2
MODELAGEM DO ATUADOR

2.1. Concepção do Atuador

O atuador consiste de duas bases rígidas, uma superior e outra inferior, separadas por camadas de um músculo polimérico nelas aderido. O músculo é composto de um elastômero acrílico VHB4905, coberto em suas regiões ativas por uma graxa condutora. O funcionamento do músculo é descrito em [2].

Uma mola é utilizada para separar as bases e manter o músculo pré-tensionado. Fios elétricos são utilizados para conduzir corrente para diversas regiões do músculo. Uma graxa condutora, aplicada sobre as paredes do músculo, permite que diferentes regiões sejam atuadas com altas tensões elétricas. A Figura 10a mostra como a base superior é transladada devido à expansão dos músculos provocado pelos capacitores e tensionado pela mola. Para se ter uma melhor idéia de como o capacitor esta formado, imaginariamente se separam o ânodo , cátodo e o músculo artificial que fica entre eles (Figura 10b) .

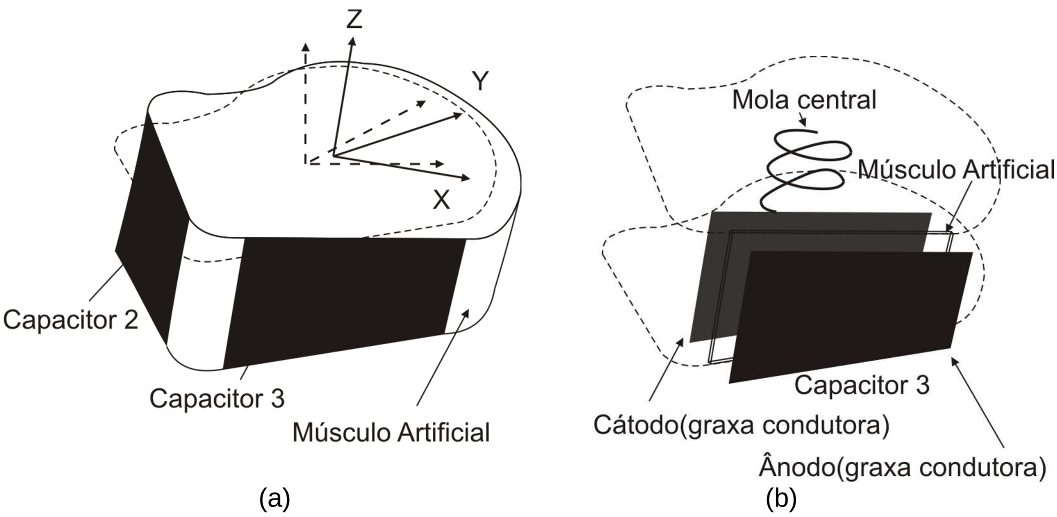


Figura 10: (a) Objetivo do atuador é mover uma das bases com referência á outra. (b) Mola central que mantém pré-tensionado ao músculo e capacitor mostrado em detalhe com suas partes imaginariamente separadas.

Uma forma geral de um atuador pode ser vista na Figura 11a, que apresenta às bases e ao músculo.A Figura 11b mostra suas camadas.

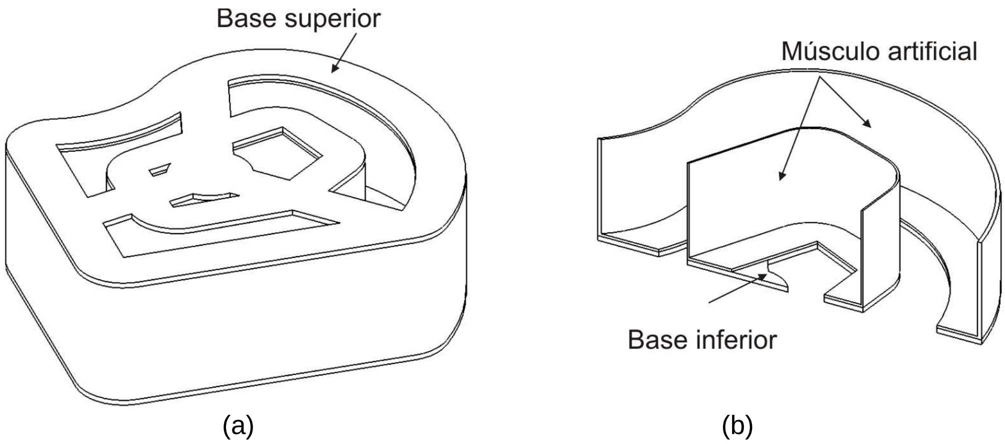


Figura 11: (a) Forma geral do atuador. (b) Vista com dois planos de corte que mostram as multicamadas.

As bases e camadas de músculo podem possuir diversas formas. A modelagem matemática apresentada mais adiante será valida para uma forma prismática genérica, similar à da Figura 11a. As formas podem ser distintas segundo os requerimentos do projetista, por exemplo, a forma triangular da Figura 12a poderia simplificar as equações pelo fato de ter três lados planos, e a forma elíptica na Figura 12b poderia prover maior força a movimentos correspondentes ao menor eixo da elipse.

