ANÁLISE DAS TEORIAS CLÁSSICAS DE PROPAGAÇÃO
DAS ONDAS RADIOELÉTRICAS EM PRESENÇA DA TERRA

por

Mauro Soares de Assis

Tese apresentada ao Departamento de Engenharia Elétrica
da Escola Graduada de Ciências e Engenharia da PUC/RJ
em julho de 1966, como parte dos requisitos para obten-
ção do título de Mestre em Ciências.

AGRADECIMENTOS

O autor deseja expressar seus agradecimentos às seguintes pessoas:

Prof. Luiz Carlos Bahiana, pela segura orientação e valiosas sugestões apresentadas durante a elaboração do trabalho;

Sra. Virginia Teixeira de Freitas, responsável pelo serviço de datilografia;

Srs. José Pereira Pires e Alberto Balassiano Pedreira, responsáveis pelos serviços de desenho;

Sr. José Tacashi Momonuki, responsável pelo serviço de impressão.

SUMÁRIO

As teorias clássicas da propagação das ondas eletromagnéticas em presença da terra apresentam soluções gerais que, em vista da complexidade matemática, não se aplicam diretamente aos casos práticos. Desta forma, partindo destas soluções, procura-se determinar aproximações que simplifiquem os cálculos de propagação. Entretanto, devido às condições supostas na obtenção das soluções aproximadas, estas apresentam uma região de validade restrita e a sua aplicação indevida pode acarretar erros inaceitáveis. Este fato, no entanto, não tira o mérito das soluções aproximadas, que, quando empregadas corretamente, fornecem resultados bastante satisfatórios em comparação com os experimentais.

O objetivo do presente trabalho é a análise das aproximações efetuadas na obtenção das expressões usualmente empregadas nos cálculos de propagação, onde se procurará evidenciar as limitações inerentes a cada caso particular. O efeito da ionosfera não será considerado, assim como as variações do índice de refração da atmosfera, responsáveis pelo mecanismo de tropedifusão.

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

1.1. HISTÓRICO

As equações fundamentais da teoria eletromagnética, enunciadas por Maxwell em 1864, demonstraram matematicamente a possibilidade da propagação das ondas. Esta conclusão, confirmada experimentalmente por Hertz (1887) e Marconi (1897), constitui o marco inicial da história da propagação.

Com base nas equações de Maxwell, desde o início do século XX o problema da propagação das ondas radioelétricas em presença da terra tem sido analisado por um grande número de cientistas. A análise histórica do desenvolvimento do problema mostra que as soluções apresentadas podem ser divididas em dois grupos :

(a) Soluções obtidas partindo da suposição que a propagação se faz em presença da terra considerada plana;

(b) Soluções obtidas supondo que a propagação se faz em presença de uma terra esférica.

Daqui em diante, por brevidade, estas soluções serão chamadas simplesmente de solução da terra plana e solução da terra esférica.

A solução da terra plana teve a sua primeira contribuição no trabalho apresentado por Sommerfeld (Ref.1), em 1909. Esta solução, deduzida para o caso de uma antena vertical situada sobre a superfície da terra, predizia certas variações que a experiência não comprovava. Independentemente, Weyl (Ref.2), em 1919, Sommerfeld (Ref.3), em 1926, Van der Pol e Niessen (Ref.4), em 1930 e Wise (Ref.5), em 1931, reestudaram o problema, chegando a resultados semelhantes à solução inicial de 1909, exceto pela diferença de um sinal. Entretanto, somente em 1935 é que Norton (Ref.6) mostrou que a discrepância entre as soluções era a escolha incorreta do sinal de uma raiz quadrada no primeiro trabalho de Sommerfeld. Com isto, o problema ficou totalmente resolvido, restando apenas ser colocado sob uma forma prática para o emprego na engenharia. Este aspecto foi estudado separadamente por Burrows (Ref.7) e Norton (Ref.8), resultando em um conjunto de curvas que permitem o cálculo imediato da intensidade de campo.

O problema da terra esférica, para o caso particular da condutividade perfeita, foi resolvido por Watson (Ref.9) em 1918-1919. A solução geral para o caso da condutividade finita foi apresentada por Van der Pol e Bremmer (Ref.10), em 1937. A seguir,

varios autores desenvolveram a soluçao de Van der Pol e Bremner , (Refs.11 a 16) e atualmente os resultados encontram-se sob a forma gráfica (curvas e nomogramas), o que facilita sobremodo os cálculos de propagação.

1.2. ESCOPO DO TRABALHO

O problema que este trabalho se propõe estudar consiste em uma análise criteriosa das expressões usualmente empregadas nos cálculos de propagação. Estas expressões são, em sua maioria, formas aproximadas das soluções gerais, e obtidas a partir de parâmetros que dependam essencialmente da situação particular de cada caso (distância entre os pontos de comunicação, altura das antenas, frequência de operação e outros). Desta forma, as expressões práticas apresentam, normalmente, uma região de validade restrita cujos limites devem ser bem conhecidos para que os resultados calculados mereçam confiança.

Embora o título do trabalho apresente um caráter bastante geral, não consideraremos o efeito da ionosfera, assim como as variações aleatórias do índice de refração da atmosfera, responsáveis pelo mecanismo da tropodifusão. Isto torna os resultados obtidos aplicáveis diretamente à faixa de frequências médias (550 a 600 kHz) e a frequências acima de 30 MHz. Por outro lado, a apli

cação das teorias clássicas à faixa de frequências médias é por demais conhecida. Existem curvas publicadas (Ref.17) que fornecem diretamente o valor da intensidade de campo em função da distância, frequência e natureza do solo. Desta forma, o estudo realizado neste trabalho será dirigido para frequências acima de 30 MHz, onde as aproximações normalmente utilizadas são sujeitas a várias restrições, merecendo uma análise mais detalhada.

O efeito da não homogeneidade da atmosfera será considerado para o caso clássico da estratificação. Portanto, usaremos sempre o raio equivalente da terra (Ref.18) no lugar do raio real.

1.3. ROTEIRO ADOPTADO

Inicialmente (Cap.II) apresentaremos um resumo das soluções clássicas para a terra plana e para a terra esférica, bem como uma descrição sucinta da teoria da difração de Fresnel.

No capítulo III analisaremos as aproximações da solução da terra plana e estabeleceremos, com base em resultados da teoria da difração de Fresnel, um critério para limitação da solução ótica. Será visto também, de modo aproximado, um método para avaliar o efeito da onda de superfície.

No capítulo IV estudaremos primeiramente a solução ótica para a terra esférica onde, por analogia com a solução da terra plana, definiremos o mesmo critério de limitação. A seguir, analisaremos as aproximações aplicáveis à solução geral para a terra esférica, ou seja, a série dos resíduos.

↘ O efeito do relêvo do terreno será apresentado no capítulo V, onde introduziremos o conceito de terra equivalente, que permite aplicar aos casos práticos a teoria desenvolvida nos capítulos anteriores.

Finalmente, no capítulo VI será feito um retrospecto dos resultados obtidos, evidenciando os pontos de maior interesse.

Com o intuito de facilitar a explanação, alguns resultados utilizados no texto e que apresentam importância para a análise realizada, são demonstrados em apêndices no final do trabalho.

CAPÍTULO II

SOLUÇÕES CLÁSSICAS

Apresentaremos neste capítulo um sumário das soluções clássicas do problema da propagação das ondas em presença da terra. Nos capítulos subsequentes, a partir destas soluções, analisaremos as expressões aproximadas usualmente empregadas na prática.

2.1. PROPAGACÃO SOBRE A TERRA PLANA

O problema da propagação das ondas sobre a terra plana, após ter sido analisado por diversos autores, teve a sua síntese final apresentada por Norton nos anos de 1936 e 1937 (Ref.8). A solução de Norton, de interpretação física relativamente simples, mostra que o campo total devido a um dipolo elétrico (vertical ou horizontal), situado a uma determinada altura acima da terra, é dado pela composição de uma onda espacial e uma onda de superfície.

A onda espacial consiste de uma onda direta e outra re-

fletida, como mostra a figura 2.1, e é, em última análise, a solução que obteríamos caso aplicássemos ao problema o tratamento da ótica geométrica.

A onda de superfície é, no entanto, mais complexa, sendo consequência da condutividade finita da terra. Esta onda se comporta como que guiada ao longo da fronteira entre o ar e a terra e está diretamente ligada ao chamado fator de atenuação da onda de superfície, o qual depende da distância, frequência e natureza do solo.

