

2 Formulação do Problema

2.1 Considerações Gerais

O espaço entre o revestimento e a parede do poço foi descrito como o espaço entre dois cilindros excêntricos, com a excentricidade variando ao longo do poço. A inclinação do poço também pode variar ao longo do mesmo, como esquematizado na figura 2.1.

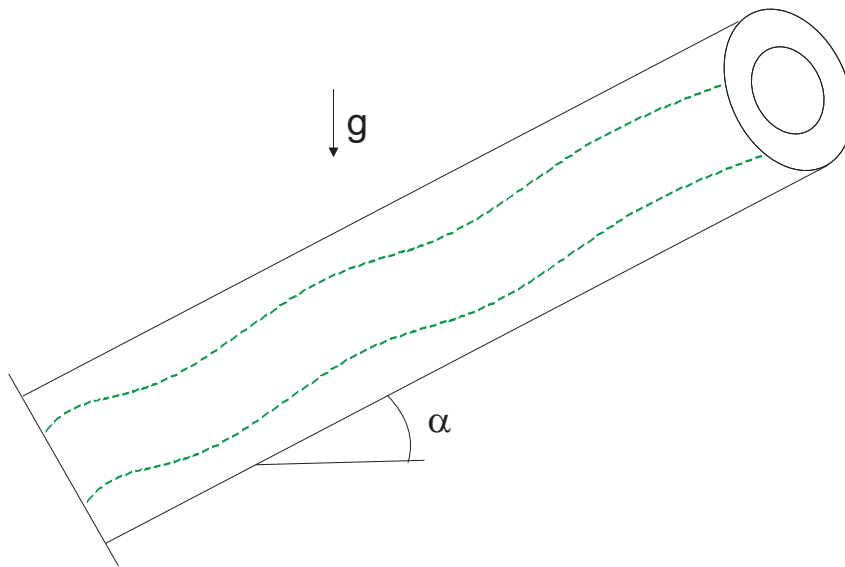


Figura 2.1: Geometria do problema - vista lateral

Para a modelagem do problema de escoamento no espaço anular formado por dois cilindros, optou-se por desprezar a curvatura das paredes dos cilindros adotando um sistema de coordenadas cartesianas (z, y, x) , onde z é a coordenada na direção principal do escoamento (axial), y na direção radial e x na direção circunferência.

O sistema de coordenadas local em cada seção reta do poço tem como origem o centro do cilindro interno, que possui raio interno R_i . A posição do centro do cilindro externo é definida pela excentricidade $e(z) = (e_1^2 + e_2^2)^{0.5}$, onde e_1 e e_2 descreve, respectivamente, a excentricidade horizontal e vertical

(funções ortogonais), conforme mostrado na figura 2.2. Considerando que o raio do cilindro externo é igual a R_0 , a distância da parede do cilindro externo ao centro do cilindro interno é dada por:

$$R(z, x) = e(z)\cos\left(\frac{x}{R_i} - \gamma\right) + \sqrt{R_0^2 - e^2(z)\sin^2\left(\frac{x}{R_i} - \gamma\right)} \quad (2-1)$$

$e(z)$ - excentricidade

R_0 - raio do cilindro externo

γ - direção da excentricidade

x - coordenada azimutal

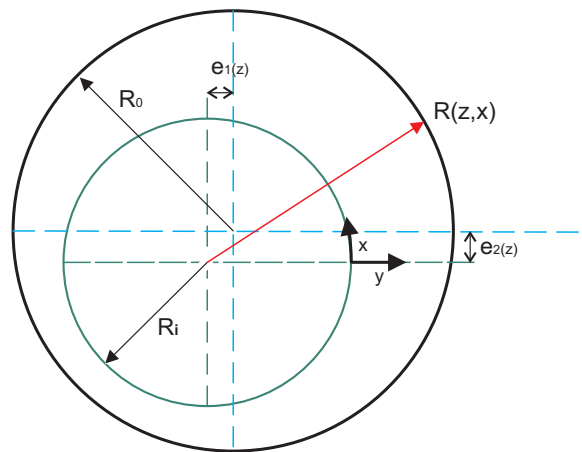


Figura 2.2: Geometria do problema - vista superior

2.2

Equação da Quantidade de Movimento

O escoamento no espaço anular durante o processo de deslocamento é tri-dimensional e transiente, tornando a sua solução extremamente complexa.