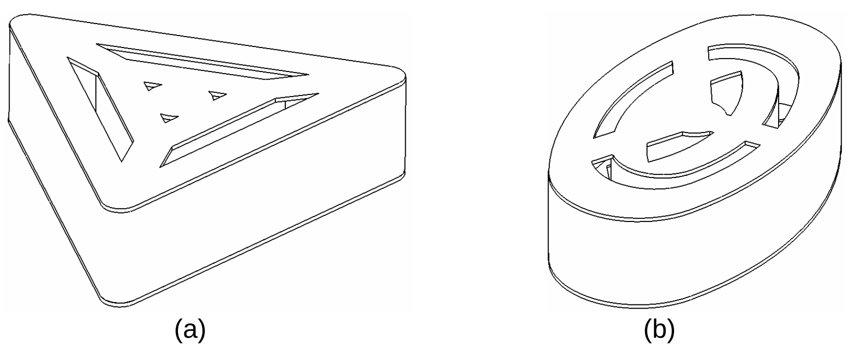
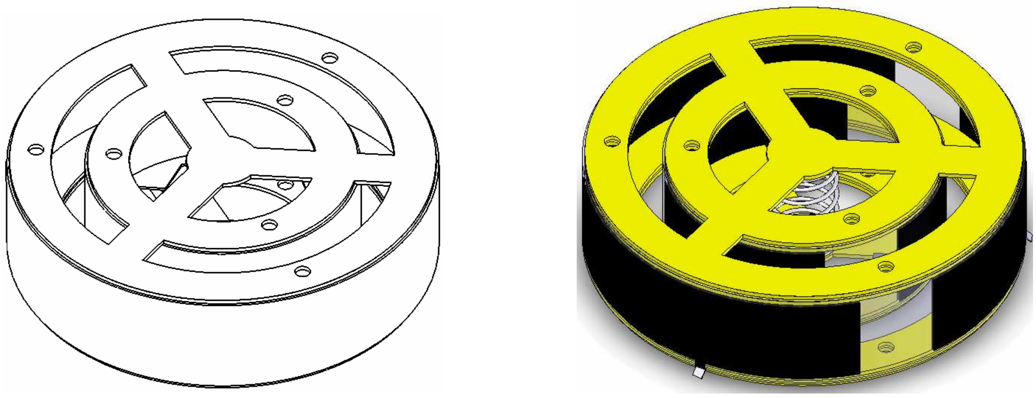


Figura 12: (a) Atuador de forma triangular. (b) Atuador de forma elíptica.

De agora em diante no texto, para explicar os detalhes do projeto se usará um modelo circular, por ser o mais simples. A Figura 13a mostra o esquema do atuador circular e a Figura 13b mostra o projeto com todos seus elementos, incluindo a mola unindo os centros das bases. Note que há seis regiões cobertas com graxa condutora (em preto), três delas no anel externo e três no interno. Ao aplicar uma tensão elétrica em cada região, o músculo sob a graxa tende a se expandir, gerando movimentos relativos entre as bases.



(a) (b)

Figura 13: (a) Esquema do atuador circular. (b) Projeto do atuador com seus elementos.

Os elementos do atuador são mostrados em uma vista em corte na Figura 14. Nela pode-se notar o músculo artificial transparente, a graxa aderida em suas paredes, os fixadores que o prende, a mola que pré-tensiona os músculos, a base inferior presa a ele, e fios que conduzem a corrente elétrica. A base superior cumpre a mesma função estrutural da base inferior, a diferença é que na parte superior não é indispensável fios elétricos.

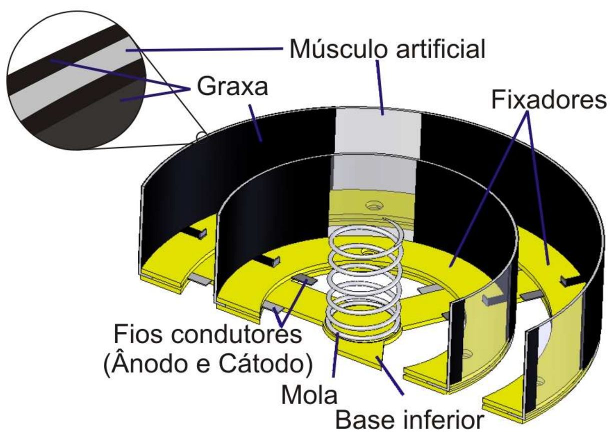
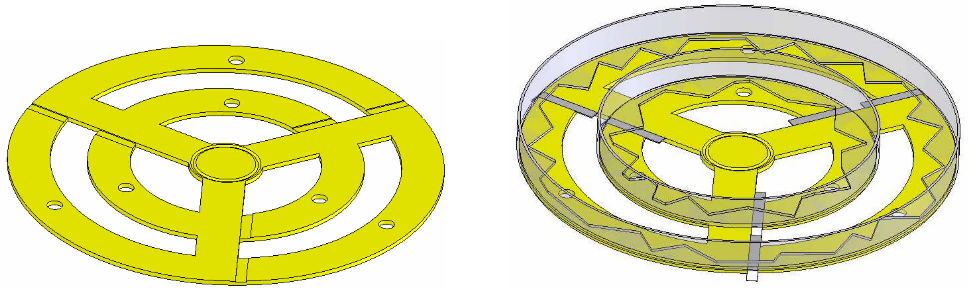


Figura 14: Atuador cortado por dois planos mostrando seus elementos.

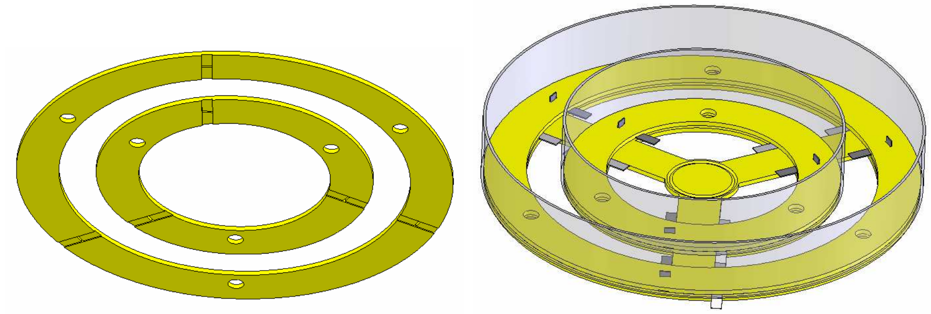
Note que a base inferior, apresentada em detalhe na Figura 15a, possui dois anéis concêntricos. Cada anel servirá para colar e/ou prender uma camada de músculo artificial, como se vê na Figura 15b. As ranhuras radiais são para guiar fios condutores de corrente elétrica às paredes exteriores do músculo artificial. Estes fios condutores ficam localizados entre a base e o músculo artificial, e comunicam a parede exterior à parte interna. Com os fios na parte interna do atuador, é possível montar vários atuadores em série com liberdade de movimento. Anéis fixadores, não representados na Figura 15, serão utilizados para melhor fixar os músculos à base. Furos nas bases servem de guia para colocar os anéis fixadores e a base superior, além de prender com mais força o músculo artificial utilizando parafusos. O canal circular no meio da base serve para que a mola fique também centrada no atuador.



