

4. Formulação de redes elétricas não-lineares

4.1 Introdução

No capítulo anterior, foi apresentada uma formulação de redes elétricas através de equações de estado. Entre as vantagens do método, está a facilidade em estender esta formulação para redes variantes no tempo, bem como para não-lineares. No caso de redes não-lineares, a equação de estado na forma matricial se torna [14,15]

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathcal{A}(\mathbf{x}(t), \mathbf{e}(t)) \quad (4.1)$$

Este capítulo tem como finalidade apresentar um método para obter, de forma simples, as equações de estado de uma rede contendo não-linearidades.

Sabe-se que em uma rede elétrica, existe uma infinidade de não linearidades possíveis, incluindo corrente e/ou tensão de um elo como uma função não-linear de corrente e/ou tensão de outro elo diferente. Este trabalho está focado apenas em não-linearidades locais, como as associadas às correntes e tensões de um mesmo elemento elétrico.

Assim como para o caso linear, existem comercialmente algoritmos próprios para resolver equações diferenciais não-lineares [16,17]. Assim, o principal desafio é conseguir chegar ao conjunto de equações de estado que representam a rede não-linear estudada. Neste trabalho não será dada nenhuma ênfase aos algoritmos utilizados para resolver as equações de estado aqui formuladas.

4.2 Formulação

A formulação por equação de estado para a rede não-linear é muito parecida com a formulação para a rede linear [5]. Para facilitar o entendimento, utilizaremos como exemplo o circuito retificador da Figura (4.1)

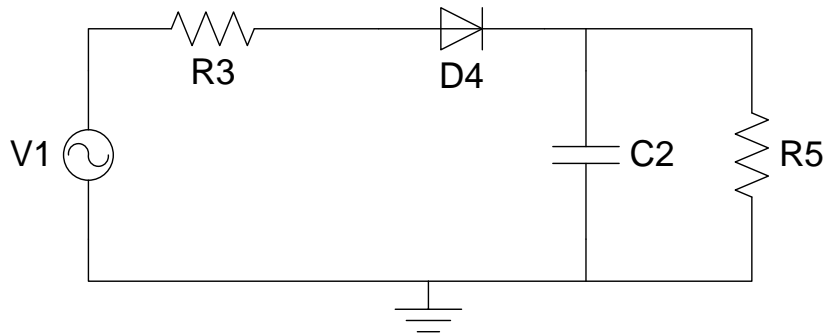


Figura 4.1– Circuito retificador

Primeiro, escolhemos uma árvore normal. Novamente, colocaremos todas as fontes de tensão independentes na árvore e todas as fontes de corrente independentes na coárvore. Caso não haja circuitos de capacitores e cortes de indutores, todos os capacitores estarão na árvore e os indutores estarão na coárvore. No caso trataremos elementos não-lineares do tipo resistivo, cuja relação $v-i$ é representada por uma função não-linear, ou seja, $v = f(i)$ ou $i = f(v)$. Neste caso, os elementos não-lineares podem ser colocados tanto na árvore como na coárvore. Lembrando que a relação $v-i$ do diodo é:

$$\begin{aligned} i_D &= I_S \exp \frac{v_D}{nV_T} \\ v_D &= nV_T \ln \frac{i_D}{I_S} \end{aligned} \quad (4.2)$$

A árvore escolhida para a rede da Figura (4.1) é:

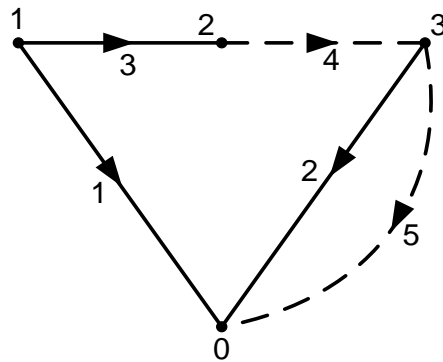


Figura 4.2– Árvore do circuito retificador

Os ramos estão representados por linhas cheias e os elos da coárvore – coelos – por linhas tracejadas. Em seguida escrevemos a matriz de corte para a rede:

$$Q_f = \begin{matrix} E \\ C \\ R_t \{R_3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = [U \quad Q_l] \quad (4.3)$$