Segundo os resultados de Norton, o campo elétrico sobre a terra plana é dado por,

$$(2.1) \quad E = E_0 \left[1 + R_F e^{-jk_1 \Delta} + (1 - R_F) F_A e^{-jk_1 \Delta} \right]$$

$$E_0 = \frac{\sqrt{30 P_T G_T}}{d} \quad (\text{campo no espaço livre})$$

G_T - ganho de potência da antena transmissora na direção considerada.

$$\Delta = R_1 + R_2 - R \approx \frac{2h_1 h_2}{d} \quad (d \gg h_{1,2})$$

R_F - coeficiente de reflexão de Fresnel para ondas planas.

$$R_F = \begin{cases} \frac{k_2^2 \operatorname{sen} \alpha - k_1 \sqrt{k_2^2 - k_1^2 \cos^2 \alpha}}{k_2 \operatorname{sen} \alpha + k_1 \sqrt{k_2^2 - k_1^2 \cos^2 \alpha}} & (\text{pol. vertical}) \\ \frac{k_1 \operatorname{sen} \alpha - \sqrt{k_2^2 - k_1^2 \cos^2 \alpha}}{k_1 \operatorname{sen} \alpha + \sqrt{k_2^2 - k_1^2 \cos^2 \alpha}} & (\text{pol. horizontal}) \end{cases}$$

$$F_A = [1 - j\sqrt{v} e^{-v} \operatorname{erfc}(j\sqrt{v})] \quad (\text{fator de atenuação})$$

$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-v^2} dv$$

$$v = \frac{4p}{(1 - R_F)^2}$$

$$p = \begin{cases} -j \frac{k_1^3 d}{2k_2^2} \left[1 - \frac{k_1^2}{k_2^2} \cos^2 \alpha \right] & (\text{pol. vertical}) \\ -j \frac{k_2^2 d}{2k_1} \left[1 - \frac{k_1^2}{k_2^2} \cos^2 \alpha \right] & (\text{pol. horizontal}) \end{cases}$$

$$k_1 = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$$

$$k_2 = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_1}$$

$$\epsilon' = \epsilon_0 (\epsilon_r - j60\sigma\lambda)$$

ω - frequência angular

λ - comprimento de onda

μ_0 - permeabilidade magnética do vácuo

ϵ_0 - permissividade elétrica do vácuo

$\epsilon_r = \epsilon/\epsilon_0$ = constante dielétrica relativa do solo

σ - condutividade elétrica do solo

e os demais parâmetros são mostrados gráficamente na figura 2.2.

Fig.2.1 - Componentes da onda especial

Fig.2.2 - Parâmetros da solução de Norton

Em frequências acima de 30 MHz o parâmetro p e consequentemente o parâmetro v possuem valores elevados. Neste caso é interessante exprimir o fator de atenuação F_A através da série,

$$F_A = - \frac{1}{2v} - \frac{1.3}{(2v)^2} - \frac{1.3.5.}{(2v)^3} - \frac{1.3.5.7}{(2v)^4} - \dots$$

Esta expressão para F_A é obtida através da expansão em série da função $\operatorname{erfc}(x)$ para valores de x tais que

$$x \gg 1$$

e que pode ser encontrado na referência 19.

2.2. PROPAGACÃO SOBRE A TERRA ESFÉRICA

A propagação das ondas sobre a terra esférica foi estudada primeiramente por Watson (Ref.9), para o caso particular da condutividade perfeita. Baseados na solução de Watson, vários autores desenvolveram o assunto, sobressaindo entre os diversos trabalhos apresentados os de Van der Pol e Bremner (Refs.10,11 e 12).

A solução geral do problema da propagação das ondas sobre a terra esférica é dada por uma série que converge muito len-

tamenta, não se prestando para cálculos práticos. Entretanto, por aplicação da transformação de Watson (Refs.9 e 10), passa-se a uma integral (integral de Watson) que apresenta duas soluções possíveis de serem empregadas praticamente.

A solução mais rigorosa da integral de Watson nos leva à série dos resíduos (Ref.10), solução que é válida, tanto na região de visibilidade como na região de sombra do transmissor. No entanto, sob o ponto de vista de cálculo, esta solução aplica-se melhor sobre ou além do horizonte do transmissor, onde, no máximo são necessários dois a três termos da série.

Em função da série dos resíduos, o campo elétrico é dado por

$$(2.2) \quad E = 2E_0 \sqrt{2\pi X} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{e^{-j\tau_s X}}{2\tau_s - 1/\delta^2} f_s(h_1) f_s(h_2)$$

onde

E_0 - campo no espaço livre

$$X = (k_1 a_e)^{1/3} \frac{d}{a_e}$$

$a_e = ka$ (raio equivalente da terra)

$$\delta = \begin{cases} -j \frac{k_2^2/k_1^2}{(k_1 a)^{1/3} \sqrt{k_2^2/k_1^2 - 1}} & (\text{pol. vertical}) \\ -j \frac{1}{(k_1 a)^{1/3} \sqrt{k_2^2/k_1^2 - 1}} & (\text{pol. horizontal}) \end{cases}$$

$$f_s(h_{1,2}) = \frac{h_{v_s}^{(2)}(k_1 r)}{h_{v_s}^{(2)}(k_1 a_e)}$$

$$r = a_e + h_{1,2}$$

$$v_s = k_1 a_e + (k_1 a_e)^{1/3} \tau_s$$

$h_{1,2}$ - alturas das antenas acima da terra

$h_n^{(2)}$ - função de Hankel esférica de índice n e ordem 2,

e os números τ_s são soluções da equação

$$\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \log\{x h_{v_s}^{(2)}(x)\} \Big|_{x=k_1 a_e} - \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \log\{x h_{v_s}^{(1)}(x)\} \Big|_{x=k_2 a_e} = 0$$

que, desenvolvida em funções cilíndricas, toma a forma

$$e^{-j\pi/3} \frac{H_{2/3}^{(2)} \left\{ \frac{1}{3} (-2\tau_s)^{3/2} \right\}}{H_{1/3}^{(2)} \left\{ \frac{1}{3} (-2\tau_s)^{3/2} \right\}} = - \frac{1}{\delta \sqrt{-2\tau_s}}$$

onde

$H_n^{(2)}(x)$ - função de Hankel cilíndrica de índice n e ordem 2.

Em frequências acima de 30 MHz, tem-se sempre $\delta \ll 1$, e é possível utilizar a seguinte série para a determinação dos números τ_s

$$\tau_s = \tau_{s,0} - \delta - \frac{2}{3} \tau_{s,0} \delta^3 + \frac{1}{2} \delta^4 \dots$$

sendo os números $\tau_{s,0}$ raízes da equação

$$J_{1/3}(x) + J_{-1/3}(x) = 0 \quad ; \quad x = \frac{1}{3} (-2\tau_s)^{3/2}$$

onde

$J_n(x)$ - função de Bessel cilíndrica de 1ª espécie.

A outra solução possível da integral de Watson é a aproximação da ótica geométrica (Ref.11). Esta solução somente é válida na região de visibilidade do transmissor, para alturas não nulas das antenas. Segundo a aproximação ótica, o campo elétrico é

dado por,

$$(2.3) \quad E = E_0 \left[1 + DR_E e^{-jk_1 \Delta} \right]$$

onde

$$\Delta = R_1 + R_2 - R$$

R_E - coeficiente da reflexão esférico.

No caso de polarização vertical,

$$R_E = \frac{-\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \{x h_n^{(1)}(x)\}_{x=k_1 a_e} + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \{x h_n^{(1)}(x)\}_{x=k_2 a_e}}{\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \{x h_n^{(2)}(x)\}_{x=k_1 a_e} - \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \{x h_n^{(1)}(x)\}_{x=k_2 a_e}}$$

$$n = k_1 a_e \sin \tau$$

Para polarização horizontal, o fator $1/x$ deve ser substituído por x

$$D = \frac{a_e (R_1 + R_2) \sqrt{\sin \tau \cos \tau}}{\sqrt{(a_e + h_1)(a_e + h_2) [R_1 (a_e + h_2) \cos \tau_2 + R_2 (a_e + h_1) \cos \tau_1]}}$$

(coeficiente de divergência)

As demais parâmetros são ilustrados na figura 2.3.

As únicas discrepâncias entre esta solução e a onda espacial da terra plana se prendem à presença do coeficiente de divergência (D) e à forma do coeficiente de reflexão R_g . Entretanto, caso seja satisfeita a condição

$$(2.4) \quad \text{tg}^3 \alpha \gg \frac{1}{k_1 a_e}$$

é possível substituir o coeficiente de reflexão esférico pelo coeficiente de reflexão de Fresnel.

Para o coeficiente de divergência, utilizando-se as aproximações

$$R_1 + R_2 \approx d; \quad a_e + h_{1,2} \approx a_e; \quad \cos \tau \approx \sin \alpha$$

$$\sin \tau \approx 1 \quad \cos \tau_{1,2} \approx \frac{h_{1,2}^e}{d_{1,2}}; \quad h_{1,2} \approx h_{1,2}^e + \frac{d_{1,2}^2}{2a_e}$$

é possível expressá-lo por

$$D \approx \left[1 + \frac{2d_1 d_2}{a_e (h_1^e + h_2^e)} \right]^{-1/2}$$

Para o fator A , as mesmas aproximações acima nos levam a

Fig.2.3 - Parâmetros da solução ótica para a terra esférica

$$A = \frac{2 h_1^e h_2^e}{d}$$

2.3. DIFRAÇÃO DE FRESNEL

A teoria da difração de Fresnel é aplicada quando a onda radiotelétrica emitida pela antena transmissora encontra um obstáculo do tipo "gume de faca", como ilustra a figura 2.4. O problema consiste em determinar a intensidade de campo no ponto R que pode assumir qualquer posição sobre o plano AB. A solução apresentada tem por base o princípio de Huygens, cuja aplicação supõe que cada elemento de frente de onda atua como uma fonte de perturbação, produzindo ondas secundárias, que se combinam de forma a produzir uma nova frente de onda. Esta análise supõe um obstáculo perfeitamente absorvente, cuja dimensão, no sentido perpendicular ao de propagação, seja grande em comparação ao comprimento da onda utilizado.