(a) (b)

Figura 15: (a) Base inferior do atuador. (b) Base inferior, fios e músculo artificial cortado por um plano horizontal.

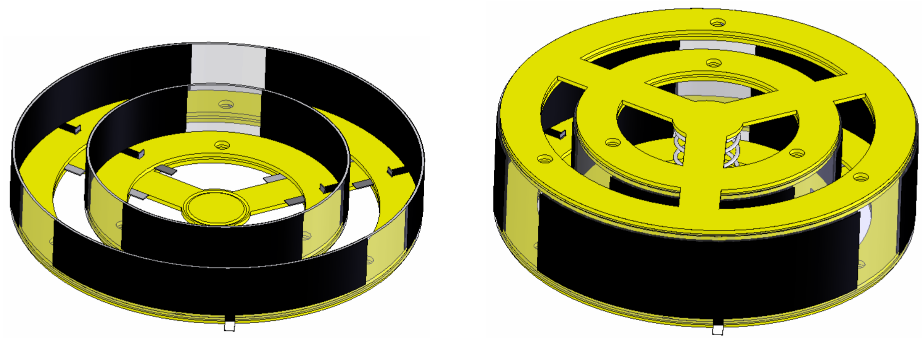
A Figura 16a mostra anéis fixadores a serem presos às bases. Eles possuem ranhuras e canais retangulares para guiar fios e levar corrente elétrica às paredes internas das camadas de músculo artificial. Os furos circulares servem como guias para posicionar os anéis fixadores centrados com a base inferior, mas também poderiam ser usadas para prender os músculos com maior força utilizando parafusos, como mencionado anteriormente.



(a) (b)

Figura 16: (a) Anéis fixadores inferiores. (b) Base e anéis fixadores que prendem ao músculo.

Uma graxa condutora é aplicada a ambas as faces dos músculos artificiais, nas paredes exterior e interior. Desse modo, as seis regiões do atuador proposto totalizam 12 áreas/faces onde a graxa precisa ser aplicada. A graxa pode ser untada usando um pincel ou esponja. Para conectar as regiões ativas aos fios, os quais estão fixados na base inferior, também se usa a graxa. A Figura 17a mostra seis regiões ativas (representadas em preto) formadas pelos músculos. Cada região é equivalente a um capacitor, onde as camadas de graxa equivalem às partes positiva e negativa, com separação menor que 0.5mm, e o polímero equivalendo ao dielétrico. A parte superior do atuador é muito similar à inferior, a diferença é que na parte superior não há ranhuras, pois não são necessários fios, como mostrado na Figura 17b.



(a) (b)

Figura 17: (a) Camadas concêntricas cobertas com graxa condutora que formam três capacitores em cada camada. (b) Projeto do Atuador pronto.

O uso de dois anéis tem a finalidade de aumentar a força e torque gerados pelo atuador. Desse modo, as regiões correspondentes entre os anéis interno e externo são conectadas eletricamente em paralelo, resultando em um sistema de três graus de liberdade. Neste atuador, se as tensões elétricas nas três regiões de ambos anéis forem iguais, como mostrados na Figura 18a, e não houver forças externas, o movimento do atuador é apenas translacional, sem rotações. Se pelo menos uma tensão elétrica for diferente, então a base superior, além de transladar, também irá se inclinar em relação à inferior, vide Figura 18b.

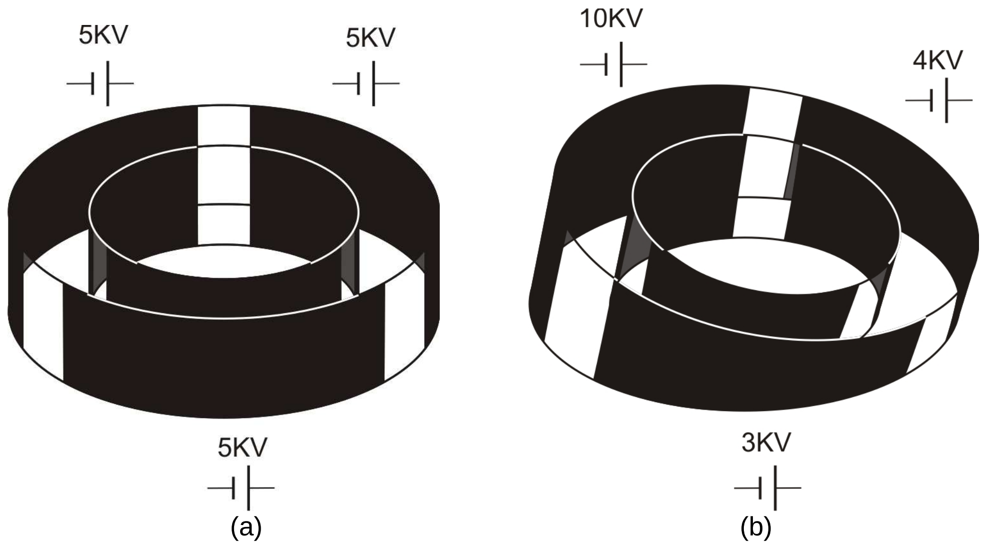


Figura 18 (a) Com tensões elétricas iguais e sem forças externas, o movimento é puramente translacional. (b) Com pelo menos uma tensão elétrica diferente, a base superior translada e gira.