A equação de conservação de quantidade de movimento é:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = \rho \mathbf{g} + \nabla \cdot \mathbf{T} \quad (2-2)$$

A equação de conservação de quantidade de movimento pode ser expandida em coordenadas cilíndricas, considerando fluido incompressível e a viscosidade constante da seguinte forma:

1. direção r:

$$\rho \left\{ \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right\} =$$

$$\mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right] - \frac{\partial p}{\partial r} + \rho g_r \quad (2-3)$$

2. direção θ :

$$\rho \left\{ \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\theta v_r}{r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right\} =$$

$$\mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_\theta) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \rho g_\theta \quad (2-4)$$

3. direção z:

$$\rho \left\{ \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right\} =$$

$$\mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] - \frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z \quad (2-5)$$

Ao ser utilizado o modelo de viscosidade equivalente que é utilizado para o modelo não-Newtoniano (seção 2.7) o uso de coordenadas cilíndricas torna muito dispendioso os cálculos. Dessa forma adotou-se a simplificação de utilizar o sistema de coordenadas cartesianas (z,y,x), desprezando o termo de curvatura, e utilizando as hipóteses de regime quasi-permanente e fluido Newtoniano, obtêm-se a equação de Navier-Stokes, que pode ser escrita em cada direção:

1. direção z:

$$\rho \left\{ u \frac{\partial u}{\partial z} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial x} \right\} =$$

$$-\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z + \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right] \quad (2-6)$$

2. direção y :

$$\rho \left\{ u \frac{\partial v}{\partial z} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial x} \right\} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y + \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \quad (2-7)$$

3. direção x :

$$\rho \left\{ u \frac{\partial w}{\partial z} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial x} \right\} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x + \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] \quad (2-8)$$

onde u , v e w são as componentes nas direções axial (z), radial (y) e tangencial (x) da velocidade, respectivamente.

A viscosidade e a densidade em cada ponto é função do líquido presente naquele local e conseqüentemente é função do tempo.

A solução deste problema completo é extremamente cara computacionalmente. Este sistema será simplificado, originando o modelo adotado nesta dissertação.

2.3

Teoria de Lubrificação

Para simplificar a resolução da equação de Navier-Stokes pode-se realizar uma análise de escala e com isto eliminar alguns termos da equação, esse procedimento é conhecido como teoria da lubrificação. No caso do poço o comprimento (L) é maior do que o raio interno (R_i) e externo (R_0) que são por sua vez bem maiores que a distância entre a parede dos cilindros ($R_0 - R_i$).

$$R_0, R_i < L \quad e \quad R_0 - R_i \ll R \ll L$$

Sendo assim, pode-se mostrar através da equação de conservação de massa que a componente radial da velocidade é desprezível em comparação com as demais direções, ou seja:

$$v \ll u, w \quad (2-9)$$

As derivadas de segunda ordem podem ser desprezadas de acordo com a seguinte relação dimensional:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \gg \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2-10)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \gg \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (2-11)$$

Utilizando as simplificações propostas pela teoria de lubrificação e considerando que seja desprezível a variação de pressão hidrostática na direção radial, ou seja, $p \Rightarrow p(z, x)$ as equações de quantidade de movimento reduzem-se a:

$$-\frac{\partial p}{\partial z} + \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] - \rho g \sin \alpha = 0 \quad (2-12)$$

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] - \rho g \cos \left(\frac{x}{R_i} \right) \cos \alpha = 0 \quad (2-13)$$

$$-\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (2-14)$$

Como a pressão não é função da coordenada y , o perfil de velocidade na direções axial pode ser obtido integrando as equações (2-12):

$$u = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial z} y^2 + \frac{\rho g \sin \alpha}{2\mu} y^2 + C_1 y + C_2 \quad (2-15)$$

E utilizando como condição de contorno que a velocidade axial na parede dos cilindros é ZERO.

$$y = 0 \Rightarrow u = 0 \quad e \quad y = R_0 - R_i \Rightarrow u = 0 \quad (2-16)$$

