

## 4

# Técnicas Cegas de Estimação de Canal em Sistemas OFDM com Intervalo de Guarda Suficiente

### 4.1

#### Introdução

Dois métodos de estimação cega de canal são abordados neste capítulo: estimação de canal por meio do subespaço de ruído, e estimação de canal via casamento de correlação (*correlation matching*).

Em um primeiro momento, um esquema de estimação cega de canal por meio do subespaço de ruído, próprio para sistemas OFDM-ZP, é descrito na Seção 4.2, com vistas a situar o problema e introduzir alguns conceitos.

Na Seção 4.3, capitalizando a analogia entre sinais OFDM e CDMA, um método de estimação cega de canal baseado no subespaço de ruído e aplicado com sucesso em sistemas CDMA é proposto para sistemas OFDM-ZP. Alguns resultados preliminares encontram-se publicados em [61].

O método proposto é particularizado para sistemas OFDM-CP na Seção 4.4.

A Seção 4.5 apresenta um estimador cego de canal baseado no casamento de correlação, para sistemas OFDM-ZP. Resultados preliminares foram relatados em [62].

Sua contraparte para sistemas OFDM-CP é assunto da Seção 4.6.

Por fim, da Seção 4.7 consta a aferição do desempenho dos diversos estimadores apresentados ao longo deste capítulo.

*Observação:* Ao longo deste capítulo supõe-se que  $L \leq D < P$ , onde  $L$  é a ordem do canal,  $D$  é o comprimento do intervalo de guarda e  $P$  é o tamanho do bloco.

### 4.2

#### Estimação Cega de Canal por meio de Identificação do Subespaço de Ruído: OFDM-ZP

Nesta Seção é apresentado um método de estimação cega de canal, baseado na identificação do subespaço de ruído, próprio para o esquema OFDM-ZP [56]. O modelo dos sinais OFDM-ZP com  $M$  portadoras e intervalo de guarda de

comprimento  $D = P - M$  é (vide (3.10)):

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{x}}_P(i) &= \mathbf{H}_0 \mathbf{F}_M^H \mathbf{s}(i) + \tilde{\mathbf{n}}_P(i) \\ &= \mathbf{H}_0 \tilde{\mathbf{s}}(i) + \tilde{\mathbf{n}}_P(i),\end{aligned}$$

onde  $\mathbf{H}_0$  é a matriz Toeplitz de tamanho  $P \times M$  definida em (3.9),  $\mathbf{F}_M$  é a matriz DFT de  $M$  pontos definida em (2.4),  $\tilde{\mathbf{n}}_P(i)$  é vetor gaussiano branco cujas componentes têm média nula e variância  $\sigma^2 = N_0$ , e  $\tilde{\mathbf{s}} = \mathbf{F}_M^H \mathbf{s}$ .

O método apresentado baseia-se nos seguintes pontos:

- as colunas da matriz  $\mathbf{H}_0$  geram (e portanto, também pertencem a) um subespaço chamado de subespaço de sinal,
- qualquer vetor do subespaço de sinal é ortogonal a qualquer vetor do chamado subespaço de ruído, seu complemento ortogonal.
- a matriz  $\mathbf{H}_0$  e a matriz correlação das observações  $\mathbb{E}[\tilde{\mathbf{x}}_P(i)\tilde{\mathbf{x}}_P(i)^H]$  compartilham do mesmo subespaço de sinal.

A decomposição em valores singulares (*singular value decomposition*, doravante denotada simplesmente “SVD”) [70, 72] da matriz  $\mathbf{H}_0$  é dada por:

$$\mathbf{H}_0 = \mathbf{U}_1 \Sigma \mathbf{U}_2^H. \quad (4.1)$$

Em (4.1),  $\mathbf{U}_1$  é uma matriz unitária de tamanho  $P \times P$  que contém em suas colunas os vetores singulares (*singular vectors*) da esquerda de  $\mathbf{H}_0$ , e  $\mathbf{U}_2$  é uma matriz unitária de tamanho  $M \times M$  que contém em suas colunas os vetores singulares da direita de  $\mathbf{H}_0$ . Ainda em (4.1),  $\Sigma$  é uma matriz “diagonal”<sup>(1)</sup> de tamanho  $P \times M$ . Os primeiros  $K$  elementos de sua diagonal são positivos (não-nulos) e correspondem aos  $K$  valores singulares (*singular values*) de  $\mathbf{H}_0$ , dispostos em ordem decrescente; os elementos restantes da diagonal são nulos. Convém frisar que  $K$  é o posto da matriz decomposta. Uma vez que o posto de  $\mathbf{H}_0$  é  $K = M$ ,  $\mathbf{H}_0$  tem  $M$  valores singulares. Mais ainda, é possível particionar a matriz  $\mathbf{U}_1$  como  $\mathbf{U}_1 = [\mathbf{U}_s \mathbf{U}_n]$  onde  $\mathbf{U}_s$ , de tamanho  $P \times M$ , e  $\mathbf{U}_n$ , de tamanho  $P \times D$ , são bases ortonormais dos chamados subespaço de sinal (*signal subspace*) e subespaço de ruído (*noise subspace*) respectivamente. Em particular, convém ressaltar que, como  $\mathbf{U}_1$  é unitária, então  $\mathbf{U}_n^H \mathbf{U}_s = \mathbf{0}_{D \times M}$ .

<sup>(1)</sup>Alguns autores, como por exemplo Strang em [70], aceitam os conceitos de “matriz diagonal retangular” e “diagonal de uma matriz retangular”. Para esses autores, uma matriz diagonal retangular  $\mathbf{A}$  é tal que os seus elementos obedecem  $a_{ij} = 0$  se  $i \neq j$ , o que vem a ser simplesmente uma generalização do conceito de matriz diagonal quadrada.

A matriz correlação do vetor de observação  $\tilde{\mathbf{x}}_P(i)$ , denotada por  $\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}_P}$ , tem tamanho  $P \times P$  e é definida como:

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}_P} &= \mathbb{E}[\tilde{\mathbf{x}}_P(i)\tilde{\mathbf{x}}_P(i)^H] \\ &= \sigma_s^2 \mathbf{H}_0 \mathbf{H}_0^H + \sigma^2 \mathbf{I}_P,\end{aligned}\quad (4.2)$$

com  $\sigma^2 = N_0$ .

Substituindo (4.1) em (4.2) resulta que:

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}_P} &= \sigma_s^2 \mathbf{U}_1 \Sigma \Sigma^H \mathbf{U}_1^H + \sigma^2 \mathbf{I}_P \\ &= \mathbf{U}_1 \left( \sigma_s^2 \Sigma \Sigma^H + \sigma^2 \mathbf{I}_P \right) \mathbf{U}_1^H \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{U}_s & \mathbf{U}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_s^2 \Lambda_s + \sigma^2 \mathbf{I}_M & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sigma^2 \mathbf{I}_D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_s^H \\ \mathbf{U}_n^H \end{bmatrix}.\end{aligned}\quad (4.3)$$

Em (4.3),  $\Lambda_s$  é matriz diagonal de tamanho  $M \times M$  contendo os valores singulares associados aos vetores singulares que formam  $\mathbf{U}_s$ . Comparando (4.1) e (4.3), verifica-se que as matrizes  $\mathbf{H}_0$  e  $\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}_P}$  compartilham o mesmo subespaço de sinal e o mesmo subespaço de ruído<sup>(2)</sup>.

Lembrando que as colunas da matriz  $\mathbf{H}_0$  pertencem ao subespaço gerado pelas colunas de  $\mathbf{U}_s$ , ou seja, que elas pertencem subespaço de sinal<sup>(3)</sup>, então qualquer vetor  $\mathbf{v} = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_P]^T$ , de tamanho  $P \times 1$ , pertencente ao subespaço de ruído satisfaz:

$$\mathbf{v}^H \mathbf{H}_0 = \mathbf{0}_{1 \times M}.\quad (4.4)$$

Explorando a estrutura da matriz  $\mathbf{H}_0$  (vide (3.9)) e sua dependência com o vetor  $\mathbf{h}$  de tamanho  $(L+1) \times 1$ , é possível reescrever (4.4) como

$$\mathbf{v}^H \mathbf{H}_0 = \mathbf{h}^T \mathbf{V}^* = \mathbf{0}_{1 \times M},\quad (4.5)$$

onde  $\mathbf{V}$  é uma matriz Hankel de tamanho  $(L+1) \times M$  e explicitada a seguir:

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_M \\ v_2 & v_3 & \dots & v_{M+1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ v_{L+1} & v_{L+2} & \dots & v_{L+D} \end{bmatrix}.\quad (4.6)$$

De (4.5), resulta que:

$$\mathbf{v}^H \mathbf{H}_0 = \mathbf{0}_{1 \times M} \Leftrightarrow \mathbf{h}^H \mathbf{V} \mathbf{V}^H \mathbf{h} = 0.\quad (4.7)$$

<sup>(2)</sup>Vale ressaltar todavia que, apesar da nomenclatura, o subespaço de sinal contém também, além do sinal, ruído aditivo gaussiano branco; já o subespaço de ruído contém apenas ruído aditivo gaussiano branco, como é possível constatar em (4.3).

<sup>(3)</sup>A  $i$ -ésima coluna de  $\mathbf{H}_0$  pode ser escrita como  $\mathbf{U}_s \mathbf{U}_s^H \mathbf{a}_i$ , onde  $\mathbf{a}_i$  é um vetor arbitrário do espaço  $\mathbb{C}^P$ .

Sejam agora  $\mathbf{v}_l, l = 1, 2, \dots, D, D$  vetores do subespaço de ruído. Uma escolha natural para os  $D$  vetores  $\mathbf{v}_i$  é utilizar os  $D$  vetores de  $\mathbf{U}_n$ . De (4.7) segue que

$$\mathbf{v}_l^H \mathbf{H}_0 = \mathbf{0}_{1 \times M}, l \in \{1, \dots, D\} \Leftrightarrow \sum_{l=1}^D \mathbf{h}^H \mathbf{V}_l \mathbf{V}_l^H \mathbf{h} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{h}^H \mathbf{W} \mathbf{h} = 0, \quad (4.8)$$

onde

$$\mathbf{W} = \sum_{l=1}^D \mathbf{V}_l \mathbf{V}_l^H. \quad (4.9)$$

Para evitar a solução trivial  $\mathbf{h} = \mathbf{0}$  em (4.8), é necessário estabelecer alguma restrição acerca de  $\mathbf{h}$ . É comum adotar-se a restrição de módulo unitário ou seja  $\|\mathbf{h}\| = 1$ . Assim, uma estimativa do vetor de canal,  $\hat{\mathbf{h}}$ , pode ser obtida resolvendo-se o seguinte problema de minimização com restrição:

$$\hat{\mathbf{h}} = \arg \min_{\|\mathbf{h}\|=1} \{\mathbf{h}^H \mathbf{W} \mathbf{h}\}. \quad (4.10)$$

Nota-se que a função quadrática a ser minimizada em (4.10) nada mais é do que um quociente de Rayleigh [72] de  $\mathbf{h}$  e  $\mathbf{W}$ . Logo,  $\hat{\mathbf{h}}$  é o vetor associado ao menor valor singular de  $\mathbf{W}$  (valor singular este, que é nulo).

Vale frisar também que se  $\hat{\mathbf{h}}$  é uma solução para (4.10), também o é  $\alpha \hat{\mathbf{h}}$ , onde  $\alpha$  é um escalar complexo, com módulo unitário. A ambigüidade da solução é inerente a este método de estimação de canal.

O método de estimação cega de canal acima descrito lança mão portanto de duas SVDs. A primeira provê  $D$  vetores que pertencem<sup>(4)</sup> ao subespaço de ruído. Estes  $D$  vetores estão associados aos  $D$  menores valores singulares de  $\mathbf{R}_{\bar{\mathbf{x}}_P}$ , uma matriz  $P \times P$ . A segunda SVD advém da resolução/minimização de (4.10); a matriz  $\mathbf{W}$  de tamanho  $D \times D$  é decomposta por meio de uma SVD para obter o vetor associado ao seu menor valor singular. O vetor obtido é o vetor  $\hat{\mathbf{h}}$ , uma estimativa do vetor  $\mathbf{h}$ , a menos de um escalar complexo.

Na prática, apenas estimativas  $\hat{\mathbf{R}}_{\bar{\mathbf{x}}_P}(i)$  da matriz correlação estão disponíveis no receptor e portanto, apenas estimativas  $\hat{\mathbf{U}}_n(i)$  de  $\mathbf{U}_n$  podem ser utilizadas. Em decorrência disto, uma estimativa do canal é o vetor  $\hat{\mathbf{h}}(i)$  obtido por meio de (4.10): este vetor é o vetor que mais perto chega de satisfazer a condição de ortogonalidade entre  $\hat{\mathbf{U}}_n$  e  $\mathbf{H}_0$  em termos de mínimos quadrados. Ademais, para cada nova estimativa de  $\mathbf{R}_{\bar{\mathbf{x}}_P}$ , uma nova estimativa do canal pode ser obtida. Convém frisar que a cada nova estimativa, uma nova SVD sobre a matriz  $\hat{\mathbf{R}}_{\bar{\mathbf{x}}_P}(i)$  deve ser efetuada, bem como uma nova matriz  $\mathbf{W}$  deve ser computada, a fim de obter uma nova solução para (4.10). O primeiro passo, a saber, efetuar a SVD de uma matriz de tamanho  $P \times P$  considerável, é computacionalmente penoso

<sup>(4)</sup>na verdade, geram

$(O(P^3))$ .

Quanto à identificabilidade do canal por meio deste método, vale fazer as seguintes considerações. A matriz  $\mathbf{H}_0$  tem posto  $M$  para  $\mathbf{h} \neq \mathbf{0}$ , ou seja,  $\mathbf{H}_0$  tem posto completo (*full column rank*). Assim sendo, o subespaço de ruído tem, invariavelmente, dimensão  $P - M = D$ . Daí decorre que por meio da SVD da matriz correlação obtém-se  $D$  vetores linearmente independentes que pertencem, de forma inequívoca, ao subespaço de ruído. Utilizando estes  $D$  vetores em (4.8), a identificabilidade do canal (a menos de uma ambigüidade representada por um escalar complexo) fica garantida [56].

### 4.3

#### Estimação Cega de Canal por meio do Método das Potências: OFDM-ZP

Em [37] é proposto um método de estimação cega de canal para sistemas CDMA baseado na seguinte igualdade:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left( \sigma^2 \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}_P}^{-1} \right)^m = \mathbf{U}_n \mathbf{U}_n^H, \quad (4.11)$$

onde  $\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}_P}$  é a matriz correlação da observação.

De fato, considere a matriz correlação, dada por (4.2), e sua SVD, como indicada em (4.3). Denotando agora  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_M > 0$  as componentes da matriz diagonal  $\mathbf{\Lambda}_s$  (vide (4.3)), pode-se escrever:

$$\left( \sigma^2 \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}_P}^{-1} \right)^p = [\mathbf{U}_s \ \mathbf{U}_n] \begin{bmatrix} \left( \frac{\sigma_s^2 \mathbf{\Lambda}_s + \sigma^2 \mathbf{I}_M}{\sigma^2} \right)^{-p} & \mathbf{0}_{M \times D} \\ \mathbf{0}_{D \times M} & \mathbf{I}_D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_s^H \\ \mathbf{U}_n^H \end{bmatrix}. \quad (4.12)$$

A matriz  $\frac{\sigma_s^2 \mathbf{\Lambda}_s + \sigma^2 \mathbf{I}_M}{\sigma^2}$  é uma matriz diagonal cujos elementos são da forma:  $\frac{\sigma_s^2 \lambda_k + \sigma^2}{\sigma^2}$ , para  $k = 1, 2, \dots, M$ . Sendo assim,

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \left( \frac{\sigma_s^2 \mathbf{\Lambda}_s + \sigma^2}{\sigma^2} \right)^{-p} = 0. \quad (4.13)$$

Combinando (4.12) e (4.13) fica verificada (4.11).

Basicamente, a expressão (4.11) fornece uma estimativa para o operador  $\mathbf{U}_n \mathbf{U}_n^H$ , que opera a projeção de um vetor do  $\mathbb{C}^P$  no subespaço gerado pelas colunas de  $\mathbf{U}_n$  (ou seja, projeta no subespaço de ruído).

Deseja-se então, explorando a ortogonalidade dos subespaços de sinal e de ruído, *reformular* o problema de identificação cega de canal para sistemas OFDM-ZP, de modo que o produto  $\mathbf{U}_n \mathbf{U}_n^H$  apareça explicitamente na função custo a ser otimizada.

Observando que as colunas da matriz  $\mathbf{H}_0$  são réplicas deslocadas e completadas com zeros do vetor  $\mathbf{h}$ , é possível escrever:

$$\mathbf{H}_0 = [\mathbf{S}_1 \mathbf{h} \ \mathbf{S}_2 \mathbf{h} \ \dots \ \mathbf{S}_M \mathbf{h}]. \quad (4.14)$$

As matrizes  $\mathbf{S}_i$  de tamanho  $P \times (L+1)$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, M\}$  em (4.14) satisfazem:

$$\mathbf{S}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(i-1) \times (L+1)} \\ \mathbf{I}_{L+1} \\ \mathbf{0}_{(P-i-L) \times (L+1)} \end{bmatrix}. \quad (4.15)$$

Uma vez que a  $i$ -ésima coluna de  $\mathbf{H}_0$ , dada por  $\mathbf{S}_i \mathbf{h}$ , com  $\mathbf{S}_i$  definida em (4.15), pertence ao subespaço de sinal, da condição de ortogonalidade entre os subespaços de sinal e de ruído segue que:

$$\mathbf{U}_n^H \mathbf{S}_i \mathbf{h} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \|\mathbf{U}_n^H \mathbf{S}_i \mathbf{h}\|^2 = 0 \Leftrightarrow \mathbf{h}^H \mathbf{S}_i^H \mathbf{U}_n \mathbf{U}_n^H \mathbf{S}_i \mathbf{h} = 0. \quad (4.16)$$

Algumas observações se fazem necessárias neste ponto.

O primeiro comentário, e também o mais óbvio, é que o operador de projeção no subespaço de ruído aparece explicitamente em (4.16). Este operador pode ser determinado de duas formas: a partir da matriz  $\mathbf{U}_n$ , obtida da SVD da matriz correlação, e realizando o cômputo do produto, ou diretamente, por meio de (4.11). Embora a igualdade (4.11) seja somente válida no limite, ficou constatado em [37] que, na prática, para pequenas potências inteiras da inversa da matriz correlação já se consegue uma boa estimativa/aproximação para o operador projeção. Como será visto na Seção de Resultados, o mesmo ocorre para sistemas OFDM-ZP.

A segunda nota diz respeito à analogia dos sinais OFDM e CDMA. Uma expressão semelhante para identificação cega de canal no enlace direto de sistemas CDMA é obtida em [37]: a matriz que faz as vezes da matriz  $\mathbf{S}_i$  contém em suas colunas réplicas deslocadas e completadas com zeros, da assinatura do  $i$ -ésimo usuário na transmissão. Como já discutido no Capítulo 3, o OFDM pode ser visto como um enlace direto CDMA com todas as assinaturas conhecidas pelo receptor. Assim, ao invés de utilizar somente uma “assinatura”, pode-se utilizar todas as assinaturas conhecidas, ou seja, pode-se explorar todas as colunas de  $\mathbf{H}_0$  de forma conjunta.

Levando em conta todas as colunas da matriz  $\mathbf{H}_0$ , tem-se:

$$\mathbf{U}_n^H \mathbf{H}_0 = \mathbf{0}_{D \times M} \Leftrightarrow \|\mathbf{U}_n^H \mathbf{H}_0\|_F^2 = 0. \quad (4.17)$$

Mas,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{U}_n^H \mathbf{H}_0\|_F^2 &= \sum_{i=1}^M \|\mathbf{U}_n^H \mathbf{S}_i \mathbf{h}\|^2 \\ &= \mathbf{h}^H \left( \sum_{i=1}^M \mathbf{S}_i^H \mathbf{U}_n \mathbf{U}_n^H \mathbf{S}_i \right) \mathbf{h}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Logo, substituindo (4.18) em (4.17), a condição de ortogonalidade fica:

$$\mathbf{U}_n^H \mathbf{H}_0 = \mathbf{0}_{D \times M} \Leftrightarrow \mathbf{h}^H \left( \sum_{i=1}^M \mathbf{S}_i^H \mathbf{U}_n \mathbf{U}_n^H \mathbf{S}_i \right) \mathbf{h} = 0. \quad (4.19)$$

Mais uma vez, a fim de evitar a solução trivial, firma-se a restrição de módulo unitário para  $\mathbf{h}$ , isto é,  $\|\mathbf{h}\| = 1$ , e assim, uma estimativa do canal (a menos de um escalar complexo) pode ser obtida por meio de:

$$\hat{\mathbf{h}} = \arg \min_{\|\mathbf{h}\|=1} \left[ \mathbf{h}^H \left( \sum_{i=1}^M \mathbf{S}_i^H \mathbf{U}_n \mathbf{U}_n^H \mathbf{S}_i \right) \mathbf{h} \right]. \quad (4.20)$$

Reconhecendo novamente em (4.20) um quociente de Rayleigh, segue que  $\hat{\mathbf{h}}$  é o vetor associado ao menor valor singular da matriz  $\sum_{i=1}^M \mathbf{S}_i^H \mathbf{U}_n \mathbf{U}_n^H \mathbf{S}_i$  (valor singular este que é nulo, quando emprega-se o verdadeiro subespaço de ruído, ou o verdadeiro operador projeção).

Lançando agora mão de (4.11), levando em conta (4.20), o produto  $\mathbf{U}_n \mathbf{U}_n^H$  pode ser substituído por potências ascendentes inteiras da inversa da matriz correlação  $\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}_P}$  de modo a obter o seguinte estimador de canal (a menos de uma ambigüidade na forma de um escalar complexo):

$$\hat{\mathbf{h}} = \arg \min_{\|\mathbf{h}\|=1} \left[ \mathbf{h}^H \left( \sum_{i=1}^M \mathbf{S}_i^H (\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}_P}^{-1})^m \mathbf{S}_i \right) \mathbf{h} \right]. \quad (4.21)$$

É importante salientar que, a medida que  $m \rightarrow \infty$ , (4.21)  $\rightarrow$  (4.20). Vale também lembrar que, na prática, somente estimativas  $\hat{\mathbf{R}}_{\tilde{\mathbf{x}}_P}(i)$  da matriz correlação estão disponíveis no receptor.

Ao longo do texto, este método de estimação cega de canal, ilustrado por exemplo em (4.21), que utiliza a aproximação do operador de projeção por alguma potência  $m$  da inversa da matriz de correlação das observações, é denominado de “método das potências”.