Como este atuador combina três grupos de capacitores, uma versão para atuação binária, onde não há controle sobre a magnitude da tensão elétrica, possuiria $2^3 = 8$ estados discretos. Em uma configuração contínua, onde as tensões elétricas podem ser variadas continuamente, o sistema possui infinitas configurações.

Note que a escolha de apenas três regiões ativas para o atuador é conveniente para minimizar a complexidade do sistema elétrico. Três é o número mínimo de regiões que permite a rotação do sistema em duas direções perpendiculares além de translação na direção axial.

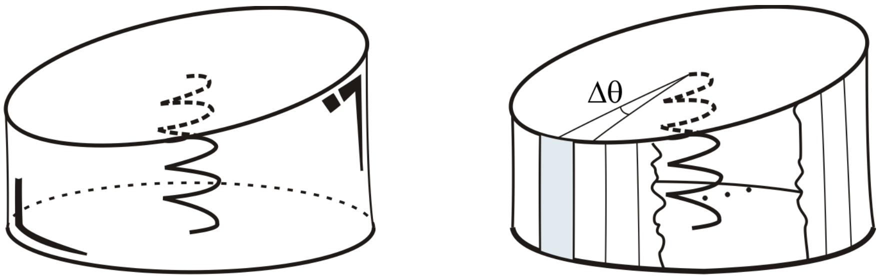
Os detalhes da construção do atuador encontram-se no Apêndice A.

2.2. Modelagem Matemática do Atuador

Uma vez concebido o atuador, é feita sua modelagem matemática. Primeiramente, é utilizada uma só camada de músculo artificial para depois estender a análise para um atuador de duas camadas (incorporando o anel interno).

O atuador de uma camada é constituído por duas bases planas de mesmo formato que são unidas pelo músculo artificial e uma mola, como ilustrado na Figura 19a. O músculo é modelado como um sistema visco-elástico onde não há atrito. Para pequenas rotações, o deslocamento do músculo encontra-se essencialmente na direção perpendicular à base inferior (direção vertical na Figura

19a). Para obter um modelo matemático do atuador, divide-se o músculo em pequenos elementos, como se vê na Figura 19b. Como o deslocamento é essencialmente vertical, as partições são aproximadas por pequenos retângulos sobre os músculos. A Figura 19b mostra o músculo constituído pela união de pequenos elementos. Daqui em diante, o termo elemento se refere a cada partição do músculo.

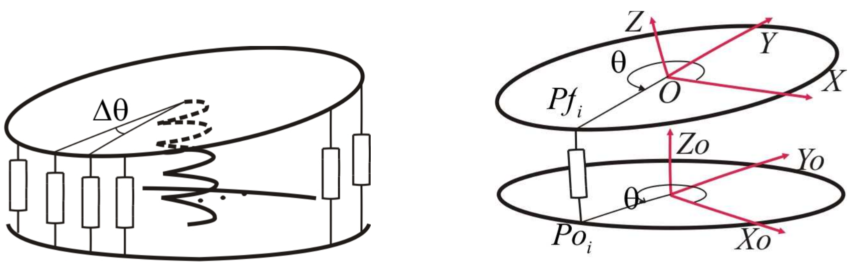


(a) (b)

Figura 19: (a) Esquema do músculo de uma camada. (b) Sub-divisão do músculo para a modelagem matemática.

Cada elemento é modelado como um conjunto de molas e amortecedores, para assim caracterizar o comportamento do músculo. O modelo mais simples de cada elemento é o de mola-amortecedor, mas este é apenas um dos muitos modelos que se pode assumir. A Figura 20a mostra elementos entre as bases do atuador.

Agora, analisam-se as posições das bases, da mola, e de cada elemento. A posição da base superior é dada pela sua translação e rotação em relação à base inferior. Pontos correspondentes são gerados como, por exemplo, Pf_i da base superior e o ponto correspondente Po_i da base inferior, mostrados na Figura 20b. Além disso, Po_i e Pf_i são os extremos do elemento representado.



(a) (b)

Figura 20: (a) Cada elemento é representado por um conjunto de molas e amortecedores. (b) Posição e parâmetros de um elemento.

Assume-se que o sistema de coordenadas da base inferior é fixo, e a posição do centro do sistema da base superior é dada por $O = (Ox\ Oy\ Oz)^{T}$ .Como se vê na Figura 21a

Sendo α, β e γ os ângulos de rotação consecutivos nos eixos x, y, z para ir do sistema da base inferior para o sistema da base superior (Figura 21b, 21c e 21b).

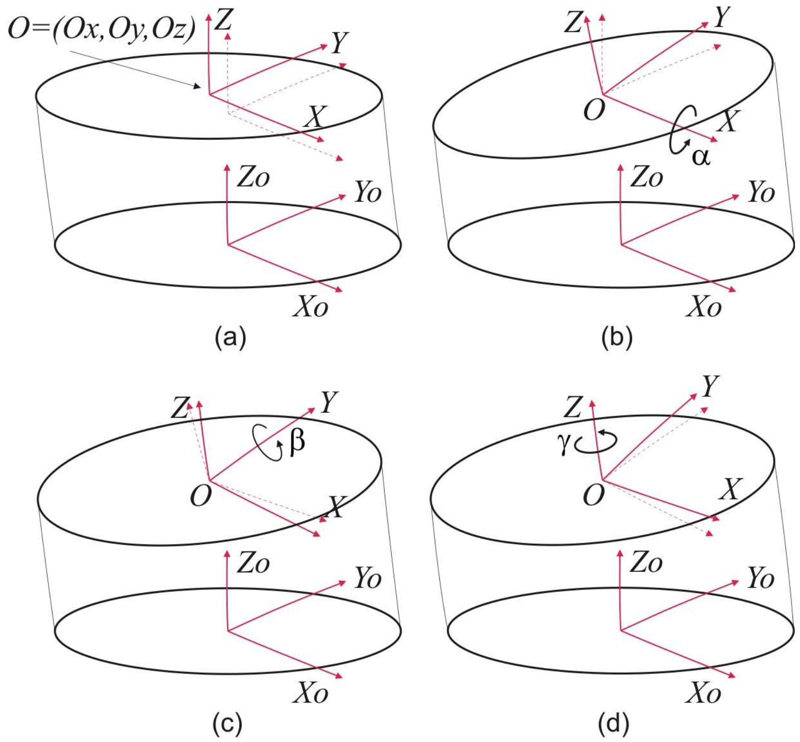


Figura 21: (a) Translação da base superior. (b) Rotação em X. (c) Rotação em Y. (d) Rotação em Z.