Escrevendo as equações de Kirchhoff das correntes para os cortes e as equações de Kirchhoff das tensões para os circuitos, temos:

$$\begin{aligned} i_t &= -Q_l i_l \\ v_l &= -B_t v_t = Q'_l v_t \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} i_E &= -Q_{ER_l} i_{R_l} \\ i_C &= -Q_{CR_l} i_{R_l} \\ i_{R_t} &= -Q_{R_t R_l} i_{R_l} \\ v_{R_l} &= Q'_{ER_l} v_E + Q'_{CR_l} v_C + Q'_{R_t R_l} v_{R_t} \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} i_1 &= -i_4 \\ i_2 &= i_4 \quad -i_5 \\ i_3 &= i_4 \\ v_4 &= v_1 \quad -v_2 \quad -v_3 \\ v_5 &= \quad v_2 \end{aligned} \quad (4.6)$$

Agora escrevemos as relações v - i para as fontes e os elementos reativos:

$$\begin{aligned} v_1 &= v_{g1}(t) \\ i_2 &= C_2 \frac{dv_2}{dt} \end{aligned} \quad (4.7)$$

Substituindo (4.7) em (4.6),

$$C_2 \frac{dv_2}{dt} = i_4 - i_5 \quad (4.8)$$

Para eliminar desta última equação a dependência das diferenciais com respeito às correntes dos resistores, vamos utilizar a relação v - i dos elementos resistivos e dos elementos não-lineares.

$$\begin{bmatrix} v_3 - R_3 i_3 \\ i_4 - I_S \exp \frac{v_4}{nV_T} \\ i_5 - G_5 v_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

Substituindo (4.6) em (4.9),

$$\begin{aligned} v_3 &= R_3 i_4 \\ i_4 &= I_S \exp \left(\frac{v_1 - v_2 - v_3}{nV_T} \right) \\ i_5 &= G_5 v_2 \end{aligned} \quad (4.10)$$

Como se pode perceber, este sistema não tem solução trivial, pois a corrente do diodo, i_4 , depende de variáveis que não são variáveis de estado nem fontes independentes, v_3 . Isto representa um problema para alcançar a formulação da rede.

4.2.1 Inserção de elementos virtuais

Para evitar que as correntes e/ou tensões dos elementos não-lineares dependam de variáveis que não são variáveis de estado, inserimos capacitores e/ou indutores virtuais de modo que a corrente do elemento não-linear seja função linear apenas de correntes de indutores, ou então que a tensão do elemento não-linear seja função linear apenas de tensões de capacitores. Caso adicionemos capacitores virtuais, o elemento não-linear deverá estar na coárvore e caso adicionemos indutores virtuais, o elemento não-linear deverá estar na árvore. Na rede da Figura (4.1), podemos inserir um capacitor de valor muito baixo, entre o nó 2 e o terra. Neste caso tem-se a rede da Figura (4.3).

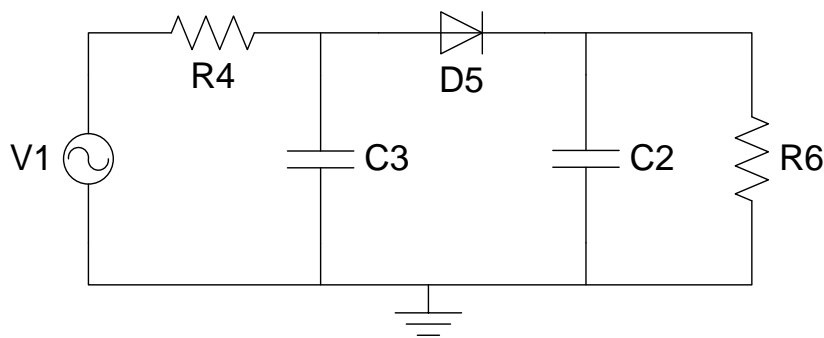


Figura 4.3– Circuito retificador com elemento virtual

Ao escolher a árvore, o elemento não-linear será um coelo:

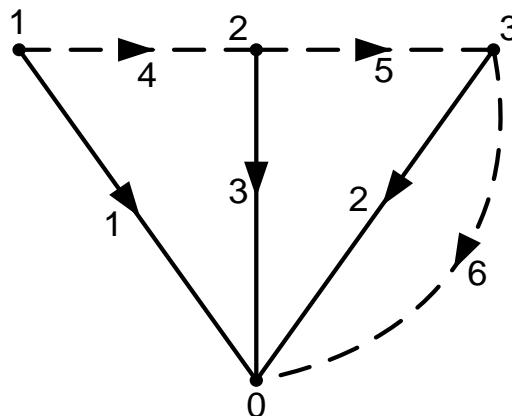


Figura 4.4– Árvore do circuito da Figura (4.3)

Neste caso a matriz de corte fundamental será,

$$Q_f = \begin{matrix} & E & & & & & \\ & \begin{matrix} C_2 \\ C_3 \end{matrix} & & & & & \\ & & & & \overbrace{\begin{matrix} R_4 & D_5 & R_6 \end{matrix}}^{R_t} & & \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

Repetindo as equações de Kirchhoff:

$$\begin{aligned} i_1 &= -i_4 \\ i_2 &= i_5 - i_6 \\ i_3 &= i_4 - i_5 \\ v_4 &= v_1 - v_3 \\ v_5 &= -v_2 + v_3 \\ v_6 &= v_2 \end{aligned} \quad (4.12)$$

As relações v - i dos elementos reativos e das fontes são dadas por

$$\begin{aligned} v_1 &= v_{g1}(t) \\ i_2 &= C_2 \frac{dv_2}{dt} \\ i_3 &= C_3 \frac{dv_3}{dt} \end{aligned} \quad (4.13)$$

Substituindo (4.13) em (4.12),

$$\begin{aligned} C_2 \frac{dv_2}{dt} &= i_5 - i_6 \\ C_3 \frac{di_3}{dt} &= i_4 - i_5 \end{aligned} \quad (4.14)$$

Agora, escrevendo as relações v - i dos elementos resistivos e dos elementos não-lineares e substituindo as equações equivalentes de (4.12) chega-se à seguinte relação

$$\begin{aligned}
 i_4 &= G_3(v_1 - v_3) \\
 i_5 &= I_S \exp \frac{(v_3 - v_2)}{nV_T} \\
 i_6 &= G_6 v_2
 \end{aligned}
 \tag{4.15}$$

Neste caso, os termos do lado direito em (4.15) são todos variáveis de estado. Sendo assim, pode-se substituir sem problemas (4.15) em (4.14), levando a

$$\begin{aligned}
 \frac{dv_2}{dt} &= -\frac{G_6}{C_2} v_2 + \frac{1}{C_2} I_S \exp \frac{(v_3 - v_2)}{nV_T} \\
 \frac{dv_3}{dt} &= -\frac{G_4}{C_3} v_3 - \frac{1}{C_3} I_S \exp \frac{(v_3 - v_2)}{nV_T} + \frac{G_4}{C_3} v_{g1}
 \end{aligned}
 \tag{4.16}$$

4.3 Formulação Sistemática

Considerando agora que todos os elementos não-lineares tenham indutores em série, percebemos algumas particularidades na matriz de corte.

