j T_j - T_{mol} \quad (B.59)$$

Definindo-se

$$RRT = I \cdot \dot{\omega} - \sum_j T_j - T_{mol} \quad (B.60)$$

obtem-se

$$\boxed{k_{KV_K} \cdot CBK + k_{KV_K} \cdot l_K \cdot CDK + c_{KV_K} \cdot CVK = RRT} \quad (B.61)$$

Construí-se o sistema de equações a partir das equações (B.48) e (B.61) para as nt medições:

$$\begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ nt \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} {}^1CBK_F & {}^1CDK_F & {}^1CVK_F \\ {}^1CBK_T & {}^1CDK_T & {}^1CVK_T \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ {}^mCBK_F & {}^mCDK_F & {}^mCVK_F \\ {}^mCBK_T & {}^mCDK_T & {}^mCVK_T \end{matrix} \right\} \begin{pmatrix} k_{KV_K} \\ k_{KV_K} \cdot l_K \\ c_{KV_K} \end{pmatrix} = \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ nt \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} {}^1RRF \\ {}^1RRT \\ \vdots \\ {}^mRRF \\ {}^mRRT \end{matrix} \right\} \quad (\text{B.62})$$

$\underbrace{\hspace{15em}}_{MKV_{CV}} \qquad \qquad \qquad \underbrace{\hspace{15em}}_{RKV_{CV}}$

Seja:

$$\begin{pmatrix} k_{KV_K} \\ k_{KV_K} \cdot l_K \\ c_{KV_K} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_{K_1} \\ N_{K_2} \\ N_{K_3} \end{pmatrix} \quad (\text{B.63})$$

Como há mais equações que incógnitas se utiliza a matriz pseudo-inversa para obter:

$$\boxed{(N_{K_1} \quad N_{K_2} \quad N_{K_3})^T = (MKV_{CV}^T \cdot MKV_{CV})^{-1} \cdot MKV_{CV}^T \cdot RKV_{CV}} \quad (\text{B.64})$$

Obtêm-se os últimos três parâmetros:

$$k_{KV_K} = N_{K_1} \quad (\text{B.65})$$

$$l_K = \frac{N_{K_2}}{N_{K_1}} \quad (\text{B.66})$$

$$c_{KV_K} = N_{K_3} \quad (\text{B.67})$$

Apêndice C - Relações entre a Matriz de Rotação e a Velocidade Angular

Nesta seção, são apresentadas equações entre a matriz de rotação, a velocidade angular, e as derivadas destas.

Para um sistema de coordenadas que esta girando, a matriz de rotação A e os vetores unitários $\hat{i} = (\hat{i}_x \ \hat{i}_y \ \hat{i}_z)^T$, $\hat{j} = (\hat{j}_x \ \hat{j}_y \ \hat{j}_z)^T$ e $\hat{k} = (\hat{k}_x \ \hat{k}_y \ \hat{k}_z)^T$ correspondentes ao sistema de coordenadas, estão relacionados como segue:

$$A = \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{i}_x & \hat{j}_x & \hat{k}_x \\ \hat{i}_y & \hat{j}_y & \hat{k}_y \\ \hat{i}_z & \hat{j}_z & \hat{k}_z \end{pmatrix} \quad (C.1)$$

Um vetor unitário (fixo a um corpo que gira) multiplicado vetorialmente por a velocidade angular de dito corpo $\omega = (\omega_x \ \omega_y \ \omega_z)^T$, resulta na derivada do vetor [16]. Então, para os vetores unitários \hat{i} , \hat{j} e \hat{k} , tem-se

$$\dot{\hat{i}} = \omega \times \hat{i} \quad (C.2)$$

$$\dot{\hat{j}} = \omega \times \hat{j} \quad (C.3)$$

$$\dot{\hat{k}} = \omega \times \hat{k} \quad (C.4)$$

O produto vetorial pode ser feito mediante um produto matricial ordenando os elementos de ω numa matriz. Se $[\omega]$ é a representação matricial de ω , então