Então a matriz de rotação para α é:

$$A_{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

Para β:

$$A_{\beta} = \begin{pmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

Para γ:

$$A_\gamma = \begin{pmatrix} \cos(\gamma) & -\sin(\gamma) & 0 \\ \sin(\gamma) & \cos(\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

Então, a matriz de rotação que leva as orientações da base inferior à base superior é:

$$A = A_\alpha \cdot A_\beta \cdot A_\alpha \tag{2.4}$$

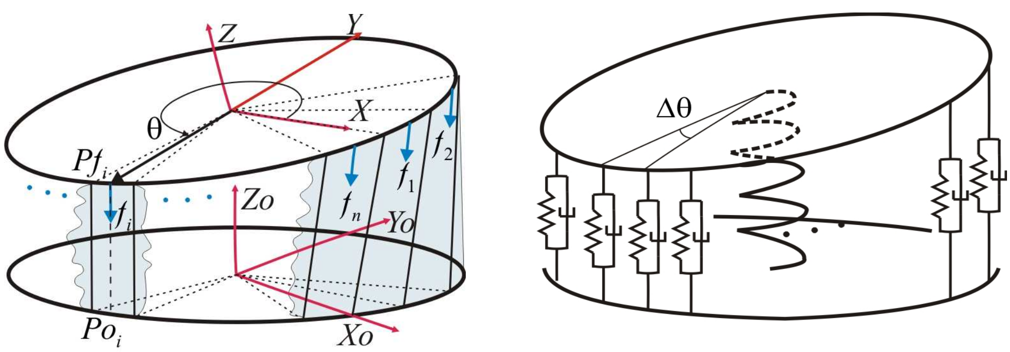
Como Pf_i, referente à base superior, corresponde ao ponto Po_i na base inferior, cada ponto Pf_i pode ser representado no sistema da base inferior como:

$$Pf_i = A \cdot Po_i + O \tag{2.5}$$

A distância entre os extremos do elemento mola-amortecedor é então $B_i = Pf_i - Po_i$, com comprimento $\|B_i\|$ e vetor unitário $\hat{b}_i = \dfrac{B_i}{\|B_i\|}$.

2.3. Modelagem Matemática do Músculo Artificial

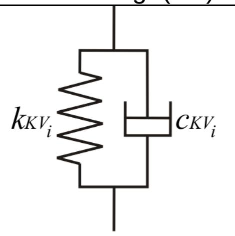
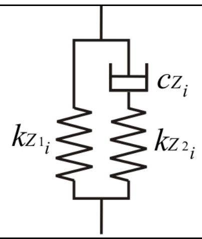
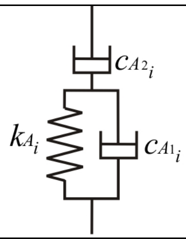
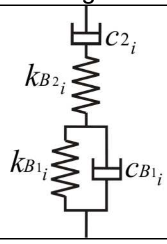
Como mencionado anteriormente, o músculo é dividido em pequenos elementos em sua modelagem. As divisões do músculo geram segmentos nas duas bases do atuador. A Figura 22a mostra como cada elemento considera que a força atua no meio de cada segmento. O modelo mais simples para cada elemento é o de mola-amortecedor como se pode ver na Figura 22b, mas existem outros modelos que representam melhor o comportamento dos músculos artificiais tipicamente utilizados. Por isso, analisam-se vários tipos de modelos. A Tabela 1 mostra quatro tipos de modelos matemáticos para cada elemento do músculo [6].



(a) (b)

Figura 22: (a) Posições dos elementos e suas forças. (b) Um dos modelos mais simples. mola-amortecedor

Tabela 1: Tipos de modelos para cada elemento.

Kelvin-Voigt (KV)	Zener	KV+Amortecedor	Burgers
			

Cada modelo do músculo faz com que a dinâmica do atuador seja um pouco distinta, pois a força f_i que exerce cada elemento depende do tipo de modelo. Esta força, cujo módulo é denominado h_i, corresponde àquela exercida no elemento i.

Cada elemento tem um comprimento natural l_i quando relaxado, antes de sofrer um deslocamento ε_i. Estes parâmetros se relacionam da seguinte maneira:

$$\varepsilon_i = \|B_i\| - l_i \tag{2.6}$$

Note que neste trabalho a deformação da mola é definida pelo seu deslocamento ε_i. Este deslocamento/deformação não é a deformação do músculo, que seria obtida por ε_i/l_i para a deformação de engenharia, e $\ln(1 + \varepsilon_i/l_i)$ para a deformação real.

Agora, analisam-se as equações de cada modelo, onde as principais variáveis são a força h_i, o deslocamento $\varepsilon_i = \|B_i\| - l_i$ e as variações destes. A Figura 23 mostra as variáveis para o modelo mola-amortecedor ou Kelvin-Voigt, onde a mola fornece características elásticas e o amortecedor tenta reproduzir os efeitos viscosos.