Quando temos algum ramo em série com um coelo, o corte representado por este ramo poderá ser um corte contendo apenas o ramo e o coelo em série. Sendo assim, ao colocar um indutor em série com cada elemento não-linear, obrigatoriamente o indutor será um coelo, e os elementos não-lineares serão escolhidos ramos da árvore, e os cortes representados pelos elementos não-lineares irão conter apenas o coelo indutor. Semelhantemente, ao colocar um capacitor em paralelo com um elemento não-linear, obrigatoriamente o capacitor será um ramo, e o elemento não-linear será um coelo. Neste caso, o elemento não-linear estará apenas no corte representado pelo capacitor em paralelo.

Neste caso a matriz de corte fundamental será:

$$Q_f = \begin{matrix} & R & L & J & E_{NLI} \\ \begin{matrix} E \\ C \\ R \\ E_{NLI} \end{matrix} & \begin{bmatrix} Q_{ER} & Q_{EL} & Q_{EJ} & Q_{EE_{NLI}} \\ Q_{CR} & Q_{CL} & Q_{CJ} & Q_{CE_{NLI}} \\ Q_{RR} & Q_{RL} & Q_{RJ} & Q_{RE_{NLI}} \\ Q_{E_{NLI}R} & Q_{E_{NLI}L} & Q_{E_{NLI}J} & Q_{E_{NLI}E_{NLI}} \end{bmatrix} \end{matrix}
 \tag{4.17}$$

onde $Q_{E_{Nlt}R}$, $Q_{E_{Nlt}J}$, $Q_{EE_{Nlt}}$, $Q_{RE_{Nlt}}$ e $Q_{E_{Nlt}E_{Nlt}}$ serão matrizes de zeros.

Assim, aplicando as equações de Kirchhoff, tem-se:

$$\begin{aligned}
 i_E &= -Q_{ER}i_{Rl} - Q_{EL}i_L - Q_{EJ}i_j \\
 i_C &= -Q_{CR}i_{Rl} - Q_{CL}i_L - Q_{CJ}i_j - Q_{CE_{Nlt}}i_{E_{Nlt}} \\
 i_{Rt} &= -Q_{RR}i_{Rl} - Q_{RL}i_L - Q_{RJ}i_j \\
 i_{E_{Nlt}} &= -Q_{E_{Nlt}L}i_L \\
 v_{Rl} &= Q'_{ER}v_E + Q'_{CR}v_C + Q'_{RR}v_{Rt} \\
 v_L &= Q'_{EL}v_E + Q'_{CL}v_C + Q'_{RL}v_{Rt} + Q'_{E_{Nlt}L}v_{E_{Nlt}} \\
 v_j &= Q'_{EJ}v_E + Q'_{CJ}v_C + Q'_{RJ}v_{Rt} \\
 v_{E_{Nlt}} &= Q_{CE_{Nlt}}v_C
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

Percebe-se que os únicos termos que dependem das variáveis não-lineares são as tensões dos indutores e as correntes dos capacitores. As tensões dos indutores dependem das tensões dos ramos não-lineares, que por sua vez, são funções das correntes dos ramos não-lineares. Mas devido à escolha dos cortes, cada corrente dos ramos não-lineares é função linear de correntes de indutores. O mesmo vale para as correntes dos capacitores.

Logo, a fórmula genérica da tensão de um indutor será:

$$\begin{aligned}
 v_{Lk} &= \sum_{i1=1}^{n1} a_{i1}v_{Ci1} + \sum_{i2=1}^{n2} b_{i2}i_{Li2} + \sum_{i3=1}^{n3} c_{i3}v_{Ei3} + \sum_{i4=1}^{n4} d_{i4}i_{ji4} \\
 &+ \sum_{i5=1}^{n5} e_{i5} \text{func}\left(\sum_{j=1}^{n2} i_{Lj}\right)
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