Propõe-se agora mostrar que os estimadores obtidos em (4.10) e (4.20) são equivalentes. Para tal, basta mostrar que as formas quadráticas a serem minimizadas são equivalentes. Observando (4.8), conclui-se que a forma quadrática em (4.10) pode ser reescrita como:

$$\mathbf{h}^H \mathbf{W} \mathbf{h} = \sum_{i=1}^D \|\mathbf{v}_i^H \mathbf{H}_0\|^2.$$

Assim, basta mostrar que:

$$\sum_{i=1}^D \|\mathbf{v}_i^H \mathbf{H}_0\|^2 = \mathbf{h}^H \left( \sum_{j=1}^M \mathbf{S}_j^H \mathbf{U}_n \mathbf{U}_n^H \mathbf{S}_j \right) \mathbf{h}. \quad (4.22)$$

Senão vejamos:

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^D \|\mathbf{v}_i^H \mathbf{H}_0\|^2 &= \sum_{i=1}^D \sum_{j=1}^M |\mathbf{v}_i^H \mathbf{S}_j \mathbf{h}|^2 \\
 &= \sum_{i=1}^D \sum_{j=1}^M \mathbf{h}^H \mathbf{S}_j^H \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^H \mathbf{S}_j \mathbf{h} \\
 &= \mathbf{h}^H \left[ \sum_{j=1}^M \mathbf{S}_j^H \left( \sum_{i=1}^D \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^H \right) \mathbf{S}_j \right] \mathbf{h} \\
 &= \mathbf{h}^H \left( \sum_{j=1}^M \mathbf{S}_j^H \mathbf{U}_n \mathbf{U}_n^H \mathbf{S}_j \right) \mathbf{h},
 \end{aligned}$$

onde foi usado o seguinte fato  $\sum_{i=1}^D \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^H = \mathbf{U}_n \mathbf{U}_n^H$ .

A igualdade em (4.22) implica que os esquemas de estimação de canal descritos por (4.10) e (4.20) levam à mesma estimativa de canal (a menos de um escalar complexo). Todavia, vale ressaltar que somente graças à nova formulação do problema obtida em (4.20) o operador projeção aparece, permitindo que se tire proveito de (4.11). Ademais, isso implica que a solução obtida por meio de (4.21) tende à solução obtida por meio de (4.10) (ou (4.20)) quando a potência  $m$  tende ao infinito<sup>(5)</sup>.

### 4.3.1 Implementação Alternativa pós-DFT

Nesta Seção, é explorada uma vez mais a ortogonalidade entre os subespaços de sinal e de ruído, levando porém em conta o modelo de sinais pós-DFT para o OFDM-ZP, apresentado na Seção 3.2.2.

O modelo de sinais pós-DFT para o OFDM-ZP com  $M$  portadoras e intervalo de guarda de comprimento  $D = P - M$  é (vide (3.17)):

$$\mathbf{x}_P(i) = \mathbf{D}(\tilde{\mathbf{h}}_P) \mathbf{V} \mathbf{s}(i) + \mathbf{n}_P(i), \quad (4.23)$$

onde  $\mathbf{D}(\tilde{\mathbf{h}}_P)$  é a matriz diagonal de tamanho  $P \times P$  e que tem as componentes do

<sup>(5)</sup>Como poderá ser constatado na Seção de Resultados, na prática para  $m = 3$  já se obtém o efeito desejado, a saber, obtém-se estimativas de qualidade comparável tanto por meio de (4.10) quanto por meio de (4.21).

vetor  $\tilde{\mathbf{h}}_P$  em sua diagonal, sendo:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{h}}_P &= \sqrt{P}\mathbf{F}_P \begin{bmatrix} \mathbf{h}_{(L+1)\times 1} \\ \mathbf{0}_{(P-L-1)\times 1} \end{bmatrix} \\ &= \sqrt{P}\mathbf{F}_P \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{(L+1)} \\ \mathbf{0}_{(P-L-1)\times(L+1)} \end{bmatrix} \mathbf{h} \\ &= \sqrt{P}\mathbf{F}_{P,L+1}\mathbf{h},\end{aligned}\quad (4.24)$$

onde

$$\mathbf{F}_{P,L+1} = \mathbf{F}_P \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{(L+1)} \\ \mathbf{0}_{(P-L-1)\times(L+1)} \end{bmatrix};$$

ou seja,  $\mathbf{F}_{P,L+1}$  é uma matriz de tamanho  $P \times (L + 1)$  que contém as  $L + 1$  primeiras colunas da matriz DFT de  $P$  pontos. Ainda em (4.23),  $\mathbf{V}$  é a matriz de tamanho  $P \times M$  definida em (3.19) (e que *não tem relação* com a matriz  $\mathbf{V}$  da Seção 4.2). Finalmente,  $\mathbf{n}_P(i)$  é vetor gaussiano branco, com vetor média nulo e matriz covariância  $\sigma^2\mathbf{I}_P$ .

A matriz de correlação das observações  $\mathbf{x}_P(i)$ , denotada  $\mathbf{R}_{\mathbf{x}_P}$ , é definida como:

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_{\mathbf{x}_P} &= \mathbb{E}[\mathbf{x}_P(i)\mathbf{x}_P^H(i)] \\ &= \sigma_s^2\mathbf{D}(\tilde{\mathbf{h}}_P)\mathbf{V}\mathbf{V}^H\mathbf{D}(\tilde{\mathbf{h}}_P)^H + \sigma^2\mathbf{I}_P,\end{aligned}\quad (4.25)$$

e possui a seguinte SVD:

$$\mathbf{R}_{\mathbf{x}_P} = [\mathbf{U}'_s \ \mathbf{U}'_n] \begin{bmatrix} \sigma_s^2\mathbf{\Lambda}'_s + \sigma^2\mathbf{I}_M & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sigma^2\mathbf{I}_D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}'_s{}^H \\ \mathbf{U}'_n{}^H \end{bmatrix}. \quad (4.26)$$

Seguindo linha de raciocínio semelhante à que foi apresentada nas seções anteriores, as matrizes  $\mathbf{D}(\tilde{\mathbf{h}}_P)\mathbf{V}$  e  $\mathbf{R}_{\mathbf{x}_P}$  compartilham o mesmo subespaço de sinal e o mesmo subespaço de ruído: em (4.26),  $\mathbf{U}'_s$  de tamanho  $P \times M$  é uma base para o subespaço de sinal da matriz  $\mathbf{D}(\tilde{\mathbf{h}}_P)\mathbf{V}$ , e  $\mathbf{U}'_n$  de tamanho  $P \times D$  é uma base para o subespaço de ruído da matriz  $\mathbf{D}(\tilde{\mathbf{h}}_P)\mathbf{V}$ . Como as colunas de  $\mathbf{D}(\tilde{\mathbf{h}}_P)\mathbf{V}$  pertencem ao subespaço de sinal, então da ortogonalidade entre os subespaços de sinal e de ruído tem-se que:

$$\mathbf{U}'_n{}^H\mathbf{D}(\tilde{\mathbf{h}}_P)\mathbf{V} = \mathbf{0}_{D\times M} \Leftrightarrow \|\mathbf{U}'_n{}^H\mathbf{D}(\tilde{\mathbf{h}}_P)\mathbf{V}\|_F^2 = 0. \quad (4.27)$$

Observando que é possível reescrever  $\mathbf{D}(\tilde{\mathbf{h}}_P)\mathbf{V}$  como:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(\tilde{\mathbf{h}}_P)\mathbf{V} &= \text{diag}(\tilde{h}_1 \tilde{h}_2 \dots \tilde{h}_P) [\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 \dots \mathbf{v}_M] \\ &= \begin{bmatrix} \tilde{h}_1 v_{11} & \tilde{h}_1 v_{21} & \dots & \tilde{h}_1 v_{M1} \\ \tilde{h}_2 v_{12} & \tilde{h}_2 v_{22} & \dots & \tilde{h}_2 v_{M2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{h}_P v_{1P} & \tilde{h}_P v_{2P} & \dots & \tilde{h}_P v_{MP} \end{bmatrix} \\ &= [\text{diag}(\mathbf{v}_1)\tilde{\mathbf{h}}_P \text{diag}(\mathbf{v}_2)\tilde{\mathbf{h}}_P \dots \text{diag}(\mathbf{v}_M)\tilde{\mathbf{h}}_P], \end{aligned} \quad (4.28)$$

chega-se a:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{U}'_n \mathbf{D}(\tilde{\mathbf{h}}_P)\mathbf{V}\|_F^2 &= \sum_{k=1}^M \tilde{\mathbf{h}}_P^H \text{diag}(\mathbf{v}_k)^H \mathbf{U}'_n \mathbf{U}'_n^H \text{diag}(\mathbf{v}_k) \tilde{\mathbf{h}}_P \\ &= \tilde{\mathbf{h}}_P^H \left[ \sum_{k=1}^M \text{diag}(\mathbf{v}_k)^H \mathbf{U}'_n \mathbf{U}'_n^H \text{diag}(\mathbf{v}_k) \right] \tilde{\mathbf{h}}_P \\ &= \tilde{\mathbf{h}}_P^H \left[ \sum_{k=1}^M \mathbf{v}_k^* \mathbf{v}_k^T \odot \mathbf{U}'_n \mathbf{U}'_n^H \right] \tilde{\mathbf{h}}_P \\ &= \tilde{\mathbf{h}}_P^H \left[ \mathbf{V}^* \mathbf{V}^T \odot \mathbf{U}'_n \mathbf{U}'_n^H \right] \tilde{\mathbf{h}}_P \\ &= P \mathbf{h}^H \mathbf{F}_{P,L+1}^H \left[ \mathbf{V}^* \mathbf{V}^T \odot \mathbf{U}'_n \mathbf{U}'_n^H \right] \mathbf{F}_{P,L+1} \mathbf{h}, \end{aligned} \quad (4.29)$$

onde os seguintes fatos foram usados:

$$\text{diag}(\mathbf{u})\mathbf{A}\text{diag}(\mathbf{v}) = (\mathbf{u}\mathbf{v}^T) \odot \mathbf{A}$$

e

$$\sum_i (\mathbf{B}_i \odot \mathbf{A}) = \left( \sum_i \mathbf{B}_i \right) \odot \mathbf{A}.$$

Substituindo-se agora (4.29) em (4.27) e impondo a restrição  $\|\mathbf{h}\| = 1$  para evitar a solução trivial, chega-se ao seguinte estimador de canal:

$$\hat{\mathbf{h}} = \arg \min_{\substack{\mathbf{h} \\ \|\mathbf{h}\|=1}} \left[ \mathbf{h}^H \mathbf{F}_{P,L+1}^H \left[ \mathbf{V}^* \mathbf{V}^T \odot \mathbf{U}'_n \mathbf{U}'_n^H \right] \mathbf{F}_{P,L+1} \mathbf{h} \right], \quad (4.30)$$

que também padece de uma ambigüidade modelada por um escalar complexo. O vetor solução é o vetor associado ao menor valor singular da matriz de tamanho  $(L+1) \times (L+1)$ :

$$\mathbf{F}_{P,L+1}^H \left[ \mathbf{V}^* \mathbf{V}^T \odot \mathbf{U}'_n \mathbf{U}'_n^H \right] \mathbf{F}_{P,L+1}.$$

É interessante notar que o operador projeção no subespaço de ruído de  $\mathbf{R}_{\mathbf{x}_P}$  aparece explicitamente em (4.30). É possível portanto obter  $\mathbf{U}'_n$  a partir da SVD de  $\mathbf{R}_{\mathbf{x}_P}$  e

computar o produto  $\mathbf{U}'_n \mathbf{U}'_n{}^H$ , ou obter diretamente o operador projeção utilizando (4.11).

Assim, o estimador de canal baseado em potências ascendentes da inversa da matriz correlação  $\mathbf{R}_{\mathbf{x}_P}$  é dado por:

$$\hat{\mathbf{h}} = \arg \min_{\|\mathbf{h}\|=1} \left[ \mathbf{h}^H \mathbf{F}_{P,L+1}^H [\mathbf{V}^* \mathbf{V}^T \odot \mathbf{R}_{\mathbf{x}_P}^{-m}] \mathbf{F}_{P,L+1} \mathbf{h} \right]. \quad (4.31)$$

Convém frisar que, tanto em (4.30) quanto em (4.11), o produto  $\mathbf{V}^* \mathbf{V}^T$  e  $\mathbf{F}_{P,L+1}$  podem ser pré-computados e pré-allocados no receptor, visto que as matrizes  $\mathbf{V}$  e  $\mathbf{F}_{P,L+1}$  só dependem de matrizes DFTs. Ademais, vale ressaltar também a presença de um produto elemento-a-elemento de matrizes (produto de Hadamard), uma operação computacionalmente menos custosa do que um produto matricial. Na prática, apenas estimativas  $\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{x}_P}(i)$  de  $\mathbf{R}_{\mathbf{x}_P}$  estão disponíveis. Estas estimativas são empregadas em (4.31).

A seguir, mostra-se que, apesar de derivados de forma independente, os estimadores dados por (4.30) e (4.20) (e portanto (4.10)) são equivalentes. Para tal, basta mostrar que:

$$\|\mathbf{U}'_n \mathbf{H}\|_F^2 = \|\mathbf{U}'_n \mathbf{D}(\tilde{\mathbf{h}}_P) \mathbf{V}\|_F^2.$$

Lembrando que

$$\tilde{\mathbf{x}}_P(i) = \mathbf{F}_P^H \mathbf{x}_P(i) = \mathbf{F}_P^H \mathbf{D}(\tilde{\mathbf{h}}_P) \mathbf{V} \mathbf{s}(i) + \tilde{\mathbf{n}}_P(i),$$

e comparando com

$$\tilde{\mathbf{x}}_P(i) = \mathbf{H}_0 \mathbf{F}_M^H \mathbf{s}(i) + \tilde{\mathbf{n}}_P(i),$$

conclui-se que

$$\mathbf{H}_0 = \mathbf{F}_P^H \mathbf{D}(\tilde{\mathbf{h}}_P) \mathbf{V} \mathbf{F}_M.$$

Observando agora que  $\mathbf{R}_{\mathbf{x}_P} = \mathbf{F}_P \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}_P} \mathbf{F}_P^H$ ,  $\mathbf{R}_{\mathbf{x}_P}$  pode ser vista como obtida a partir de  $\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}_P}$  por meio de uma transformação de similaridade (uma vez que  $\mathbf{F}_P$  é unitária), e portanto tem-se que  $\Lambda'_s = \Lambda_s$  e  $[\mathbf{U}'_s \ \mathbf{U}'_n] = \mathbf{F}_P [\mathbf{U}_s \ \mathbf{U}_n]$  em (4.26).

Assim,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{U}'_n \mathbf{H}_0\|_F^2 &= \|\mathbf{U}'_n \mathbf{F}_P^H \mathbf{D}(\tilde{\mathbf{h}}_P) \mathbf{V} \mathbf{F}_M^H\|_F^2 \\ &= \|\mathbf{U}'_n \mathbf{F}_P^H \mathbf{D}(\tilde{\mathbf{h}}_P) \mathbf{V}\|_F^2 \\ &= \|\mathbf{U}'_n \mathbf{D}(\tilde{\mathbf{h}}_P) \mathbf{V}\|_F^2 \end{aligned}$$

como queria-se demonstrar.

#### 4.4

#### Estimação Cega de Canal por meio do Método das Potências: OFDM-CP

O modelo dos sinais OFDM-CP com  $M$  portadoras, e intervalo de guarda  $D = P - M$  é dado por (vide (2.21)):

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{\text{CP}}(i) &= \mathbf{H}\mathbf{F}_{\text{CP}}\mathbf{s}(i) + \mathbf{H}_{\text{IBI}}\mathbf{F}_{\text{CP}}\mathbf{s}(i-1) + \mathbf{n}(i) \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{\text{IBI}} & \mathbf{H} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{\text{CP}} & \mathbf{0}_{P \times M} \\ \mathbf{0}_{P \times M} & \mathbf{F}_{\text{CP}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{s}(i-1) \\ \mathbf{s}(i) \end{bmatrix} + \mathbf{n}(i), \end{aligned}$$

com  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{H}_{\text{IBI}}$  e  $\mathbf{F}_{\text{CP}}$  definidos em (2.16), (2.17) e (2.10) respectivamente; o vetor observação  $\mathbf{r}_{\text{CP}}(i)$  tem comprimento  $P$ , o vetor de dados  $\mathbf{s}(i)$  possui  $M$  componentes, e  $\mathbf{n}(i)$  é vetor gaussiano branco cujos elementos possuem média nula e variância  $\sigma^2 = N_0$ .

Definindo a seguinte matriz de tamanho  $P \times M$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{D \times (M-D)} & \vdots & \mathbf{I}_D \\ & \mathbf{I}_M & \end{bmatrix} \\ &= [\mathbf{f}_1 \ \cdots \ \mathbf{f}_M] \end{aligned} \quad (4.32)$$

e observando (2.10), tem-se que

$$\mathbf{F}_{\text{CP}} = \mathbf{F}\mathbf{F}_M^H,$$

de modo que a equação (2.21) pode ser reescrita como:

$$\mathbf{r}_{\text{CP}}(i) = \begin{bmatrix} \mathbf{H}\mathbf{F} & \mathbf{H}_{\text{IBI}}\mathbf{F} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F}_M^H\mathbf{s}(i-1) \\ \mathbf{F}_M^H\mathbf{s}(i) \end{bmatrix} + \mathbf{n}(i).$$

Uma condição necessária para garantir a existência do subespaço de ruído é  $P > 2M$ . Para sistemas OFDM usuais, essa desigualdade não se verifica<sup>(6)</sup> e é preciso portanto considerar mais de um vetor observação  $\mathbf{r}_{\text{CP}}(i)$  simultaneamente. De [40], sabe-se que é possível aplicar as técnicas de subespaço utilizando-se apenas

<sup>(6)</sup>é usual [11, 13, 15] ter-se  $P = \frac{5}{4}M$ , ou seja o intervalo de guarda representa 25% do símbolo OFDM original.

2 vetores observação por vez, como segue<sup>(7)</sup>:

$$\begin{aligned}
 \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{r}_{\text{CP}}^{(t)}(i-1) \\ \mathbf{r}_{\text{CP}}(i) \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{r}}(i)} &= \begin{bmatrix} \mathbf{H}_t & \mathbf{0}_{(P-L) \times P} \\ \mathbf{H}_{\text{IBI}} & \mathbf{H} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F} & \mathbf{0}_{P \times M} \\ \mathbf{0}_{P \times M} & \mathbf{F} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F}_M^H \mathbf{s}(i-1) \\ \mathbf{F}_M^H \mathbf{s}(i) \end{bmatrix} \\
 &+ \begin{bmatrix} \mathbf{n}^{(t)}(i-1) \\ \mathbf{n}(i) \end{bmatrix} \\
 &= \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{H}_t \mathbf{F} & \mathbf{0}_{(P-L) \times M} \\ \mathbf{H}_{\text{IBI}} \mathbf{F} & \mathbf{H} \mathbf{F} \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{A}}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{F}_M^H \mathbf{s}(i-1) \\ \mathbf{F}_M^H \mathbf{s}(i) \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{x}}(i)} \\
 &+ \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{n}^{(t)}(i-1) \\ \mathbf{n}(i) \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{n}}(i)}, \tag{4.33}
 \end{aligned}$$

com  $\mathbf{F}$  definida em (4.32). Em (4.33),  $\bar{\mathbf{r}}(i)$  é um vetor de tamanho  $(2P - L) \times 1$ , bem como  $\bar{\mathbf{n}}(i)$ . Por sua vez,  $\bar{\mathbf{A}}$  tem tamanho  $(2P - L) \times 2M$ . Já o vetor  $\bar{\mathbf{x}}(i)$  possui  $2M$  componentes.

Em (4.33),  $\mathbf{r}_{\text{CP}}^{(t)}(i-1)$  (respectivamente  $\mathbf{n}^{(t)}(i-1)$ ) é o vetor que contém os últimos  $P - L$  elementos do vetor  $\mathbf{r}_{\text{CP}}(i-1)$  (respectivamente  $\mathbf{n}(i-1)$ ). Ainda em (4.33),  $\mathbf{H}_t$  é uma matriz Toeplitz de tamanho  $(P - L) \times P$  com primeira coluna  $[h_L \quad \underbrace{0 \cdots 0}_{P-L-1 \text{ zeros}}]^T$  e primeira linha  $[h_L \cdots h_0 \quad \underbrace{0 \cdots 0}_{P-L-1 \text{ zeros}}]$  ou seja:

$$\mathbf{H}_t = \begin{bmatrix} h_L & \cdots & h_0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & h_L & \cdots & h_0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & h_L & \cdots & h_0 \end{bmatrix}. \tag{4.34}$$

A matriz de correlação das observações  $\bar{\mathbf{r}}(i)$  em (4.33), denotada  $\mathbf{R}_{\bar{\mathbf{r}}}$  e de tamanho  $(2P - L) \times (2P - L)$ , é definida como:

$$\mathbf{R}_{\bar{\mathbf{r}}} = \mathbb{E}[\bar{\mathbf{r}}(i)\bar{\mathbf{r}}^H(i)] \tag{4.35}$$

$$= \sigma_s^2 \bar{\mathbf{A}} \bar{\mathbf{A}}^H + \sigma^2 \mathbf{I}_{2P-L}, \tag{4.36}$$

e pode ser decomposta por SVD como segue:

$$\mathbf{R}_{\bar{\mathbf{r}}} = [\mathbf{U}_s \quad \mathbf{U}_n] \begin{bmatrix} \sigma_s^2 \boldsymbol{\Lambda}_s + \sigma^2 \mathbf{I}_{2M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sigma^2 \mathbf{I}_{2D-L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_s^H \\ \mathbf{U}_n^H \end{bmatrix}. \tag{4.37}$$

Da condição de ortogonalidade dos subespaços de sinal e de ruído, e sabendo que

<sup>(7)</sup>de modo a contemplar também o caso  $L = D$ , ou ainda  $\hat{L} = D$ .

as colunas de  $\bar{\mathbf{A}}$  pertencem ao subespaço de sinal, tem-se que:

$$\mathbf{U}_n^H \bar{\mathbf{A}} = \mathbf{0}_{(2D-L) \times 2M}. \quad (4.38)$$

Neste ponto, pode-se proceder de forma análoga à Seção 4.2, isto é seguindo os moldes de (4.5), (4.7) e (4.8) com  $\bar{\mathbf{A}}$  fazendo as vezes de  $\mathbf{H}_0$ , ou escolher um enfoque semelhante ao da Seção 4.3 que explicita o operador projeção no subespaço de ruído de  $\bar{\mathbf{A}}$ . Desenvolvimentos semelhantes à primeira opção podem ser encontrados em [39, 40, 42]. A seguir, adota-se a segunda alternativa, resultando num estimador de canal semelhante ao apresentado na Seção 4.3.

As colunas de  $\bar{\mathbf{A}}$  dependem do vetor  $\mathbf{h}$ . A seguir, esta dependência é explicitada.