$$[\omega] = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix} \quad (C.5)$$

e os produtos vetoriais anteriores ficam em produtos matriciais como segue

$$\begin{pmatrix} \dot{\hat{i}}_x \\ \dot{\hat{i}}_y \\ \dot{\hat{i}}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{i}_x \\ \hat{i}_y \\ \hat{i}_z \end{pmatrix} \quad (C.6)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{\hat{j}}_x \\ \dot{\hat{j}}_y \\ \dot{\hat{j}}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{j}_x \\ \hat{j}_y \\ \hat{j}_z \end{pmatrix} \quad (\text{C.7})$$

$$\begin{pmatrix} \dot{\hat{k}}_x \\ \dot{\hat{k}}_y \\ \dot{\hat{k}}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{k}_x \\ \hat{k}_y \\ \hat{k}_z \end{pmatrix} \quad (\text{C.8})$$

Agrupam-se as equações acima em uma

$$\begin{pmatrix} \dot{\hat{i}}_x & \dot{\hat{j}}_x & \dot{\hat{k}}_x \\ \dot{\hat{i}}_y & \dot{\hat{j}}_y & \dot{\hat{k}}_y \\ \dot{\hat{i}}_z & \dot{\hat{j}}_z & \dot{\hat{k}}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{i}_x & \hat{j}_x & \hat{k}_x \\ \hat{i}_y & \hat{j}_y & \hat{k}_y \\ \hat{i}_z & \hat{j}_z & \hat{k}_z \end{pmatrix} \quad (\text{C.9})$$

Note que a primeira matriz é a derivada da matriz de rotação, a segunda matriz é a velocidade angular representada em forma matricial, e a última é a própria matriz de rotação. Desse modo, se pode ver a relação entre a velocidade angular do sistema e a matriz de rotação

$$\dot{A} = [\omega] \cdot A \quad (\text{C.10})$$

ou

$$\dot{A} \cdot A^T = [\omega] \quad (\text{C.11})$$

Apêndice D - Relações entre os Ângulos de Rotação e a Velocidade Angular

Agora se usará a equação $\dot{A} \cdot A^T = [\omega]$ descrita no Apêndice anterior para obter uma relação direta entre a velocidade angular e os ângulos de rotação usados para girar um sistema de coordenadas.

Neste trabalho se usam três rotações consecutivas (Ângulos de Cardan [15]), primeiro um ângulo α no eixo X , depois um ângulo β no eixo Y e por último um ângulo γ no eixo Z . Então para estes ângulos a matriz de rotação se calcula como

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\gamma) & -\sin(\gamma) & 0 \\ \sin(\gamma) & \cos(\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{D.1})$$

Para os ângulos α , β e γ a equação $\dot{A} \cdot A^T = [\omega]$ pode ser escrita

$$\left(\frac{\partial A}{\partial \alpha} \dot{\alpha} + \frac{\partial A}{\partial \beta} \dot{\beta} + \frac{\partial A}{\partial \gamma} \dot{\gamma} \right) \cdot A^T = [\omega] \quad (\text{D.2})$$

Igualando elemento por elemento, esta última equação matricial gera nove equações, das quais três são identidades, e três são iguais às três restantes. Então, das três equações restantes pode-se calcular

$$\omega_x = \dot{\alpha} + \dot{\gamma} \cdot \sin(\beta) \quad (\text{D.3})$$

$$\omega_y = \dot{\beta} \cdot \cos(\alpha) - \dot{\gamma} \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) \quad (\text{D.4})$$

$$\omega_z = \dot{\beta} \cdot \sin(\alpha) + \dot{\gamma} \cdot \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) \quad (\text{D.5})$$

ou também

$$\begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \sin(\beta) \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \cos(\beta) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \cos(\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{pmatrix} \quad (\text{D.6})$$

