3
SOLUÇÃO NUMÉRICA

O Capítulo anterior mostrou as equações não lineares para o atuador proposto num estado dinâmico qualquer. Neste Capítulo são descritas as soluções numéricas das equações apresentadas mediante o método de Newton - Raphson [7] combinado com Newmark - Beta [8].

3.1. Matriz Jacobiana do Sistema de Equações

Como o calculo é para equações não lineares,a matriz jacobiana do sistema deve ser calculada. Neste item, será obtida a matriz Jacobiana do sistema de equações seguinte:

$$F\left(X\right)=\begin{pmatrix}\sum_{i=1}^{n} f_i + Fmol + Fg - m\cdot\ddot{C}g \\ \sum_{i=1}^{n} T_i + Tmol - I\cdot\dot{\omega}\end{pmatrix}=0 \tag{3.1}$$

Primeiro se deve obter as derivadas parciais do vetor de translação $O=\begin{pmatrix}Ox & Oy & Oz\end{pmatrix}^T$ em relação aos ângulos de rotação:

$$\frac{\partial O}{\partial \alpha}=\frac{\partial O}{\partial \beta}=\frac{\partial O}{\partial \gamma}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial O}{\partial Ox}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix};\frac{\partial O}{\partial Oy}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix};\frac{\partial O}{\partial Oz}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \tag{3.3}$$

e as derivadas parciais das matrizes de rotação A_α, A_β e A_γ:

$$A_\alpha=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha)\\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha)\end{pmatrix}\Rightarrow\frac{\partial A_\alpha}{\partial \alpha}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & -\sin\left(\alpha\right) & -\cos(\alpha)\\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin\left(\alpha\right)\end{pmatrix} \tag{3.4}$$

$$A_\beta = \begin{pmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{\partial A_\beta}{\partial \beta} = \begin{pmatrix} -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \\ 0 & 0 & 0 \\ -\cos(\beta) & 0 & -\sin(\beta) \end{pmatrix} \tag{3.5}$$

$$A_\gamma = \begin{pmatrix} \cos(\gamma) & -\sin(\gamma) & 0 \\ \sin(\gamma) & \cos(\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{\partial A_\gamma}{\partial \gamma} = \begin{pmatrix} -\sin(\gamma) & -\cos(\gamma) & 0 \\ \cos(\gamma) & -\sin(\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

Assim, as derivadas parciais da matriz de rotação $A = A_\alpha \cdot A_\beta \cdot A_\gamma$ resultam em:

$$\frac{\partial A}{\partial \alpha} = \frac{\partial A_\alpha}{\partial \alpha} \cdot A_\beta \cdot A_\gamma \tag{3.7}$$

$$\frac{\partial A}{\partial \beta} = A_\alpha \cdot \frac{\partial A_\beta}{\partial \beta} \cdot A_\gamma \tag{3.8}$$

$$\frac{\partial A}{\partial \gamma} = A_\alpha \cdot A_\beta \cdot \frac{\partial A_\gamma}{\partial \gamma} \tag{3.9}$$

Por simplicidade de notação, define-se dA como a derivada parcial de A referente a quaisquer das seis variáveis de estado, e dO como a derivada parcial de O referente a quaisquer das seis variáveis. Assim, a derivada parcial dos pontos correspondentes ao extremo superior $Pf_i = A \cdot Po_i + O$ do músculo Pf_i é dada por:

$$\boxed{dPf_i = dA \cdot Po_i + dO} \tag{3.10}$$

e a derivada parcial do vetor $B_i = Pf_i - Po_i = A \cdot Po_i + O - Po_i$, referente a qualquer variável, que vão do extremo inferior ao extremo superior do músculo são dadas por:

$$\boxed{dB_i = dA \cdot Po_i + dO} \tag{3.11}$$

A derivada parcial do módulo $\|B_i\|$, referente a qualquer variável, é obtida assim (Apêndice E):

$$\boxed{d\|B_i\| = dB_i^T \cdot \hat{b}_i} \tag{3.12}$$

e a derivada parcial do vetor unitário $\hat{b}_i$ se calcula como segui(Apêndice E):

$$\boxed{d\hat{b}_i = \frac{dB_i - d\|B_i\| \cdot \hat{b}_i}{\|B_i\|}} \tag{3.13}$$