Considerando primeiro a matriz  $\mathbf{HF}$ , pode-se escrever:

$$\mathbf{HF} = \mathbf{H}[\mathbf{f}_1 \cdots \mathbf{f}_M], \quad (4.39)$$

de tal forma que a  $k$ -ésima coluna de  $\mathbf{HF}$  vale:

$$\mathbf{H}\mathbf{f}_k = \mathbf{S}_{\text{CP}}^{(k)} \mathbf{h} \quad (4.40)$$

onde  $\mathbf{S}_{\text{CP}}^{(k)}$  é uma matriz Toeplitz de tamanho  $P \times (L + 1)$  com primeira coluna  $\mathbf{f}_k$  e primeira linha  $[f_k^{(1)} \underbrace{0 \cdots 0}_{L \text{ zeros}}]$ , e  $f_k^{(l)}$  é o  $l$ -ésimo elemento do vetor  $\mathbf{f}_k$ . Portanto

$$\mathbf{HF} = [\mathbf{S}_{\text{CP}}^{(1)} \mathbf{h} \cdots \mathbf{S}_{\text{CP}}^{(M)} \mathbf{h}]. \quad (4.41)$$

Assim conclui-se que a matriz  $\begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(P-L) \times M} \\ \mathbf{HF} \end{bmatrix}$ , presente na matriz  $\bar{\mathbf{A}}$  em (4.33) pode ser escrita como:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(P-L) \times M} \\ \mathbf{HF} \end{bmatrix} = [\bar{\mathbf{S}}_{\text{CP}}^{(1)} \mathbf{h} \cdots \bar{\mathbf{S}}_{\text{CP}}^{(M)} \mathbf{h}],$$

com

$$\bar{\mathbf{S}}_{\text{CP}}^{(k)} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(P-L) \times (L+1)} \\ \mathbf{S}_{\text{CP}}^{(k)} \end{bmatrix}. \quad (4.42)$$

Considerando agora a matriz  $\mathbf{H}_t \mathbf{F}$ , tem-se que:

$$\mathbf{H}_t \mathbf{F} = \mathbf{H}_t[\mathbf{f}_1 \cdots \mathbf{f}_M], \quad (4.43)$$

de modo que sua  $k$ -ésima coluna se escreve:

$$\mathbf{H}_t \mathbf{f}_k = \mathbf{S}_{\text{CP},t}^{(k)} \mathbf{h}, \quad (4.44)$$

onde  $\mathbf{S}_{\text{CP},t}^{(k)}$  é uma matriz de tamanho  $(P - L) \times (L + 1)$  dada por:

$$\mathbf{S}_{\text{CP},t}^{(k)} = \begin{bmatrix} f_k^{(L+1)} & f_k^{(L)} & \cdots & f_k^{(2)} & f_k^{(1)} \\ f_k^{(L+2)} & f_k^{(L+1)} & \cdots & f_k^{(3)} & f_k^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_k^{(P)} & f_k^{(P-1)} & \cdots & f_k^{(P-L+1)} & f_k^{(P-L)} \end{bmatrix}. \quad (4.45)$$

Segue que

$$\mathbf{H}_t \mathbf{F} = [\mathbf{S}_{\text{CP},t}^{(1)} \mathbf{h} \cdots \mathbf{S}_{\text{CP},t}^{(M)} \mathbf{h}]. \quad (4.46)$$

Por fim, a  $k$ -ésima coluna da matriz  $\mathbf{H}_{\text{IBI}} \mathbf{F}$  pode ser expressa como:

$$\mathbf{H}_{\text{IBI}} \mathbf{f}_k = \mathbf{S}_{\text{CP,IBI}}^{(k)} \mathbf{h},$$

onde  $\mathbf{S}_{\text{CP,IBI}}^{(k)}$  é uma matriz Toeplitz de tamanho  $P \times (L+1)$  com primeira coluna nula e primeira linha  $[0 \ f_k^{(P)} \ \cdots \ f_k^{(P-L+1)}]$ , de modo que

$$\mathbf{H}_{\text{IBI}} \mathbf{F} = [\mathbf{S}_{\text{CP,IBI}}^{(1)} \mathbf{h} \cdots \mathbf{S}_{\text{CP,IBI}}^{(M)} \mathbf{h}]. \quad (4.47)$$

Capitalizando (4.46) e (4.47), segue que a matriz  $\begin{bmatrix} \mathbf{H}_t \mathbf{F} \\ \mathbf{H}_{\text{IBI}} \mathbf{F} \end{bmatrix}$  presente em (4.33) admite portanto a seguinte expressão alternativa:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_t \mathbf{F} \\ \mathbf{H}_{\text{IBI}} \mathbf{F} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{\text{CP},t}^{(1)} \mathbf{h} & \cdots & \mathbf{S}_{\text{CP},t}^{(M)} \mathbf{h} \\ \mathbf{S}_{\text{CP,IBI}}^{(1)} \mathbf{h} & \cdots & \mathbf{S}_{\text{CP,IBI}}^{(M)} \mathbf{h} \end{bmatrix} \quad (4.48)$$

$$= [\bar{\mathbf{S}}_{\text{CP},t}^{(1)} \mathbf{h} \cdots \bar{\mathbf{S}}_{\text{CP},t}^{(M)} \mathbf{h}], \quad (4.49)$$

onde  $\bar{\mathbf{S}}_{\text{CP},t}^{(k)}$  é uma matriz Toeplitz de tamanho  $(2P-L) \times (L+1)$  com primeira coluna  $[f_k^{(L+1)} \ \cdots \ f_k^{(P)}]^T$  e primeira linha  $[f_k^{(L+1)} \ \cdots \ f_k^{(1)}]$ .

Portanto, a matriz  $\bar{\mathbf{A}}$  pode ser reescrita como:

$$\bar{\mathbf{A}} = [\bar{\mathbf{S}}_{\text{CP},t}^{(1)} \mathbf{h} \cdots \bar{\mathbf{S}}_{\text{CP},t}^{(M)} \mathbf{h} \ \bar{\mathbf{S}}_{\text{CP}}^{(1)} \mathbf{h} \cdots \bar{\mathbf{S}}_{\text{CP}}^{(M)} \mathbf{h}] \quad (4.50)$$

$$= [\bar{\mathbf{S}}_1 \mathbf{h} \cdots \bar{\mathbf{S}}_{2M} \mathbf{h}], \quad (4.51)$$

com

$$\bar{\mathbf{S}}_k = \begin{cases} \bar{\mathbf{S}}_{\text{CP},t}^{(k)} & , k = 1, \dots, M \\ \bar{\mathbf{S}}_{\text{CP}}^{(k-M)} & , k = M+1, \dots, 2M \end{cases}. \quad (4.52)$$

Da condição de ortogonalidade entre os subespaços decorre que, para cada coluna de  $\bar{\mathbf{A}}$ :

$$\mathbf{U}_n^H \bar{\mathbf{S}}_k \mathbf{h} = \mathbf{0} \quad , \quad k = 1, \dots, 2M. \quad (4.53)$$

Logo, de (4.38), chega-se a

$$\mathbf{U}_n^H \bar{\mathbf{A}} = \mathbf{0}_{(2D-L) \times 2M} \Leftrightarrow \|\mathbf{U}_n^H \bar{\mathbf{A}}\|_F^2 = 0 \Leftrightarrow \mathbf{h}^H \left( \sum_{i=1}^{2M} \bar{\mathbf{S}}_i^H \mathbf{U}_n \mathbf{U}_n^H \bar{\mathbf{S}}_i \right) \mathbf{h} = 0, \quad (4.54)$$

e portanto pode-se obter uma estimativa para o canal (a menos de um escalar complexo) por meio de:

$$\hat{\mathbf{h}} = \arg \min_{\|\mathbf{h}\|=1} \left[ \mathbf{h}^H \left( \sum_{i=1}^{2M} \bar{\mathbf{S}}_i^H \mathbf{U}_n \mathbf{U}_n^H \bar{\mathbf{S}}_i \right) \mathbf{h} \right]. \quad (4.55)$$

Reconhecendo novamente em (4.55) um quociente de Rayleigh, segue que  $\hat{\mathbf{h}}$  é o vetor associado ao menor valor singular da matriz  $\sum_{i=1}^{2M} \bar{\mathbf{S}}_i^H \mathbf{U}_n \mathbf{U}_n^H \bar{\mathbf{S}}_i$ .

Lançando agora mão de (4.11), levando em conta (4.55), o produto  $\mathbf{U}_n \mathbf{U}_n^H$  pode ser substituído por potências ascendentes inteiras da inversa da matriz correlação  $\mathbf{R}_{\bar{\mathbf{r}}}$  de modo a obter o seguinte estimador de canal (a menos de uma ambigüidade):

$$\hat{\mathbf{h}} = \arg \min_{\|\mathbf{h}\|=1} \left[ \mathbf{h}^H \left( \sum_{i=1}^{2M} \bar{\mathbf{S}}_i^H (\mathbf{R}_{\bar{\mathbf{r}}}^{-1})^m \bar{\mathbf{S}}_i \right) \mathbf{h} \right]. \quad (4.56)$$

Quanto à identificabilidade do canal por meio do subespaço do ruído, foi demonstrado em [40] que, contanto que nenhuma portadora seja atingida por um zero do canal na frequência (isto é  $\tilde{h}_M[k] \neq 0$ ,  $k = 0, \dots, M - 1$ ), a matriz  $\bar{\mathbf{A}}$  tem posto  $2M$ , ou seja tem posto completo. Neste caso, o subespaço de ruído tem dimensão  $2P - L - 2M = 2D - L$ . O algoritmo de [40] extrai  $2D - L$  vetores linearmente independentes pertencentes ao subespaço de ruído por meio da SVD da matriz correlação  $\mathbf{R}_{\bar{\mathbf{r}}}$ . Estes  $2D - L$  vetores são empregados de forma análoga à (4.8) em uma função custo semelhante à (4.10).

Caso  $Z$  portadoras ( $Z \neq 0$ ) sejam atingidas por zeros (da resposta em frequência) do canal, a matriz  $\bar{\mathbf{A}}$  tem posto reduzido (*rank deficient*): seu posto é  $2M - Z$  [40] (a dimensão do subespaço de ruído é  $2D - L + Z$ ). Como na prática não é possível determinar o número  $Z$  de zeros atingindo as portadoras, somente  $2D - L$  vetores dentre os  $2D - L + Z$  disponíveis são empregados acarretando que o algoritmo em [40] não garante a identificabilidade do canal.

É importante ressaltar que o método proposto nesta seção não padece desse problema: como utiliza-se uma aproximação para o operador projeção, todos os  $2D - L + Z$  vetores são, implicitamente, utilizados, e a identificabilidade do canal (a menos de um escalar complexo) é portanto garantida à medida que  $\mathbf{R}_{\bar{\mathbf{r}}}^{-m} \rightarrow \mathbf{U}_n \mathbf{U}_n^H$ .

## 4.5

### Estimação Cega de Canal por meio de Casamento de Correlação: OFDM-ZP

Nesta Seção, é proposto um método de estimação cega de canal, baseado no casamento de correlação (do inglês *correlation matching*) e já empregado com sucesso em sistemas CDMA [44, 45].

O modelo de sinais é o mesmo adotado na Seção 4.2.

Uma vez que a matriz correlação pode ser parametrizada pelo vetor contendo a resposta ao impulso do canal, a idéia básica deste método é obter o vetor de parâmetros que minimiza alguma métrica envolvendo a matriz correlação parametri-

zada e suas estimativas adquiridas de alguma forma, ao longo do tempo. A métrica adotada a seguir é o quadrado da norma de Frobenius da diferença entre a matriz correlação e suas estimativas, ou seja, a distância euclidiana entre as matrizes em questão.

Define-se a matriz erro  $\mathbf{E}(i)$  entre a matriz de correlação suposta conhecida (isto é, teórica)  $\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}_P} = \mathbb{E}[\tilde{\mathbf{x}}_P(i)\tilde{\mathbf{x}}_P(i)^H]$  e a matriz de correlação estimada  $\hat{\mathbf{R}}_{\tilde{\mathbf{x}}_P}(i)$  obtida de alguma forma a partir das observações  $\tilde{\mathbf{x}}_P(i)$ , como segue:

$$\mathbf{E}(i) = \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}_P} - \hat{\mathbf{R}}_{\tilde{\mathbf{x}}_P}(i), \quad (4.57)$$

com

$$\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}_P} = \sigma_s^2 \mathbf{H}_0 \mathbf{H}_0^H + \sigma^2 \mathbf{I}_P. \quad (4.58)$$

Seja agora a função custo  $J(i)$  dada por:

$$J(i) = \|\mathbf{E}(i)\|_F^2 = \text{vec}^H(\mathbf{E}(i))\text{vec}(\mathbf{E}(i)). \quad (4.59)$$

Utilizando (4.57) pode-se escrever:

$$\text{vec}(\mathbf{E}(i)) = \text{vec}(\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}_P}) - \text{vec}(\hat{\mathbf{R}}_{\tilde{\mathbf{x}}_P}(i)). \quad (4.60)$$

Aplicando o operador  $\text{vec}\{\cdot\}$  em (4.58), tem-se:

$$\begin{aligned} \text{vec}(\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}_P}) &= \text{vec}(\sigma_s^2 \mathbf{H}_0 \mathbf{H}_0^H + \sigma^2 \mathbf{I}_P) \\ &= \text{vec}(\sigma_s^2 \mathbf{H}_0 \mathbf{H}_0^H) + \text{vec}(\sigma^2 \mathbf{I}_P). \end{aligned} \quad (4.61)$$

Lembrando que  $\mathbf{H}_0 = [\mathbf{S}_1 \mathbf{h} \ \mathbf{S}_2 \mathbf{h} \ \dots \ \mathbf{S}_M \mathbf{h}]$ , com as matrizes  $\mathbf{S}_i$  definidas em (4.15), tem-se que:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_0 \mathbf{H}_0^H &= [\mathbf{S}_1 \mathbf{h} \ \mathbf{S}_2 \mathbf{h} \ \dots \ \mathbf{S}_M \mathbf{h}] \begin{bmatrix} \mathbf{h}^H \mathbf{S}_1^H \\ \mathbf{h}^H \mathbf{S}_2^H \\ \vdots \\ \mathbf{h}^H \mathbf{S}_M^H \end{bmatrix} \\ &= \sum_{k=1}^M \mathbf{S}_k \mathbf{h} \mathbf{h}^H \mathbf{S}_k^H. \end{aligned}$$

De modo que

$$\begin{aligned}
 \text{vec}(\sigma_s^2 \mathbf{H}_0 \mathbf{H}_0^H) &= \text{vec}\left(\sigma_s^2 \sum_{k=1}^M \mathbf{S}_k \mathbf{h} \mathbf{h}^H \mathbf{S}_k^H\right) \\
 &= \sum_{k=1}^M \text{vec}(\mathbf{S}_k \sigma_s^2 \mathbf{h} \mathbf{h}^H \mathbf{S}_k^H) \\
 &= \sum_{k=1}^M \text{vec}(\mathbf{S}_k \mathcal{X} \mathbf{S}_k^H), \tag{4.62}
 \end{aligned}$$

com  $\mathcal{X} = \sigma_s^2 \mathbf{h} \mathbf{h}^H$ .

Substituindo (4.62) em (4.61), e utilizando o seguinte fato [71]:

$$\text{vec}(\mathbf{S}_k \mathcal{X} \mathbf{S}_k^H) = (\mathbf{S}_k^* \otimes \mathbf{S}_k) \text{vec}(\mathcal{X}),$$

resulta que:

$$\begin{aligned}
 \text{vec}(\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}_P}) &= \sum_{k=1}^M (\mathbf{S}_k^* \otimes \mathbf{S}_k) \text{vec}(\mathcal{X}) + \text{vec}(\mathbf{I}_P) \sigma^2 \\
 &= \mathbf{M} \text{vec}(\mathcal{X}) + \text{vec}(\mathbf{I}_P) \sigma^2, \tag{4.63}
 \end{aligned}$$

onde  $\mathbf{M} = \sum_{k=1}^M (\mathbf{S}_k^* \otimes \mathbf{S}_k)$  é uma matriz conhecida e de tamanho  $P^2 \times (L+1)^2$ .

Substituindo (4.63) em (4.60), obtem-se:

$$\text{vec}(\mathbf{E}(i)) = \mathbf{M} \text{vec}(\mathcal{X}) + \text{vec}(\mathbf{I}_P) \sigma^2 - \text{vec}(\hat{\mathbf{R}}_{\tilde{\mathbf{x}}_P}(i)). \tag{4.64}$$

Definindo agora, para facilitar a notação, os seguintes vetores:

$$\mathbf{v} = \text{vec}(\mathcal{X}), \quad \mathbf{i} = \text{vec}(\mathbf{I}_P), \quad \mathbf{q}(i) = \text{vec}(\hat{\mathbf{R}}_{\tilde{\mathbf{x}}_P}(i)),$$

e de posse de (4.64) pode-se reescrever a função custo em (4.59) como segue:

$$\begin{aligned}
 J(i) &= \left\| \mathbf{M} \text{vec}(\mathcal{X}) + \sigma^2 \text{vec}(\mathbf{I}_P) - \text{vec}(\hat{\mathbf{R}}_{\tilde{\mathbf{x}}_P}(i)) \right\|^2 \\
 &= \left[ \mathbf{M} \mathbf{v} + \sigma^2 \mathbf{i} - \mathbf{q}(i) \right]^H \left[ \mathbf{M} \mathbf{v} + \sigma^2 \mathbf{i} - \mathbf{q}(i) \right] \\
 &= \mathbf{v}^H \mathbf{M}^H \mathbf{M} \mathbf{v} + \mathbf{v}^H \mathbf{M}^H \mathbf{i} \sigma^2 - \mathbf{v}^H \mathbf{M}^H \mathbf{q}(i) + \mathbf{i}^H \sigma^2 \mathbf{M} \mathbf{v} \\
 &\quad + \mathbf{i}^H \sigma^4 \mathbf{i} - \mathbf{i}^H \sigma^2 \mathbf{q}(i) - \mathbf{q}(i)^H \mathbf{M} \mathbf{v} - \mathbf{q}(i)^H \mathbf{i} \sigma^2 + \mathbf{q}(i)^H \mathbf{q}(i). \tag{4.65}
 \end{aligned}$$

Convém observar que a função custo  $J(i)$  envolve produtos de até segunda ordem do vetor  $\mathbf{v}$ , e portanto de até quarta ordem do vetor  $\mathbf{h}$ , o que dificulta a minimização de  $J(i)$  com relação a  $\mathbf{h}$ . Todavia, note que é possível recuperar  $\mathbf{h}$ , a menos de um escalar complexo, a partir de  $\mathcal{X}$ , uma vez que  $\mathcal{X}$  é uma matriz de

posto unitário<sup>(8)</sup>. Assim, procede-se como em [45], e minimiza-se  $J(i)$  com relação a  $\mathbf{v}$  e  $\sigma^2$ ; como  $J(i)$  é função quadrática nestas variáveis, fica garantida a existência de mínimos globais,

As derivadas conjugadas [72] da função custo  $J(i)$  com relação a  $\mathbf{v}$  e  $\sigma^2$  são dadas por:

$$\begin{cases} \frac{\partial J(i)}{\partial \mathbf{v}^*} = \mathbf{M}^H \mathbf{M} \mathbf{v} + \sigma^2 \mathbf{M}^H \mathbf{i} - \mathbf{M}^H \mathbf{q}(i), \\ \frac{\partial J(i)}{\partial (\sigma^2)^*} = \mathbf{i}^H \mathbf{M} \mathbf{v} + \sigma^2 \mathbf{i}^H \mathbf{i} - \mathbf{i}^H \mathbf{q}(i). \end{cases}$$

Resolvendo  $\frac{\partial J(i)}{\partial (\sigma^2)^*} = 0$  para  $\sigma^2$  obtém-se

$$\sigma^2 = \frac{1}{P} \{ \mathbf{i}^H \mathbf{q}(i) - \mathbf{i}^H \mathbf{M} \mathbf{v} \}. \quad (4.66)$$

Resolvendo  $\frac{\partial J(i)}{\partial \mathbf{v}^*} = \mathbf{0}$  com (4.66) chega-se a:

$$\hat{\mathbf{v}}(i) = [\mathbf{M}^H (\mathbf{I}_{P^2} - \frac{1}{P} \mathbf{i} \mathbf{i}^H) \mathbf{M}]^{-1} \mathbf{M}^H (\mathbf{I}_{P^2} - \frac{1}{P} \mathbf{i} \mathbf{i}^H) \mathbf{q}(i). \quad (4.67)$$

Lembrando que  $\mathbf{v} = \text{vec}(\mathcal{X})$ , então  $\text{unvec}(\mathbf{v}) = \mathcal{X}$  e uma estimativa do vetor  $\mathbf{h}$  pode ser obtida, a menos de um escalar complexo, determinando-se o vetor singular associado ao maior valor singular de  $\mathcal{X}$ , uma vez que  $\mathcal{X}$  tem posto 1. Convém frisar que a matriz  $\mathcal{X}$  sobre a qual se opera para obter  $\mathbf{h}$ , tem tamanho  $(L+1) \times (L+1)$ .

A seguir, mostra-se que ao adotar-se

$$\hat{\mathbf{R}}_{\tilde{\mathbf{x}}_P}(i) = \frac{1}{i} \sum_{j=1}^i \tilde{\mathbf{x}}_P(j) \tilde{\mathbf{x}}_P^H(j)$$

como estimativa da matriz correlação<sup>(9)</sup>, então para  $i \rightarrow \infty$ ,  $\hat{\mathbf{v}}(i) \rightarrow \mathbf{v}$ , daí decorre que  $\hat{\mathcal{X}}(i) \rightarrow \mathcal{X}$ , portanto  $\hat{\mathbf{h}}(i) \rightarrow \mathbf{h}$  (a menos de uma ambigüidade) e o estimador é consistente.

De fato, partindo da suposição usual de que:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \hat{\mathbf{R}}_{\tilde{\mathbf{x}}_P}(i) = \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}_P},$$

então

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \hat{\mathbf{v}}(i) = [\mathbf{M}^H (\mathbf{I}_{P^2} - \frac{1}{P} \mathbf{i} \mathbf{i}^H) \mathbf{M}]^{-1} \mathbf{M}^H (\mathbf{I}_{P^2} - \frac{1}{P} \mathbf{i} \mathbf{i}^H) \text{vec}(\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}_P}). \quad (4.68)$$

Substituindo (4.63) em (4.68) chega-se a:

<sup>(8)</sup>De fato,  $\mathbf{h}$  é o vetor associado ao único valor singular não-nulo de  $\mathcal{X}$ .

<sup>(9)</sup>estimativa adequada para canal invariante no tempo.

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \hat{\mathbf{v}}(i) = \mathbf{v} + [\mathbf{M}^H (\mathbf{I}_{P^2} - \frac{1}{P} \mathbf{i} \mathbf{i}^H) \mathbf{M}]^{-1} \mathbf{M}^H (\mathbf{I}_{P^2} - \frac{1}{P} \mathbf{i} \mathbf{i}^H) \sigma^2 \mathbf{i}. \quad (4.69)$$

Para mostrar que o estimador é consistente, basta mostrar, por exemplo, que  $(\mathbf{I}_{P^2} - \frac{1}{P} \mathbf{i} \mathbf{i}^H) \mathbf{i} = \mathbf{0}$  em (4.69). Lembrando que  $\mathbf{i} = \text{vec}(\mathbf{I}_P)$ , tem-se por definição que:

$$\mathbf{i}^H \mathbf{i} = \|\mathbf{I}_P\|_F^2 = P.$$

Assim

$$(\mathbf{I}_{P^2} - \frac{1}{P} \mathbf{i} \mathbf{i}^H) \mathbf{i} = \mathbf{i} - \frac{1}{P} \mathbf{i} \mathbf{i}^H \mathbf{i} = \mathbf{0},$$

logo

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \hat{\mathbf{v}}(i) = \mathbf{v}$$

e o estimador é consistente.