De acordo com esta teoria o campo elétrico em um ponto qualquer do plano AB é dado por

$$(2.5) \quad E = \frac{\sqrt{2}}{2} E_0 \left[\left\{ \frac{1}{2} - C(v_0) \right\} - j \left\{ \frac{1}{2} - S(v_0) \right\} \right]$$

Frente de onda e-
mitida pelo trans-
missor.

Fig.2.4 - Difração em um obstáculo do tipo "gume de faca"

onde

$$C(x) = \int_0^x \cos \frac{\pi x^2}{2} dx \quad ; \quad S(x) = \int_0^x \sin \frac{\pi x^2}{2} dx$$

são as denominadas integrais de Fresnel e

$$v_0 = \sqrt{\frac{2Hd}{\lambda d_1 d_2}}$$

O parâmetro v_0 é normalmente expresso em função do raio da 1ª zona de Fresnel. Afin de chegar a uma definição perfeita das zonas de Fresnel, é preciso introduzir primeiramente os elipsóides de Fresnel.

Define-se como elipsóides de Fresnel os lugares geométricos dos pontos cuja soma das distâncias às antenas transmissora e receptora é constante e excede a distância em visada livre de um número inteiro de meios comprimentos de onda.

As diversas zonas de Fresnel correspondem às regiões limitadas por dois elipsóides consecutivos. Conforme será visto posteriormente, é de particular interesse nos cálculos de propagação a 1ª zona de Fresnel, limitada pela linha de visada e o primeiro elipsóide.

Pela definição acima, demonstra-se facilmente que o

o raio da 1ª zona de Fresnel é dado por

$$R = \sqrt{\frac{\lambda d_1 d_2}{d}}$$

logo, o parâmetro v_0 pode ser expresso por,

$$v_0 = \sqrt{\frac{2H}{R}}$$

A figura 2.5 apresenta um gráfico de (2.5) em função de H/R . Observa-se que para $H > 0,6R$ (mais exatamente para $H > 0,56R$) o campo E pode ser aproximado por seu valor no espaço livre com um erro menor do que 1,5 dB, enquanto que para $H < 0,6R$ o campo não mais oscila decrescendo rapidamente, caracterizando o efeito da difração introduzida pelo obstáculo. Com base neste comportamento, definiremos a situação para a qual $H = 0,6R$ como o início da zona de difração. Esta definição será posteriormente aplicada ao problema da propagação das ondas em presença da terra, permitindo enunciar um critério de separação entre a zona de interferência e a zona de difração.

Fig.2.5 - Perda por difração em obstáculo "gume de faca"

CAPÍTULO III

PROPAGAÇÃO SOBRE A TERRA PLANA

Embora a suposição de uma terra plana pareça, em uma primeira inspeção, uma aproximação bastante grosseira, os resultados com ela obtidos possuem uma substancial importância pelos dois aspectos seguintes:

- A interpretação física da solução da terra plana é simples e permite extrapolar conceitos para o caso complexo da terra esférica;
- Na prática, em muitos casos, utiliza-se para os cálculos da propagação uma terra plana equivalente (Ref.2.3).

Tais considerações justificam que neste capítulo seja feita uma análise das aproximações aplicadas à solução da terra plana.

3.1. ZONA DE INTERFERÊNCIA E ZONA DE DIFRAÇÃO

A zona de interferência é definida pela região na qual

a superposição entre a onda direta e a onda refletida provoca uma oscilação do campo elétrico em torno de seu valor no espaço livre.

A zona de difração é caracterizada pelo fato da intensidade do campo elétrico estar sempre abaixo do seu valor no espaço livre, decrescendo monotonicamente à medida que o ponto de observação se afasta do transmissor.

Para facilitar a análise da variação do campo, não consideraremos inicialmente em (2.1) o efeito da onda da superfície. Desta forma, podemos escrever,

$$(3.1) \quad E = E_0 \left[1 + R_T e^{-j \frac{2\pi h_1 h_2}{\lambda d}} \right]$$

Supondo-se fixados os valores de h_1 e h_2 observa-se que à medida que varia a distância, o campo oscila em torno de seu valor no espaço livre, fato que caracteriza a zona de interferência. O valor máximo desta variação é dado por,

$$|E| = E_0 [1 + |R_T|]$$

A partir de um determinado ponto, o campo não mais oscila e passa a decrescer monotonicamente com a distância, indicando a penetração na zona de difração.

Este comportamento do campo em função da distância pode

ser visualizado gráficamente na figura 3.1.

Nas ligações radioelétricas usuais, o ângulo de incidência é muito pequeno, no caso da terra ser perfeitamente lisa (relevo extremamente suave), é perfeitamente lícito considerar $R_F = -1$. Esta suposição facilita substancialmente a definição de um critério que separe a zona de interferência da zona de difração.

Com $R_F = -1$, escreve-se para (3.1),

$$(3.2) \quad E = 2E_0 \sin \frac{2\pi h_1 h_2}{\lambda d}$$

De acordo com a figura 3.2,

$$(3.3) \quad R^2 = \frac{4h_1 h_2 d_1 d_2}{d^2}$$

e pela definição do raio da 1ª zona de Fresnel,

$$(3.4) \quad R^2 = \frac{\lambda d_1 d_2}{d}$$

Substituindo (3.3) e (3.4) em (3.2), tem-se

$$(3.5) \quad \frac{E}{E_0} = 2 \sin \frac{\pi}{2} \left(\frac{H}{R} \right)^2$$

Na apresentação da teoria da difração de Fresnel (Cap. II) definimos como início da zona de difração a situação em que

Fig.3.1 - Zona de interferência e zona de difração

Fig.3.2 - Definição do parâmetro H

$E = E_0$. Aplicando esta definição a (3.5) vem:

Para $E = E_0$,

$$2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} \left(\frac{H}{R} \right)^2 = 1$$

ou seja,

$$\frac{\pi}{2} \left(\frac{H}{R} \right)^2 = \frac{\pi}{6}$$

e portanto,

$$(3.6) \quad H = 0,58R$$

Comparando (3.6) com a mesma situação na figura 2.4 verificamos que os dois resultados são praticamente idênticos. Consequentemente, podemos enunciar o seguinte critério de separação entre a zona de interferência e a zona de difração:

Quando existe folga de 0,6 da 1ª zona de Fresnel em todo o percurso entre o transmissor e o receptor, diz-se que o receptor encontra-se na zona de interferência do transmissor. Caso contrário, ou seja, quando existe alguma obstrução, diz-se que o receptor encontra-se na zona de difração do transmissor.

O parâmetro H (fig. 3.2) que caracteriza a folga ou a obstrução foi determinado sobre o ponto de reflexão. Este procedimento é justificado da seguinte maneira:

Suponhamos para facilidade de explanação que a distância entre o transmissor e o receptor seja mantida constante. Diminuindo-se as alturas das antenas reduz-se, consequentemente, a folga do percurso. Eventualmente haverá uma situação em que a elipse que limita 0,6 da 1ª zona de Fresnel tangencia a superfície da terra. Lembrando que a tangente a uma elipse faz, no ponto de tangência, ângulos iguais com os raios vetores que ligam este ponto ao foco, conclui-se que este é o ponto de reflexão, o que justifica o procedimento acima.

Deve ser ressaltado também que para o enunciado do critério, admite-se $\overline{CD} = H$ aproximadamente perpendicular a $\overline{TR}$, condição que, para $h_1 \neq h_2$, somente é válida se $d \gg h_{1,2}$. Como nos casos práticos isto sempre acontece, esta suposição não apresenta problema.

3.2. INFLUÊNCIA DA ONDA DE SUPERFÍCIE

Na zona de difração, é válida a aproximação

$$\sin \frac{2\pi h_1 h_2}{\lambda d} = \frac{2\pi h_1 h_2}{\lambda d}$$

Consequentemente, podemos expressar (3.2) na forma,

$$(3.7) \quad \frac{E}{E_0} = \frac{4\pi h_1 h_2}{\lambda d}$$

Para frequências acima de 30 MHz, o parâmetro γ do fator de atenuação da terra plana (F_A) satisfaz a condição.

$$\gamma \gg 1$$

No desenvolvimento de F_A em série, de acordo com a condição acima, é suficiente considerar somente o 1º termo; portanto

$$F_A = \frac{1}{2\gamma} = \frac{(1 - R_F)^2}{8p}$$

Definindo

$$q = \begin{cases} \frac{k_1^2}{k_2^2} \sqrt{\frac{k_2^2}{k_1^2} - \cos^2 \alpha} & \text{(polarização vertical)} \\ \sqrt{\frac{k_2^2}{k_1^2} - \cos^2 \alpha} & \text{(polarização horizontal)} \end{cases}$$

teremos

$$(3.8) \quad F_A = \frac{j}{k_1 d q^2} \quad (q \gg \sin \alpha)$$

Substituindo (3.8) em (2.1) e admitindo as mesmas aproximações usadas para a obtenção de (3.7),

$$(3.9) \quad \frac{E}{E_0} = \left| \frac{4\pi h_1' h_2'}{\lambda d} \right|$$

onde

$$h_{1,2}' = h_{1,2} + jh_0$$

$$h_0 = \frac{\lambda}{2\pi q} \quad (\text{altura mínima efetiva})$$

A equação (3.9), se bem que aproximada, permite de modo satisfatório analisar a influência da onda de superfície, pois dependendo do valor de $\underline{h_0}$ em relação a $\underline{h_1}$ e $\underline{h_2}$ verifica-se facilmente quando se deve levar em conta o efeito da onda de superfície.