Definindo H como sendo a distância entre os cilindros, $H(z, x) = R(z, x) - R_i$, as constantes de integração são:

$$C_1 = -\frac{H^3}{12\mu} \quad (2-17)$$

$$C_2 = -\frac{H^3}{12\mu} \rho g \sin \alpha = \rho g \sin \alpha C_1 \quad (2-18)$$

Realizando um processo analogo para a equação da direção tangencial (2-13):

$$w = \left[\frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g \cos \alpha \cos \left(\frac{x}{R_i} \right) \right] \frac{y^2}{2} + C_3 y + C_4 \quad (2-19)$$

Utilizando agora como condição de contorno que a velocidade tangencial na parede dos cilindros é ZERO.

$$y = 0 \Rightarrow w = 0 \quad e \quad y = R_0 - R_i \Rightarrow w = 0 \quad (2-20)$$

As constantes são:

$$C_3 = -\frac{H^3}{12\mu} \quad (2-21)$$

$$C_4 = -\frac{H^3}{12\mu} \rho g \sin \alpha = \rho g \sin \alpha C_3 \quad (2-22)$$

Observa-se que a integral do perfil de velocidade na direção axial e na direção tangencial respectivamente são dadas por:

$$\int_0^H u \, dy = C_1 \frac{\partial p}{\partial x} + C_2 \quad (2-23)$$

$$\int_0^H w \, dy = C_3 \frac{\partial p}{\partial x} + C_4 \quad (2-24)$$

2.4 Equação de Continuidade

A equação da continuidade pode ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (2-25)$$

Integrando a equação em y com os limites de integração sendo 0 e $H(z, x)$ obtém-se:

$$\int_0^H \left(\underbrace{\frac{\partial u}{\partial z}}_I + \underbrace{\frac{\partial v}{\partial y}}_{II} + \underbrace{\frac{\partial w}{\partial x}}_{III} \right) dy = 0 \quad (2-26)$$

Integrando cada um dos termos separadamente utilizando a regra de Leibnitz e considerando as condições de contorno de velocidade nas paredes nulas, obtém-se:

- termo I:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \int_0^H u \, dy &= \int_0^H \frac{\partial u}{\partial z} \, dy + \underbrace{u(H)}_{=0} \frac{\partial H}{\partial z} - \underbrace{u(0)}_{=0} \frac{\partial H}{\partial z} \\ &\implies \int_0^H \frac{\partial u}{\partial z} \, dy = \frac{\partial}{\partial z} \int_0^H u \, dy \end{aligned} \quad (2-27)$$

- termo II:

$$\implies \int_0^H \frac{\partial v}{\partial y} \, dy = 0 \quad (2-28)$$

- termo III:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^H w \, dy &= \int_0^H \frac{\partial w}{\partial x} \, dy + \underbrace{w(H)}_{=0} \frac{\partial H}{\partial x} - \underbrace{w(0)}_{=0} \frac{\partial H}{\partial x} \\ &\implies \int_0^H \frac{\partial w}{\partial x} \, dy = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^H w \, dy \end{aligned} \quad (2-29)$$

A equação de continuidade pode ser escrita da seguinte forma:

$$\implies \frac{\partial}{\partial z} \int_0^H u \, dy + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^H w \, dy = 0 \quad (2-30)$$

Substituindo na equação de continuidade (2-30) as equações (2-23) e (2-24) que definem a integral do perfil de velocidade obtém-se:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[C_1 \frac{\partial p}{\partial z} + C_2 \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[C_3 \frac{\partial p}{\partial x} + C_4 \right] = 0 \quad (2-31)$$

Ou reescrevendo a equação:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[C_1 \frac{\partial p}{\partial z} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[C_3 \frac{\partial p}{\partial x} \right] = - \left[\frac{\partial C_2}{\partial z} + \frac{\partial C_4}{\partial x} \right] \quad (2-32)$$

A solução equação (2-32) fornece o campo de pressão ao longo do poço $p(z, x)$. Uma vez conhecido o campo de pressão, os campos de velocidades $u(x, y, z)$ e $w(x, y, z)$ são calculados pelas equações (2-22) e (2-19). É importante observar que os coeficientes $C_1(z, x)$, $C_2(z, x)$, $C_3(z, x)$, $C_4(z, x)$ dependem da geometria do espaço anular e das propriedades do líquido que ocupa o ponto (z, x) . Consequentemente, estes coeficientes variam com o tempo a medida que um fluido é substituído por outro durante o processo de deslocamento.