E a fórmula genérica da corrente de um capacitor será:

$$i_{C\bar{k}} = \sum_{i1=1}^{n1} \tilde{a}_{i1} v_{Ci1} + \sum_{i2=1}^{n2} \tilde{b}_{i2} i_{Li2} + \sum_{i3=1}^{n3} \tilde{c}_{i3} v_{Ei3} + \sum_{i4=1}^{n4} \tilde{d}_{i4} i_{ji4} + \sum_{i5=1}^{n5} \tilde{e}_{i5} \text{func}\left(\sum_{j=1}^{n2} v_{Cj}\right) \tag{4.20}$$

Em seguida, será realizada a simulação a rede da Figura (4.3), utilizando as equações encontradas na seção anterior.

4.4 Caso Ilustrativo

Para ilustrar a técnica de formulação apresentada neste capítulo, será feita a simulação a rede de Figura (4.3), cujas equações são:

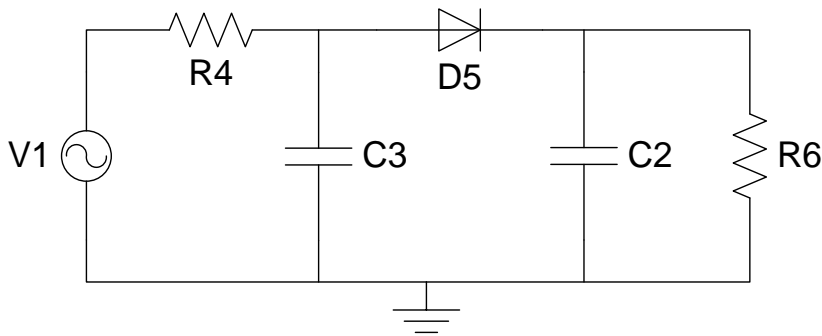


Figura 4.5– Circuito retificador

$$\begin{aligned} \frac{dv_2}{dt} &= -\frac{G_6}{C_2} v_2 + \frac{1}{C_2} I_S \exp\left(\frac{v_3 - v_2}{nV_T}\right) \\ \frac{dv_3}{dt} &= -\frac{G_4}{C_3} v_3 - \frac{1}{C_3} I_S \exp\left(\frac{v_3 - v_2}{nV_T}\right) + \frac{G_4}{C_3} v_{g1} \end{aligned} \tag{4.21}$$

V1	C2	C3	R4	R6
$9 \sin(2\pi 60t) V$	$1nF$	$47\mu F$	50Ω	$2,7k\Omega$

Tabela 4.1 – Valor dos elementos

Os valores dos elementos encontram-se na Tabela 4.1. As simulações aqui realizadas utilizaram um algoritmo comercial para resolver equações diferenciais ordinárias não-lineares com condições iniciais [16,17].

Os resultados da simulação encontram-se na Figura (4.6):