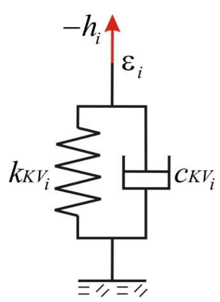


Figura 23: Modelo de Kelvin-Voigt.

Neste modelo, a fórmula relacionando a força h_i com o deslocamento (deformação da mola) ε_i, segundo as constantes de rigidez e amortecimento, é:

$$-k_{KV_i} \cdot \varepsilon_i - c_{KV_i} \cdot \dot{\varepsilon}_i = h_i \tag{2.7}$$

onde k_{KV_i} e c_{KV_i} são as constantes de rigidez e amortecimento respectivamente. No modelo Zener, mostrado na Figura 24, é adicionado uma mola em série com o amortecedor para que o amortecimento não seja tão abrupto. A equação que relaciona os parâmetros neste caso é:

$$k_{Z2_i} \cdot k_{Z1_i} \cdot \varepsilon_i + c_{Z_i} \cdot \left(k_{Z1_i} + k_{Z2_i}\right) \cdot \dot{\varepsilon}_i = -k_{Z2_i} \cdot h_i - c_{Z_i} \cdot \dot{h}_i \qquad (2.8)$$

onde k_{Z1_i} e k_{Z2_i} são constantes de rigidez, e c_{Z_i} é a constante de amortecimento

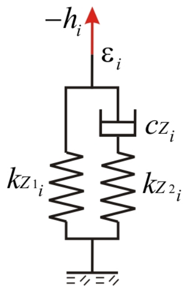


Figura 24: Modelo Zener.

No modelo “Kelvin-Voigt + Amortecedor”, mostrado na Figura 25, não existe uma configuração de equilíbrio estático, devido ao amortecedor de constante c_{A2_i}, que faz com que o elemento do músculo continue se movimentando. Para valores muito altos deste termo de amortecimento, pode-se dizer que o sistema possui um equilíbrio “quase-estático”, uma vez que a velocidade em regime permanente do sistema é muito baixa. A equação que relaciona os parâmetros desse modelo é:

$$k_{A_i} \cdot c_{A2_i} \cdot \dot{\varepsilon}_i + c_{A1_i} \cdot c_{A2_i} \cdot \ddot{\varepsilon}_i = -k_{A_i} \cdot h_i - \left(c_{A1_i} + c_{A2_i}\right) \cdot \dot{h}_i \qquad (2.9)$$

onde k_{A_i} é a constante de rigidez. c_{A1_i} e c_{A2_i} são as constantes de amortecimento.

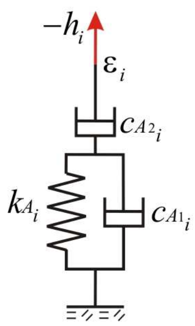


Figura 25: Modelo Kelvin-Voigt + Amortecedor.

Finalmente, o modelo de Burgers, mostrado na Figura 26, adiciona uma mola em série ao modelo "Kelvin-Voigt + Amortecedor" para dar mais flexibilidade ao sistema e melhorar a precisão na hora de estimar os parâmetros, por introduzir mais uma constante ajustável. A equação que relaciona os parâmetros é:

$$\begin{gathered} k_{B1_i} \cdot k_{B2_i} \cdot c_{B2_i} \cdot \dot{\varepsilon}_i + k_{B2_i} \cdot c_{B1_i} \cdot c_{B2_i} \cdot \ddot{\varepsilon}_i = \\ -k_{B1_i} \cdot k_{B2_i} \cdot h_i - \left(k_{B1_i} \cdot c_{B2_i} + k_{B2_i} \cdot c_{B1_i} + k_{B2_i} \cdot c_{B2_i} \right) \cdot \dot{h}_i - c_{B1_i} \cdot c_{B2_i} \cdot \ddot{h}_i \end{gathered} \tag{2.10}$$

onde k_{B1_i} e k_{B2_i} são as constantes de rigidez. c_{B1_i} e c_{B2_i} são as constantes de amortecimento.

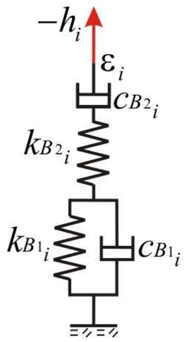
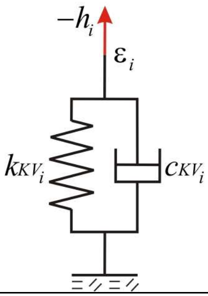
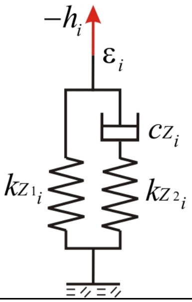
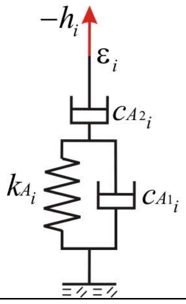
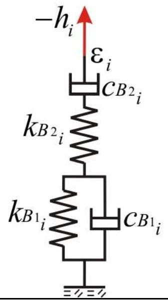


Figura 26: Modelo de Burgers.

A Tabela 2 resume os modelos considerados.

Tabela 2: Modelos matemáticos para cada elemento do músculo.