Seja Δt o intervalo de tempo usado na simulação numérica do sistema. Para o seguinte análise foi usado o meto de integração Newmark-Beta, por utilizar intervalos de tempo muitos maiores aos usados pelos métodos de Euler e Runge-Kutta. Segundo o método de integração de Newmark-Beta [8], a derivada temporal da deformação de cada elemento do músculo $\dot{\varepsilon}_i$ pode ser representada por:

$$\boxed{\dot{\varepsilon}_i = -{}^{(t-\Delta t)}\dot{\varepsilon}_i + \frac{{}^{(t)}\varepsilon_i - {}^{(t-\Delta t)}\varepsilon_i}{0.5 \cdot \Delta t}} \tag{3.14}$$

e assim a derivada parcial de $\dot{\varepsilon}_i$, referente a qualquer variável é:

$$\boxed{d\dot{\varepsilon}_i = \frac{d\varepsilon_i}{0.5 \cdot \Delta t}} \tag{3.15}$$

A segunda derivada de ε_i segundo Newmark-Beta resulta em:

$$\ddot{\varepsilon}_i = -{}^{(t-\Delta t)}\ddot{\varepsilon}_i - \frac{{}^{(t-\Delta t)}\dot{\varepsilon}_i}{0.25 \cdot \Delta t} + \frac{\varepsilon_i - {}^{(t-\Delta t)}\varepsilon_i}{0.25 \cdot \Delta t^2} \tag{3.16}$$

e assim a segunda derivada parcial de ε_i, referente a qualquer variável é:

$$\boxed{d\ddot{\varepsilon}_i = \frac{d\varepsilon_i}{0.25 \cdot \Delta t^2}} \tag{3.17}$$

O valor da força h_i dependerá do modelo matemático do músculo, como descrito a seguir.

Segundo o modelo Kelvin-Voigt (KV):

$$h_i = -k_{KV_i} \cdot \varepsilon_i - c_{KV_i} \cdot \dot{\varepsilon}_i \tag{3.18}$$

então a derivada parcial de h_i, referente a qualquer variável é:

$$\boxed{dh_i = -k_{KV_i} \cdot d\varepsilon_i - c_{KV_i} \cdot d\dot{\varepsilon}_i} \tag{3.19}$$

Segundo o modelo Zener:

$$k_{Z2_i} \cdot k_{Z1_i} \cdot \varepsilon_i + c_{Z_i} \cdot \left(k_{Z1_i} + k_{Z2_i}\right) \cdot \dot{\varepsilon}_i = -k_{Z2_i} \cdot h_i - c_{Z_i} \cdot \dot{h}_i \tag{3.20}$$

Derivando a equação acima, referente a qualquer variável, obtém-se:

$$k_{Z2_i} \cdot k_{Z1_i} \cdot d\varepsilon_i + c_{Z_i} \cdot \left(k_{Z1_i} + k_{Z2_i}\right) \cdot d\dot{\varepsilon}_i = -k_{Z2_i} \cdot dh_i - c_{Z_i} \cdot d\dot{h}_i \tag{3.21}$$

mas, análogo a (3.15), $d\dot{h}_i = \dfrac{dh_i}{0.5 \cdot \Delta t}$, logo:

$$k_{Z2_i} \cdot k_{Z1_i} \cdot d\varepsilon_i + c_{Z_i} \cdot \left(k_{Z1_i} + k_{Z2_i}\right) \cdot d\dot{\varepsilon}_i = -k_{Z2_i} \cdot dh_i - c_{Z_i} \cdot \frac{dh_i}{0.5 \cdot \Delta t} \tag{3.22}$$

e assim isola-se dh_i:

$$\boxed{dh_i = \frac{-\Delta t \cdot kz2_i \cdot kz1_i \cdot d\varepsilon_i - \Delta t \cdot cz_i \cdot \left(kz1_i + kz2_i\right) \cdot d\dot{\varepsilon}_i}{\Delta t \cdot kz2_i + 2 \cdot cz_i}} \tag{3.23}$$

Segundo o modelo Kelvin-Voigt + Amortecedor:

$$kA_i \cdot cA2_i \cdot \dot{\varepsilon}_i + cA1_i \cdot cA2_i \cdot \ddot{\varepsilon}_i = -kA_i \cdot h_i - \left(cA1_i + cA2_i\right) \cdot \dot{h}_i \tag{3.24}$$