A figura 3.3 apresenta um gráfico de $\underline{h_0}$ para diversos tipos de solo. Através desta figura concluímos que a onda de superfície só apresenta interesse para o campo polarizado verticalmente e propagando-se sobre a superfície do mar.

Fig.3.3 - Altura mínima efectiva (h_0)

CAPÍTULO IV

PROPAGACÃO SOBRE A TERRA ESFÉRICA

A série dos resíduos, solução rigorosa do problema da propagação das ondas sobre a terra esférica, não é prática para aplicação na região de visibilidade do transmissor. Nesta região é comum empregar-se a aproximação da ótica geométrica, o que facilita substancialmente os cálculos. Entretanto, próximo ao horizonte do transmissor, a solução ótica não é válida. O objetivo principal deste capítulo é apresentar um critério que permita definir aproximações aplicáveis à série dos resíduos, evidenciando as limitações inerentes a cada caso.

4.1. LIMITE DE UTILIZAÇÃO DA SOLUÇÃO ÓTICA

No capítulo anterior definimos de uma forma relativamente simples a separação entre a zona de interferência e a zona de difração. Considerando que o aspecto matemático da solução ótica

caracteriza-perfeitamente a zona de interferência, propomos o seguinte critério:

A solução ótica é aplicável quando o receptor situa-se na região de interferência do transmissor, ou seja, quando existe folga de pelo menos 0,6 da 1ª zona de Fresnel em todo o percurso entre o transmissor e o receptor.

Infelizmente a geometria do problema da terra esférica não permite um desenvolvimento matemático simples para justificar o critério acima, tornando necessária a analogia com a solução da terra plana. Como na seção 3.1 todo o estudo foi realizado a partir da onda espacial, e, portanto, de uma solução cujo aspecto é também ótico, é interessante analisar alguns pontos para evitar dúvidas sobre o critério proposto.

A aproximação da ótica geométrica para a terra esférica possui um ângulo mínimo de incidência definido pela condição (2.4). Tal fato não acontece com a solução da terra plana. Para ângulos menores do que o definido por (2.4), seria necessário empregar o coeficiente de reflexão esférico (2.3), o que tornaria a solução ótica sem interesse prático. A consulta de várias curvas de intensidade de campo, publicadas nas referências 20, 21 e 22, para várias frequências e alturas de antenas, mostrou que quando existe folga de 0,6 da 1ª zona de Fresnel, embora a condição (2.4) não seja sempre satisfeita, a divergência entre a solução ótica e a

solução da difração é perfeitamente tolerável. Esta conclusão pode ser visualizada para o caso apresentado na figura 4.1 que mostra um gráfico do campo elétrico em função da distância, calculado a partir da solução ótica e da série dos resíduos. Observa-se que somente a partir do ponto $E = E_0$ antes do 19 máximo, a divergência entre a solução ótica e a solução rigorosa representada pela série dos resíduos começa a se tornar acentuada.

De acordo com a figura 4.2, tem-se para o ponto de separação entre as soluções

$$d = 49 \text{ Km}$$

$$h_1^a = h_2^a = h_{1,2} = \frac{d^2}{8a} = 53 \text{ m}$$

enquanto que

$$K = 0,6R = 55 \text{ m}$$

Considerando a distância de 49 Km, uma aproximação de 2 m é bastante satisfatória.

Por outro lado,

$$\text{tg}^3 \alpha \approx 10^{-8} ; \quad \frac{1}{ka} \approx 1,75 \times 10^{-8}$$

o que justifica a pequena divergência existente entre as soluções para $E = E_0$.

$$d = 49 \text{ Km}$$

$$h_1 = h_2 = 100 \text{ m}$$

$$H = h_1^e = h_2^e$$

Fig.4.2 - Geometria para aplicação do critério de limitação da solução ótica.

4.2. SÉRIE DOS RESÍDUOS

Uma vez estabelecido o limite de aplicação da solução ôtica, resta analisar o cálculo do campo na região de difração. Para pontos situados além do horizonte do transmissor, este cálculo não apresenta problema, pois no máximo são necessários 2 termos da série dos resíduos. Entretanto, na região compreendida entre o limite de aplicação da solução ôtica e o horizonte do transmissor o cálculo é laborioso devido ao número de termos que devem ser considerados na série (2 a 5 termos).

O gráfico da figura 4.1 mostra os termos da série dos resíduos que são utilizados para o cálculo do campo para pontos situados desde bem além do horizonte até a zona de interferência. É interessante notar que este gráfico demonstra a generalidade da série dos resíduos para o cálculo do campo em qualquer região. No entanto, o número de termos utilizados na zona de interferência e limina qualquer possibilidade de aplicação prática.

Dependendo da relação as alturas das antenas e o comprimento de onda utilizado, é possível (Apêndice II) introduzir simplificações para os fatores de altura e, consequentemente, para a série dos resíduos. À análise destas aproximações passaremos a seguir.

4.21. - Antenas Baixas

Matematicamente a antena é considerada baixa quando satisfaz a relação (Apêndice II)

$$(4.1) \quad h < 0,15 a_e^{1/3} \lambda^{2/3}$$

Neste caso o fator de altura é dado por

$$(4.2) \quad \hat{r}_h(h) = 1 + \frac{k_1 h}{\delta(k_1 a)^{1/3}}$$

A expressão (4.2) independe dos números τ_s . Portanto, quando a condição (4.1) for satisfeita para ambas as antenas, o fator de altura pode ser colocado em evidência na série dos resíduos.

Definindo como fator de sombra (F_s) a expressão

$$F_s = \frac{\sqrt{2\pi X} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-j\tau_s X}}{2\tau_s - 1/\delta^2}}{F_A}$$

onde F_A é o fator de atenuação da terra plana, e substituindo-o juntamente com (4.2) em (2.2),

$$(4.3) \quad E = 2E_0 F_A F_S [1 + jh_1/h_0] [1 + jh_2/h_0]$$

Simplificando (4.3) através das expressões de F_A e h_0 (cap.III), teremos,

$$(4.4) \quad |E| = \left| \frac{4\pi h_1' h_2'}{\lambda d} \right| E_0 |F_S|$$

Observamos que a expressão (4.4) é a solução da terra plana por um fator (F_S) que leva em conta a curvatura da terra. Em consequência, a aplicação de (4.4), tal como (3.9), é limitada a pontos situados na zona de difração.

Para frequências acima de 30 MHz com polarização horizontal, o parâmetro δ é muito menor que a unidade, sendo sempre satisfeita a condição

$$(4.5) \quad 2\tau_s \ll 1/\delta^2$$

Portanto, podemos escrever que

$$\tau_s = \tau_{s,0}$$

$$F_S = \frac{\delta^2 \sqrt{2\pi X}}{F_A} \sum_{s=0}^{\infty} e^{-j\tau_{s,0} X}$$

Considerando que na zona de difração o fator de atenuação F_A pode ser expresso por

$$F_A = \frac{j}{k_1 d q^2} = -j \frac{(k_1 a)^{2/3} \delta^2}{k_1 d}$$

teremos

$$(4.6) \quad |F_S| = \sqrt{2\pi} X^{3/2} \left| \sum_{z=0}^{\infty} e^{-j r_{s,0} X} \right|$$

A expressão (4.6) é independente das constantes do terreno. Desta forma, é possível traçar uma curva universal para o fator de sombra no caso de polarização horizontal. Para a polarização vertical, isto somente acontece para propagação sobre a terra, pois sobre a água do mar, entre 30 e 300 MHz, o parâmetro δ não satisfaz a condição (4.5). Maiores detalhes e curvas ilustrativas podem ser encontrados nas referências 14, 22 e 23.

4.22. - Receptor situado sobre ou além do horizonte do Transmissor

Neste caso, a solução normalmente empregada na prática é a desenvolvida por Bullington. Esta solução, descrita no Apêndice III, encontra-se sob a forma de nomograma, o que facilita subs

constatamos o seu emprego. Sob o ponto de vista de limitação, em
bora seja válida para qualquer altura de antena, é restrita a
pontos situados sobre ou além do horizonte do transmissor, pois u
tiliza somente o primeiro termo da série dos resíduos. Por esta
razão, sobre e logo após o horizonte do transmissor esta solução
acarreta um erro de ± 3 dB (região onde são necessários 2 termos
da série dos resíduos).

Para pontos situados muito além do horizonte do trans -
missor utiliza-se a teoria da difusão troposférica (Ref.24) qua
por suas características foge ao escopo do presente trabalho.

4.23. - Receptor na região de visibilidade a uma altura qualquer

Nesta situação são necessários mais de 2 termos da sé -
rie dos resíduos para o cálculo do campo (Fig.4.1). Consequente -
mente, não é possível separar os efeitos das alturas das antenas
e da distância como nos dois casos anteriores e, portanto, a de -
terminação do campo é extremamente mais complexa.

Existem publicados (Refs.20 e 21) gráficos de intensida
de de campo em função da distância para diversas alturas das ante
nas e várias frequências que, entretanto, não cobrem tôdas as pos
sibilidades.

Em uma situação qualquer, de acordo com a precisão desejada, podem ser escolhidas uma das alternativas seguintes:

- (a) Emprega-se a série dos resíduos;
- (b) Emprega-se a solução gráfica descrita a seguir.

I - Calcula-se alguns valores de intensidade para as alturas das antenas e frequências do caso em questão, porém utilizando distâncias tais que a solução ótica possa ser empregada. .

II - O mesmo procedimento para distâncias além do horizonte do transmissor, usando-se a solução de Bullington.