Para resolver a equação (2-32) é necessário definir as condições de contorno nas fronteiras do domínio definido como $z \in [0, 1]$ e $x \in [0, 2\pi R_i]$. Para a fronteira saída ($z = L$) foi definido um valor de pressão P_s . As fronteiras da esquerda e da direita, $x = 0$ e $x = 2\pi R_i$, na realidade corresponde a uma mesma linha no domínio físico. Condições periódicas são consideradas nesta fronteira.

Duas condições de entrada ($z = 0$) foram consideradas. A primeira é impor uma pressão de entrada P_e e a segunda, mais utilizada, é definir uma vazão na entrada. Ao impor vazão em anulares excêntricos adota-se manter a velocidade constante na seção transversal. Esta corresponde a impor um gradiente de pressão na entrada.

O cálculo da velocidade média em cada ponto é dado por:

$$\bar{U}(z, x) = \frac{2}{R - R_i} \int_0^H u \, dy = \frac{2}{R - R_i} \left[C_1 \frac{\partial p_i}{\partial z} + C_2 \right] \quad (2-33)$$

$$\bar{W}(z, x) = \frac{2}{R - R_i} \int_0^H w \, dy = \frac{2}{R - R_i} \left[C_3 \frac{\partial p_i}{\partial \theta} + C_4 \right] \quad (2-34)$$

2.5

Discretização do modelo

Na discretização da equação de pressão (2-32) do modelo utilizou-se o método das diferenças finitas. O poço é dividido em segmentos e cada segmento pode possuir um número diferente de nós na direção axial z e um número único na direção circunferencial x . O raio interno R_i é constante para todo o modelo e a distância entre a superfície interna e a externa do anular $H(z, x)$ é calculada em função do raio externo dado R_0 e da excentricidade $e(z)$. A pressão, que é a incógnita do problema, foi calculada em cada nó baseada no valor dos coeficientes avaliados nas faces e nas pressões dos nós vizinhos, como exemplifica nas figuras 2.4 e 2.5.

A discretização de cada termo da eq. (2-32) no ponto (i, j) é dada por:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[C_1 \frac{\partial p}{\partial z} \right] = \frac{2}{\Delta z(i) + \Delta z(i-1)} \left\{ C_1(i+1, j) \frac{P(i+1, j) - P(i, j)}{\Delta z(i)} - C_1(i, j) \frac{P(i, j) - P(i-1, j)}{\Delta z(i-1)} \right\} \quad (2-35)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[C_3 \frac{\partial p}{\partial x} \right] = \frac{2}{\Delta x(j) + \Delta x(j-1)} \left\{ C_3(i, j+1) \frac{P(i, j+1) - P(i, j)}{\Delta x(j)} - C_3(i, j) \frac{P(i, j) - P(i, j-1)}{\Delta x(j-1)} \right\} \quad (2-36)$$