Com relação à complexidade computacional do algoritmo proposto, vale a pena ressaltar que a matriz pré-multiplicando  $\mathbf{q}(i)$  em (4.67) é conhecida *a priori* e pode ser portanto pré-computada, de modo que o cômputo de (4.67) requer idealmente  $P^2(L+1)^2$  multiplicações. Uma vez que as matrizes envolvidas são esparsas este número é drasticamente reduzido.

#### 4.6 Estimação Cega de Canal por meio de Casamento de Correlação: OFDM-CP

De modo geral, o procedimento para sinais OFDM-CP é análogo ao dos sinais OFDM-ZP. Também define-se uma função custo  $J(i)$  como em (4.59); contudo para o OFDM-CP a matriz correlação é dada por

$$\mathbf{R}_{\text{rCP}} = \sigma_s^2 \mathbf{H} \mathbf{F} \mathbf{F}^H \mathbf{H}^H + \sigma_s^2 \mathbf{H}_{\text{IBI}} \mathbf{F} \mathbf{F}^H \mathbf{H}_{\text{IBI}}^H + \sigma^2 \mathbf{I}_P. \quad (4.70)$$

Lembrando que (vide (4.41)):

$$\mathbf{H} \mathbf{F} = [\mathbf{S}_{\text{CP}}^{(1)} \mathbf{h} \cdots \mathbf{S}_{\text{CP}}^{(M)} \mathbf{h}],$$

chega-se à seguinte expressão para  $\mathbf{H} \mathbf{F} \mathbf{F}^H \mathbf{H}^H$  presente em (4.70):

$$\begin{aligned} \mathbf{H} \mathbf{F} \mathbf{F}^H \mathbf{H}^H &= [\mathbf{S}_{\text{CP}}^{(1)} \mathbf{h} \cdots \mathbf{S}_{\text{CP}}^{(M)} \mathbf{h}] \begin{bmatrix} \mathbf{h}^H \mathbf{S}_{\text{CP}}^{(1)H} \\ \vdots \\ \mathbf{h}^H \mathbf{S}_{\text{CP}}^{(M)H} \end{bmatrix} \\ &= \sum_{k=1}^M \mathbf{S}_{\text{CP}}^{(k)} \mathbf{h} \mathbf{h}^H \mathbf{S}_{\text{CP}}^{(k)H}. \end{aligned} \quad (4.71)$$

Lembrando agora que (vide (4.47)):

$$\mathbf{H}_{\text{IBI}}\mathbf{F} = [\mathbf{S}_{\text{CP,IBI}}^{(1)}\mathbf{h} \cdots \mathbf{S}_{\text{CP,IBI}}^{(M)}\mathbf{h}],$$

tem-se que  $\mathbf{H}_{\text{IBI}}\mathbf{F}\mathbf{F}^H\mathbf{H}_{\text{IBI}}^H$  em (4.70) vale:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{\text{IBI}}\mathbf{F}\mathbf{F}^H\mathbf{H}_{\text{IBI}}^H &= [\mathbf{S}_{\text{CP,IBI}}^{(1)}\mathbf{h} \cdots \mathbf{S}_{\text{CP,IBI}}^{(M)}\mathbf{h}] \begin{bmatrix} \mathbf{h}^H\mathbf{S}_{\text{CP,IBI}}^{(1)H} \\ \vdots \\ \mathbf{h}^H\mathbf{S}_{\text{CP,IBI}}^{(M)H} \end{bmatrix} \\ &= \sum_{k=1}^M \mathbf{S}_{\text{CP,IBI}}^{(k)}\mathbf{h}\mathbf{h}^H\mathbf{S}_{\text{CP,IBI}}^{(k)H}. \end{aligned} \quad (4.72)$$

Assim de (4.71),

$$\begin{aligned} \text{vec}(\sigma_s^2\mathbf{H}\mathbf{F}\mathbf{F}^H\mathbf{H}^H) &= \sum_{k=1}^M \text{vec}(\mathbf{S}_{\text{CP}}^{(k)}\mathcal{X}\mathbf{S}_{\text{CP}}^{(k)H}) \\ &= \sum_{k=1}^M (\mathbf{S}_{\text{CP}}^{(k)*} \otimes \mathbf{S}_{\text{CP}}^{(k)})\text{vec}(\mathcal{X}), \end{aligned} \quad (4.73)$$

com  $\mathcal{X} = \sigma_s^2\mathbf{h}\mathbf{h}^H$ . Analogamente, de (4.72):

$$\begin{aligned} \text{vec}(\sigma_s^2\mathbf{H}_{\text{IBI}}\mathbf{F}\mathbf{F}^H\mathbf{H}_{\text{IBI}}^H) &= \sum_{k=1}^M \text{vec}(\mathbf{S}_{\text{CP,IBI}}^{(k)}\mathcal{X}\mathbf{S}_{\text{CP,IBI}}^{(k)H}) \\ &= \sum_{k=1}^M (\mathbf{S}_{\text{CP,IBI}}^{(k)*} \otimes \mathbf{S}_{\text{CP,IBI}}^{(k)})\text{vec}(\mathcal{X}). \end{aligned} \quad (4.74)$$

Aplicando o operador  $\text{vec}\{\cdot\}$  em (4.70) e utilizando (4.73) e (4.74) chega-se a:

$$\begin{aligned} \text{vec}(\mathbf{R}_{\text{r}_{\text{CP}}}) &= \sum_{k=1}^M (\mathbf{S}_{\text{CP}}^{(k)*} \otimes \mathbf{S}_{\text{CP}}^{(k)})\text{vec}(\mathcal{X}) + \sum_{k=1}^M (\mathbf{S}_{\text{CP,IBI}}^{(k)*} \otimes \mathbf{S}_{\text{CP,IBI}}^{(k)})\text{vec}(\mathcal{X}) + \\ &\quad + \sigma^2\text{vec}(\mathbf{I}_P) \\ &= \mathbf{M}_{\text{CP}}\text{vec}(\mathcal{X}) + \text{vec}(\mathbf{I}_P)\sigma^2, \end{aligned} \quad (4.75)$$

onde:

$$\mathbf{M}_{\text{CP}} = \sum_{k=1}^M (\mathbf{S}_{\text{CP}}^{(k)*} \otimes \mathbf{S}_{\text{CP}}^{(k)})\text{vec}(\mathcal{X}) + \sum_{k=1}^M (\mathbf{S}_{\text{CP,IBI}}^{(k)*} \otimes \mathbf{S}_{\text{CP,IBI}}^{(k)})\text{vec}(\mathcal{X}). \quad (4.76)$$

Seguindo linha de raciocínio semelhante a da Seção 4.5 conclui-se que  $\mathcal{X} = \text{unvec}\{\mathbf{v}\}$ , com

$$\hat{\mathbf{v}}(i) = [\mathbf{M}_{\text{CP}}^H (\mathbf{I}_{P^2} - \frac{1}{P} \mathbf{ii}^H) \mathbf{M}_{\text{CP}}]^{-1} \mathbf{M}_{\text{CP}}^H (\mathbf{I}_{P^2} - \frac{1}{P} \mathbf{ii}^H) \mathbf{q}(i), \quad (4.77)$$

e uma estimativa  $\hat{\mathbf{h}}$  de  $\mathbf{h}$  é (a menos de um escalar complexo) o vetor singular associado ao maior valor singular de  $\mathcal{X}$ . De forma análoga, é possível mostrar que o estimador é consistente.

## 4.7 Resultados

Nesta seção são apresentados resultados de simulações que ilustram alguns aspectos dos estimadores de canal tratados ao longo deste capítulo.

### 4.7.1 Preliminares

Conforme mencionado, os estimadores abordados/propostos padecem de uma ambigüidade representada por um escalar complexo. Por ora, adota-se um procedimento bastante usual na literatura, que consiste em supor que a fase de uma componente do vetor  $\mathbf{h}$  (verdadeiro) é conhecida no receptor [54, 45].

Sem perda de generalidade, seja  $\psi$  a fase do primeiro elemento do vetor  $\mathbf{h}$  (canal verdadeiro), suposta conhecida pelo receptor. Denota-se a estimativa cega de canal por  $\hat{\mathbf{h}}_b = [\hat{h}_0^{(b)} \cdots \hat{h}_L^{(b)}]^T$ . Seja agora  $\theta$  a fase do elemento  $\hat{h}_0^{(b)}$ . Então, uma estimativa do canal, já sem ambigüidade de fase, é  $\hat{\mathbf{h}} = \hat{\mathbf{h}}_b e^{j(\psi - \theta)}$ .

No que diz respeito à resolução da ambigüidade, os resultados apresentados nas seções 4.7.2, 4.7.3, 4.7.4 e 4.7.5 são obtidos empregando-se o método (“gênio”) descrito acima.

O desempenho dos estimadores de canal é avaliado em termos de seu erro quadrático médio (denotado MSE, do inglês *Mean Square Error*) definido como  $\mathbb{E}[\|\mathbf{h} - \hat{\mathbf{h}}\|^2]$ , onde  $\mathbf{h}$  é o canal verdadeiro e  $\hat{\mathbf{h}}$  é o canal estimado (com a ambigüidade resolvida).

Esquemas “práticos” para resolução da ambigüidade inerente aos estimadores de canal são assunto da seção 4.8.

### 4.7.2 Casamento de Correlação – OFDM-ZP

Propõe-se apreciar o desempenho do estimador de canal baseado em casamento de correlação, doravante apelidado de ‘corrmatch’. Considera-se um sistema OFDM-ZP com  $M = 64$  portadoras transmitindo símbolos oriundos de uma constelação BPSK, e intervalo de guarda de comprimento  $D = 16$ , de modo que o tamanho do símbolo OFDM efetivamente transmitido é  $P = 80$  amostras. Os sinais transmitidos experimentam um canal *fixo*  $\mathbf{h} = \frac{1}{1.8804} [-1.28 - j0.301 \quad -0.282 +$

$j0.562 \ 0.031 - j0.211 \ 0.106 + j1.164]^T$  de ordem  $L = 3$  e satisfazendo  $\|\mathbf{h}\|^2 = 1$  cuja resposta em frequência encontra-se ilustrada na Figura 4.1.

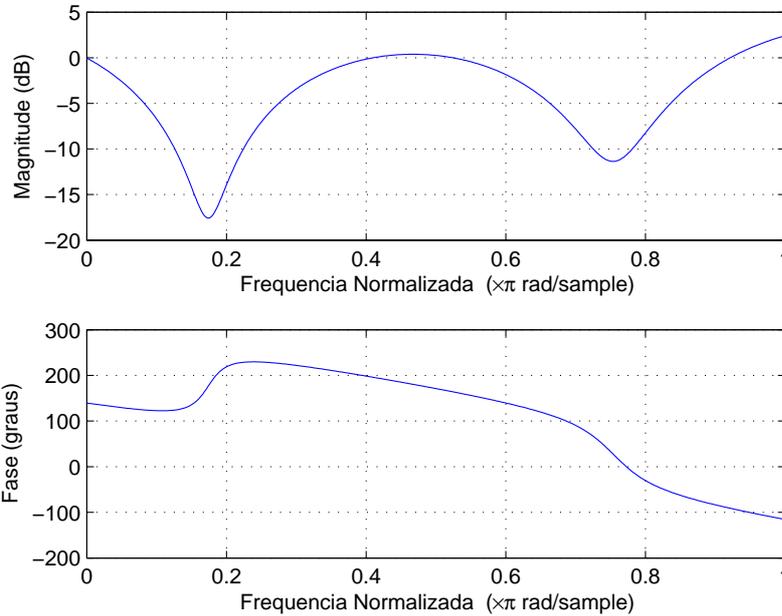


Figura 4.1: Resposta em Frequência do canal fixo de ordem  $L = 3$

O desempenho do estimador ‘cormatch’ é avaliado em termos de seu erro quadrático médio (denotado MSE), definido como  $\mathbb{E}[\|\mathbf{h} - \hat{\mathbf{h}}\|^2]$ , onde  $\mathbf{h}$  é o canal verdadeiro e  $\hat{\mathbf{h}}$  é o canal estimado (com a ambigüidade resolvida). Os resultados são obtidos realizando-se uma média ao longo de 30 experimentos independentes; para cada experimento são considerados 1000 símbolos OFDM, ou seja, simula-se a transmissão de 64000 bits.

A matriz correlação das observações, necessária no esquema ‘cormatch’, é estimada recursivamente por:  $\hat{\mathbf{R}}_n = \frac{1}{n+1} (n\hat{\mathbf{R}}_{n-1} + \tilde{\mathbf{x}}_P(n)\tilde{\mathbf{x}}_P(n)^H)$ .

As figuras 4.2, 4.3, 4.4, 4.5, 4.6 e 4.7, ilustram o MSE do estimador ‘cormatch’, para razões  $\frac{E_B}{N_0}$  de 0dB, 5dB, 10dB, 15dB, 20dB e 25 dB respectivamente. O desempenho MSE do estimador da Seção 4.2, denotado ‘subspace’, também consta das figuras, como referência. A ordem do canal é suposta conhecida, ou seja, estima-se um canal de ordem 3.

Das figuras, observa-se que o esquema ‘cormatch’ tem desempenho superior para razões  $\frac{E_B}{N_0}$  pequenas e moderadas, de até 10dB. Para  $\frac{E_B}{N_0} = 15$ dB, os estimadores têm desempenhos MSE semelhantes. Já para razões  $\frac{E_B}{N_0}$  altas, o estimador baseado no método do subespaço de ruído tem desempenho bem superior, em termos de MSE.

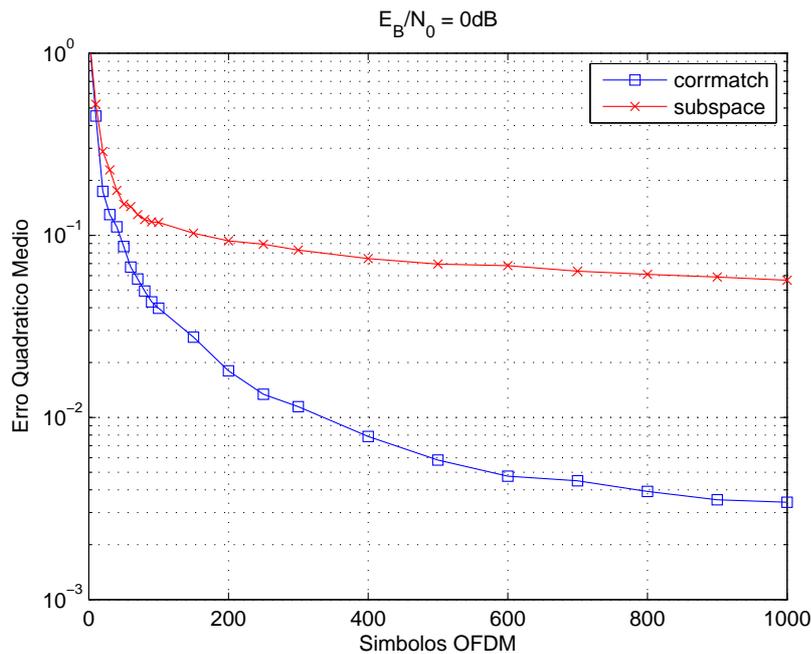


Figura 4.2: Erro quadrático médio dos estimadores ‘corrmatch’ e ‘subspace’, para um sistema OFDM-ZP com  $M = 64$  portadoras, intervalo de guarda  $D = 16$ , para canal fixo de ordem  $L = 3$  e razão  $\frac{E_B}{N_0} = 0\text{dB}$

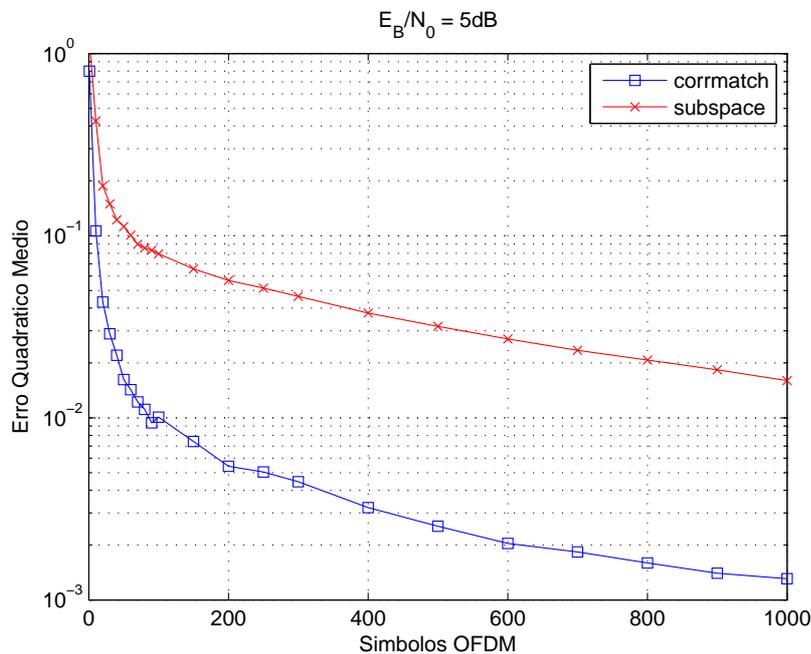


Figura 4.3: Erro quadrático médio dos estimadores ‘corrmatch’ e ‘subspace’, para um sistema OFDM-ZP com  $M = 64$  portadoras, intervalo de guarda  $D = 16$ , para canal fixo de ordem  $L = 3$  e razão  $\frac{E_B}{N_0} = 5\text{dB}$

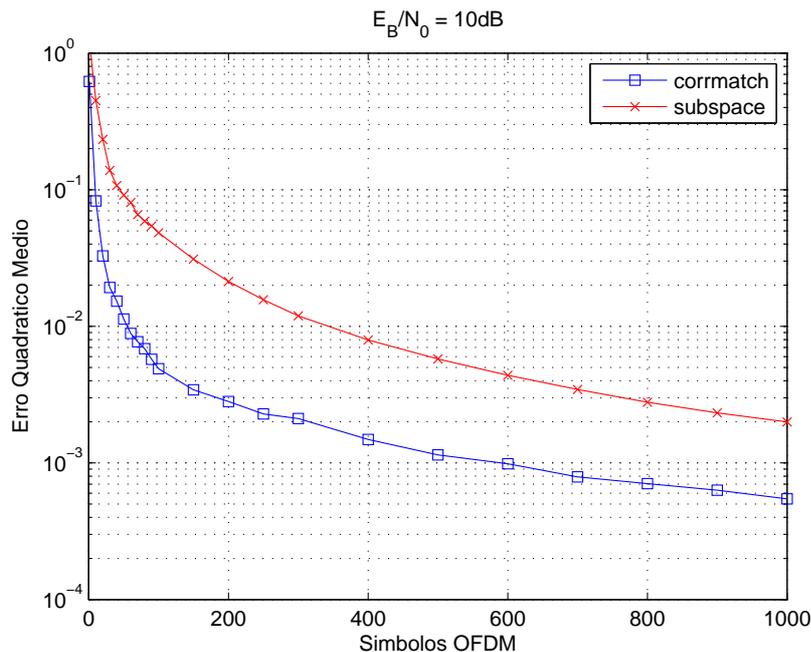


Figura 4.4: Erro quadrático médio dos estimadores ‘corrmatch’ e ‘subspace’, para um sistema OFDM-ZP com  $M = 64$  portadoras, intervalo de guarda  $D = 16$ , para canal fixo de ordem  $L = 3$  e razão  $\frac{E_B}{N_0} = 10\text{dB}$

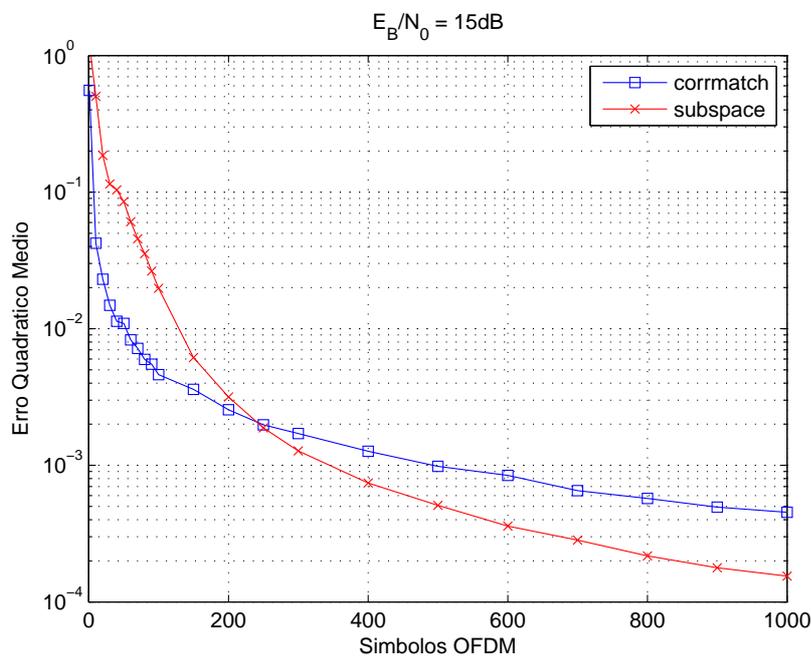


Figura 4.5: Erro quadrático médio dos estimadores ‘corrmatch’ e ‘subspace’, para um sistema OFDM-ZP com  $M = 64$  portadoras, intervalo de guarda  $D = 16$ , para canal fixo de ordem  $L = 3$  e razão  $\frac{E_B}{N_0} = 15\text{dB}$

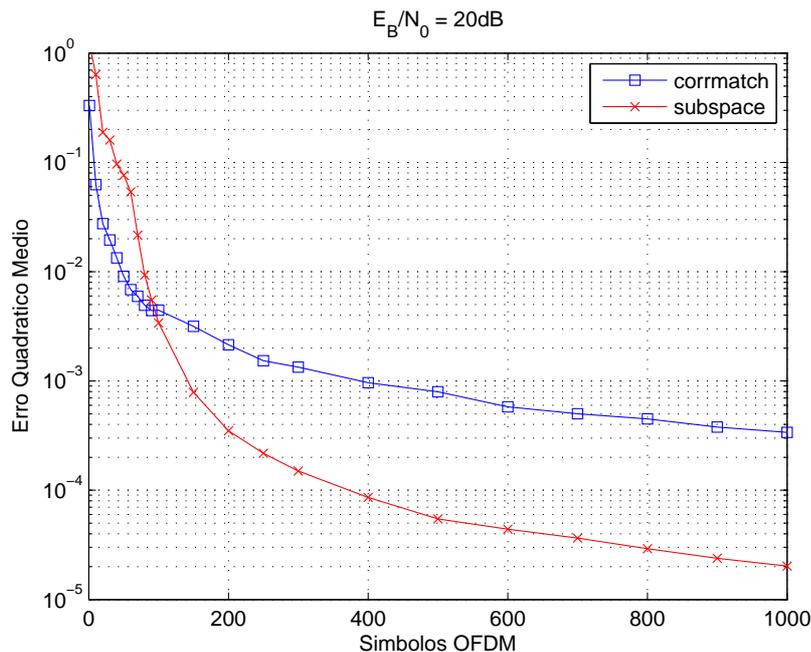


Figura 4.6: Erro quadrático médio dos estimadores ‘corrmatch’ e ‘subspace’, para um sistema OFDM-ZP com  $M = 64$  portadoras, intervalo de guarda  $D = 16$ , para canal fixo de ordem  $L = 3$  e razão  $\frac{E_B}{N_0} = 20\text{dB}$