III- Traça-se um gráfico da intensidade de campo em função da distância para os resultados obtidos nos itens I e II. A través de uma interpolação (figura 4.2), determina-se o valor do campo na distância desejada.

Fig.4.3 - Método gráfico para determinação da intensidade de campo.

CAPÍTULO V

EFEITO DO RELÊVO DO TERRENO

A análise realizada nos capítulos anteriores baseou-se em uma suposição que na maioria dos casos práticos não se realiza - supõe que a terra seja perfeitamente lisa. Desta forma, embora este trabalho possua um caráter teórico, o autor julgou interessante discutir os resultados obtidos considerando o relêvo do terreno.

O efeito do relêvo do terreno é normalmente traduzido a través do traçado de uma terra equivalente, a qual depende da situação particular do problema. Por esta razão, este problema será analisado separadamente para os casos:

- (a) Receptor situado na região de interferência do transmissor;
- (b) Receptor situado na região de difração do transmissor .

5.1. REGIÃO DE INTERFERÊNCIA

Conforme descrito anteriormente (Caps. III e IV) a região de interferência do transmissor é limitada a percursos que admitam uma folga maior ou igual a 0,6 da 1ª zona de Fresnel, o que permite aplicar a solução ótica para o cálculo da intensidade de campo no receptor. Uma vez que esta condição seja satisfeita, o problema seguinte é analisar o coeficiente de reflexão do solo para avaliar entre que limites oscilará o campo em torno de seu valor no espaço livre. Esta análise é feita normalmente através do critério de Rayleigh (Ref.23) e nos leva a dois casos possíveis :

- (a) Reflexão especular - caso em que se utiliza nos cálculos o coeficiente de reflexão de Fresnel;
- (b) Reflexão difusa - caso em que é possível demonstrar que o módulo do coeficiente de reflexão é menor que 0,2 (Ref.25). Nesta situação o raio refletido é normalmente desprezado em relação ao raio direto e o campo pode ser aproximado por seu valor no espaço livre.

A aplicação do critério de Rayleigh é condicionada ao valor da variação média do relevo do terreno nas vizinhanças do ponto de reflexão. Considerando que o cálculo do ponto de reflexão é função das alturas das antenas, torna-se necessário o traçado de uma terra equivalente que serve como nível de referência.

5.1. REGIÃO DE INTERFERÊNCIA

Conforme descrito anteriormente (Caps. III e IV) a região de interferência do transmissor é limitada a percursos que admitam uma folga maior ou igual a 0,6 da 1ª zona de Fresnel, o que permite aplicar a solução ótica para o cálculo da intensidade de campo no receptor. Uma vez que esta condição seja satisfeita, o problema seguinte é analisar o coeficiente de reflexão do solo para avaliar entre que limites oscilará o campo em torno de seu valor no espaço livre. Esta análise é feita normalmente através do critério de Rayleigh (Ref.23) e nos leva a dois casos possíveis :

- (a) Reflexão especular - caso em que se utiliza nos cálculos o coeficiente de reflexão de Fresnel;
- (b) Reflexão difusa - caso em que é possível demonstrar que o módulo do coeficiente de reflexão é menor que 0,2 (Ref.25). Nesta situação o raio refletido é normalmente desprezado em relação ao raio direto e o campo pode ser aproximado por seu valor no espaço livre.

A aplicação do critério de Rayleigh é condicionada ao valor da variação média do relevo do terreno nas vizinhanças do ponto de reflexão. Considerando que o cálculo do ponto de reflexão é função das alturas das antenas, torna-se necessário o traçado de uma terra equivalente que serve como nível de referência.

Um método bastante elaborado para o traçado da terra equivalente foi publicado pelo National Bureau of Standards (Ref. 34). Entretanto, a quantidade de cálculo envolvida torna-o de difícil aplicação prática, principalmente no projeto de um sistema que envolva um grande número de enlaces. Com o intuito de simplificar o traçado da terra equivalente o autor apresentou (Ref. 23) um método simplificado que permite, com razoável aproximação, avaliar o valor médio da variação do terreno. Uma análise mais detalhada deste caso fugiria completamente ao objetivo deste trabalho. Maiores detalhes práticos, assim como nomogramas para a aplicação da solução ótica, podem ser encontrados na referência 23.

5.2. REGIÃO DE DIFRAÇÃO

Em função do critério proposto neste trabalho, diz-se que o receptor encontra-se na região de difração do transmissor, quando a folga do percurso é menor que 0,6 da 1ª zona de Fresnel. A solução rigorosa a ser adotada nesta região é a série dos resíduos, que, entretanto, em determinados casos (parágrafo 4.23), é de difícil aplicação. Além disso, existe o problema do relevo do terreno que não é previsto pela série dos resíduos.

Uma forma de considerar o relevo do terreno foi proposta por Bullington (Ref.16) e descrita em detalhe na referência 26. O método de Bullington é aplicável no caso de existir visibilidade com obstrução de 0,6 da 1ª zona de Fresnel, situação em que a utilização da série dos resíduos é bastante complexa (parágrafo 4.23). A filosofia básica deste método é traçar uma terra plana equivalente que passe pelos pontos onde existe maior obstrução , como mostra a figura 5.1 para três situações distintas. O cálculo do campo é feito através da expressão (3.9), supondo a propagação sobre esta terra plana equivalente. Este método, embora simples , apresenta alguns inconvenientes que serão discutidos a seguir.

(a) O método é pessimista pois a terra plana equivalente causa uma obstrução mais acentuada do que o relevo propriamente dito.

(b) Como o efeito de uma obstrução é mais pronunciado quando nas vizinhanças das antenas, nas situações exemplificadas nas figuras 5.1b e 5.1c, os resultados obtidos por Bullington são satisfatórios. Entretanto, no caso da figura 5.1a, pode-se chegar , através deste método, a resultados completamente irreais. Esta conclusão pode ser visualizada para o caso elementar de uma terra perfeitamente lisa (Fig.5.2) na qual aplicamos o método de Bullington. A figura 5.3 apresenta os resultados obtidos através da expressão 3.9 e da série dos resíduos, em função da folga da 1ª

(a) Obstrução em P e folga no restante do percurso

(b) Obstrução nas proximidades das antenas

(c) Obstrução nas proximidades da antena 2

Fig. 5.1 - Terra plana equivalente (método de Bullington)

Fig.5.2 - Método de Bullington aplicado ao caso de uma terra
perfeitamente lisa.

Fig.5.3 - Comparação entre o método da terra plana equivalente e a solução rigorosa pela série dos resíduos.

zona de Fresnel. A observação da figura 5.3 nos mostra que para u ma folga menor que 0,3 da 1ª zona de Fresnel, os resultados obtidos pelo método da terra plana equivalente divergem bastante da solução rigorosa (série dos resíduos).

Por outro lado, esta mesma situação evidencia que o método da terra plana não permite uma transição suave em relação aos resultados obtidos quando o obstáculo impede a visibilidade entre as antenas.

Dentro da mesma filosofia adotada por Bullington, o autor propõe o seguinte método para avaliar o efeito do terreno no caso da figura 5.1a:

Traçar uma terra equivalente esférica que tangencie a maior obstrução (Fig. 5.4). O cálculo do campo é feito através da série dos resíduos em relação a esta terra equivalente.

Este método, além de menos pessimista que o anterior, é aplicável para qualquer valor de obstrução e permite uma transição suave em relação ao caso em que o obstáculo se situa acima da linha de visibilidade.

A dificuldade de aplicação deste método é o cálculo da série dos resíduos na região de visibilidade. Existem curvas publicadas (Refs. 20 e 21) que permitem calcular a intensidade de campo nesta região em função das alturas das antenas, frequência,

(a) Alturas situadas aproximadamente no mesmo nível

(b) Desnível do terreno acentuado.

Fig.5.4 - Terra esférica equivalente

tipo de solo e distância. Entretanto, tais curvas não cobrem todas as situações de interesse. Quando a situação não permitir a utilização das curvas citadas, sugere-se a aplicação do método gráfico descrito no parágrafo 4.23.

CAPÍTULO VI

CONCLUSÕES

Este capítulo tem por objetivo apresentar um resumo dos resultados obtidos anteriormente e evidenciar alguns tópicos que podem constituir assunto de pesquisas.

A estruturação deste trabalho baseou-se no critério proposto para a separação entre as regiões de visibilidade e de difração. Para a aplicação do critério, faz-se o levantamento de perfil do terreno entre os pontos que serão ligados e verifica-se a existência ou não de folga de 0,6 da 1ª zona de Fresnel. Caso exista a folga, determina-se a intensidade de campo através da solução ótica. Caso esteja obstruída a elipse que limita 0,6 da 1ª zona de Fresnel, utiliza-se o método da difração.

Quanto à influência do relevo do terreno, com exceção do caso apresentado na figura 5.1a, emprega-se os métodos descritos na referência 23 (método de Bullington no caso de difração e método aproximado semelhante ao do NBS para o caso da solução ótica). Na situação da figura 5.1a, é preferível utilizar o método

proposto no capítulo V (figura 5.4).

A aplicação da solução ótica não apresenta problema, pois todos os parâmetros necessários encontram-se sob a forma de curvas ou nomogramas (Ref.23). Entretanto, na região de difração deve-se analisar com mais detalhe cada situação particular.

(a) Receptor na região de visibilidade do transmissor.