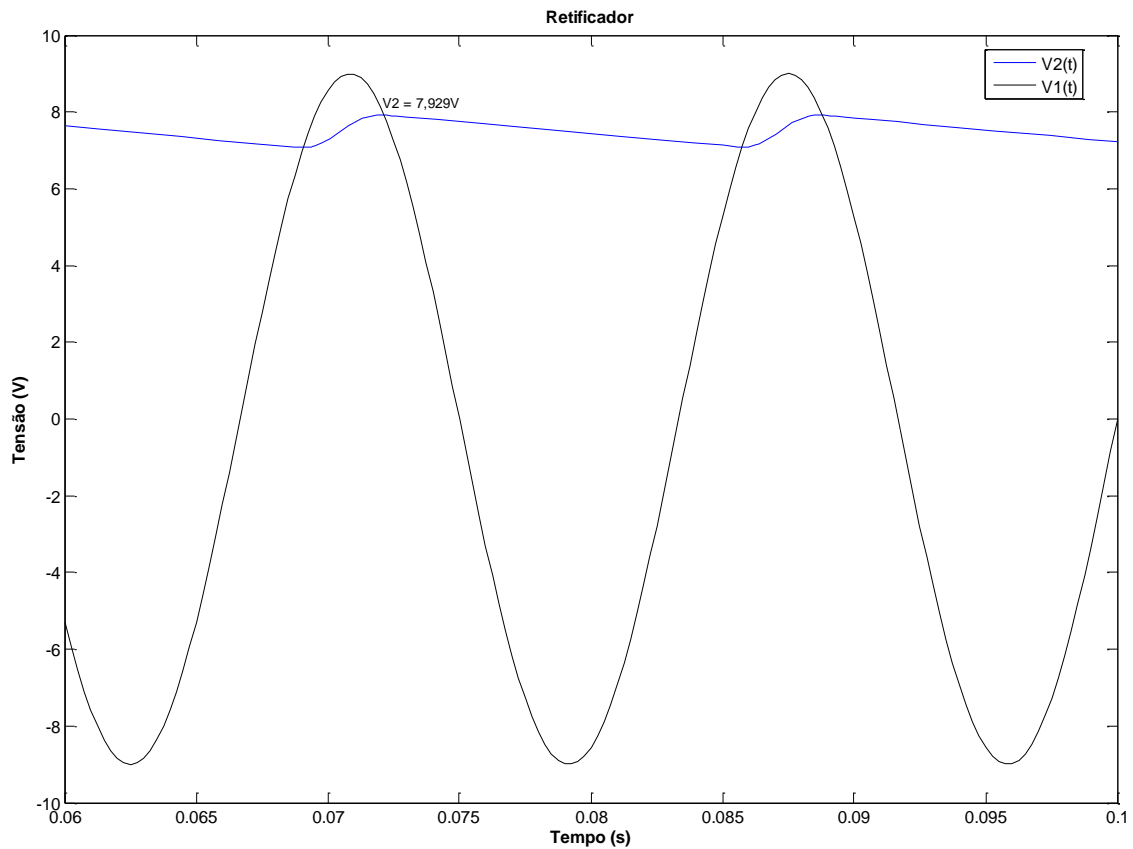


Figura 4.6– Resultado da simulação

Na Figura (4.7) estão os resultados obtidos com a simulação feita utilizando o programa TopSPICE [18], coincidentes com a aqui derivada. Comparando os resultados, Figura (4.8), pode-se comprovar a validade da simulação.