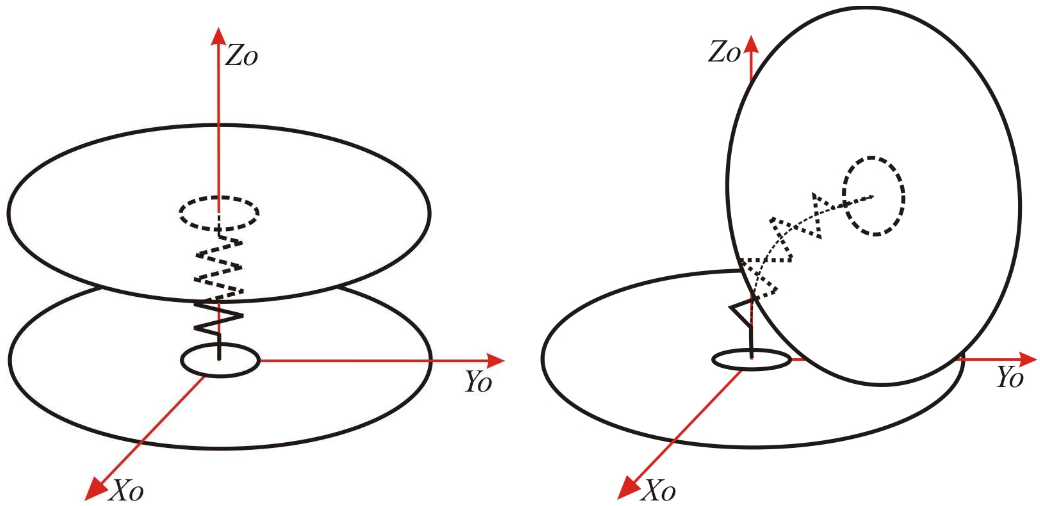
Modelo	Equação
Kelvin – Voigt 	$-k_{KV_i}\cdot\varepsilon_i - c_{KV_i}\cdot\dot{\varepsilon}_i = h_i$
Zener 	$k_{Z2_i}\cdot k_{Z1_i}\cdot\varepsilon_i + c_{Z_i}\cdot\left(k_{Z1_i}+k_{Z2_i}\right)\cdot\dot{\varepsilon}_i = -k_{Z2_i}\cdot h_i - c_{Z_i}\cdot\dot{h}_i$
Kelvin-Voigt + Amortecedor 	$k_{A_i}\cdot c_{A2_i}\cdot\dot{\varepsilon}_i + c_{A1_i}\cdot c_{A2_i}\cdot\ddot{\varepsilon}_i = -k_{A_i}\cdot h_i - \left(c_{A1_i}+c_{A2_i}\right)\cdot\dot{h}_i$
Burgers 	$k_{B1_i}\cdot k_{B2_i}\cdot c_{B2_i}\cdot\dot{\varepsilon}_i + k_{B2_i}\cdot c_{B1_i}\cdot c_{B2_i}\cdot\ddot{\varepsilon}_i =$ $-k_{B1_i}\cdot k_{B2_i}\cdot h_i - \left(k_{B1_i}\cdot c_{B2_i} + k_{B2_i}\cdot c_{B1_i} + k_{B2_i}\cdot c_{B2_i}\right)\cdot\dot{h}_i - c_{B1_i}\cdot c_{B2_i}\cdot\ddot{h}_i$

Note que as forças f_i e suas intensidades h_i estão relacionadas por:

$$f_i = h_i\cdot\hat{b}_i \tag{2.11}$$

2.4. Modelagem Matemática da Mola Central

A mola central é aquela que une as bases inferior e superior na parte central de cada, ver Figura 27a. A força $Fmol$ é aquela que a mola exerce nas bases, conseqüência da translação e rotação entre elas, como se vê na Figura 27b. A posição mostrada na Figura 27b é exagerada; na verdade, a base superior translada e gira muito pouco. A mola não se encontra engastada nas bases, ela está apenas apoiada em cada superfície. Desse modo, como o diâmetro da mola é pequeno em relação ao diâmetro das bases, é possível assumir que o contato da mola com cada base é pontual, em pontos próximos às origens dos sistemas de coordenadas. Esse contato pontual permite desprezar momentos fletores e torçores concentrados no contato entre a mola e as bases. Assim, a única reação da mola é devida a uma força alinhada o segmento que une ambos os pontos de contato, causada pelas rigidezes à compressão e flexão da mola, o que simplifica enormemente a análise dinâmica.



(a) (b)

Figura 27: (a) Posição da mola central quando está relaxada. (b) Posição da mola depois que a base superior foi transladada e girada.

Assume-se que a mola possui comprimento natural L, quando não deformada. A Figura 28 mostra alguns vetores que são importantes para cálculos.

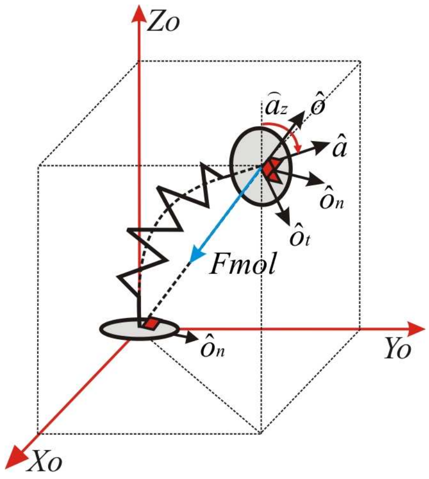


Figura 28: Diagrama vetores e força.

Define-se $\hat{o} = \dfrac{O}{\|O\|}$ como o vetor unitário orientado na direção do centro da base superior, $\hat{ko}$ o vetor unitário orientado na direção *Zo*, $\hat{a}$ o vetor unitário orientado na direção perpendicular ao plano da base superior ($\hat{a}$ é a terceira coluna da matriz de rotação A), $\hat{a}_z$ o ângulo formado pelos vetores $\hat{ko}$ e $\hat{a}$ ($\hat{a}_z$ é a componente do vetor $\hat{a}$ na direção *Zo*), e $\hat{o}_n$ o vetor unitário normal ao plano definido pelo eixo Zo e o vetor $\hat{o}$, onde $\hat{o}$ e $\hat{o}_n$ são perpendiculares. Então $\hat{o}_n$ é calculado por:

$$\hat{o}_n = \frac{\hat{k} \times \hat{o}}{\left\| \hat{k} \times \hat{o} \right\|} \tag{2.12}$$

Define-se também $\hat{o}_t$, o vetor unitário que pertence ao plano definido pelo eixo Zo e o vetor $\hat{o}$, onde $\hat{o}$ e $\hat{o}_t$ são perpendiculares. Então, $\hat{o}_t$ é obtido por:

$$\hat{o}_t = \hat{o}_n \times \hat{o} \tag{2.13}$$

Desse modo, $\hat{o}$, $\hat{o}_t$ e $\hat{o}_n$ formam uma base ortonormal.