Caso a terra equivalente, traçada para levar em conta o efeito do terreno, seja plana emprega-se a expressão (3.9).

$$|E| = \left| \frac{4\pi h_1' h_2'}{\lambda d} \right| E_0$$

Caso a terra equivalente seja esférica, se ambas as antenas satisfizerem a condição (4.1),

$$h_{1,2} < 0,15 a_e^{1/3} \lambda^{2/3}$$

emprega-se a expressão simplificada (4.4),

$$|E| = \left| \frac{4\pi h_1' h_2'}{\lambda d} \right| |F_S| E_0$$

No caso de alturas quaisquer, utiliza-se a série dos resíduos em sua forma geral (2.2) ou o método gráfico descrito no pa-

rágrafo 4.23 (figura 4.3).

(b) Receptor situado sobre ou além do horizonte do transmissor.

Nesta situação emprega-se a solução de Bullington descrita em detalhe no Apêndice III.

Neste trabalho procuramos analisar os pontos fundamentais das teorias clássicas de propagação, evidenciando principalmente as limitações das aproximações usualmente empregadas na prática. Entretanto, o problema ainda não está totalmente resolvido, existindo alguns tópicos que poderão servir de assunto para trabalhos futuros.

Um problema a ser considerado é uma análise mais detalhada do efeito do relevo do terreno. Neste trabalho discutimos as falhas existentes no método usualmente empregado e apresentamos uma solução para um caso particular. No entanto, é possível que um estudo minucioso do problema nos leve a uma solução geral que possa ser empregada em qualquer caso. Este assunto também possibilita ensaios experimentais com os seguintes objetivos:

(a) Verificação experimental do comportamento do coeficiente de reflexão do solo em função do relevo.

(b) Verificação experimental dos cálculos efetuados , considerando uma terra equivalente (plana ou esférica).

Sob o ponto de vista prático, seria interessante colocar sob a forma gráfica os resultados calculados pela série dos resíduos para a região de visibilidade.

APÊNDICE I

DEMONSTRAÇÃO DA IDENTIDADE

$$J_{1/3}(z_s) + J_{-1/3}(z_s) = [J_{-2/3}(z_s) - J_{2/3}(z_s)] \sqrt{-2\tau_s} \delta$$

Demonstraremos esta identidade utilizando propriedades das funções de Bessel e a equação de determinação dos números τ_s , desenvolvida em funções de Hankel cilíndricas de índice $1/3$.

Segundo a referência 28 tem-se que

$$J_\nu(\rho) = e^{-j\pi\nu\tau} J_\nu[\rho e^{j\pi\tau}]$$

Fazendo

- (a) $m = -1$ e $\nu = 1/3$ $J_{1/3}(\rho) = e^{j\pi/3} J_{1/3}[\rho e^{-j\pi}]$
- (b) $m = -1$ e $\nu = -1/3$ $J_{-1/3}(\rho) = e^{-j\pi/3} J_{-1/3}[\rho e^{-j\pi}]$
- (c) $m = -1$ e $\nu = 2/3$ $J_{2/3}(\rho) = e^{j2\pi/3} J_{2/3}[\rho e^{-j\pi}]$
- (d) $m = -1$ e $\nu = -2/3$ $J_{-2/3}(\rho) = e^{-j2\pi/3} J_{-2/3}[\rho e^{-j\pi}]$

Por outro lado (Ref.29),

$$H_v^{(2)}(\rho) = \frac{e^{jv\pi} J_v(\rho) - J_{-v}(\rho)}{j \operatorname{sen} v\pi}$$

logo

$$(I.1) \quad H_{1/3}^{(2)}(\rho) = \frac{e^{j\pi/3} J_{1/3}(\rho) - J_{-1/3}(\rho)}{j \operatorname{sen} \frac{\pi}{3}}$$

$$(I.2) \quad H_{2/3}^{(2)}(\rho) = \frac{e^{j2\pi/3} J_{2/3}(\rho) - J_{-2/3}(\rho)}{j \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3}}$$

Aplicando (a), (b), (c) e (d) em (I.1) e (I.2),

$$(I.3) \quad H_{1/3}(\rho) = \frac{2}{\sqrt{3}} e^{j\pi/6} [J_{1/3}(\rho e^{-j\pi}) + J_{-1/3}(\rho e^{-j\pi})]$$

$$(I.4) \quad H_{2/3}(\rho) = \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-j7\pi/6} [J_{2/3}(\rho e^{-j\pi}) - J_{-2/3}(\rho e^{-j\pi})]$$

A equação de determinação dos números τ_s nos diz que

$$(I.5) \quad e^{-j2\pi/3} \frac{H_{2/3}^{(2)}\{\frac{1}{3} (-2\tau_s)^{3/2}\}}{H_{1/3}^{(2)}\{\frac{1}{3} (-2\tau_s)^{3/2}\}} = - \frac{1}{\delta \sqrt{-2\tau_s}}$$

Substituindo (I.3) e (I.4) em (I.5) e considerando que $z_s = \frac{1}{3} (-2\tau_s)^{3/2} e^{-j\pi}$, teremos

$$e^{-2\pi/3} \frac{e^{-j7\pi/6} [J_{2/3}(z_s) - J_{-2/3}(z_s)]}{e^{j\pi/6} [J_{1/3}(z_s) + J_{-1/3}(z_s)]} = - \frac{1}{\sqrt{-2\tau_s} \delta}$$

Simplificando a expressão acima, obtemos a identidade desejada, ou seja,

$$J_{1/3}(z_s) + J_{-1/3}(z_s) = \sqrt{-2\tau_s} \delta [J_{-2/3}(z_s) - J_{2/3}(z_s)]$$

APÊNDICE II

APROXIMAÇÕES PARA OS FATORES DE ALTURA

Segundo os resultados de Van der Pol e Bremmer (Ref.10) apresentados no capítulo II, o fator de altura na sua forma mais geral é dado por

$$f_s(h) = \frac{h_{v_s}^{(2)}(k_1 r)}{h_{v_s}^{(2)}(k_1 a)}$$

Através das funções de Hankel cilíndricas, teremos para $f_s(h)$,

$$f_s(h) = \frac{H_{v_s+1/2}^{(2)}(k_1 r)}{H_{v_s+1/2}^{(2)}(k_1 a)}$$

Considerando que

$$v_s = k_1 a + (k_1 a)^{1/3} \quad v_s \gg 1$$

podemos fazer

$$(II.1) \quad f_s(h) = \frac{H_{v_s}^{(2)}(k_1 r)}{H_{v_s}^{(2)}(k_1 a)}$$

porém, se $n = z + z^{1/3} \tau_s$ (Ref.29),

$$(II.2) \quad H_n^{(2)}(z) = H_{z+z^{1/3}\tau_s}^{(2)}(z) = \frac{e^{j\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{2\tau_s}}{z^{1/3}} H_{1/3}^{(2)}\left\{\frac{1}{3}(-2\tau_s)\right\}^{3/2}$$

com a restrição de

$$\frac{n - z}{z} \ll 1$$

Pela definição de v_s , a aplicação de (II.2) para $H_{v_s}^{(2)}(k_1 a)$ é imediata. No entanto, para $H_{v_s}^{(2)}(k_1 r)$, são necessárias algumas manipulações algébricas.

Sendo $r = a + h$,

$$\frac{v_s}{k_1 r} = \frac{k_1 a + (k_1 a)^{1/3} \tau_s}{k_1 (a+h)} = \frac{1 + (k_1 a)^{-2/3} \tau_s}{1 + \frac{h}{a}}$$

Nos casos práticos, tem-se normalmente $h \ll a$, sendo válida a aproximação

$$\frac{1}{1 + \frac{h}{a}} = 1 - \frac{h}{a}$$

logo

$$\frac{v_s}{k_1 r} = 1 + (k_1 a)^{-2/3} \tau_s - \frac{h}{a} - (k_1 a)^{-2/3} \tau_s \frac{h}{a}$$

Como $k_1 a \gg 1$, o último termo da expressão acima pode ser desprezado em presença dos demais. Portanto,

$$\frac{v_s}{k_1 r} = 1 + (k_1 a)^{-2/3} \tau_s - \frac{h}{a}$$

ou

$$(II.3) \quad v_s = k_1 r + \frac{\tau_s - (k_1 a)^{2/3} \frac{h}{a}}{(k_1 a)^{2/3}} k_1 r$$

Definindo o parâmetro

$$(II.4) \quad X_h = (k_1 a)^{1/3} \sqrt{\frac{2h}{a}}$$

e aproximando no segundo membro de (II.3) $k_1 a$ por $k_1 r$, teremos

$$(II.5) \quad v_s = k_1 r - (k_1 r)^{1/3} \left[\tau_s - \frac{X_h^2}{2} \right]$$

que possibilita a aplicação de (II.2) para $H_{v_s}^{(2)}(k_1 r)$.

Desta forma, expressando (II.1) através das funções de Hankel cilíndricas de ordem 1/3, teremos

$$(II.6) \quad f_s(h) = \frac{\sqrt{x_h^2 - 2\tau_s} \cdot H_{1/3}^{(2)}\left(\frac{1}{3} [x^2 - 2\tau_s]^{3/2}\right)}{\sqrt{-2\tau_s} \cdot H_{1/3}^{(2)}\left(\frac{1}{3} (-2\tau_s)^{3/2}\right)}$$

A partir de (II.6) podemos formular as hipóteses

$$(a) \quad x_h^2 \gg 1$$

$$(b) \quad x_h^2 < 1$$

que definem os limites de aplicação das aproximações determinadas a seguir.