Derivando a equação acima, referente a qualquer variável, obtém-se

$$kA_i \cdot cA2_i \cdot d\dot{\varepsilon}_i + cA1_i \cdot cA2_i \cdot d\ddot{\varepsilon}_i = -kA_i \cdot dh_i - \left(cA1_i + cA2_i\right) \cdot d\dot{h}_i \tag{3.25}$$

e assim, como no caso anterior, se substitui $d\dot{h}_i = \dfrac{dh_i}{0.5 \cdot \Delta t}$ na equação anterior:

$$kA_i \cdot cA2_i \cdot d\dot{\varepsilon}_i + cA1_i \cdot cA2_i \cdot d\ddot{\varepsilon}_i = -kA_i \cdot dh_i - \left(cA1_i + cA2_i\right) \cdot \frac{dh_i}{0.5 \cdot \Delta t} \tag{3.26}$$

$$\boxed{dh_i = \frac{-\Delta t \cdot kA_i \cdot cA2_i \cdot d\dot{\varepsilon}_i - \Delta t \cdot cA1_i \cdot cA2_i \cdot d\ddot{\varepsilon}_i}{\Delta t \cdot kA_i + 2 \cdot \left(cA1_i + cA2_i\right)}} \tag{3.27}$$

obtendo-se assim dh_i:

$$\boxed{dh_i = \frac{-\Delta t \cdot kz2_i \cdot kz1_i \cdot d\varepsilon_i - \Delta t \cdot cz_i \cdot \left(kz1_i + kz2_i\right) \cdot d\dot{\varepsilon}_i}{\Delta t \cdot kz2_i + 2 \cdot cz_i}} \tag{3.28}$$

Agora se pode calcular a derivada de f_i, referente a qualquer variável:

$$f_i = h_i \cdot \hat{b}_i \tag{3.29}$$

$$\boxed{df_i = dh_i \cdot \hat{b}_i + h_i \cdot d\hat{b}_i} \tag{3.30}$$

A derivada parcial do torque $Ti = A \cdot (Po_i - d) \times f_i$ que é causado pelas forças das elementos do músculo é dados por:

$$\boxed{dT_i = dA \cdot \left(Po_i - d\right) \times f_i + A \cdot \left(Po_i - d\right) \times df_i} \tag{3.31}$$

A derivada de $\ddot{C}g$, referente a qualquer variável, análogo a (3.17), é:

$$\boxed{d\ddot{C}g = \frac{Cg}{0.25 \cdot \Delta t^2}} \tag{3.32}$$

e a derivada de $\dot{\omega}$, referente a qualquer variável, análogo a (3.15) é:

$$d\dot{\omega} = \frac{\omega}{0.5 \cdot \Delta t} \tag{3.33}$$

A derivada parcial da força $Fmol = -K \cdot O + K \cdot L \cdot \hat{o}$ que é exercida pela mola central é:

$$\boxed{dFmol = -K \cdot dO + K \cdot L \cdot d\hat{o}} \tag{3.34}$$

onde $d\hat{o}$ é calculado de forma análoga a $d\hat{b}_i$.

$$\boxed{d\hat{o} = \frac{dO - d\|O\| \cdot \hat{o}}{\|O\|}} \tag{3.35}$$

enquanto que a derivada do torque $Tmol = -A \cdot d \times Fmol$ causada pela mola central se calcula assem:

$$\boxed{dTmol = -dA \cdot d \times Fmol - A \cdot d \times dFmol} \tag{3.36}$$

A partir das equações acima, pode-se obter a derivada parcial de $F(X)$, referente a qualquer variável:

$$dF(X) = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} df_i + dFmol - m \cdot d\ddot{C}g \\ \sum_{i=1}^{n} dT_i + dTmol - I \cdot d\dot{\omega} \end{pmatrix} \tag{3.37}$$

A equação anterior é então usada para calcular as derivadas parciais referentes a cada uma das seis variáveis de estado do atuador. A matriz Jacobiana $JF(X)$ é então:

$$JF(X) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial Ox} & \frac{\partial F}{\partial Oy} & \frac{\partial F}{\partial Oz} & \frac{\partial F}{\partial \alpha} & \frac{\partial F}{\partial \beta} & \frac{\partial F}{\partial \gamma} \end{pmatrix} \tag{3.38}$$

3.2. Solução Segundo o Newton-Raphson para o Modelo Kelvin-Voigt

O procedimento para calcular o valor das variáveis a longo do tempo e o seguinte.

