

### 3 Teoria

A presente sessão descreve o equilíbrio de Nash Bayesiano para agentes avessos ao risco e para agentes neutros ao risco (RNNE), considerando que os agentes apresentam comportamento completamente racional e não cooperativo.

Sob a hipótese de que os N agentes são avessos ao risco e têm função utilidade CRRA, ao escolherem os lances a serem efetuados no leilão selado de primeiro preço com valorações privadas e independentes, o problema de maximização a ser resolvido por cada jogador é o seguinte:

$$\text{Max}_{b_i} \left[ \eta (v_i - b_i)^{1/\eta} G(b_i) \right] + \left[ 0 \cdot (1 - G(b_i)) \right]$$

Onde:

$$\begin{aligned} G(b_i) &= \text{Pr}(\text{ganhar}) = \text{Pr}(b_i > b_j, \forall j) \\ &= \text{Pr}(\beta^{-1}(b_i) > v_j, \forall j) \\ &= F(\beta^{-1}(b_i))^{N-1} \\ &= F(v_i)^{N-1} \end{aligned}$$

Onde  $\eta$  é o coeficiente de aversão ao risco do indivíduo e  $F(v_i)$  é a função de distribuição acumulada das valorações privadas dos indivíduos.

No caso a ser considerado nesse estudo,  $N=2$ ,  $F(v_i)$  é igual a probabilidade de se vencer o leilão.

De acordo com o que prevê a teoria, resolvendo o problema em questão, os agentes se deparam com a condição de primeira ordem descrita a seguir:

$$\begin{aligned} &-\eta \frac{1}{\eta} (v_i - b_i)^{1/\eta - 1} \cdot F(v_i) + \eta (v_i - b_i)^{1/\eta} (N-1) F(v_i)^{(N-2)} \cdot f(v_i) (\beta^{-1})'(b_i) = 0 \\ \text{ou } &-\eta \frac{1}{\eta} (v_i - b_i)^{1/\eta - 1} \cdot F(v_i) + \eta (v_i - b_i)^{1/\eta} (N-1) F(v_i)^{(N-2)} \cdot f(v_i) \frac{1}{\beta'(v_i)} = 0 \end{aligned}$$

Quando os agentes são neutros ao risco,  $\eta=1$  e a condição de primeira ordem referente ao equilíbrio de Nash é descrita pela equação abaixo.

$$-\beta'(v_i) F(v_i) + (N-1)(v_i - b_i) f(v_i) = 0$$

onde  $f(v_i)$  é função densidade das valorações privadas dos agentes. Num leilão com 2 jogadores, a função densidade mede a variação da probabilidade de o agente vencer o jogo quando seu lance varia infinitesimalmente. Desse modo, cabe notar que a determinação do lance ótimo depende tanto de  $F(v)$  quanto de  $f(v)$ .

Supondo que as valorações privadas dos indivíduos são distribuídas uniformemente ( $v_i \in U[v_x, v_y]$ ) e que esses são completamente racionais, a função de lances de um agente neutro ao risco em um leilão de primeiro preço com valorações privadas e independentes é, conforme calculado por Vickrey (1961), a descrita abaixo:

$$\beta(v_i) = v_x + \frac{(N-1)}{N} (v_i - v_x)$$

Mais especificamente, para  $N=2$ ,  $v_i \in U[0, \bar{v}]$ , a função que descreve a estratégia que representa o RNNE é a seguinte:

$$\beta(v_i) = \frac{v_i}{2}$$