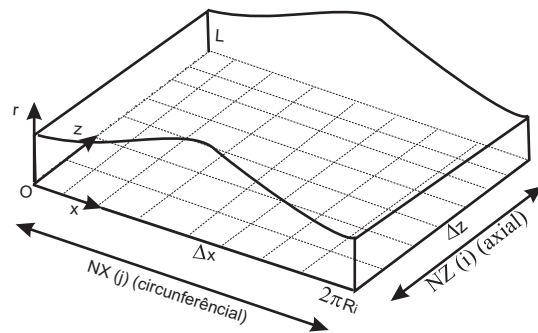


Figura 2.3: Domínio do modelo

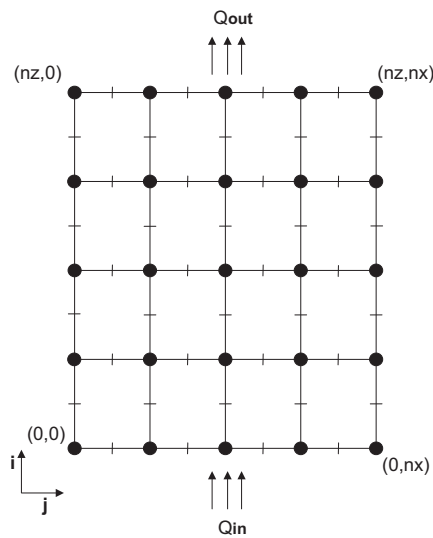


Figura 2.4: Discretização do modelo

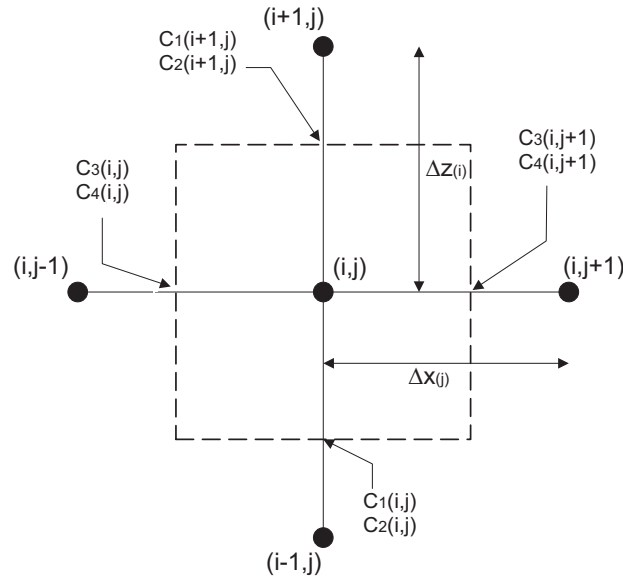


Figura 2.5: Detalhe da discretização do modelo

$$\frac{\partial C_2}{\partial z} = \frac{C_2(i+1, j) - C_2(i, j)}{\frac{\Delta z(i) + \Delta z(i-1)}{2}} \quad (2-37)$$

$$\frac{\partial C_4}{\partial x} = \frac{C_4(i, j+1) - C_4(i, j)}{\frac{\Delta x(j) + \Delta x(j-1)}{2}} \quad (2-38)$$

As condições de contorno discretizadas ficam da seguinte forma:

1. Entrada:

- Impor pressão:

$$P(0, j) = P_e \quad (2-39)$$

- Impondo vazão:

$$P(0, j) = P(1, j) - \frac{\Delta z(1)}{C_1(1, j)} \left[\frac{Q_e}{2\pi R_i} \left(\frac{H}{R_0 - R_i} \right) - C_2(1, j) \right] \quad (2-40)$$

2. Saída:

$$P(Nz, j) = P_s \quad (2-41)$$

3. Lateral:

$$P(i, 0) = P(i, Nx) \quad (2-42)$$

Discretizando o cálculo da velocidade média para cada face do modelo tem-se que:

$$\bar{U} = \frac{2}{H(i-1, j) + H(i, j)} \left[C_1 \frac{P(i, j) - P(i-1, j)}{\Delta z(i-1)} + C_2(i, j) \right] \quad (2-43)$$

$$\bar{W} = \frac{2}{H(i, j-1) + H(i, j)} \left[C_3 \frac{P(i, j) - P(i, j-1)}{\Delta x(j-1)} + C_4(i, j) \right] \quad (2-44)$$

2.6

Avanço da Interface

Como o objetivo do trabalho é tratar o problema de diferentes fluidos sendo bombeados, em bateladas através do anular, é necessário conhecer o fluido que ocupa cada ponto em um determinado instante e acompanhar a evolução desse deslocamento com o tempo para isso foi utilizada uma equação de pseudo-concentração. Essa equação foi discretizada e dessa forma obtém-se um campo de ϕ que representa a concentração dos diferentes fluidos em cada dos nós da malha.

2.6.1

Equação de Pseudo-Concentração

A equação de concentração utilizada é a seguinte:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}(u\phi) + \frac{\partial}{\partial y}(v\phi) + \frac{\partial}{\partial x}(w\phi) = 0 \quad (2-45)$$

Integrando os termos da equação e utilizando, novamente, como condição de contorno que as velocidade na parede são ZERO, obtem-se:

$$\int_0^H \frac{\partial \phi}{\partial t} dy = H \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (2-46)$$

$$\int_0^H \frac{\partial}{\partial z}(v\phi) dy = 0 \quad (2-47)$$

$$\int_0^H \frac{\partial}{\partial z}(u\phi) dy = \frac{\partial}{\partial z} [\bar{U} H \phi] \quad (2-48)$$

$$\int_0^H \frac{\partial}{\partial x}(w\phi) dy = \frac{\partial}{\partial x} [\bar{W} H \phi] \quad (2-49)$$