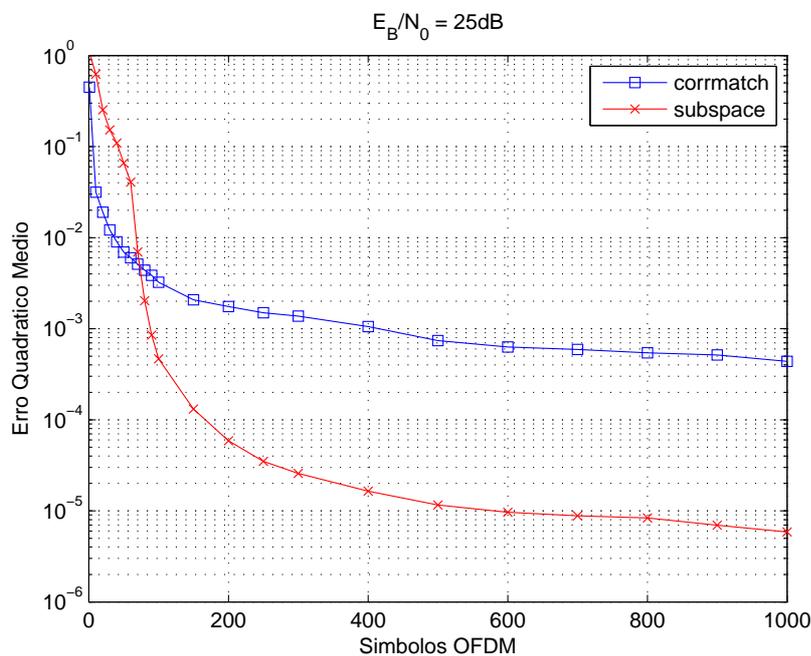


Figura 4.7: Erro quadrático médio dos estimadores ‘corrmatch’ e ‘subspace’, para um sistema OFDM-ZP com  $M = 64$  portadoras, intervalo de guarda  $D = 16$ , para canal fixo de ordem  $L = 3$  e razão  $\frac{E_B}{N_0} = 25\text{dB}$

Propõe-se a seguir investigar a robustez do estimador com relação a sobremodelamento (*overmodelling*) do canal estimado. Os parâmetros desta experiência são os mesmos da experiência anterior. A Figura 4.8 ilustra o MSE *versus* razão  $\frac{E_B}{N_0}$  dos estimadores ‘corrmatch’ e ‘subspace’ após 1000 símbolos OFDM serem recebidos. As linhas cheias são relativas aos desempenhos considerando a ordem de canal estimado como sendo a mesma do canal verdadeiro. Já as linhas tracejadas indicam o desempenho dos estimadores operando com *overmodelling*: o canal estimado é suposto de ordem  $\hat{L} = D = 16$ , ou seja, o canal estimado tem mais de 4 vezes o comprimento do canal verdadeiro. Nota-se da Figura 4.8, que o estimador ‘corrmatch’ é um pouco mais sensível a *overmodelling* do que o estimador ‘subspace’. Todavia, o ‘corrmatch’ é robusto no que diz respeito à razão  $\frac{E_B}{N_0}$ .

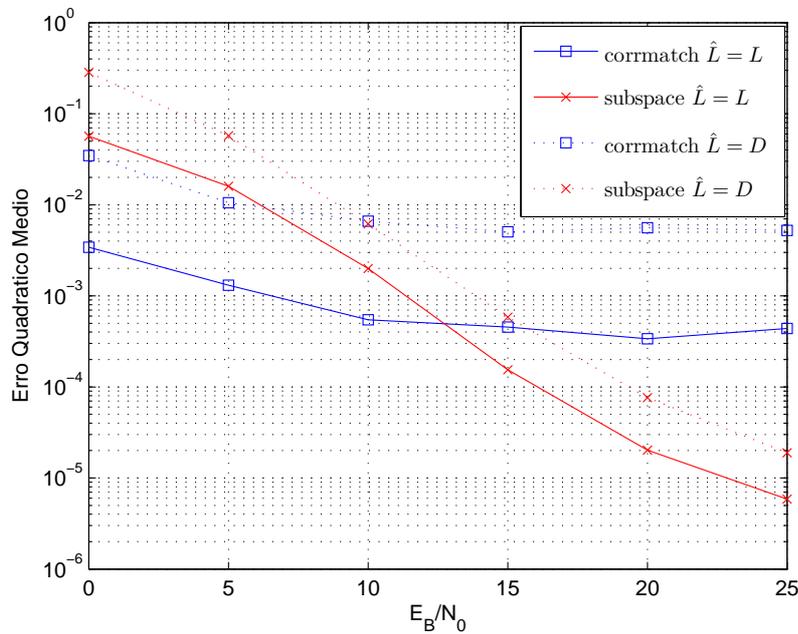


Figura 4.8: Erro quadrático médio dos estimadores ‘corrmatch’ e ‘subspace’, para um sistema OFDM-ZP com  $M = 64$  portadoras, intervalo de guarda  $D = 16$ , para canal fixo de ordem  $L = 3$

O desempenho em termos de taxa de erro de bit também é investigado. Mais especificamente, supõe-se um sistema com os mesmos parâmetros das experiências anteriores, e supõe-se que o receptor realiza detecção *Zero Forcing*, por meio de (3.11), ou seja, o receptor estima o canal de modo a dispor de uma estimativa da matriz<sup>(10)</sup>  $\mathbf{H}_0$  necessária para o processo de equalização, como indicado em (3.12). O desempenho de um receptor que emprega o estimador ‘corrmatch’ está ilustrado na Figura 4.9. Assim como para o desempenho MSE, o desempenho em termos de taxa de erro de bit para um receptor que realiza a estimação de canal

<sup>(10)</sup>a matriz  $\hat{\mathbf{H}}_0$ , estimativa de  $\mathbf{H}_0$ , é reconstruída a partir de  $\hat{\mathbf{h}}$ .

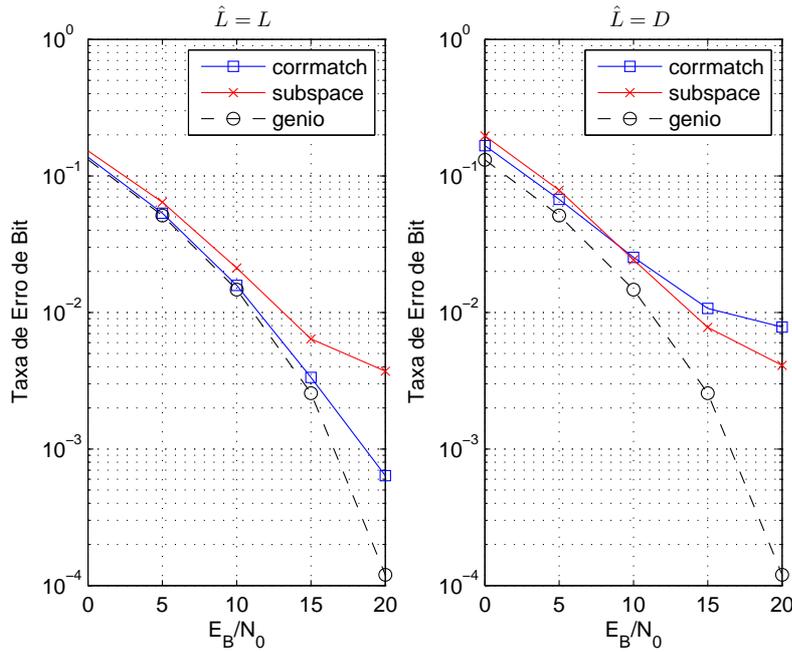


Figura 4.9: Taxa de Erro de Bit com o uso dos estimadores ‘corrmatch’ e ‘subspace’, para um sistema OFDM-ZP com  $M = 64$  portadoras, intervalo de guarda  $D = 16$ , para canal fixo de ordem  $L = 3$

por meio do estimador ‘subspace’ também é ilustrado, como referência. Além disto, o desempenho de um receptor hipotético operando com o conhecimento perfeito do canal (denotado ‘genio’) também é indicado para fins de comparação. Ademais, tanto o caso de canal estimado com ordem verdadeira, isto é  $\hat{L} = L = 3$ , quanto o caso dos estimadores operando com *overmodelling*, isto é  $\hat{L} = D = 16$ , estão ilustrados. Da Figura 4.9, percebe-se que o desempenho obtido com os estimadores é bem semelhante ao desempenho obtido com o “gênio”, para razões  $\frac{E_B}{N_0}$  moderadas. Já para razões mais altas, ocorre certa perda de desempenho por parte dos estimadores. Curiosamente, para o caso de canal estimado com ordem verdadeira, o desempenho superior do estimador ‘subspace’, em termos de MSE, não se traduziu em um melhor desempenho em termos de taxa de erro de bit. Já para o caso de *overmodelling*, ocorre o esperado: o desempenho do receptor com ‘subspace’ é superior ao receptor com ‘corrmatch’, a partir de  $\frac{E_B}{N_0} = 10\text{dB}$ , como fica sugerido pelo cruzamento das curvas de MSE na Figura 4.8. Por fim, ainda da Figura 4.9, é possível observar a relativa maior robustez do estimador ‘subspace’ face a *overmodelling*.

Com relação à complexidade do estimador ‘corrmatch’ faz-se as seguintes considerações. A matriz que multiplica  $\mathbf{q}(i)$  em (4.67) tem tamanho  $(L + 1)^2 \times P^2$ . Idealmente, o produto desta matriz pelo vetor  $\mathbf{q}(i)$  implicaria em  $(L + 1)^2 P^2$  multiplicações, ou seja, supondo  $\hat{L} = D = 16$ , 1.849.600 multiplicações. Ocorre

que, como já foi adiantado na Seção 4.5, as matrizes envolvidas são esparsas, de modo que, para o caso em questão, a matriz que pré-multiplica  $\mathbf{q}(i)$  tem apenas 20.928 de seus 1.849.600 elementos não nulos (aproximadamente 1,13%). Ou seja, é necessário efetuar apenas 20.928 multiplicações. Isto coloca a complexidade da implementação de (4.67) entre  $O(P(L+1))$  e  $O(P(L+1)^2)$ .

### 4.7.3 Método das Potências – OFDM-ZP

Nesta seção, resultados de simulações ilustram o desempenho em termos de MSE e taxa de erro de bit para o estimador apresentado na Seção 4.3, baseado no método das potências para aproximação do operador projeção no subespaço de ruído, e denotado ‘Pot’.

O sistema OFDM-ZP considerado é o mesmo da Seção 4.7.2.

Para os esquemas da Seção 4.3, necessita-se uma estimativa da inversa da matriz correlação das observações. Uma estimativa recursiva, obtida utilizando o lema de inversão de matrizes e com  $O(P^2)$ , é dada por:

$$\hat{\mathbf{R}}_n^{-1} = \frac{n+1}{n} \left( \hat{\mathbf{R}}_{n-1}^{-1} - \frac{\hat{\mathbf{R}}_{n-1}^{-1} \tilde{\mathbf{x}}_P(n) \tilde{\mathbf{x}}_P^H(n) \hat{\mathbf{R}}_{n-1}^{-1}}{n + \tilde{\mathbf{x}}_P^H(n) \hat{\mathbf{R}}_{n-1}^{-1} \tilde{\mathbf{x}}_P(n)} \right).$$

O desempenho MSE do estimador ‘Pot’ para potências 1, 2, 3, 4 e 5 da inversa de matriz correlação está ilustrado nas figuras 4.10, 4.11, 4.12, 4.13, 4.14 e 4.15, para razões  $\frac{E_B}{N_0}$  de 0dB, 5dB, 10dB, 15dB, 20dB e 25 dB respectivamente. A título de comparação, o desempenho MSE do estimador ‘subspace’ também está indicado nas figuras.

Das figuras, observa-se que o estimador ‘Pot’ tem propriedades de convergência semelhantes às do estimador ‘subspace’. Conclui-se também que, para uma dada razão  $\frac{E_B}{N_0}$ , quanto maior a potência da inversa da matriz correlação, melhor é o desempenho do estimador, ou seja, os estimadores com potências diferentes obedecem uma hierarquia. Para razões  $\frac{E_B}{N_0}$  moderadas e altas, os desempenhos MSE do estimador ‘Pot’ com potências 3, 4 e 5 são comparáveis. Ademais, este desempenho é bem próximo daquele apresentado pelo estimador ‘subspace’. Isso corrobora a afirmação feita na Seção 4.3 de que para pequenas potências inteiras da inversa da matriz correlação já obtém-se uma boa aproximação para o operador projeção. De fato, para razões  $\frac{E_B}{N_0}$  altas, apenas o estimador ‘Pot’ empregando potência  $m = 1$  tem desempenho destoante. Vale lembrar que é este estimador de canal (i.e. com potência  $m = 1$ ) que é usado implicitamente em receptores MOE [53] para sistemas CDMA.

O desempenho MSE *versus*  $\frac{E_B}{N_0}$  do estimador ‘Pot’ operando com diversas potências, após a recepção de 1000 símbolos OFDM, está ilustrado na Figura 4.16,

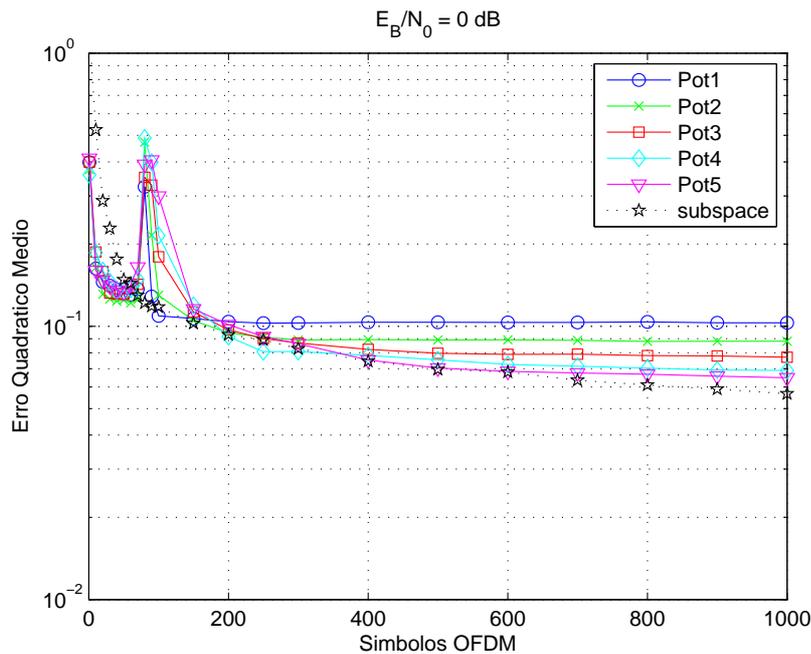


Figura 4.10: Erro quadrático médio dos estimadores ‘Pot’ e ‘subspace’, para um sistema OFDM-ZP com  $M = 64$  portadoras, intervalo de guarda  $D = 16$ , para canal fixo de ordem  $L = 3$  e razão  $\frac{E_B}{N_0} = 0dB$

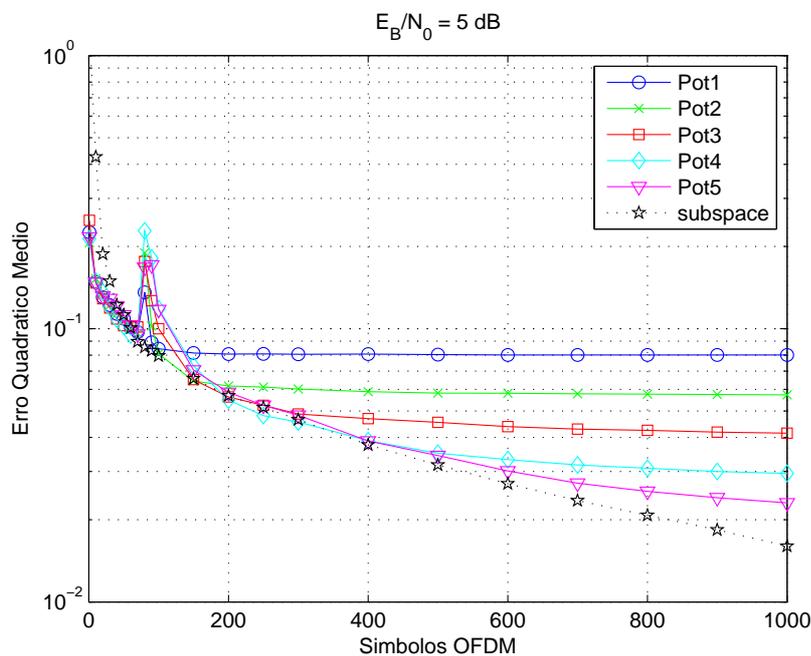


Figura 4.11: Erro quadrático médio dos estimadores ‘Pot’ e ‘subspace’, para um sistema OFDM-ZP com  $M = 64$  portadoras, intervalo de guarda  $D = 16$ , para canal fixo de ordem  $L = 3$  e razão  $\frac{E_B}{N_0} = 5dB$

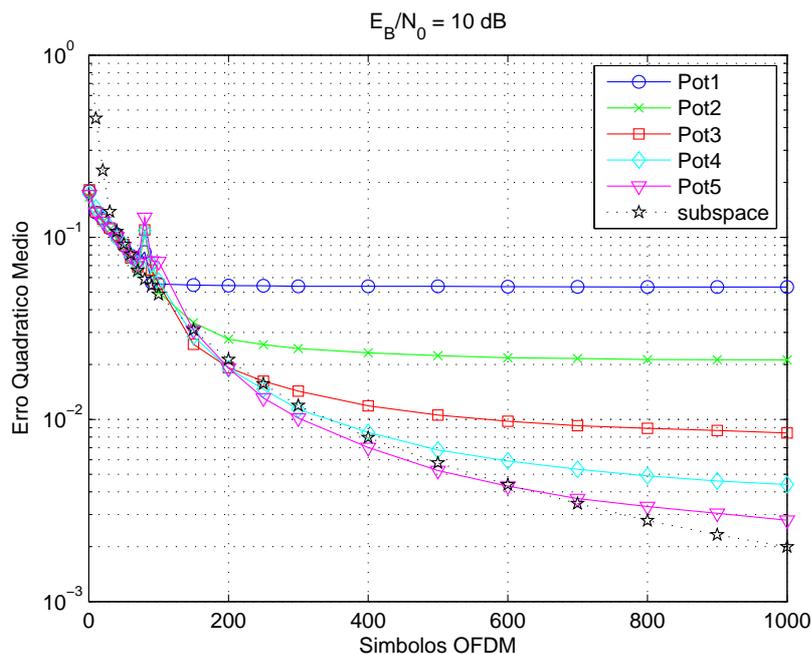


Figura 4.12: Erro quadrático médio dos estimadores ‘Pot’ e ‘subspace’, para um sistema OFDM-ZP com  $M = 64$  portadoras, intervalo de guarda  $D = 16$ , para canal fixo de ordem  $L = 3$  e razão  $\frac{E_B}{N_0} = 10 \text{ dB}$

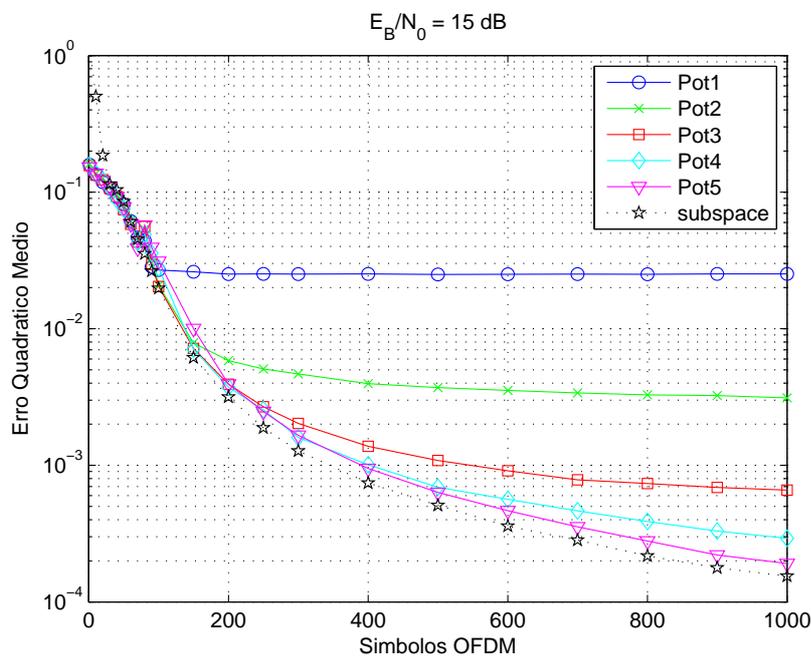


Figura 4.13: Erro quadrático médio dos estimadores ‘Pot’ e ‘subspace’, para um sistema OFDM-ZP com  $M = 64$  portadoras, intervalo de guarda  $D = 16$ , para canal fixo de ordem  $L = 3$  e razão  $\frac{E_B}{N_0} = 15 \text{ dB}$

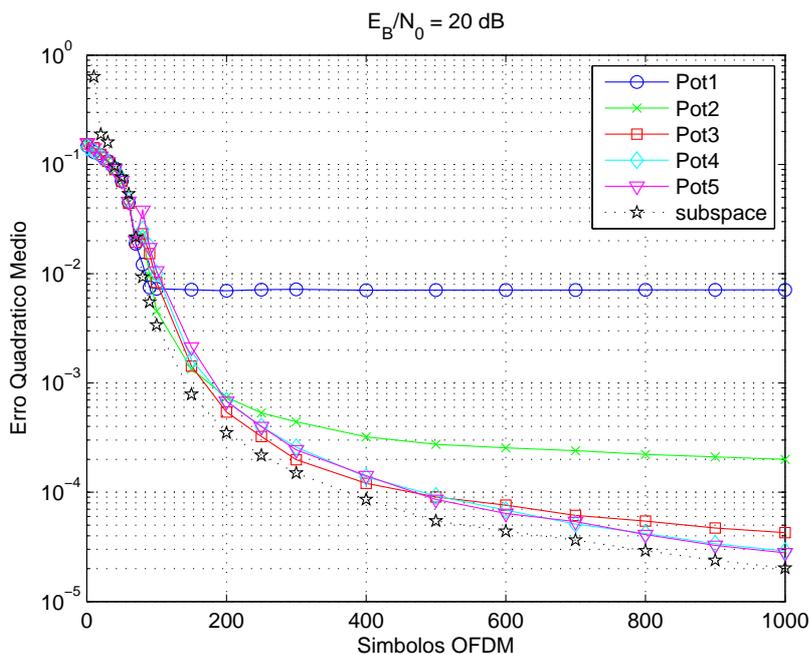


Figura 4.14: Erro quadrático médio dos estimadores ‘Pot’ e ‘subspace’, para um sistema OFDM-ZP com  $M = 64$  portadoras, intervalo de guarda  $D = 16$ , para canal fixo de ordem  $L = 3$  e razão  $\frac{E_B}{N_0} = 20dB$

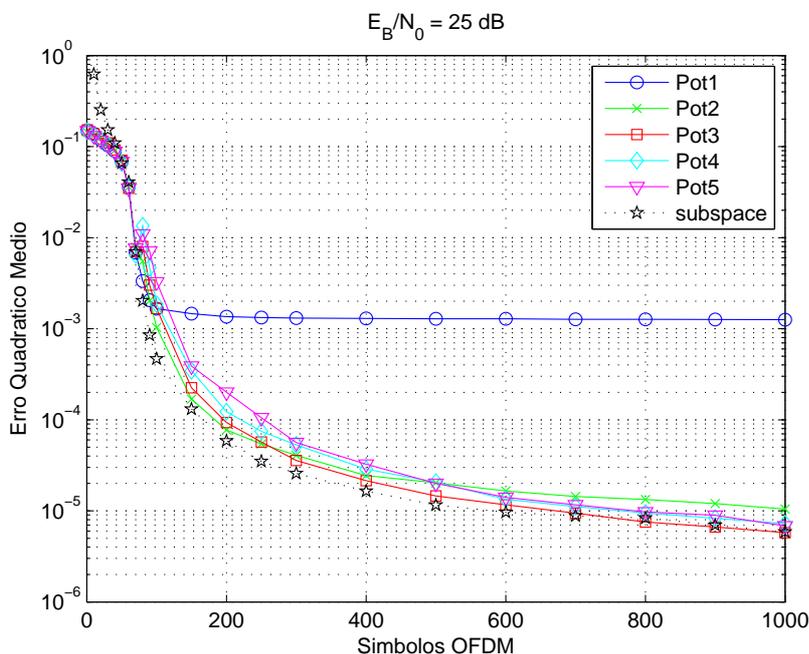


Figura 4.15: Erro quadrático médio dos estimadores ‘Pot’ e ‘subspace’, para um sistema OFDM-ZP com  $M = 64$  portadoras, intervalo de guarda  $D = 16$ , para canal fixo de ordem  $L = 3$  e razão  $\frac{E_B}{N_0} = 25dB$

juntamente com o desempenho do estimador ‘subspace’. Observa-se que uma vez alcançada a convergência, os estimadores ‘Pot’ empregando potências 3, 4 e 5, e o estimador ‘subspace’, têm desempenho MSE comparável. A perda de desempenho em virtude do uso de uma estimativa do operador projeção por meio do método das potências ao invés do uso de uma estimativa do subespaço do ruído por meio de uma SVD é, portanto, desprezível.