$$\text{Definindo } H = (\alpha \quad \beta \quad \gamma)^T \text{ e } W = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \sin(\beta) \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \cos(\beta) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \cos(\beta) \end{pmatrix}$$

então as equações acima resultam em

$$\boxed{\omega = W \cdot \dot{H}} \quad (\text{D.7})$$

onde:

$$\dot{H} = (\dot{\alpha} \quad \dot{\beta} \quad \dot{\gamma})^T \quad (\text{D.8})$$

e:

$$\dot{W} = \frac{\partial W}{\partial \alpha} \cdot \dot{\alpha} + \frac{\partial W}{\partial \beta} \cdot \dot{\beta} \quad (\text{D.9})$$

Também se precisará da derivada da velocidade angular. Para isso, deriva-se a equação anterior para obter

$$\boxed{\dot{\omega} = \dot{W} \cdot \dot{H} + W \cdot \ddot{H}} \quad (\text{D.10})$$

Da equação $\dot{A} = [\omega] \cdot A$, pode-se calcular a segunda derivada referente ao tempo da matriz de rotação A

$$\boxed{\ddot{A} = [\dot{\omega}] \cdot A + [\omega] \cdot \dot{A}} \quad (\text{D.11})$$

ou também

$$\boxed{\ddot{A} = ([\dot{\omega}] + [\omega]^2) \cdot A} \quad (\text{D.12})$$

onde $[\dot{\omega}]$ é a representação matricial do vetor $\dot{\omega}$.

As matrizes A , $[\omega]$ e W facilitam muito o cálculo das derivadas de outros parâmetros.

Apêndice E - Derivadas com vetores

Nesta parte se apresenta a dedução de duas formulas que ajudam enormemente na hora do calculo da derivadas do modulo e direção de um vetor.

Seja um vetor Λ com derivada referente a tempo $\dot{\Lambda}$, modulo $m\Lambda$ e vetor unitário $\hat{\Delta} = \frac{\Lambda}{m\Lambda}$

Para o modulo de um vetor temos

$$m\Lambda^2 = \Lambda^T \cdot \Lambda \quad (E.1)$$

Derivando referente ao tempo

$$2 \cdot m\Lambda \cdot m\dot{\Lambda} = \dot{\Lambda}^T \cdot \Lambda + \Lambda^T \cdot \dot{\Lambda} \quad (E.2)$$

Como $\Lambda^T \cdot \dot{\Lambda}$ é um escalar então $\Lambda^T \cdot \dot{\Lambda} = \dot{\Lambda}^T \cdot \Lambda$. A equação fica como segue

$$2 \cdot m\Lambda \cdot m\dot{\Lambda} = 2 \cdot \dot{\Lambda}^T \cdot \Lambda \quad (E.3)$$

$$m\dot{\Lambda} = \frac{\dot{\Lambda}^T \cdot \Lambda}{m\Lambda} \quad (E.4)$$

Então a derivada do modulo de um vetor e igual à transposta da derivada de dito vetor multiplicado por seu vetor unitário

$$\boxed{m\dot{\Lambda} = \dot{\Lambda}^T \cdot \hat{\Delta}} \quad (E.5)$$

Agora para calcular a derivada do vetor unitário se parte da equação:

$$\hat{\Delta} = \frac{\Lambda}{m\Lambda} \quad (E.6)$$

deriva-se a equação anterior

$$\dot{\hat{\Delta}} = \frac{\dot{\Lambda}}{m\Lambda} - \frac{\Lambda}{m\Lambda^2} \cdot m\dot{\Lambda} \quad (E.7)$$

$$\dot{\hat{\Delta}} = \frac{\dot{\Lambda}}{m\Lambda} - \frac{m\dot{\Lambda}}{m\Lambda} \cdot \hat{\Delta} \quad (E.8)$$

$$\dot{\hat{\Delta}} = \frac{\dot{\Lambda} - m\dot{\Lambda} \cdot \hat{\Delta}}{m\Lambda} \quad (E.9)$$