Hipótese (a)

Esta hipótese é de grande importância quando também se verifica a condição

$$(II.7) \quad x_h^2 \gg |2\tau_s|$$

Considerando que a aplicação da hipótese (a) será feita para pontos situados sobre ou além do horizonte de transmissor (A pêndice III), região onde um termo da série dos resíduos é sufici

ente, teremos, na maioria dos casos,

$$|\tau_2| = |\tau_1| = |\tau_{1,0}| < 2$$

Portanto, a condição (II.7) é satisfeita se

$$X_h^2 \gg 4$$

ou, como usado por Bullington,

$$(II.8) \quad X_h \gg 6$$

Supondo que (II.8) seja satisfeita podemos aproximar a função de Hankel do numerador da (II.6) pelo primeiro termo de seu desenvolvimento assintótico, ou seja,

$$(II.9) \quad H_{1/3}^{(2)} \left(\frac{1}{3} [X_h^2 - 2\tau_s]^{3/2} \right) \approx \sqrt{\frac{6}{\pi X_h^3}} e^{j\tau_s X_h} e^{-j \left[\frac{X_h^3}{3} - \frac{5}{12} \right]}$$

onde fizemos

$$\text{- no denominador:} \quad \frac{1}{3} [X_h^2 - 2\tau_s]^{3/2} \approx \frac{X_h^3}{3}$$

$$\text{- no expoente:} \quad \frac{1}{3} [X_h^2 - 2\tau_s]^{3/2} \approx \frac{X_h^3}{3} - \tau_s X_h$$

Para a função de Hankel do denominador de (II.6) aplicamos a identidade (Ref.29).

$$H_{1/3}^{(2)}(z) = \frac{e^{j\pi/6}}{\operatorname{sen} \frac{\pi}{3}} \{J_{1/3}(z e^{-j\pi}) + J_{-1/3}(z e^{-j\pi})\}$$

de forma que

$$(II.10) \quad H_{1/3}^{(2)}\left\{\frac{1}{3}[-2\tau_s]^{3/2}\right\} = \frac{2}{\sqrt{3}} e^{j\pi/6} \{J_{1/3}(z_s) + J_{-1/3}(z_s)\}$$

onde

$$z_s = \frac{1}{3}[-2\tau_s]^{3/2} e^{-j\pi}$$

Aplicando (II.9) e (II.10) em (II.6) teremos finalmente a hipótese correspondente a (II.8):

$$(II.11) \quad f_s(h) = \frac{3}{\sqrt{-2\tau_s}} \frac{1}{\sqrt{2\pi K_h}} \frac{e^{j\tau_s K_h}}{J_{1/3}(z_s) + J_{-1/3}(z_s)} e^{-j\left[\frac{K_h^3}{3} - \frac{\pi}{4}\right]}$$

ou em módulo

$$(II.12) \quad |f_s(h)| = \frac{3}{\sqrt{2\pi K_h}} \left| \frac{1}{\sqrt{-2\tau_s}} \frac{e^{j\tau_s K_h}}{J_{1/3}(z_s) + J_{-1/3}(z_s)} \right|$$

Hipótese (b)

A hipótese (b), como pode ser observado nas curvas publicadas por Bremner (Ref.20), corresponde a

$$(II.13) \quad h < 0,15 a_e^{1/3} \lambda^{2/3}$$

que é normalmente o valor utilizado na prática.

Partindo da definição geral de $f_s(h)$,

$$f_s(h) = \frac{h_{v_s}^{(2)}(k_1 r)}{h_{v_s}^{(2)}(k_1 a)}$$

como h satisfaz (II.13), podemos substituir o numerador da expressão acima pelos dois primeiros termos de seu desenvolvimento em série de Taylor nas vizinhanças do ponto $r = a_e$.

Desta forma,

$$(II.14) \quad f_s(h) = 1 + k_1 h \frac{h_{v_s}^{(2)'}(k_1 a)}{h_{v_s}^{(2)}(k_1 a)}$$

Pela equação geral da determinação dos números v_s , no caso de um dipolo vertical,

$$\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left[\log x h_{vs}^{(2)}(x) \right]_{x=k_1 a} = \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left[\log x h_{vs}^{(1)} \right]_{x=k_2 a}$$

e de acordo com a referência (20),

$$\frac{d}{dx} \left[\log x h_{vs}^{(2)}(x) \right]_{x=k_2 a} = \frac{1}{(k_1 a)^{1/3} \delta_e}$$

A idêntica conclusão chegaríamos para o dipolo horizontal, apenas com a substituição de δ_e por δ_m .

Como

$$\frac{d}{dx} \left[\log x h_{vs}^{(2)}(x) \right] = \frac{1}{k_1 a} + \frac{h_{vs}^{(2)'}(k_1 a)}{h_{vs}^{(2)}(k_1 a)}$$

vem

(II.15)

$$\frac{h_{vs}^{(2)'}(k_1 a)}{h_{vs}^{(2)}(k_1 a)} = \frac{1}{(k_1 a)^{1/3} \delta} - \frac{1}{k_1 a}$$

onde

$$\delta = \begin{cases} \delta_e - \text{dipolo vertical} \\ \delta_m - \text{dipolo horizontal} \end{cases}$$

Substituindo (II.15) em (II.14),

$$f_s(h) = 1 + \frac{k_1 h}{(k_1 a)^{1/3} \delta} - \frac{h}{a}$$

Considerando que $h \ll a$, teremos finalmente,

$$(II.6) \quad f_s(h) = 1 + \frac{k_1 h}{\delta (k_1 a)^{1/3}}$$

Observa-se que (II.16) independe dos números v_s e, consequentemente, dos números τ_s . Esta particularidade permite (parágrafo 4.21) separar na série dos resíduos os efeitos das alturas e da distância independentemente do número de termos considerado.

APÊNDICE III

RECEPTOR SITUADO SÔBRE OU ALÉM DO HORIZONTE DO TRANSMISSOR

A solução desenvolvida por Bullington (Ref.16) para esta situação baseou-se em um trabalho de Burrows e Gray (Ref.14) e possui duas características de particular interêsse:

- A solução é válida para qualquer altura de antena;
- A expressão do campo é dada de uma forma que permite uma interpretação física relativamente simples.

Para tornar a solução válida para qualquer altura de antena Bullington utilizou o fator de altura dado por (II.2), multiplicado por um fator de correção N, cuja determinação será vista posteriormente.

Em função da série dos resíduos (2.2), utilizando o fator de altura dado por (II.2) e o fator de correção N, teremos para o campo elétrico,

$$(III.1) |E| = 2E_0 \sqrt{\frac{X}{2\pi X_{h_1} X_{h_2}}} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{2\tau_s - 1/\delta^2} \left\{ \frac{3e^{-j\frac{\tau_s}{2}(X-X_{h_1}-X_{h_2})}}{-2\tau_s [J_{1/3}(z_s) + J_{-1/3}(z_s)]} \right\}^2 N_1 N_2$$

Considerando a identidade (Apêndice I)

$$J_{1/3}(z_s) + J_{-1/3}(z_s) = [J_{-2/3}(z_s) - J_{2/3}(z_s)] \sqrt{-2\tau_s} \delta$$

na suposição de $\frac{1}{\delta^2} \gg 2\tau_s$, teremos para (III.1),

$$(III.2) \quad |E| = 2E_0 \sqrt{\frac{X}{2\pi K_{h_1} K_{h_2}}} \left| \sum_{s=0}^{\infty} \left\{ \frac{e^{-j\frac{s}{2}(X-X_{h_1}-X_{h_2})}}{2} - \frac{1}{3} \tau_s [J_{-2/3}(z_s) - J_{2/3}(z_s)] \right\} \right|^2 N_1 N_2$$

A expressão acima é válida para polarização horizontal sobre qualquer tipo de solo ou polarização vertical sobre a terra. Para polarização vertical sobre a água do mar veremos posteriormente a correção a ser efetuada.

Com o objetivo de utilizar os resultados de Burrows e Gray, Bullington transformou (III.2) em

$$(III.3) \quad |E| = 2E_0 \sqrt{\frac{X}{2\pi K_{h_1} K_{h_2}}} N_1 N_2 \left| \sum_{s=0}^{\infty} \frac{e^{-j\frac{s}{2}(X-X_{h_1}-X_{h_2})}}{2} - \frac{1}{3} \tau_s [J_{2/3}(z_s) - J_{-2/3}(z_s)] \right|^2$$

o que equivale a fazer

$$\sum_{s=0}^{\infty} A_s^2 = \left[\sum_{s=0}^{\infty} A_s \right]^2$$

onde A_s é uma função de s .

Esta transformação só é válida rigorosamente quando um termo da série dos resíduos é suficiente. Segundo Bullington, sobre ou além do horizonte do transmissor o erro efetuado ao usar - nos esta aproximação é da ordem de ± 3 dB. Desta forma, para a obtenção de resultados satisfatórios a solução de Bullington é limitada pelas considerações acima.

Com esta simplificação Bullington utilizou em seus cál-

culos a função

$$F_z = \frac{e^{-j\tau_s z}}{\frac{2}{3} \tau_s [J_{2/3}(z_s) - J_{-2/3}(z_s)]}; \quad z = \frac{1}{2}(x - x_{h1} - x_{h2})$$

determinada anteriormente por Burrows e Gray, sendo o campo dado então por,

$$(III.4) \quad |E| = E_0 \sqrt{\frac{2X}{\pi X_1 X_2}} N_1 N_2 |F_z|^2$$

O gráfico de F_z , em função de z , segundo Burrows e Gray é apresentado na figura III.1, pois será aplicado na determinação do fator de correção N .