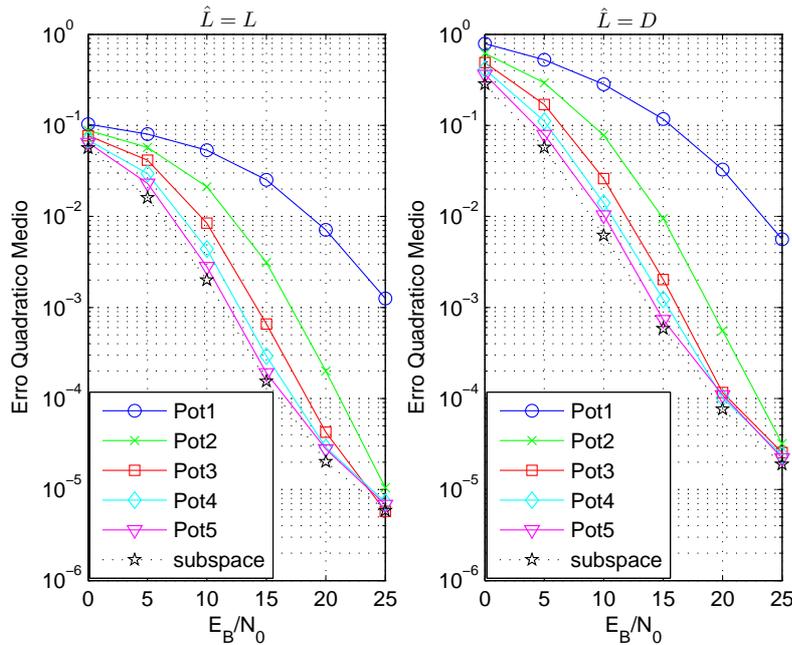


Figura 4.16: Erro quadrático médio dos estimadores ‘Pot’ e ‘subspace’, para um sistema OFDM-ZP com  $M = 64$  portadoras, intervalo de guarda  $D = 16$ , para canal fixo de ordem  $L = 3$

Assim como para o estimador ‘corrmatch’, propõe-se avaliar a robustez do estimador ‘Pot’ operando em *overmodelling*. O desempenho MSE *versus*  $\frac{E_B}{N_0}$  para o estimador ‘Pot’ operando com várias potências e com *overmodelling* também pode ser apreciado na Figura 4.16: a perda de desempenho acarretada pelo *overmodelling* parece aceitável.

Por fim, investiga-se o desempenho em termos da taxa de erro de bit, fornecido por um receptor ZF munido do estimador ‘Pot’. Da Figura 4.17 constam as taxas de erro de bit relativas a receptores empregando diversas potências da inversa da matriz correlação. Nota-se que para potências iguais ou superiores a 2 (isto é,  $m \geq 2$ ), o desempenho é bastante semelhante. A Figura 4.17 também contempla o desempenho dos receptores ZF cujos estimadores de canal operam em *overmodelling*. Apesar da perda de desempenho, o desempenho para potências iguais ou superiores a 2 continua comparável.

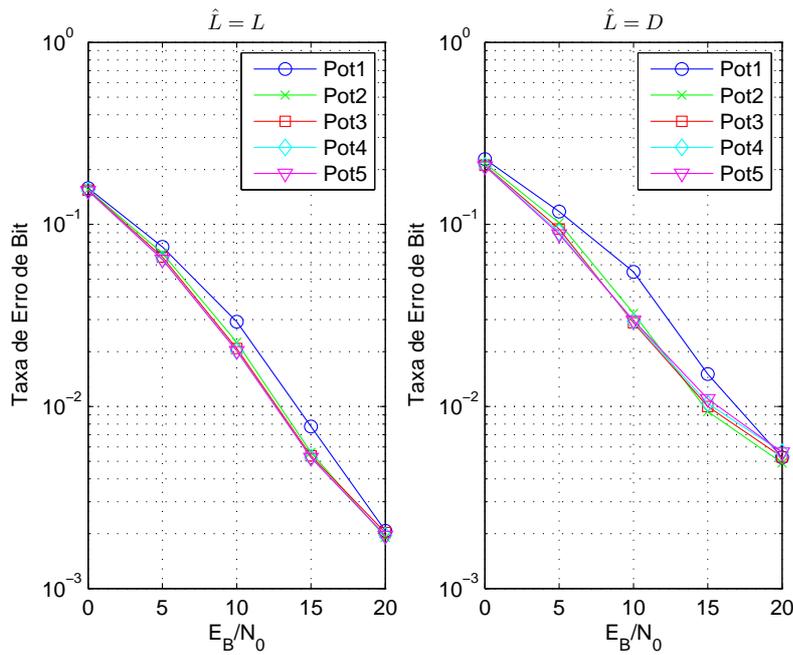


Figura 4.17: Taxa de Erro de Bit com o uso dos estimadores ‘Pot’, para um sistema OFDM-ZP com  $M = 64$  portadoras, intervalo de guarda  $D = 16$ , para canal fixo de ordem  $L = 3$

Quanto à complexidade do método, é bem verdade que o estágio mais custoso é o que efetua o processamento de modo a obter a inversa da matriz correlação elevada à potência desejada. Tal processamento pode ser dividido em duas etapas. A primeira etapa consiste da obtenção da inversa da matriz correlação, o que pode ser feito de forma recursiva e utilizando o lema de inversão de matrizes, acarretando uma complexidade computacional de ordem quadrática em  $P$ , isto é  $O(P^2)$ . A segunda consiste em multiplicar a inversa da matriz correlação por ela mesma o número necessário de vezes para se obter a inversa da matriz correlação elevada à potência desejada, o que implica em uma complexidade computacional cúbica em  $P$ . Portanto, assim como o método original da Seção 4.2, o método proposto tem complexidade cúbica em  $P$ , isto é  $O(P^3)$ . Porém, levando em conta o número de multiplicações envolvidas e a facilidade de implementação, sugere-se que o método proposto é mais vantajoso, sobretudo quando o uso de pequenas potências inteiras da inversa da matriz correlação já permite obter uma estimativa satisfatória do canal. Para o estimador ‘Pot’ com potência  $m > 1$ , é necessário efetuar apenas<sup>(11)</sup>  $(m - 1)P^3$  multiplicações<sup>(12)</sup>, valor este obtido sem levar em conta que a matriz correlação é hermitiana.

<sup>(11)</sup>levando apenas em conta as multiplicações da segunda etapa.

<sup>(12)</sup>Por exemplo, se uma implementação da SVD consome da ordem de  $8P^3$  multiplicações, o método proposto só deixaria de ser mais vantajoso computacionalmente se a potência  $m$  utilizada necessária para gerar estimativas satisfatórias fosse tal que  $m > 9$ .

#### 4.7.4 Casamento de Correlação – OFDM-CP

Nesta seção, afere-se o desempenho do estimador baseado no casamento de correlação introduzido na Seção 4.6 para sistemas OFDM-CP. O sistema em questão comporta  $M = 32$  portadoras transmitindo símbolos BPSK, e o intervalo de guarda usado tem comprimento  $D = 8$ , implicando que o tamanho do bloco transmitido é  $P = 40$  amostras. O canal fixo  $\mathbf{h} = [-0.189 + j0.427 \quad -0.284 + j0.698 \quad 0.127 + j0.432 \quad -0.045 + j0.091]^T$  experimentado pelo sistema tem comprimento 4 (isto é  $L = 3$ ), sendo que  $\|\mathbf{h}\|^2 = 1$ . Sua resposta em frequência esta ilustrada na Figura 4.18.

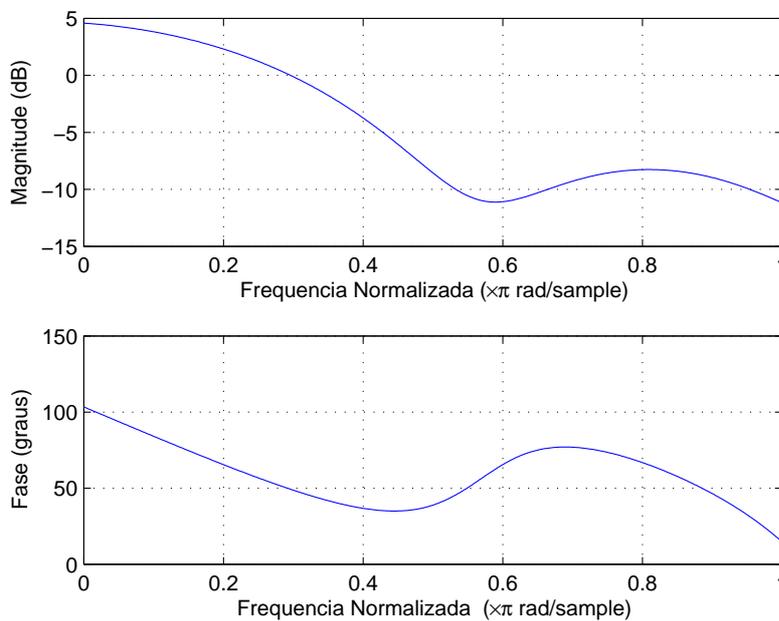


Figura 4.18: Resposta em Frequência do canal fixo de ordem  $L = 3$

São realizados 25 experimentos independentes; para cada experimento simula-se a transmissão de 2000 símbolos OFDM-CP, ou seja, 64000 bits.

As figuras 4.19, 4.20 e 4.21 apresentam o desempenho em termos de MSE do estimador ‘corrmatch’ para razões  $\frac{E_B}{N_0}$  de 5dB, 15dB, e 25dB, respectivamente. Também na Figura 4.19, está indicado o MSE do estimador ‘subspace’ para sistemas OFDM-CP proposto em [40]. O desempenho relativo dos dois estimadores é análogo ao apresentado na Seção 4.7.2 para os estimadores ‘corrmatch’ e ‘subspace’. Assim, para baixas razões  $\frac{E_B}{N_0}$ , o desempenho MSE do ‘corrmatch’ é bastante superior ao do ‘subspace’. Para razões  $\frac{E_B}{N_0}$  moderadas, os desempenhos são semelhantes. Por fim, para altas razões  $\frac{E_B}{N_0}$ , a hierarquia das curvas se inverte, e o estimador ‘subspace’ passa a ter melhor desempenho relativo. Convém lembrar porém,

que o ‘corrmatch’ processa vetores observação de tamanho  $P = 40$ , enquanto que o estimador ‘subspace’ necessita trabalhar com vetores observação de comprimento  $2P - L = 77$  (ou para o caso de *overmodelling*, 72).

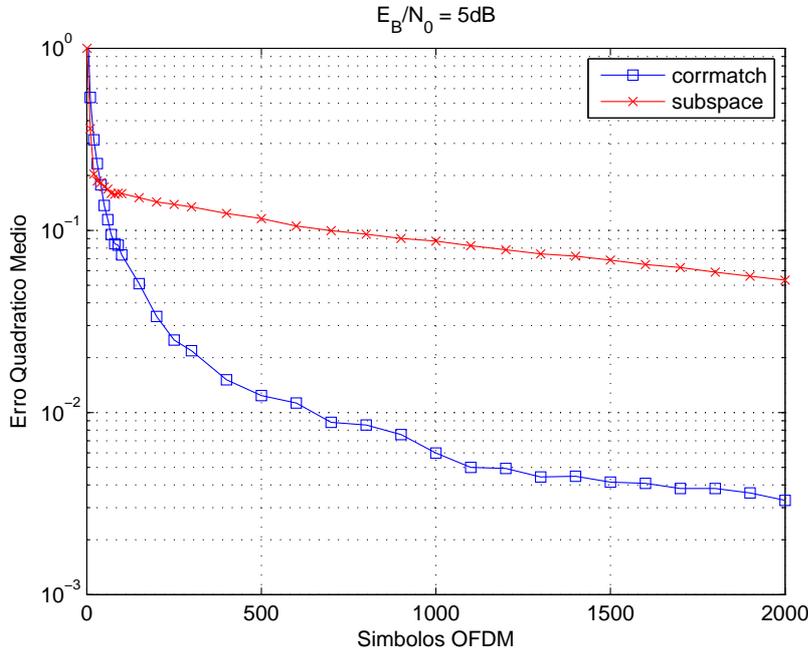


Figura 4.19: Erro quadrático médio dos estimadores ‘corrmatch’ e ‘subspace’, para um sistema OFDM-CP com  $M = 32$  portadoras, intervalo de guarda  $D = 8$ , para canal fixo de ordem  $L = 3$  e razão  $\frac{E_B}{N_0} = 5dB$

O desempenho MSE *versus*  $\frac{E_B}{N_0}$  do estimador ‘corrmatch’, após recepção de 2000 símbolos OFDM, é ilustrado na Figura 4.22. Para fins de comparação, o desempenho do estimador ‘subspace’ também é traçado. Assim como para o OFDM-ZP, o ‘corrmatch’ apresenta relativa robustez em termos de razão  $\frac{E_B}{N_0}$ .

Ainda da Figura 4.22, constam o desempenho MSE dos estimadores ‘corrmatch’ e ‘subspace’ para o caso de *overmodelling*. Nestas circunstâncias, apesar do canal verdadeiro ser de ordem  $L = 3$ , o canal estimado é suposto de ordem  $\hat{L} = D = 8$ . Proporcionalmente, o *overmodelling* para este cenário simulado é menos severo do que o *overmodelling* do cenário da Seção 4.7.2. Isto possivelmente explica por que a perda de desempenho é menos pronunciada na Figura 4.22 (OBS: para uma certa faixa de  $\frac{E_B}{N_0}$ , o MSE do estimador ‘subspace’ com *overmodelling* é menor do que o MSE do mesmo estimador utilizando a ordem verdadeira. Isto se deve provavelmente a um número insuficiente de experimentos, aliado ao fato do estimador ser menos sensível a erros na ordem do canal estimado).

O desempenho em termos de taxa de erro de bit de um sistema OFDM-CP operando com um receptor ZF (vide (3.7)) e empregando o estimador ‘corrmatch’ está ilustrado na Figura 4.23. Convém lembrar que uma vez que o receptor realiza

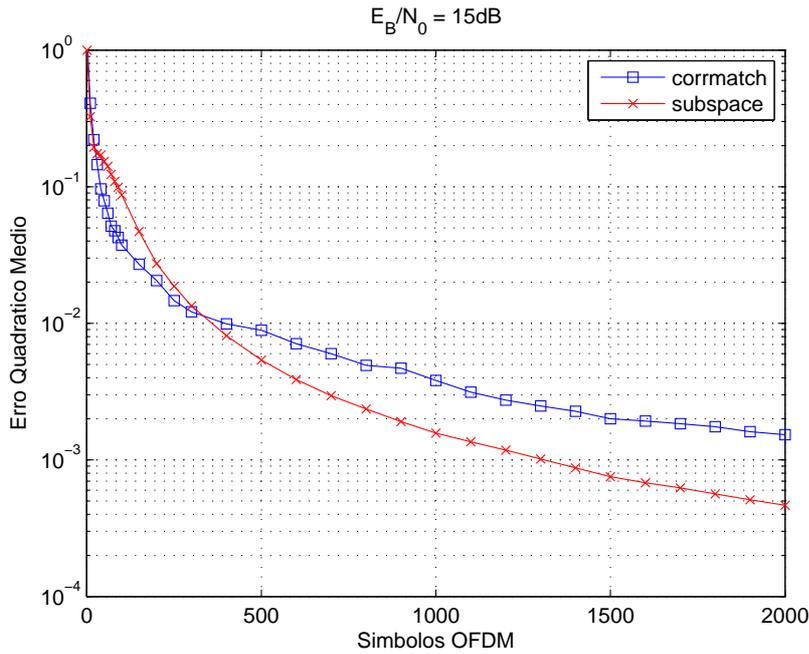


Figura 4.20: Erro quadrático médio dos estimadores ‘corrmatch’ e ‘subspace’, para um sistema OFDM-CP com  $M = 32$  portadoras, intervalo de guarda  $D = 8$ , para canal fixo de ordem  $L = 3$  e razão  $\frac{E_B}{N_0} = 15\text{dB}$

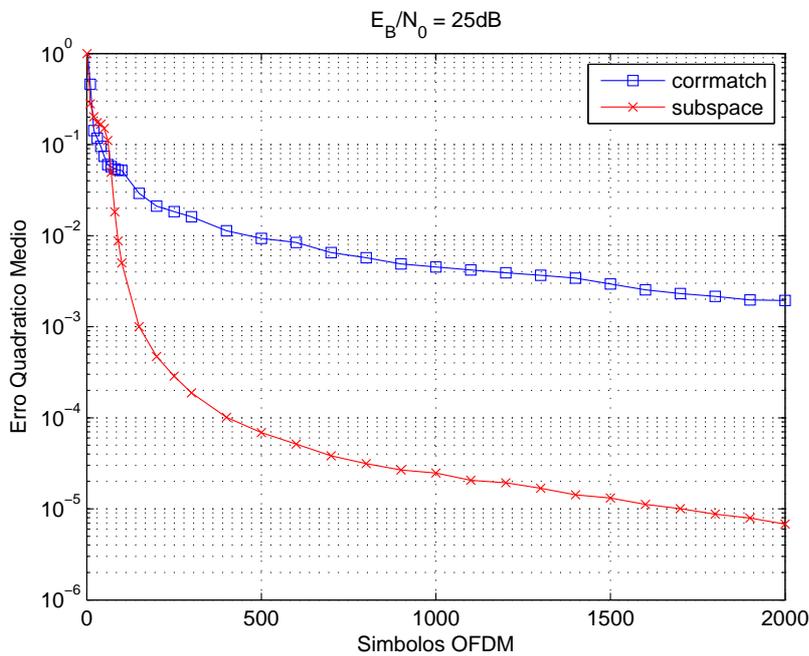


Figura 4.21: Erro quadrático médio dos estimadores ‘corrmatch’ e ‘subspace’, para um sistema OFDM-CP com  $M = 32$  portadoras, intervalo de guarda  $D = 8$ , para canal fixo de ordem  $L = 3$  e razão  $\frac{E_B}{N_0} = 25\text{dB}$

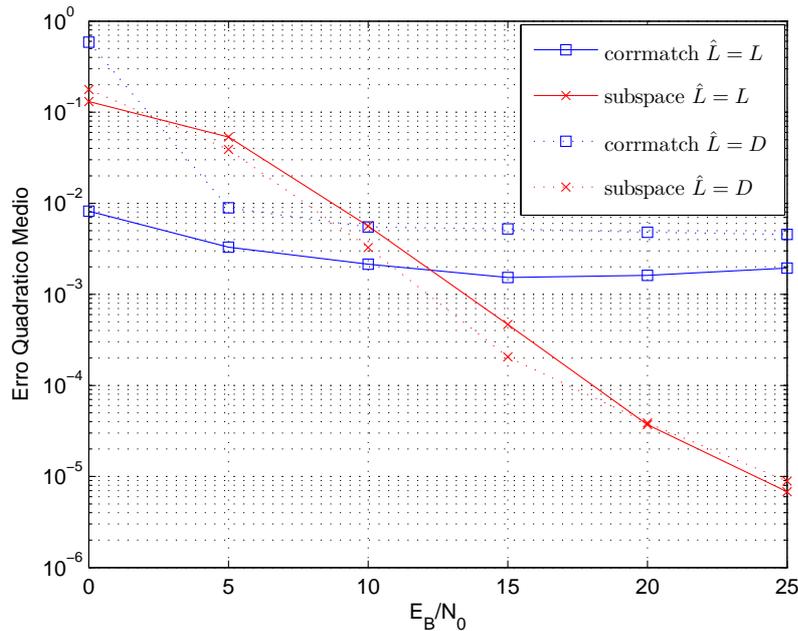


Figura 4.22: Erro quadrático médio dos estimadores ‘corrmatch’ e ‘subspace’, para um sistema OFDM-CP com  $M = 32$  portadoras, intervalo de guarda  $D = 8$ , para canal fixo de ordem  $L = 3$

a chamada equalização no domínio da frequência, as estimativas fornecidas pelo ‘corrmatch’ são transformadas para o domínio da frequência por meio de uma DFT. A Figura 4.23 também apresenta a taxa de erro de bit para um receptor operando com o estimador ‘subspace’, assim como o desempenho de um receptor hipotético que dispõe de estimativas perfeitas do canal (“gênio”). Como para o caso do OFDM-ZP, um melhor desempenho MSE por parte do estimador ‘subspace’ relativamente ao estimador ‘corrmatch’ não se traduziu em um melhor desempenho em termos de taxa de erro de bit.