Por tanto a derivada de um vetor unitário referente ao tempo é

$$\boxed{\dot{\hat{\Delta}} = \frac{\dot{\Lambda} - (\dot{\Lambda}^T \cdot \hat{\Delta}) \cdot \hat{\Delta}}{m\Lambda}} \quad (E.10)$$

Apêndice F - Ajuste por mínimos quadrados de um plano

Seja equação do plano:

$$f_{plano}(x, y, z) = a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z + d = 0 \quad (F.1)$$

O vetor $D = [a \cdot \lambda \quad b \cdot \lambda \quad c \cdot \lambda]^T$ parte de (x_i, y_i, z_i) ao ponto mais perto dele e que pertence ao plano. Então:

$$x = x_i + a \cdot \lambda \quad (F.2)$$

$$y = y_i + b \cdot \lambda \quad (F.3)$$

$$z = z_i + c \cdot \lambda \quad (F.4)$$

Substituindo na equação do plano

$$a \cdot (x_i + a \cdot \lambda) + b \cdot (y_i + b \cdot \lambda) + c \cdot (z_i + c \cdot \lambda) + d = 0 \quad (F.5)$$

$$a \cdot x_i + a^2 \cdot \lambda + b \cdot y_i + b^2 \cdot \lambda + c \cdot z_i + c^2 \cdot \lambda + d = 0 \quad (F.6)$$

$$a \cdot x_i + b \cdot y_i + c \cdot z_i + d + a^2 \cdot \lambda + b^2 \cdot \lambda + c^2 \cdot \lambda = 0 \quad (F.7)$$

$$\lambda = \frac{a \cdot x_i + b \cdot y_i + c \cdot z_i + d}{a^2 + b^2 + c^2} \quad (F.8)$$

A distância se calcula como o modulo do vetor D

$$D_{plano} = |\lambda| \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \quad (F.9)$$

Substituindo (F.8) em (F.9) a distância de um ponto (x_i, y_i, z_i) ao plano é:

$$D_{plano} = \frac{|a \cdot x_i + b \cdot y_i + c \cdot z_i + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \quad (F.10)$$

Agora para ajustar um plano para vários pontos. Se precisa minimizar $\sum D_{plano_i}^2$. Para isso se utiliza o multiplicador de Lagrange, com restrição $a^2 + b^2 + c^2 - 1 = 0$ e se cria a função:

$$Fp = \sum D_{plano_i}^2 - \lambda \cdot (a^2 + b^2 + c^2 - 1) \quad (F.11)$$

$$Fp = \sum (a \cdot x_i + b \cdot y_i + c \cdot z_i + d)^2 - \lambda \cdot (a^2 + b^2 + c^2 - 1) \quad (F.12)$$

Onde $i = 1, 2, 3, \dots, Np$ e Np é o numero de pontos.

Deriva-se com referência a variável a :

$$\frac{\partial Fp}{\partial a} = 2 \cdot \sum (a \cdot x_i + b \cdot y_i + c \cdot z_i + d) \cdot x_i - 2 \cdot \lambda \cdot a = 0 \quad (\text{F.13})$$

$$\frac{\partial Fp}{\partial a} = 2 \cdot \left[a \cdot \sum x_i^2 + b \cdot \sum x_i \cdot y_i + c \cdot \sum x_i \cdot z_i + d \cdot \sum x_i \right] - 2 \cdot \lambda \cdot a = 0 \quad (\text{F.14})$$

Deriva-se com referência a variável b :

$$\frac{\partial Fp}{\partial b} = 2 \cdot \sum (a \cdot x_i + b \cdot y_i + c \cdot z_i + d) \cdot y_i - 2 \cdot \lambda \cdot b = 0 \quad (\text{F.15})$$

$$\frac{\partial Fp}{\partial b} = 2 \cdot \left[a \cdot \sum x_i \cdot y_i + b \cdot \sum y_i^2 + c \cdot \sum y_i \cdot z_i + d \cdot \sum y_i \right] - 2 \cdot \lambda \cdot b = 0 \quad (\text{F.16})$$