Dessa forma a equação de transporte de massa integrada na direção radial é dada por:

$$H \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} [\bar{U} H \phi] + \frac{\partial}{\partial x} [\bar{W} H \phi] = 0 \quad (2-50)$$

2.6.2 Discretização

Para discretização da equação de transporte (2-50) utiliza-se novamente o método das diferenças finitas. Como a equação do modelo não possui termo de difusão foi necessário utilizar o esquema *Upwind*, com o objetivo de suavizar a interface entre os fluidos e evitar instabilidades numéricas. A discretização de cada termo da equação é apresentada a seguir:

$$\frac{\partial}{\partial z} [\bar{U} H \phi] = \frac{2}{\Delta z(i) + \Delta z(i-1)} \left[U(i+1, j) \frac{H(i, j) + H(i+1, j)}{2} \phi_n - U(i, j) \frac{H(i-1, j) + H(i, j)}{2} \phi_s \right] \quad (2-51)$$

$$U(i+1, j) \phi_n = \phi(i, j) \underbrace{[|U(i+1, j), 0|]}_A - \phi(i+1, j) \underbrace{[|-U(i+1, j), 0|]}_B \quad (2-52)$$

$$U(i+1, j) \phi_s = \phi(i-1, j) \underbrace{[|U(i, j), 0|]}_C - \phi(i, j) \underbrace{[|-U(i, j), 0|]}_D \quad (2-53)$$

Sendo assim, a discretização do termo pode ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{\partial}{\partial z} [\bar{U} H \phi] = \frac{2}{\Delta z(i) + \Delta z(i-1)} \left\{ \frac{H(i, j) + H(i+1, j)}{2} [A\phi(i, j) - B\phi(i+1, j)] - \frac{H(i-1, j) + H(i, j)}{2} [C\phi(i-1, j) - D\phi(i, j)] \right\} \quad (2-54)$$

Analogamente para a direção x:

$$\frac{\partial}{\partial x} [\bar{W} H \phi] = \frac{2}{\Delta x(i) + \Delta x(i-1)} \left\{ \frac{H(i, j) + H(i, j+1)}{2} [E\phi(i, j) - F\phi(i, j+1)] - \frac{H(i, j-1) + H(i, j)}{2} [G\phi(i, j-1) - K\phi(i, j)] \right\} \quad (2-55)$$

Onde:

$$E = [|W(i, j + 1), 0|] \quad (2-56)$$

$$F = [| - W(i, j + 1), 0|] \quad (2-57)$$

$$G = [|W(i, j), 0|] \quad (2-58)$$

$$K = [| - W(i, j), 0|] \quad (2-59)$$

Integrando a equação de forma explícita no tempo obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{\phi^*(i, j) - \phi(i, j)}{\Delta t} = & -\frac{1}{H(i, j)} \left\{ \frac{2}{\Delta z(i) + \Delta z(i - 1)} \right. \\ & \left[\frac{H(i, j) + H(i + 1, j)}{2} \left(A\phi(i, j) - B\phi(i + 1, j) \right) - \right. \\ & \left. \frac{H(i - 1, j) + H(i, j)}{2} \left(C\phi(i - 1, j) - D\phi(i, j) \right) \right] + \\ & \frac{2}{\Delta x(i) + \Delta x(i - 1)} \\ & \left[\frac{H(i, j) + H(i, j + 1)}{2} \left(E\phi(i, j) - F\phi(i, j + 1) \right) - \right. \\ & \left. \frac{H(i, j - 1) + H(i, j)}{2} \left(G\phi(i, j - 1) - K\phi(i, j) \right) \right] \left. \right\} \quad (2-60) \end{aligned}$$

onde $\phi^*(i, j)$ é o valor da concentração no ponto (i, j) no instante $t + \Delta t$.

2.6.3

Propriedades dos Fluidos

Como mencionado anteriormente, cada valor da concentração ϕ deve ser relacionado a um fluido, permitindo assim o cálculo da viscosidade e densidade do líquido em cada ponto do domínio para um determinado instante de tempo e conseqüentemente o cálculo dos coeficientes C_1, C_2, C_3 e C_4 da equação de pressão.