O desempenho para os receptores operando com os estimadores em condição de *overmodelling* também consta da Figura 4.23. Neste caso, devido à sua maior robustez contra erros na ordem do canal estimado, o estimador ‘subspace’ proporcionou desempenho pouco superior ao do estimador ‘corrmatch’.

#### 4.7.5 Método das Potências – OFDM-CP

Esta seção propõe examinar o desempenho do estimador introduzido na Seção 4.4. O sistema OFDM-CP considerado é o mesmo da seção anterior.

As figuras 4.24, 4.25 e 4.26 ilustram, respectivamente para razões  $\frac{E_B}{N_0}$  de 5dB, 15dB e 25dB, o desempenho em termos de MSE do estimador ‘Pot’ proposto com diversas potências  $m$  da inversa da matriz correlação, para sistemas OFDM-CP.

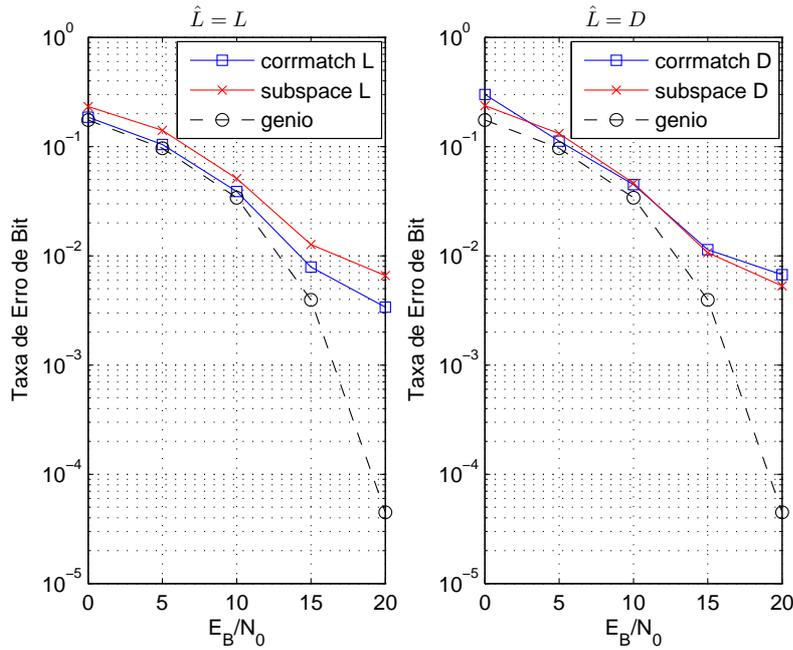


Figura 4.23: Taxa de Erro de Bit com o uso dos estimadores ‘corrmatch’ e ‘subspace’, para um sistema OFDM-CP com  $M = 32$  portadoras, intervalo de guarda  $D = 8$ , para canal fixo de ordem  $L = 3$

O desempenho do estimador ‘subspace’ também consta da figura, servindo como referência.

Das figuras, pode-se tirar conclusões análogas as da Seção 4.7.3, isto é: o desempenho MSE segue uma hierarquia. Para uma dada razão  $\frac{E_B}{N_0}$ , quanto maior a potência  $m$  da inversa da matriz correlação empregada, melhor é o desempenho, até atingir a saturação no patamar do estimador ‘subspace’. Ademais, fixada uma potência  $m$  para o estimador ‘Pot’, um aumento na razão  $\frac{E_B}{N_0}$ , implica num desempenho cada vez mais próximo ao do estimador ‘subspace’.

Estas observações são verificadas também pela Figura 4.27, da qual consta o desempenho MSE *versus*  $\frac{E_B}{N_0}$ , obtido ao final da transmissão de 2000 símbolos OFDM, para o estimador ‘Pot’ com potências 1, 3 e 5. O desempenho do estimador ‘subspace’ também é indicado na figura.

O impacto de um canal estimado com ordem maior do que a ordem verdadeira também pode ser visto na Figura 4.27. A perda de desempenho por causa de *overmodelling* é desprezível para razões  $\frac{E_B}{N_0}$  moderadas e altas, e pode ser verificado que a hierarquia se mantém.

Por fim, a Figura 4.28 ilustra o desempenho de um receptor ZF que emprega o estimador ‘Pot’. Percebe-se que somente para o estimador com potência 5 o desempenho em termos de taxa de erro de bit é comparável ao do estimador ‘subspace’, para razões  $\frac{E_B}{N_0}$  moderadas. Para altas razões  $\frac{E_B}{N_0}$ , pode-se utilizar o

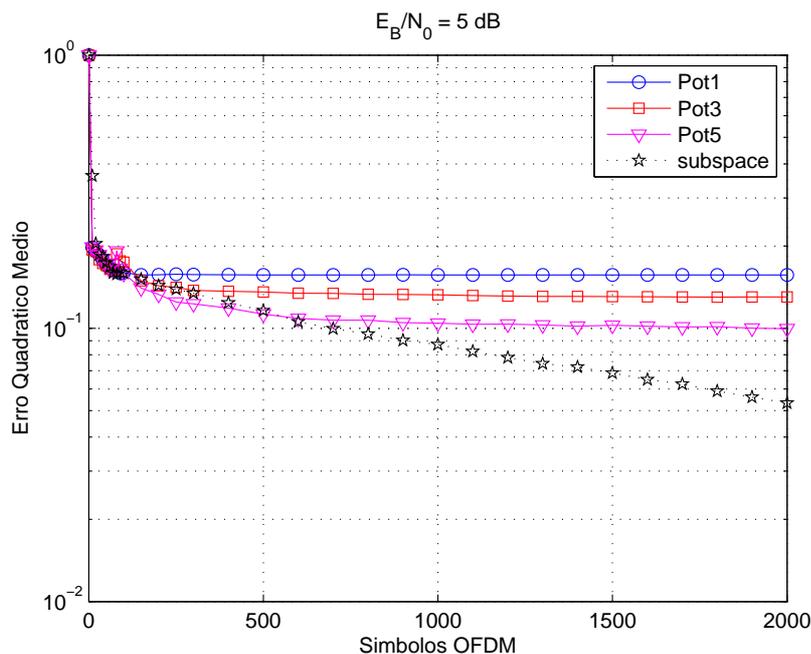


Figura 4.24: Erro quadrático médio dos estimadores ‘Pot’ e ‘subspace’, para um sistema OFDM-CP com  $M = 32$  portadoras, intervalo de guarda  $D = 8$ , para canal fixo de ordem  $L = 3$  e razão  $\frac{E_B}{N_0} = 5dB$

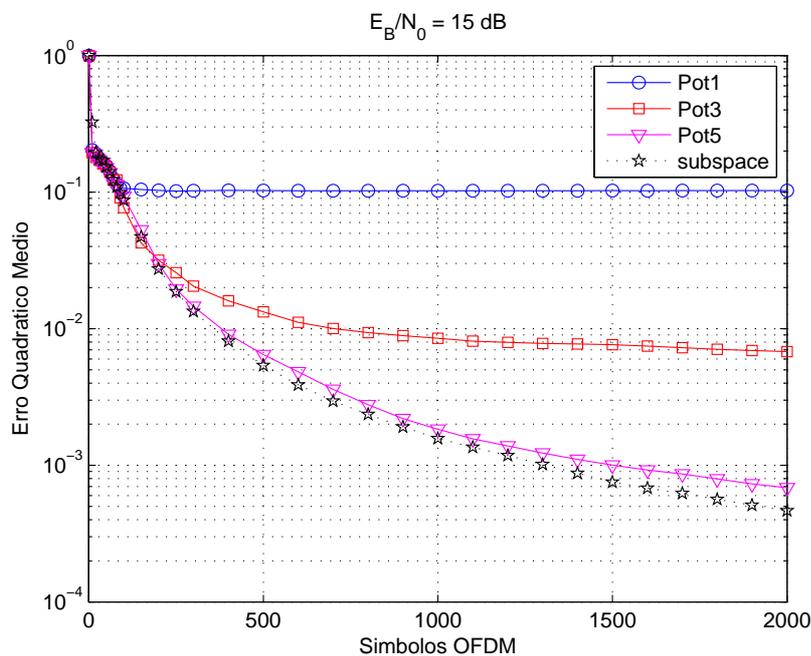


Figura 4.25: Erro quadrático médio dos estimadores ‘Pot’ e ‘subspace’, para um sistema OFDM-CP com  $M = 32$  portadoras, intervalo de guarda  $D = 8$ , para canal fixo de ordem  $L = 3$  e razão  $\frac{E_B}{N_0} = 15dB$

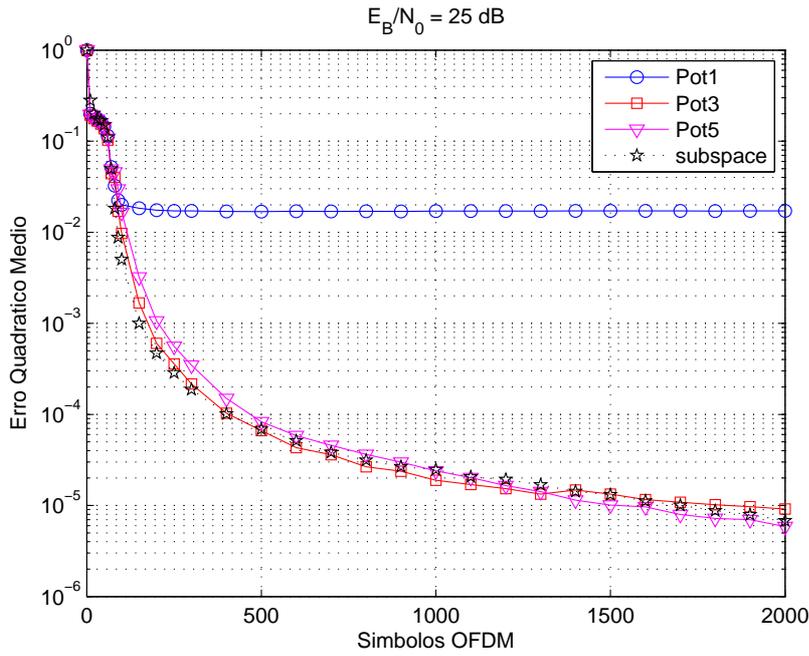


Figura 4.26: Erro quadrático médio dos estimadores 'Pot' e 'subspace', para um sistema OFDM-CP com  $M = 32$  portadoras, intervalo de guarda  $D = 8$ , para canal fixo de ordem  $L = 3$  e razão  $\frac{E_B}{N_0} = 25$  dB

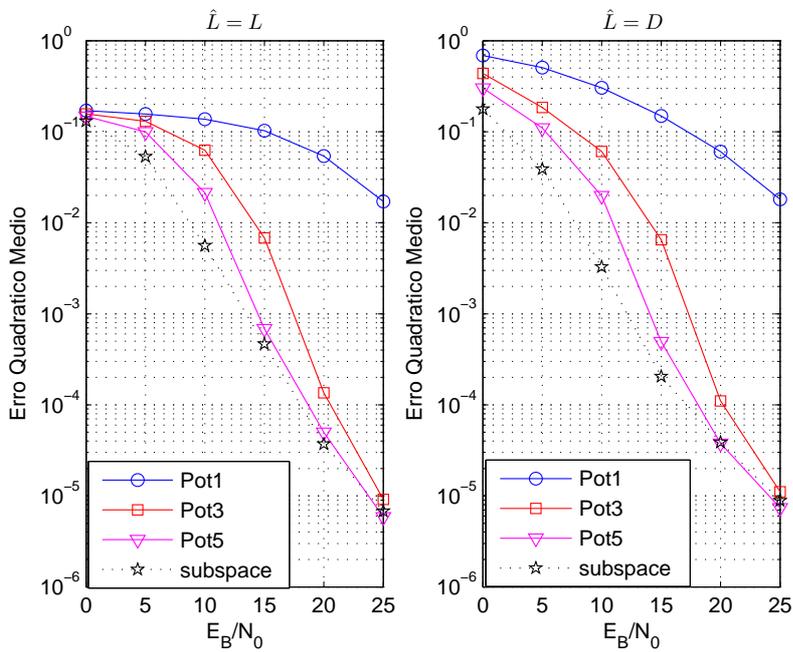


Figura 4.27: Erro quadrático médio dos estimadores 'Pot' e 'subspace', para um sistema OFDM-CP com  $M = 32$  portadoras, intervalo de guarda  $D = 8$ , para canal fixo de ordem  $L = 3$

estimador ‘Pot’ com potência  $m = 3$  com perda de desempenho desprezível.

O desempenho de receptores operando com os estimadores em *overmodelling* também está ilustrado na Figura 4.28. Assim como o MSE dos estimadores não se mostrou muito sensível a erros na ordem do canal estimado, o desempenho dos receptores não foi afetado de forma acentuada.

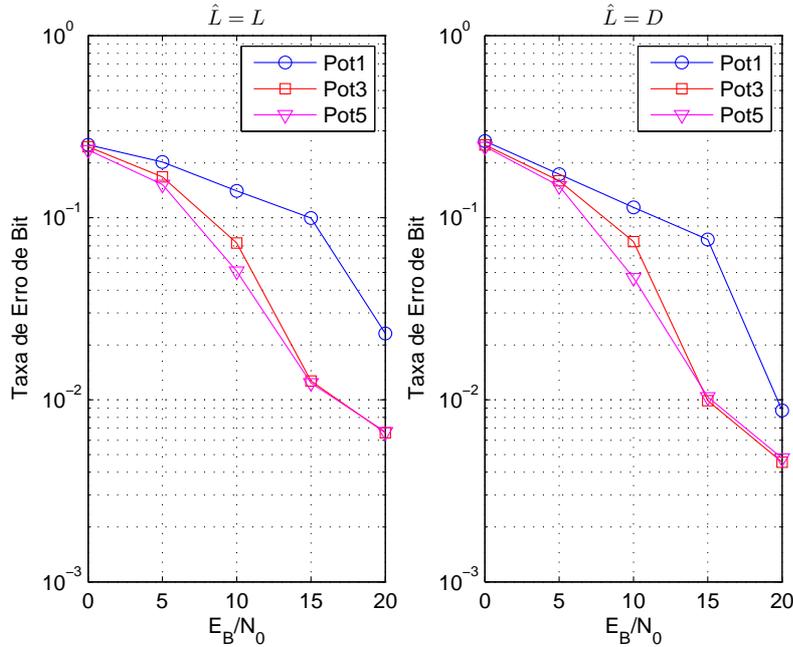


Figura 4.28: Taxa de Erro de Bit com o uso dos estimadores ‘Pot’, para um sistema OFDM-CP com  $M = 32$  portadoras, intervalo de guarda  $D = 8$ , para canal fixo de ordem  $L = 3$

#### 4.7.6 Estimação de $\sigma^2$ – OFDM-ZP

Embora não seja usado *explicitamente* no cômputo do estimador ‘corrmatch’, um estimador de  $\sigma^2$  foi obtido num passo intermediário da derivação apresentada na Seção 4.5. De fato, (4.66) pode ser empregada de forma a se obter estimativas  $\hat{\sigma}^2$  de  $\sigma^2$ . Ademais, seguindo linha de raciocínio semelhante à que foi adotada para provar que o estimador ‘corrmatch’ é consistente, também é possível provar que o estimador em (4.66) é consistente. Nesta seção, pretende-se ilustrar a capacidade de (4.66) em estimar  $\sigma^2$ .

Embora (4.66) seja válida tanto para o OFDM-ZP quanto para o OFDM-CP, o desempenho do estimador é aqui apresentado para um sistema OFDM-ZP com  $M = 64$  portadoras transmitindo símbolos BPSK, e com intervalo de guarda de comprimento  $D = 16$ . Os sinais passam por um canal fixo de ordem  $L = 3$  com resposta em frequência representada na Figura 4.1.

São realizados 100 experimentos independentes. Para cada experimento, é simulada a transmissão de 5000 símbolos OFDM.

A Figura 4.29 ilustra a evolução das estimativas ao longo dos símbolos OFDM recebidos, para várias razões  $\frac{E_B}{N_0}$ , supondo a ordem do canal conhecida, isto é,  $\hat{L} = L$ . Na figura, a linha reta de cor verde representa o verdadeiro valor de  $\sigma^2$ , mantido fixo em 1.

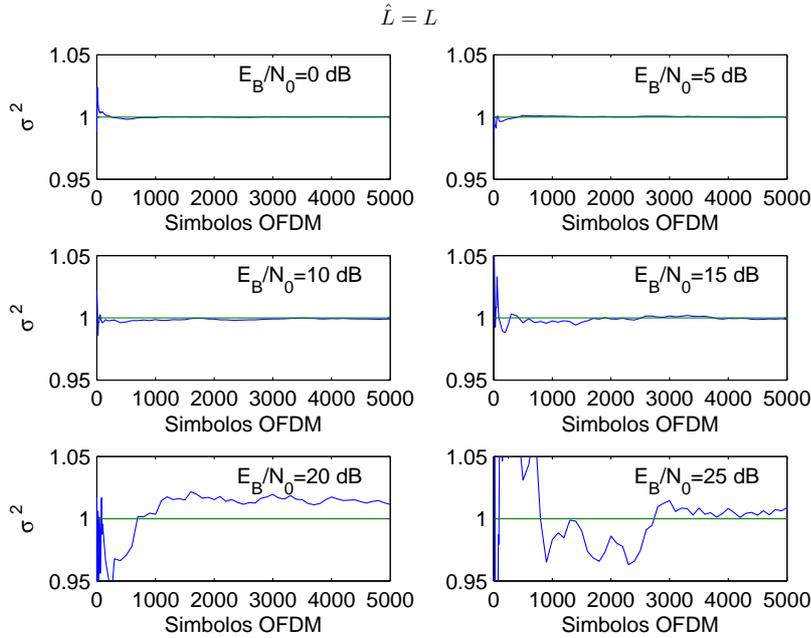


Figura 4.29: Estimação de  $\sigma^2$  via estimador ‘corrmatch’, para um sistema OFDM-ZP com  $M = 64$  portadoras, intervalo de guarda  $D = 16$ , para canal fixo de ordem  $L = 3$ .  $\sigma^2$  fixo.

Na Figura 4.30, o mesmo tipo de experimento é repetido porém para cada razão  $\frac{E_B}{N_0}$ ,  $E_B$  é mantido fixo em 1, e por conseguinte o valor de  $\sigma^2$  varia (para diferentes razões  $\frac{E_B}{N_0}$ ). Na figura,  $\sigma^2$  assume os valores: 1.0, 0.3162, 0.1, 0.0316, 0.01, e 0.0032, para  $\frac{E_B}{N_0} = 0\text{dB}$ , 5dB, 10dB, 15dB, 20dB e 25dB respectivamente.

#### 4.7.7 Expressão Analítica do MSE – OFDM-ZP

Uma expressão analítica para o desempenho MSE do estimador ‘corrmatch’ pode ser obtida nos mesmos moldes de [84].

É possível mostrar que:

$$\text{MSE}(i) = \mathbb{E}[\|\mathbf{h} - \hat{\mathbf{h}}(i)\|^2] = \mathbb{E}[\|\delta\mathbf{h}\|^2] = \text{Tr}\left\{\mathbb{E}[\delta\mathbf{h}\delta\mathbf{h}^H]\right\}. \quad (4.78)$$

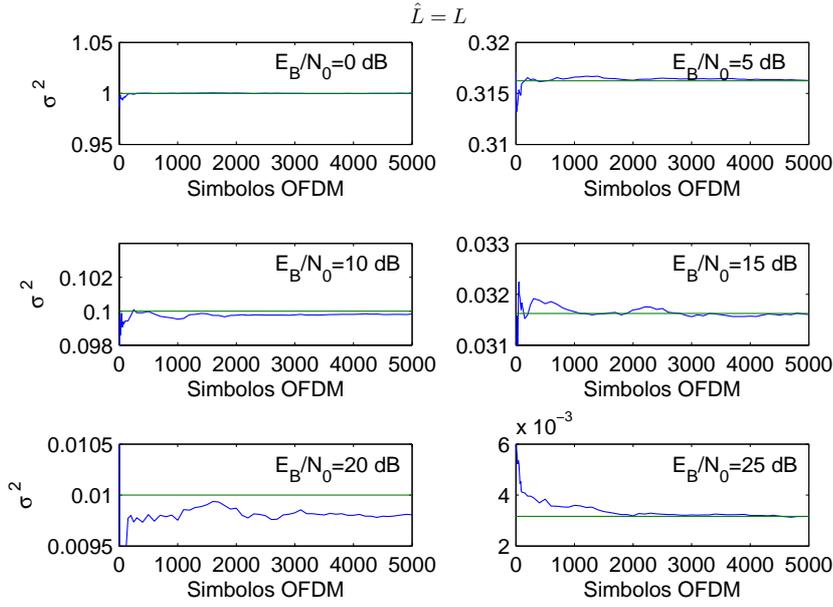


Figura 4.30: Estimação de  $\sigma^2$  via estimador ‘corrmatch’, para um sistema OFDM-ZP com  $M = 64$  portadoras, intervalo de guarda  $D = 16$ , para canal fixo de ordem  $L = 3$ .  $E_B$  fixo.

onde  $i$  é um índice no tempo discreto (relativo ao número de símbolos OFDM recebidos). Mas<sup>(13)</sup>,

$$\mathbb{E}[\delta\mathbf{h}\delta\mathbf{h}^H] \approx \frac{1}{\sigma_s^2} \mathbf{\Pi} \left[ \sum_{l=0}^L \sum_{m=0}^L h_l h_m^* \mathbf{K}_{l+1} \mathbf{\Phi}(\hat{\mathbf{q}}(i)) \mathbf{K}_{m+1}^* \right] \mathbf{\Pi}, \quad (4.79)$$

com:

- $\mathbf{\Pi} = \mathbf{U}\mathbf{U}^H$ , tal que  $\mathbf{U}$  é o complemento ortogonal de dimensão  $L$  de  $\mathbf{h}$ ;
- $\mathbf{K}_l$  é uma submatriz de  $\mathbf{K}$ , e de tamanho  $(L+1) \times P^2$ .  $\mathbf{K}$  é a matriz de tamanho  $(L+1)^2 \times P^2$  que multiplica o vetor  $\mathbf{q}(i)$  em (4.67). Mais especificamente  $\mathbf{K} = [\mathbf{K}_1^H \ \dots \ \mathbf{K}_{L+1}^H]^H$ .
- $\mathbf{\Phi}(\hat{\mathbf{q}}(i)) = \frac{1}{i} \mathbf{\Psi}$ , onde:

$$\mathbf{\Psi} = (\tilde{\mathbf{H}}_0^* \otimes \tilde{\mathbf{H}}_0) \left\{ K_{4s} \mathbf{X}_1 + \sigma_s^4 \mathbf{X}_2 + \sigma_s^4 \mathbf{I}_{M^2} \right\} (\tilde{\mathbf{H}}_0^T \otimes \tilde{\mathbf{H}}_0^H) + \sigma^4 \mathbf{I}_{P^2} + \sigma_s^2 \sigma^2 (\tilde{\mathbf{H}}_0^* \tilde{\mathbf{H}}_0^T) \otimes \mathbf{I}_P + \sigma_s^2 \sigma^2 \mathbf{I}_P \otimes (\tilde{\mathbf{H}}_0 \tilde{\mathbf{H}}_0^H)$$

$$- \mathbf{X}_1 = \sum_{m=1}^M [\mathbf{1}_{(m)} \mathbf{1}_{(m)}^T] \otimes [\mathbf{1}_{(m)} \mathbf{1}_{(m)}^T]$$

\*  $\mathbf{1}_{(m)}$  é o vetor indicador, de comprimento  $M$ , e tal que suas componentes, exceto a  $m$ -ésima, são todas nulas.