Deriva-se com referência a variável c :

$$\frac{\partial Fp}{\partial c} = 2 \cdot \sum (a \cdot x_i + b \cdot y_i + c \cdot z_i + d) \cdot z_i - 2 \cdot \lambda \cdot c = 0 \quad (\text{F.17})$$

$$\frac{\partial Fp}{\partial c} = 2 \cdot \left[a \cdot \sum x_i \cdot z_i + b \cdot \sum y_i \cdot z_i + c \cdot \sum z_i^2 + d \cdot \sum z_i \right] - 2 \cdot \lambda \cdot c = 0 \quad (\text{F.18})$$

Deriva-se com referência a variável d :

$$\frac{\partial Fp}{\partial d} = 2 \cdot \sum (a \cdot x_i + b \cdot y_i + c \cdot z_i + d) = 0 \quad (\text{F.19})$$

$$\frac{\partial Fp}{\partial d} = 2 \cdot \left[a \cdot \sum x_i + b \cdot \sum y_i + c \cdot \sum z_i + d \cdot Np \right] = 0 \quad (\text{F.20})$$

Deriva-se com referência a variável λ :

$$a^2 + b^2 + c^2 - 1 = 0 \quad (\text{F.21})$$

Das derivadas anteriores, obtêm-se o sistema de equações:

$$a \cdot \sum x_i^2 + b \cdot \sum x_i \cdot y_i + c \cdot \sum x_i \cdot z_i + d \cdot \sum x_i - \lambda \cdot a = 0 \quad (\text{F.22})$$

$$a \cdot \sum x_i \cdot y_i + b \cdot \sum y_i^2 + c \cdot \sum y_i \cdot z_i + d \cdot \sum y_i - \lambda \cdot b = 0 \quad (\text{F.23})$$

$$a \cdot \sum x_i \cdot z_i + b \cdot \sum y_i \cdot z_i + c \cdot \sum z_i^2 + d \cdot \sum z_i - \lambda \cdot c = 0 \quad (\text{F.24})$$

$$a \cdot \sum x_i + b \cdot \sum y_i + c \cdot \sum z_i + d \cdot Np = 0 \quad (\text{F.25})$$

$$a^2 + b^2 + c^2 - 1 = 0 \quad (\text{F.26})$$

$$\text{Seja } \bar{X} = \sum x_i, \quad \bar{Y} = \sum y_i, \quad \bar{Z} = \sum z_i, \quad \overline{X^2} = \sum x_i^2, \quad \overline{Y^2} = \sum y_i^2,$$

$$\overline{Z^2} = \sum z_i^2, \quad \overline{X \cdot Y} = \sum x_i \cdot y_i, \quad \overline{Y \cdot Z} = \sum y_i \cdot z_i \text{ e } \overline{Z \cdot X} = \sum z_i \cdot x_i.$$

Substituindo no sistema de cinco equações.

$$a \cdot \overline{X^2} + b \cdot \overline{X \cdot Y} + c \cdot \overline{X \cdot Z} + d \cdot \bar{X} = \lambda \cdot a \quad (\text{F.27})$$

$$a \cdot \overline{X \cdot Y} + b \cdot \overline{Y^2} + c \cdot \overline{Y \cdot Z} + d \cdot \bar{Y} = \lambda \cdot b \quad (\text{F.28})$$

$$a \cdot \overline{X \cdot Z} + b \cdot \overline{Y \cdot Z} + c \cdot \overline{Z^2} + d \cdot \bar{Z} = \lambda \cdot c \quad (\text{F.29})$$

$$a \cdot \bar{X} + b \cdot \bar{Y} + c \cdot \bar{Z} + d \cdot Np = 0 \quad (\text{F.30})$$

$$a^2 + b^2 + c^2 - 1 = 0 \quad (\text{F.31})$$

Isolando d da quarta equação e substituindo nas três primeiras se obtêm o sistema de quatro equações:

$$\begin{bmatrix} \overline{X^2} - \overline{X}^2 & \overline{X \cdot Y} - \overline{X} \cdot \overline{Y} & \overline{X \cdot Z} - \overline{X} \cdot \overline{Z} \\ \overline{X \cdot Y} - \overline{X} \cdot \overline{Y} & \overline{Y^2} - \overline{Y}^2 & \overline{Y \cdot Z} - \overline{Y} \cdot \overline{Z} \\ \overline{X \cdot Z} - \overline{X} \cdot \overline{Z} & \overline{Y \cdot Z} - \overline{Y} \cdot \overline{Z} & \overline{Z^2} - \overline{Z}^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \lambda \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \quad (\text{F.32})$$

$$a^2 + b^2 + c^2 - 1 = 0 \quad (\text{F.33})$$

A solução corresponde ao autovalor correspondente ao menor autovalor com a restrição $a^2 + b^2 + c^2 - 1 = 0$. Finalmente se calcula d :

$$d = \frac{a \cdot \overline{X} + b \cdot \overline{Y} + c \cdot \overline{Z}}{Np} \quad (\text{F.34})$$

Apêndice G - Ajuste por mínimos quadrados de duas retas perpendiculares

Sejam as equações das retas:

$$L_1 = a \cdot x + b \cdot y + c_1 \quad (\text{G.1})$$

$$L_2 = -b \cdot x + a \cdot y + c_2 \quad (\text{G.2})$$

Seja (x_i, y_i, z_i) um ponto correspondente a reta L_1 e (x_j, y_j, z_j) um ponto correspondente a reta L_2 . As distâncias a ditas retas são:

$$D_{1_i} = \frac{|a \cdot x_i + b \cdot y_i + c_1|}{\sqrt{a^2 + b^2}}; D_{2_j} = \frac{|-b \cdot x_j + a \cdot y_j + c_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \quad (\text{G.3})$$

Quer-se minimizar $\sum D_{1_i}^2 + \sum D_{2_j}^2$. Para isso se utiliza o multiplicador de Lagrange, com restrição $a^2 + b^2 - 1 = 0$, para minimizar a função:

$$Frp = \sum D_{1_i}^2 + \sum D_{2_j}^2 - \lambda \cdot (a^2 + b^2 - 1) \quad (\text{G.4})$$

$$Frp = \sum (a \cdot x_i + b \cdot y_i + c_1)^2 + \sum (-b \cdot x_j + a \cdot y_j + c_2)^2 - \lambda \cdot (a^2 + b^2 - 1) \quad (\text{G.5})$$

onde $i = 1, 2, 3, \dots, Nrp$

Deriva-se com referência a variável a :

$$\frac{\partial Frp}{\partial a} = 2 \cdot \left[a \cdot \sum x_i^2 + b \cdot \sum x_i \cdot y_i + c_1 \cdot \sum x_i - b \cdot \sum x_j \cdot y_j + a \cdot \sum y_j^2 + c_2 \cdot \sum y_j \right] - 2 \cdot a \cdot \lambda = 0 \quad (\text{G.6})$$

Deriva-se com referência a variável b :

$$\frac{\partial Frp}{\partial b} = 2 \cdot \left[a \cdot \sum x_i \cdot y_i + b \cdot \sum y_i^2 + c_1 \cdot \sum y_i + b \cdot \sum x_j^2 - a \cdot \sum x_j \cdot y_j - c_2 \cdot \sum x_j \right] - 2 \cdot b \cdot \lambda = 0 \quad (\text{G.7})$$

Deriva-se com referência a variável c_1 :

$$\frac{\partial Frp}{\partial c_1} = 2 \cdot \left[a \cdot \sum x_i + b \cdot \sum y_i + c_1 \cdot Nrp \right] = 0 \quad (\text{G.8})$$