Adotou-se a seguinte convenção:

$$\begin{aligned}
 \text{Fluido 1} &\Rightarrow \phi = +1 \\
 \text{Fluido 2} &\Rightarrow \phi = -1 \\
 \text{Fluido 3} &\Rightarrow \phi = -3 \\
 \text{Fluido 4} &\Rightarrow \phi = -5 \\
 \text{Fluido } k &\Rightarrow \phi = 3 - 2k \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

A relação do valor da concentração em cada ponto e o valor da propriedade do líquido pode ser feita através de uma combinação de funções degrau. Por exemplo no caso de dois fluidos, podem ser relacionadas a viscosidade μ com a concentração ϕ como mostrado na figura 2.6. Observe que para $\phi = +1$ (fluido 1), $\mu = \mu_1$ e para $\phi = -1$ (fluido 2), $\mu = \mu_2$.

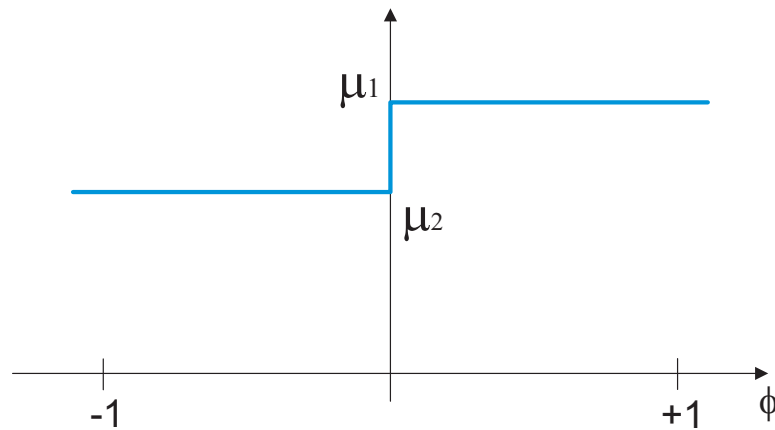


Figura 2.6: Função degrau

A função $\mu = \mu(\phi)$ apresentada na figura é na realidade uma combinação linear de 2 funções $\mu = \mu(\phi) = \mu_1 H_1(\phi) + \mu_2 H_2(\phi)$ onde $H_1(\phi)$ e $H_2(\phi)$ são mostradas na figura 2.7.

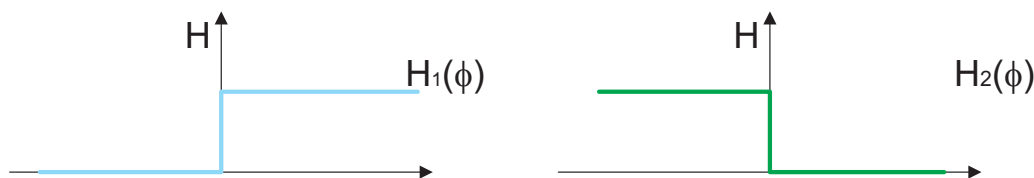


Figura 2.7: Função degrau

Este procedimento pode ser generalizado para k fluidos e as funções degrau H_k podem ser substituídas por aproximações contínuas das mesmas obtendo-se:

$$H_k^c = \frac{1.0}{1.0 + e^{\frac{\phi+2(k-2)}{\varepsilon}}} \quad (k = 1, \dots, nf) \quad (2-61)$$

As funções H_k^c representam aproximações contínuas de funções degraus. O parâmetro ε é um parâmetro de relaxação que suaviza a função degrau e nf é o número de fluidos envolvidos no bombeio. As funções usadas na interpolação das propriedades são dadas por:

$$\begin{aligned} H_{nf} &= H_{nf}^c \\ H_k &= H_{k-1}^c - H_k^c \quad (k = 2, \dots, nf - 1) \\ H_1 &= 1.0 - H_2^c \end{aligned} \quad (2-62)$$

As funções H definidas pela equação (2-62) definem a região onde um determinado fluido esta presente com isso é possível determinar as propriedades, μ_{ij} e ρ_{ij} para cada nó da malha de acordo com a equação 2-63.

$$\begin{aligned} \mu_{ij} &= \sum_{k=1}^{nf} \mu_k H_k \\ \rho_{ij} &= \sum_{k=1}^{nf} \rho_k H_k \end{aligned} \quad (2-63)$$

Onde μ_k e ρ_k as propriedades do fluido k.