A força $Fmol$ que a mola exerce na base superior é calculada então pelo produto de uma constante de rigidez K, que engloba os efeitos de compressão e flexão da mola, da deformação $\left(\|O\| - L\right)$, e do vetor unitário $\hat{o}$, alinhado com a força:

$$\boxed{Fmol = -K \cdot \left(\|O\| - L\right) \cdot \hat{o}} \tag{2.14}$$

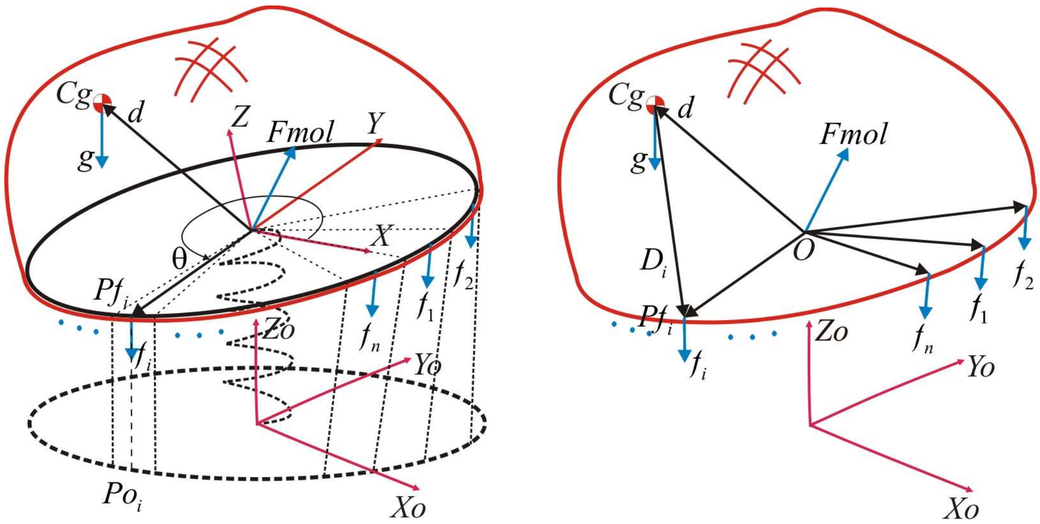
$$Fmol = -K \cdot \|O\| \cdot \hat{o} + K \cdot L \cdot \hat{o} \tag{2.15}$$

$$Fmol = -K \cdot \|O\| \cdot \frac{O}{\|O\|} + K \cdot L \cdot \hat{o} \tag{2.16}$$

$$\boxed{Fmol = -K \cdot O + K \cdot L \cdot \hat{o}} \tag{2.17}$$

2.5. Equações Dinâmicas do atuador

Após obter os modelos matemáticos dos músculos e da mola central, pode-se analisar a dinâmica do atuador. A Figura 29a mostra as forças exercidas pelos elementos do músculo, a força $Fmol$ exercida pela mola, e a força da gravidade relativa ao disco superior e à carga útil nele fixada. O diagrama de corpo livre e a posição das forças podem ser vistas na Figura 29b.



(a) (b)

Figura 29: (a) Forças do atuador. (b) Diagrama de corpo livre e posições das forças.

A força da gravidade é sempre contrária à direção de $\hat{ko}$, logo $Fg = -\hat{ko} \cdot m \cdot g$, onde $g = 9{,}81 m/s^2$ e m é a massa do disco superior e sua carga útil. Pela segunda lei de Newton, o somatório de forças que atuam sobre o corpo é igual à massa m multiplicada pela aceleração $\ddot{Cg}$ do centro de massa deste sistema disco superior e carga útil, logo:

$$\sum_{i=1}^{n} f_i + Fmol + Fg = m \cdot \ddot{Cg} \tag{2.18}$$

onde o centro de massa Cg e a aceleração da gravidade g podem ser vistas na Figura 29.

Define-se d como a posição do centro de massa medido referente ao sistema de coordenadas da base superior, vide Figura 29a, e D_i o vetor que parte do centro de massa até o ponto onde a força f_i é aplicada, vide Figura 29b. Então, tem-se:

$$D_i = Pf_i - A \cdot d \tag{2.19}$$

$$D_i = A \cdot (Po_i - d) \tag{2.20}$$

Sendo T_i o torque referente ao centro de massa Cg causado pela força f_i, então:

$$Ti = D_i \times f_i \tag{2.21}$$

Sendo $Tmol$ o torque referente ao centro de massa que é causado pela força da mola central $Fmol$, tem-se:

$$Tmol = -\left(A \cdot d\right) \times Fmol \tag{2.22}$$

Note que a força da gravidade não gera torque em relação ao centro de massa. Então, o somatório de torques referente ao centro de massa é igual à matriz de inércia I do sistema disco superior e carga útil multiplicado pela aceleração angular $\dot{\omega}$:

$$\sum_{i=1}^{n} T_i + Tmol = I \cdot \dot{\omega} \tag{2.23}$$

Assim, de acordo com a segunda lei de Newton e a partir das equações da dinâmica do músculo, as variáveis de posição e orientação Ox, Oy, Oz, α, β e γ são obtidas solucionando o sistema de equações diferenciais:

$$\sum_{i=1}^{n} f_i + Fmol + Fg = m \cdot \ddot{C}g \tag{2.24}$$

$$\sum_{i=1}^{n} T_i + Tmol = I \cdot \dot{\omega} \tag{2.25}$$

A solução deste sistema é descrita no Capítulo seguinte.