Para tornar seus resultados válidos no caso de polarização vertical sobre água do mar, Burrows e Gray utilizaram um fator de correção para multiplicar o parâmetro $\underline{z}$ (Fig.III.1), que é dado na tabela a seguir.

$\lambda (m)$	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	< 1
Fator de Correção	0,84	0,86	0,88	0,90	0,91	0,93	0,94	0,95	0,97	0,98	1

Este fator de correção é obtido considerando-se o valor de $\underline{z}$ para a água do mar e utilizando um só termo da série dos resíduos. O desenvolvimento matemático completo carece de interesse

Fig.III.1 - Gráfico do fator F_L

e não será visto no presente trabalho.

Bullington utilizou também esta correção, o que realça a limitação de sua solução.

Determinação do fator de correção N

Para $X_h > 6$, de acordo com a limitação de $f_s(h)$ dada por (II.8) devemos ter,

$$N = 1$$

Por outro lado, para $X_{1,2} < 1$, supondo que o receptor está situado no horizonte do receptor e que as alturas das antenas são iguais, podemos determinar o campo de duas maneiras:

(a) Através de (III.4)

$$X_{h1} = X_{h2} = X_h \quad ; \quad N_1 = N_2$$

$$X = X_{h1} + X_{h2} = 2X_h$$

$$F_s = 0,5 \quad (\text{figura III.1 para } \lambda = 0)$$

$$(III.5a) \quad |E| = \frac{E_0}{2 \sqrt{\pi X_h}}$$

(b) Através de (4.4)

$$(III.5b) \quad |E| = \frac{4\pi h_1 h_2}{\lambda_d} E_0 |F_S| = \frac{X_h^3}{4} E_0 |F_S|$$

Igualando (III.5a) e (III.5b),

$$(III.6) \quad N = \sqrt[4]{\frac{\pi}{4}} X_h^{7/4} |F_S|^{1/2}$$

Desta forma, temos N determinado para

$$X_h > 6 \quad \text{onde} \quad N = 1$$

e

$$X_h < 1 \quad \text{onde N é dado por (III.6)}$$

A determinação de N para $1 < X_h < 6$ é feita graficamente da forma indicada na figura III.2.

Interpretação física da solução de Bullington

A interpretação física de (III.4), com o auxílio da figura III.3, mostra a correspondência existente entre os diversos fatores componentes do campo elétrico e a distância, ou seja,

Fig.III.2 - Factor N

$$\frac{E_1}{\sqrt{h_1}} \quad - \quad \text{associado à distância } d_1$$

$$\frac{E_2}{\sqrt{h_2}} \quad - \quad \text{associado à distância } d_2$$

$$|F_1|^2 \quad - \quad \text{associado à distância } d_3$$

$$\sqrt{\frac{2X}{\pi}} E_0 \quad - \quad \text{associado à distância } d.$$

Outros autores, tais como Kerr (Ref.30), utilizando o método da integral de fase devido a Eckersley (Ref.31) e Du Castel (Ref.32) utilizando o método de Fock (Ref.33) apresentaram resultados válidos para qualquer altura de antena similares aos obtidos acima. Entretanto, estes autores também consideraram na solução geral somente o 1º termo da série, o que torna os resultados aplicáveis para pontos situados além do horizonte do transmissor.

REFERÊNCIAS

1. A.Sommerfeld "The propagation of waves in wireless telegraphy"
Ann. der Phys., vol.28, pages 665-736
Março (1909).
2. H.Weyl "The propagation of electromagnetic waves over a plane conduction"
Ann. der Phys., vol.60, pages 481-500,
Novembro (1919)
3. A.Sommerfeld "The propagation of waves in wireless telegraphy"
Ann. der Phys., vol.81, pages 1135 - 1153
Dezembro (1926)
4. Van der Pol e K.F.Niessen "The propagation of electromagnetic waves over a plane earth"
Ann. der Phys., vol.6, page 273-294,
Agosto (1930)
5. W.H.Wise "The grounded condenser antenna radiation formula"
Proc. IRE, vol.19, pages 1684-1689
Setembro (1931)

6. K.A.Norton "Propagation of radio waves over a plane earth"
Nature, vol.135, pages 934-955
Junho (1935)
7. C.R.Burrows "Radio propagation over plane earth field strength curves"
ESTJ, vol.16, pages 45-77 Janeiro (1937)
e pages 574-577 Outubro (1937)
8. K.A.Norton "The propagation of radio waves over the surface of the earth and in the upper atmosphere"
1a parte: Proc.IRE, vol.24, pages 1367-1387
Outubro (1936)
2a parte: Proc.IRE, vol.25, page 1203-1236
Setembro (1937)
9. G.N.Watson "The diffraction of electric waves by the earth"
Proc.Roy.Soc., vol.95, pages 83-89,
Outubro (1918) e page 546-563 Julho (1919)

10. B. van der Pol e
Bremmer "The diffraction of electromagnetic waves
from an electrical point source round a
finitely conducting sphere, with applica-
tion to radiotelegraphy and the theory of
rainbow"
1a parte: Phil.Mag., vol.24, pages 141-175
Julho (1937)
2a parte: Phil.Mag., vol.24, pages 825-864,
Supl.Novembro (1937).
11. B. van der Pol
e H.Bremmer "The propagation over radio waves over a
finitely conducting spherical earth".
Phil.Mag., vol.25, pages 817-834, Julho
(1938).
12. B.van der Pol
e H.Bremmer "Further note on the propagation of radio
waves over a finitely conducting spherical
earth"
Phil.Mag., vol.27, pages 261-271 Março
(1939).
13. M.G.Gray "The diffraction and refraction of a horizon-
tally polarized electromagnetic wave over a
spherical earth"
Phil.Mag., vol.27, pages 421-436, Abril
(1939)

14. C.R.Burrows e
M.C.Gray
"The effect of the earth's curvature on
ground-wave propagation"
Proc.IRE, vol.29, pags.16-24 Janeiro
(1941).
15. K.A.Norton
"The calculation of ground-wave field
intensities over a finitely conducting
spherical earth"
Proc.IRE, vol.29, pags.623-639 Dezembro
(1941).
16. K.Bullington
"Radio propagation at frequencies above
30 megacycles"
Proc.IRE, vol.35, pags.1122-1136 Outubro
(1947)
17. L.C.Bahiana, D.
Wilken e M.S.
Assis
"Cálculo das Intensidades de Campo e das
Interferências entre Emissoras de Rádio-
Difusão.
CETUC, publicação AP/01, Fevereiro
(1966).
18. J.S.Schelling,
C.R.Burrows e
E.B.Ferrel
"Ultra-short-wave propagation"
Proc.IRE, vol.21, pags 427-463 Março (1933)
e BSTJ, vol.12, pags.123-161, Abril (1933)

19. A. Auzer "Compléments de mathématiques"
Editions de la Revue d'Optique, Paris, 1961
20. H. Brenner "Terrestrial Radio Waves"
Elsevier Publishing Company, Amsterdam,
1962.
21. C.C.I.R. "Atlas of Ground-Wave Propagation Curves
for Frequencies between 30 and 10.000 Mc/s"
CCIR, Resolução nº 22, Publicado pela UIT,
Genebra (1959).
22. C.R. Burrows "Radio Wave Propagation"
e S.S. Atwood Academic Press Inc., New Jersey (1949).
23. L.C. Bahiana "Cálculo dos Enlaces Radioelétricos em Vi-
sibilidade"
e M.S. Assis Publicação AP/03, CETUC, (1966).
24. A.F. Aguiar "Análise Crítica das Teorias de Difusão
Troposférica e suas Aplicações"
Publicação AP/07 - CETUC, (1967).
25. K. Bullington "Reflection coefficients of irregular
terrain"
Proc. IRE, vol. 42, page. 1258-1262, Agosto
(1954)

26. USAF "Microwave radio" relay systems 44 Mc to
13.000 Mc"
T.O. 31R5-1-9
27. K.Bullington "Radio propagation fundamentals"
BSTJ, vol.36, pags 593-626, Maio (1957).
28. E.Jahnke e "Tables of functions with formulae and
F.Ende curves"
Dover Publications, New York.
29. A.Sommerfeld "Partial Differential Equations in Physics"
Academic Press, New York.
30. D.E.Kerr "Propagation of Short Radio Waves"
31. T.L.Eckersley "Application of the phase integral method
e G.Millington to the analysis of the diffraction and re-
fraction of wireless waves round the earth"
Phil.Trans.Roy.Soc., Londres, vol.237,
pags.273-309, Junho (1938).
32. F.Du Castel "Propagation Tropospherique et Faisceaux
Hertziens Transhorizon"
Editions Chiron, Paris, 1961.

33. V.A.Fock "Diffraction by Convex Surface"
Pergamon Press, New York
34. P.L.Rice, A.G. "Transmission Loss Predictions for Tropo-
Longley, K.A.Norton spheric Communication Circuits"
e A.P.Barsis NBS, Technical Note 101, Maio (1965).

APROVAÇÃO

A presente tese foi examinada e aprovada pela comissão a -
baixo.

Prof. Luiz Carlos Bahiana (Orientador)

Prof. Argus F.O. Moreira

Prof. Robert Lee Everett