Deriva-se com referência a variável c_2 :

$$\frac{\partial Frp}{\partial c_2} = 2 \cdot \left[-b \cdot \sum x_j + a \cdot \sum y_j + c_2 \cdot Nrp \right] = 0 \quad (\text{G.9})$$

Deriva-se com referência a variável λ :

$$a^2 + b^2 - 1 = 0 \quad (\text{G.10})$$

$$\text{Seja } \bar{X}_I = \sum x_i, \quad \bar{Y}_I = \sum y_i, \quad \bar{Z}_I = \sum z_i, \quad \bar{X}_I^2 = \sum x_i^2, \quad \bar{Y}_I^2 = \sum y_i^2,$$

$$\bar{Z}_I^2 = \sum z_i^2, \quad \overline{XY}_I = \sum x_i \cdot y_i, \quad \overline{YZ}_I = \sum y_i \cdot z_i \text{ e } \overline{ZX}_I = \sum z_i \cdot x_i.$$

$$\text{Seja } \bar{X}_J = \sum x_j, \quad \bar{Y}_J = \sum y_j, \quad \bar{Z}_J = \sum z_j, \quad \bar{X}_J^2 = \sum x_j^2, \quad \bar{Y}_J^2 = \sum y_j^2,$$

$$\bar{Z}_J^2 = \sum z_j^2, \quad \overline{XY}_J = \sum x_j \cdot y_j, \quad \overline{YZ}_J = \sum y_j \cdot z_j \text{ e } \overline{ZX}_J = \sum z_j \cdot x_j.$$

Substituindo no sistema de cinco equações obtidas pelas derivadas parciais se obtém.

$$a \cdot \bar{X}_I^2 + b \cdot \overline{XY}_I + c_1 \cdot \bar{X}_I - b \cdot \overline{XY}_J + a \cdot \bar{Y}_J^2 + c_2 \cdot \bar{Y}_J = a \cdot \lambda \quad (\text{G.11})$$

$$a \cdot \overline{XY}_I + b \cdot \bar{Y}_I^2 + c_1 \cdot \bar{Y}_I + b \cdot \bar{X}_J^2 - a \cdot \overline{XY}_J - c_2 \cdot \bar{X}_J = b \cdot \lambda \quad (\text{G.12})$$

$$a \cdot \bar{X}_I + b \cdot \bar{Y}_I + c_1 \cdot Nrp = 0 \quad (\text{G.13})$$

$$-b \cdot \bar{X}_J + a \cdot \bar{Y}_J + c_2 \cdot Nrp = 0 \quad (\text{G.14})$$

$$a^2 + b^2 - 1 = 0 \quad (\text{G.15})$$

Isolando c_1 e c_2 da terceira e quarta equação e substituindo nas duas primeiras se obtém o sistema de três equações:

$$\begin{bmatrix} \bar{X}_I^2 - \bar{X}_I \cdot \bar{X}_I + \bar{Y}_J^2 - \bar{Y}_J \cdot \bar{Y}_J & \overline{XY}_I - \bar{X}_I \cdot \bar{Y}_I - \overline{XY}_J + \bar{X}_J \cdot \bar{Y}_J \\ \overline{XY}_I - \bar{X}_I \cdot \bar{Y}_I - \overline{XY}_J + \bar{X}_J \cdot \bar{Y}_J & \bar{Y}_I^2 - \bar{Y}_I \cdot \bar{Y}_I + \bar{X}_J^2 - \bar{X}_J \cdot \bar{X}_J \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \lambda \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad (\text{G.16})$$

$$a^2 + b^2 - 1 = 0 \quad (\text{G.17})$$

A solução é ao autovetor correspondente ao menor autovalor com a restrição

$a^2 + b^2 - 1 = 0$. Finalmente se calculam c_1 e c_2 :

$$c_1 = \frac{a \cdot \bar{X}_I + b \cdot \bar{Y}_I}{Nrp}; c_2 = \frac{-b \cdot \bar{X}_J + a \cdot \bar{Y}_J}{Nrp}; \quad (\text{G.18})$$