2.7

Modelo Não-Newtoniano

As pastas de cimento utilizadas no processo de cimentação muitas vezes apresentam comportamento não-Newtoniano. Desta forma, deve-se contemplar este tipo de comportamento mecânico para que o modelo possa ser utilizado em situações reais.

Como o modelo apresentado é um modelo integrado na direção radial, não é necessário calcular o perfil de velocidade para cada comportamento não-Newtoniano. Desta forma, o procedimento de viscosidade equivalente proposto por Boryer (9) é bastante vantajoso. A ideia é resolver o escoamento como se fosse Newtoniano, mas com uma viscosidade equivalente $\bar{\mu}$ que leva a uma relação entre a vazão e o gradiente de pressão do fluido não-Newtoniano considerado. Boryer mostrou que para o caso de um escoamento entre placas (sistema de coordenadas cartesianas) a viscosidade equivalente e dada por:

$$\bar{\mu} = \frac{\tau_w^3}{3 \int_0^{\tau_w} \tau \dot{\gamma} d\tau} \quad (2-64)$$

Como $\dot{\gamma} = \frac{\tau}{\eta}$ tem-se que:

$$\bar{\mu} = \frac{\tau_w^3}{3 \int_0^{\tau_w} \frac{\tau^2}{\eta(\tau)} d\tau} \quad (2-65)$$

τ_w é a tensão de cisalhamento na parede e pode ser calculada em função do gradiente de pressão:

$$\tau_w = \frac{H}{2} \sqrt{\left[\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g \sin \alpha \right]^2 + \left[\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g \sin \left(\frac{x}{R_i} \right) \right]^2} \quad (2-66)$$

A equação (2-66) para o cálculo do τ_w depende do campo de pressão que por sua vez depende da viscosidade equivalente $\bar{\mu}$, tornando o problema não-linear. O procedimento iterativo mostrado na figura 2.8 foi adotado para a solução.

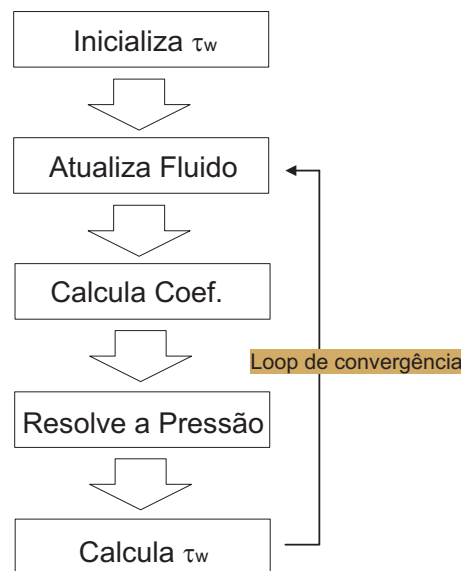


Figura 2.8: Fluxograma de solução para fluido não-Newtoniano

Observe que o modelo permite considerar qualquer comportamento de fluido não-Newtoniano generalizado, definindo pela função $\eta = \eta(\tau)$. Nos exemplos apresentados no próximo capítulo, foi utilizado o modelo de potência, descrito pela seguinte equação:

$$\eta = k\dot{\gamma}^{n-1} \quad (2-67)$$

k - índice de consistência
 n - índice de comportamento
 η - função viscosidade
 $\dot{\gamma}$ - taxa de deformação

A integral da equação 2-65 foi calculada utilizando a regra do Trapézio. O domínio de integração de $\tau = 0$ a $\tau = \tau_w$ foi dividido em 9 intervalos iguais.

Como mostra o procedimento, é necessário inicializar o campo de τ_w . Isto foi feito considerando $\tau = \eta(\dot{\gamma})\dot{\gamma}$, onde a taxa de cisalhamento característica foi definida como:

$$\dot{\gamma} = \frac{4Q_e}{\pi(R_0^2 - R_i^2)(R_0 - R_i)} \quad (2-68)$$