Seja o sistema de equações não-lineares:

$$F(X, \dot{X}, \ddot{X}) = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} f_i + Fmol + Fg - m \cdot \ddot{C}g \\ \sum_{i=1}^{n} T_i + Tmol - I \cdot \dot{\omega} \end{pmatrix} = 0 \tag{3.39}$$

de variáveis $X = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ Ox \\ Oy \\ Oz \end{pmatrix}$, $\dot{X} = \begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \\ \dot{O}x \\ \dot{O}y \\ \dot{O}z \end{pmatrix}$ e $\ddot{X} = \begin{pmatrix} \ddot{\alpha} \\ \ddot{\beta} \\ \ddot{\gamma} \\ \ddot{O}x \\ \ddot{O}y \\ \ddot{O}z \end{pmatrix}$.

No método de Newton-Raphson para o modelo KV, escolhe-se um valor inicial para $X = Xo$ e $\dot{X} = \dot{X}o$. A variável $\ddot{X}$ é calculada substituindo X e $\dot{X}$ nas equações da dinâmica. Calculam-se $F\left(X, \dot{X}, \ddot{X}\right)$ e $JF\left(X\right)$, e então são obtidos os novos valores de X, $\dot{X}$ e $\ddot{X}$ por:

$$^{Novo}X = X - JF^{-1} \cdot F \tag{3.40}$$

$$^{Novo}\dot{X} = -\dot{X} + \frac{^{Novo}X - X}{0.5 \cdot \Delta t} \tag{3.41}$$

$$^{Novo}\ddot{X} = -\ddot{X} + \frac{^{Novo}\dot{X} - \dot{X}}{0.5 \cdot \Delta t} \tag{3.42}$$

Repete-se o procedimento até que $\left(JF^{-1} \cdot F\right)^T \cdot \left(JF^{-1} \cdot F\right)$ seja menor que um erro requerido.

O procedimento acima será utilizado para calcular cada um dos valores X ao longo do tempo. Como o valor inicial do método a cada instante é obtido a partir do valor que já havia convergido no intervalo de tempo anterior, a convergência é muito rápida, tipicamente de 1 a 3 iterações.

3.3. Solução Segundo o Newton-Raphson para os Modelos Zener e Kelvin-Voigt + Amortecedor

Seja o sistema de equações não-lineares:

$$F\left(X, \dot{X}, \ddot{X}, h, \dot{h}\right) = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} f_i + Fmol + Fg - m \cdot \ddot{C}g \\ \sum_{i=1}^{n} T_i + Tmol - I \cdot \dot{\omega} \end{pmatrix} = 0 \tag{3.43}$$

de variáveis $X = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ Ox \\ Oy \\ Oz \end{pmatrix}$, $\dot{X} = \begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \\ \dot{O}x \\ \dot{O}y \\ \dot{O}z \end{pmatrix}$, $\ddot{X} = \begin{pmatrix} \ddot{\alpha} \\ \ddot{\beta} \\ \ddot{\gamma} \\ \ddot{O}x \\ \ddot{O}y \\ \ddot{O}z \end{pmatrix}$, $h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ h_{ncol-1} \\ h_{ncol} \end{pmatrix}$ e $\dot{h} = \begin{pmatrix} \dot{h}_1 \\ \dot{h}_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \dot{h}_{ncol-1} \\ \dot{h}_{ncol} \end{pmatrix}$.

No método de Newton-Raphson para os modelos Zener ou KV + amortecedor, escolhe-se um valor inicial para $X = Xo$, $\dot{X} = \dot{X}o$ e $h = ho$. A variável $\ddot{X}$ é calculada substituindo X, $\dot{X}$ e h nas equações dinâmicas. Calculam-se F e JF, e são obtidos os novos valores de X, $\dot{X}$ e $\ddot{X}$:

$$^{Novo}X = X - JF^{-1} \cdot F \tag{3.44}$$

$$^{Novo}\dot{X} = -\dot{X} + \frac{^{Novo}X - X}{0.5 \cdot \Delta t} \tag{3.45}$$

$$^{Novo}\ddot{X} = -\ddot{X} + \frac{^{Novo}\dot{X} - \dot{X}}{0.5 \cdot \Delta t} \tag{3.46}$$

Repete-se o procedimento até que $\left(JF^{-1} \cdot F\right)^T \cdot \left(JF^{-1} \cdot F\right)$ seja menor que um erro requerido.

A partir da expressão de $\dot{h}$ segundo Newmark-Beta, e substituindo-a na equação de Zener ou de KV + amortecedor são calculados h e $\dot{h}$.

Como no caso do cálculo para KV, o valor inicial do método a cada instante é obtido a partir do valor que já havia convergido no intervalo de tempo anterior, resultando em uma rápida convergência, tipicamente de 1 a 3 iterações.