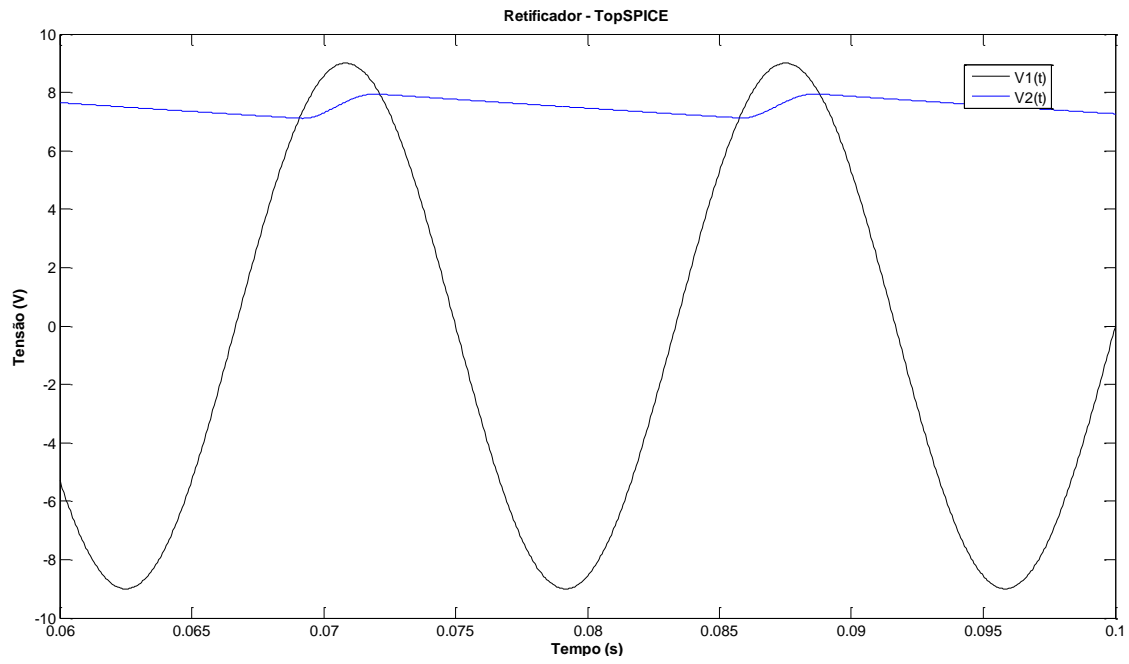


Figura 4.7– Resultado da simulação com o TopSPICE

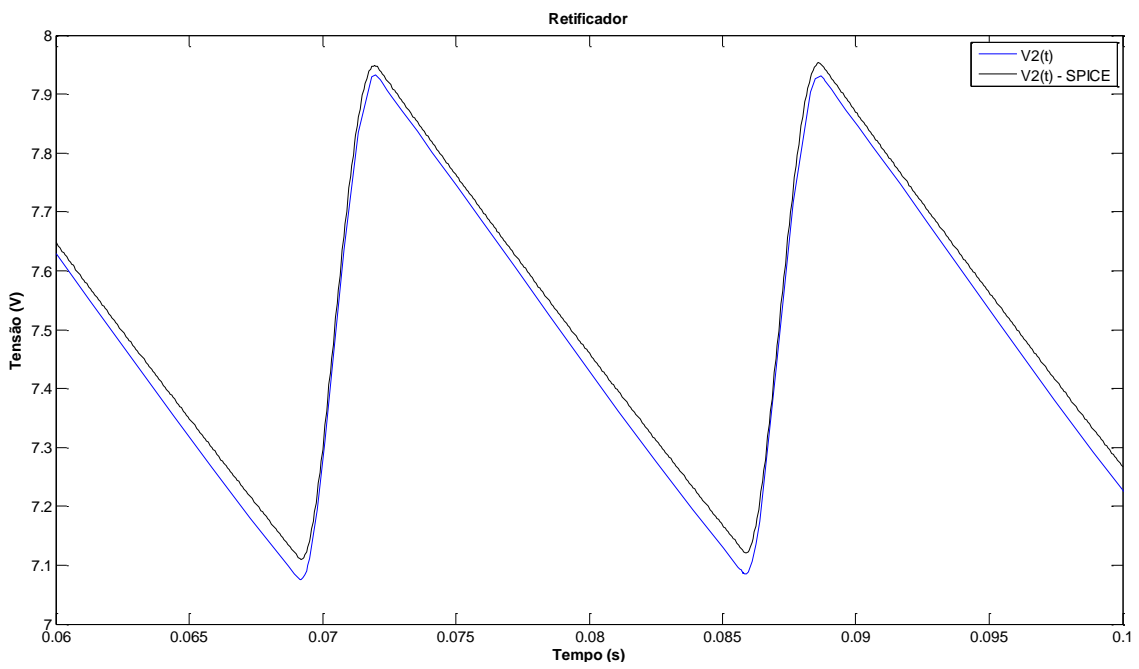


Figura 4.8 – Comparação dos resultados

4.5 Conclusão

Este capítulo apresentou um método para a formulação de redes não-lineares, através de equações de estado. Foi apresentado um artifício para resolver casos onde não é possível explicitar uma variável de um elemento não-linear como função apenas de variáveis de estado. Como foi mostrado na seção 4.3, este método pode ser automatizado, permitindo que uma rede não-linear seja formulada utilizando um computador.