<sup>(13)</sup>utilizando apenas perturbações de primeira ordem

- $\mathbf{X}_2 = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^M [\mathbf{1}_{(m)} \mathbf{1}_{(n)}^T] \otimes [\mathbf{1}_{(n)} \mathbf{1}_{(m)}^T]$
- $K_{4s} = m_{4s} - 3\sigma_s^4$  é o cumulante de quarta ordem das componentes do vetor de dados (isto é, dos símbolos BPSK)

O sistema OFDM-ZP considerado tem  $M = 32$  portadoras com modulação BPSK, e o intervalo de guarda tem comprimento  $D = 8$ . O canal fixo  $\mathbf{h} = [0.555 + j0.214 \ 0.160 + j0.636 \ 0.141 + j0.290 \ 0.316 - j0.114]^T$  considerado tem ordem  $L = 3$  e sua resposta em frequência está ilustrada na Figura 4.31.

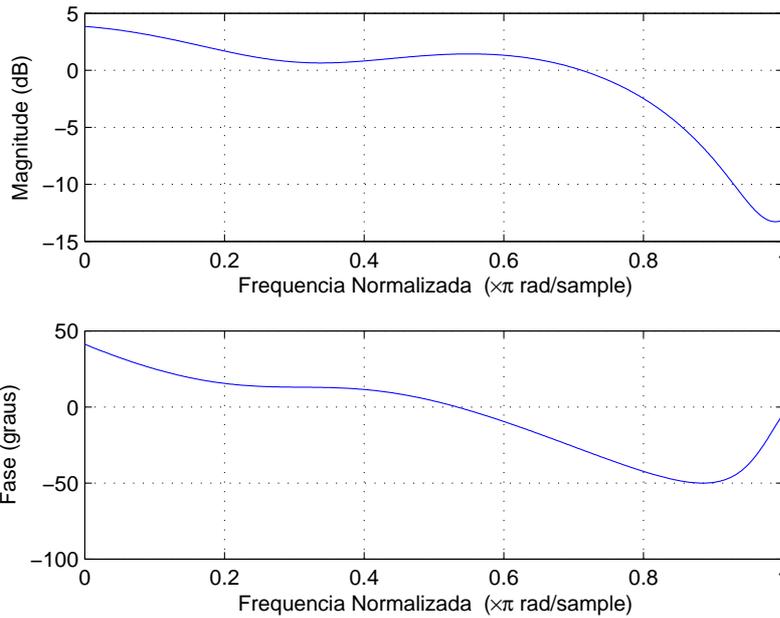


Figura 4.31: Resposta em Frequência do canal fixo

São realizados 100 experimentos independentes. Para cada experimento, a transmissão de 5000 símbolos OFDM é simulada. O desempenho MSE do estimador ‘cormatch’, para diversas razões  $\frac{E_B}{N_0}$  consta da Figura 4.32 (denotado ‘simulado’). As curvas obtidas por meio de (4.78) e (4.79), denotadas ‘analítico’, também estão presentes na Figura 4.32. Da figura verifica-se que a expressão analítica obtida por meio da teoria de perturbações de primeira ordem está em acordo com os resultados obtidos por meio de simulação.

Convém frisar que, apesar desta seção considerar o ‘cormatch’ em sistemas OFDM-ZP, o mesmo tipo de estudo pode ser feito para o estimador baseado em casamento de correlação em sistemas OFDM-CP.

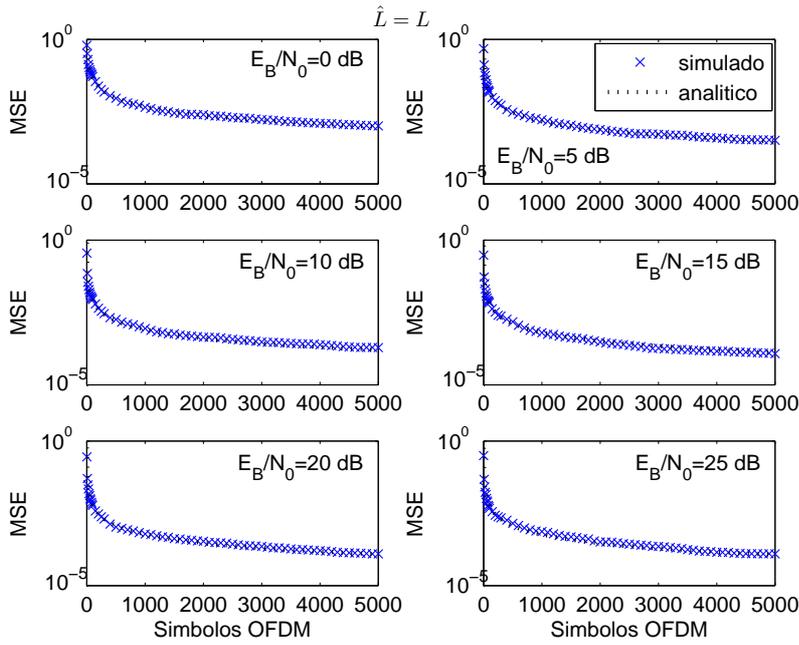


Figura 4.32: Erro quadrático médio do estimador ‘cormatch’, analítico e simulado, para um sistema OFDM-ZP com  $M = 32$  portadoras, intervalo de guarda  $D = 8$ , para canal fixo de ordem  $L = 3$

#### 4.8 Resolvendo a Ambigüidade – OFDM-ZP

Conforme mencionado ao longo do capítulo, todos os estimadores abordados fornecem estimativas de canal afetadas por uma ambigüidade representada por um escalar complexo. Um procedimento para resolver esta ambigüidade já foi mencionado na seção 4.7.1 e desde então empregado para gerar todos os resultados de simulação até este ponto. A seguir, outros métodos para resolução da ambigüidade são mencionados/propostos. Resultados de simulação para o desempenho em termos de erro quadrático médio e taxa de erro de bit para o estimador ‘cormatch’ com a ambigüidade resolvida pelos diversos métodos fecham esta seção.

Ao longo desta seção supõe-se que o esquema de estimação cega de canal fornece uma estimativa  $\hat{\mathbf{h}}_b(i)$  de modo que a estimativa a ser usada na detecção é  $\hat{\mathbf{h}}(i) = \alpha(i)\hat{\mathbf{h}}_b(i)$ .

O primeiro método apresentado é na verdade de interesse puramente teórico, e surge como resposta para a seguinte pergunta: Qual é o escalar complexo  $w$  que minimiza o erro quadrático entre o canal verdadeiro  $\mathbf{h}$  e a estimativa  $\hat{\mathbf{h}}_b(i)$  obtida por meio do esquema cego? Ou, em termos matemáticos:

$$\begin{aligned} \alpha(i) &= \arg \min_w \{ \|\mathbf{h} - w\hat{\mathbf{h}}_b(i)\|^2 \} \\ &= \hat{\mathbf{h}}_b^H(i)\mathbf{h}. \end{aligned} \quad (4.80)$$

Este "estimador de ambigüidade" é na verdade uma espécie de "gênio", e não pode ser usado na prática uma vez que é suposto o conhecimento do canal verdadeiro. Como este esquema minimiza o erro quadrático, com seu emprego é possível vislumbrar o melhor MSE atingível pelo estimador de canal. Este método pode ser visto como uma generalização do método utilizado anteriormente nas simulações, em que somente um coeficiente do canal verdadeiro era suposto conhecido.

Os próximos métodos sugeridos são de ordem prática. Lembrando o modelo de sinais para o OFDM-ZP:

$$\mathbf{r}_{\text{ZP}}(i) = \mathbf{H}_0 \mathbf{F}_M^H \mathbf{s}(i) + \mathbf{n}(i), \quad (4.81)$$

deseja-se explicitar o vetor de canal  $\mathbf{h}$  em (4.81). Para tal, o sinal OFDM-ZP é processado como segue, no estilo *OLA* [56]:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{\text{ZP-OLA}}(i) &= \mathbf{T}_{\text{OLA}} \mathbf{r}_{\text{ZP}}(i) \\ &= \mathbf{C}_M(\mathbf{h}_M) \mathbf{F}_M^H \mathbf{s}(i) + \mathbf{n}_{\text{OLA}}(i) \end{aligned}$$

onde  $\mathbf{r}_{\text{ZP-OLA}}(i)$  é um vetor de comprimento  $M$  (e não mais  $P$ ), e  $\mathbf{C}_M(\mathbf{h}_M)$  é uma matriz circulante, como em (3.1), e com:

$$\mathbf{T}_{\text{OLA}} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_D & \mathbf{0}_{D \times (M-D)} & \mathbf{I}_D \\ \mathbf{0}_{(M-D) \times M} & \mathbf{I}_{(M-D) \times M} & \mathbf{0}_{(M-D) \times D} \end{bmatrix}.$$

Dáí decorre que a matriz  $\mathbf{C}_M(\mathbf{h}_M)$  pode ser diagonalizada com o auxílio de uma DFT, como visto a seguir:

$$\begin{aligned} \mathbf{z}(i) &= \mathbf{F}_M \mathbf{r}_{\text{ZP-OLA}}(i) \\ &= \text{diag}(\tilde{\mathbf{h}}_M) \mathbf{s}(i) + \mathbf{n}'(i) \\ &= \text{diag}(\mathbf{s}(i)) \tilde{\mathbf{h}}_M + \mathbf{n}'(i) \\ &= \text{diag}(\mathbf{s}(i)) \sqrt{M} \mathbf{F}_M \begin{bmatrix} \mathbf{h} \\ \mathbf{0}_{M-L-1 \times 1} \end{bmatrix} + \mathbf{n}'(i). \end{aligned}$$

Considerando que, em cada símbolo OFDM, são transmitidos  $N_{\text{pil}}$  símbolos pilotos nas portadoras  $p_1, p_2, \dots, p_{N_{\text{pil}}}$ , o vetor observação  $\mathbf{z}_{\text{pil}}(i)$  que só contém informação dos pilotos pode ser expresso como:

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_{\text{pil}}(i) &= \text{diag}(\mathbf{s}_{\text{pil}}(i)) \Phi_{\text{pil}} \mathbf{h} + \mathbf{n}'_{\text{pil}}(i) \\ &= \text{diag}(\mathbf{s}_{\text{pil}}(i)) \Phi_{\text{pil}} \alpha \mathbf{h}_b + \mathbf{n}'_{\text{pil}}(i), \end{aligned} \quad (4.82)$$

onde  $\Phi_{\text{pil}}$  é uma matriz de tamanho  $N_{\text{pil}} \times (L + 1)$  que contém as  $L + 1$  primeiras colunas das linhas  $p_1, p_2, \dots, p_{N_{\text{pil}}}$  da matriz  $\sqrt{M} \mathbf{F}_M$ ; e,  $\mathbf{z}_{\text{pil}}(i) = [z_{\text{pil}}^{(i)}[p_1] \ z_{\text{pil}}^{(i)}[p_2] \ \dots \ z_{\text{pil}}^{(i)}[p_{N_{\text{pil}}}]^T$ ,  $\mathbf{s}_{\text{pil}}(i) = [s_{\text{pil}}^{(i)}[p_1] \ s_{\text{pil}}^{(i)}[p_2] \ \dots \ s_{\text{pil}}^{(i)}[p_{N_{\text{pil}}}]^T$ , e

$\mathbf{n}'_{\text{pil}}(i) = [n'_{\text{pil}}(i)[p_1] \ n'_{\text{pil}}(i)[p_2] \ \cdots \ n'_{\text{pil}}(i)[p_{N_{\text{pil}}}] ]^T$ . Ademais,  $\mathbf{z}_{\text{pil}}(i) = \mathbf{\Gamma} \mathbf{r}_{\text{ZP}}(i)$ , com  $\mathbf{\Gamma} = \frac{1}{\sqrt{M}} \mathbf{\Phi}_{\text{pil}} \mathbf{T}_{\text{OLA}}$ .

Observando (4.82), propõe-se estimar  $\alpha$  segundo o critério de máxima verossimilhança (ou *Maximum Likelihood* – ML). Uma vez que  $\mathbf{n}'_{\text{pil}}(i)$  é vetor gaussiano de média nula e matriz covariância  $\mathbf{K}_{\mathbf{n}'_{\text{pil}}}$ , a função de log-verossimilhança de  $\mathbf{z}_{\text{pil}}(i)$ ,  $\ln p_{\mathbf{z}_{\text{pil}}}(\mathbf{Z}, \alpha)$ , é proporcional a  $(\mathbf{Z} - \alpha \mathbf{m})^H \mathbf{K}_{\mathbf{n}'_{\text{pil}}}^{-1} (\mathbf{Z} - \alpha \mathbf{m})$ , com  $\mathbf{m} = \text{diag}(\mathbf{s}_{\text{pil}}(i)) \mathbf{\Phi}_{\text{pil}} \hat{\mathbf{h}}_b$  e  $\mathbf{K}_{\mathbf{n}'_{\text{pil}}} = N_0 \mathbf{\Gamma} \mathbf{\Gamma}^H$ . Daí decorre que a estimativa ML de  $\alpha$  é:

$$\alpha = \frac{\mathbf{m}^H \mathbf{K}_{\mathbf{n}'_{\text{pil}}}^{-1} \mathbf{Z}}{\mathbf{m}^H \mathbf{K}_{\mathbf{n}'_{\text{pil}}}^{-1} \mathbf{m}}.$$

Ou, reescrevendo:

$$\alpha(i) = \frac{\left( \text{diag}(\mathbf{s}_{\text{pil}}(i)) \mathbf{\Phi}_{\text{pil}} \hat{\mathbf{h}}_b(i) \right)^H \left( \mathbf{\Gamma} \mathbf{\Gamma}^H \right)^{-1} \mathbf{z}_{\text{pil}}(i)}{\left( \text{diag}(\mathbf{s}_{\text{pil}}(i)) \mathbf{\Phi}_{\text{pil}} \hat{\mathbf{h}}_b(i) \right)^H \left( \mathbf{\Gamma} \mathbf{\Gamma}^H \right)^{-1} \left( \text{diag}(\mathbf{s}_{\text{pil}}(i)) \mathbf{\Phi}_{\text{pil}} \hat{\mathbf{h}}_b(i) \right)}.$$

Uma versão filtrada é proposta a seguir, e cunhada "ML filtrada":

$$\alpha(i) = \lambda \alpha(i-1) + \frac{(1-\lambda) \left( \text{diag}(\mathbf{s}_{\text{pil}}(i)) \mathbf{\Phi}_{\text{pil}} \hat{\mathbf{h}}_b(i) \right)^H \left( \mathbf{\Gamma} \mathbf{\Gamma}^H \right)^{-1} \mathbf{z}_{\text{pil}}(i)}{\left( \text{diag}(\mathbf{s}_{\text{pil}}(i)) \mathbf{\Phi}_{\text{pil}} \hat{\mathbf{h}}_b(i) \right)^H \left( \mathbf{\Gamma} \mathbf{\Gamma}^H \right)^{-1} \left( \text{diag}(\mathbf{s}_{\text{pil}}(i)) \mathbf{\Phi}_{\text{pil}} \hat{\mathbf{h}}_b(i) \right)}, \quad (4.83)$$

com  $0 < \lambda < 1$ .

Outro método de resolução da ambigüidade é sugerido, inspirado no “gênio” apresentado no início desta seção. De fato, considerando que é possível obter estimativas da resposta em frequência nas frequências das portadoras que transportam pilotos, é possível obter o seguinte estimador para  $\alpha$ :

$$\begin{aligned} \alpha(i) &= \arg \min_w \{ \|\hat{\mathbf{h}}_{\text{pil}} - w \hat{\mathbf{h}}_b(i)\|^2 \} \\ &= \arg \min_w \{ \|\hat{\mathbf{h}}_{\text{pil}} - w \mathbf{\Phi}_{\text{pil}} \hat{\mathbf{h}}_b(i)\|^2 \} \\ &= \frac{(\mathbf{\Phi}_{\text{pil}} \hat{\mathbf{h}}_b(i))^H \hat{\mathbf{h}}_{\text{pil}}(i)}{\|\mathbf{\Phi}_{\text{pil}} \hat{\mathbf{h}}_b(i)\|^2}, \end{aligned} \quad (4.84)$$

onde  $\hat{\mathbf{h}}_{\text{pil}} = [\hat{h}[p_1] \ \hat{h}[p_2] \ \cdots \ \hat{h}[p_{N_{\text{pil}}}] ]^T$ .

Todavia, ainda é necessário estimar de alguma forma  $\hat{\mathbf{h}}_{\text{pil}}$ . Sugere-se então empregar estimativas ZF de  $\hat{\mathbf{h}}_{\text{pil}}$ , dadas por:

$$\hat{\mathbf{h}}_{\text{pil}} = \text{diag}^{-1}(\mathbf{s}_{\text{pil}}(i)) \mathbf{z}_{\text{pil}}(i).$$

Substituindo em (4.84), chega-se ao seguinte estimador para  $\alpha$ :

$$\alpha(i) = \frac{(\mathbf{\Phi}_{\text{pil}} \hat{\mathbf{h}}_b(i))^H \text{diag}^{-1}(\mathbf{s}_{\text{pil}}(i)) \mathbf{z}_{\text{pil}}(i)}{\|\mathbf{\Phi}_{\text{pil}} \hat{\mathbf{h}}_b(i)\|^2}. \quad (4.85)$$

Uma versão filtrada, denotada "ZF filtrada" é dada por:

$$\alpha(i) = \frac{(\Phi_{\text{pil}} \hat{\mathbf{h}}_b(i))^H (\lambda \hat{\mathbf{h}}_{\text{pil}}(i-1) + (1-\lambda) \text{diag}^{-1}(\mathbf{s}_{\text{pil}}(i)) \mathbf{z}_{\text{pil}}(i))}{\|\Phi_{\text{pil}} \hat{\mathbf{h}}_b(i)\|^2}, \quad (4.86)$$

com  $0 < \lambda < 1$ .

O desempenho do estimador 'corrmatch' em conjunto com o emprego dos esquemas de resolução da ambigüidade é investigado. Os métodos de resolução da ambigüidade comparados são: o "gênio" em (4.80), o "gênio" utilizando apenas um coeficiente do canal verdadeiro (vide seção 4.7.1), o esquema ML filtrado em (4.83), e o esquema ZF filtrado em (4.86).

Considera-se um sistema OFDM-ZP com  $M = 64$  portadoras transmitindo símbolos oriundos de uma constelação BPSK. O intervalo de guarda inserido tem comprimento  $D = 16$ . O canal fixo experimentado pelos sinais tem ordem  $L = 3$  e sua resposta em frequência está ilustrada na Figura 4.1.

São realizados 15 experimentos independentes. Para cada experimento, é simulada a transmissão de 5000 símbolos OFDM (ou seja, 160000 bits). A ordem do canal é suposta conhecida, ou seja  $\hat{L} = L = 3$ . Para cada símbolo OFDM transmitido,  $M - 1$  portadoras carregam símbolos de informação, e 1 única portadora carrega 1 símbolo piloto (isto é, símbolo conhecido tanto pelo transmissor quanto pelo receptor).

O desempenho MSE está ilustrado na Figura 4.33, e observa-se que o desempenho do estimador 'corrmatch' juntamente com os estimadores práticos da ambigüidade, apesar de apresentar degradação um pouco mais acentuada para baixas razões  $\frac{E_B}{N_0}$ , não destoa do desempenho do estimador 'corrmatch' acoplado ao estimador ideal de ambigüidade ("gênio").

A Figura 4.34 ilustra o desempenho, em termos de taxa de erro de bit, de um receptor empregando o estimador 'corrmatch' em conjunto com os esquemas de resolução de ambigüidade. Conforme sugerido pelo desempenho MSE, não houve perda de desempenho significativa em termos de taxa de erro de bit ao se usar os esquemas práticos de resolução de ambigüidade.

Vale ressaltar que embora tenha sido considerado o estimador 'corrmatch' em sistema OFDM-ZP, o conteúdo desta seção aplica-se aos outros estimadores de canal, bem como ao OFDM-CP.

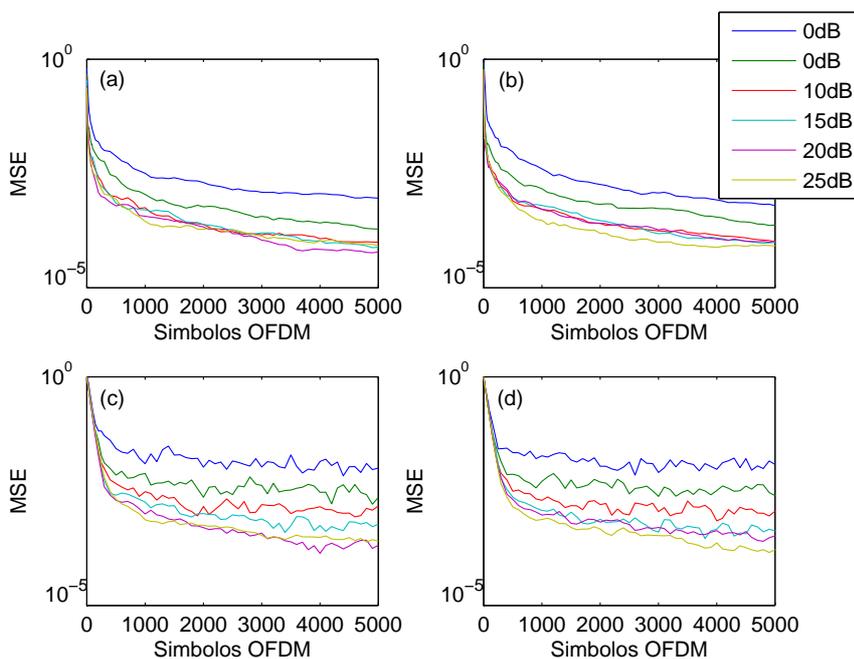


Figura 4.33: Desempenho MSE para o estimador ‘cormatch’, para várias razões  $\frac{E_B}{N_0}$  com ambigüidade resolvida com: a) “gênio”, b) um único coeficiente do canal verdadeiro conhecido, c) ML filtrado, e d) ZF filtrado

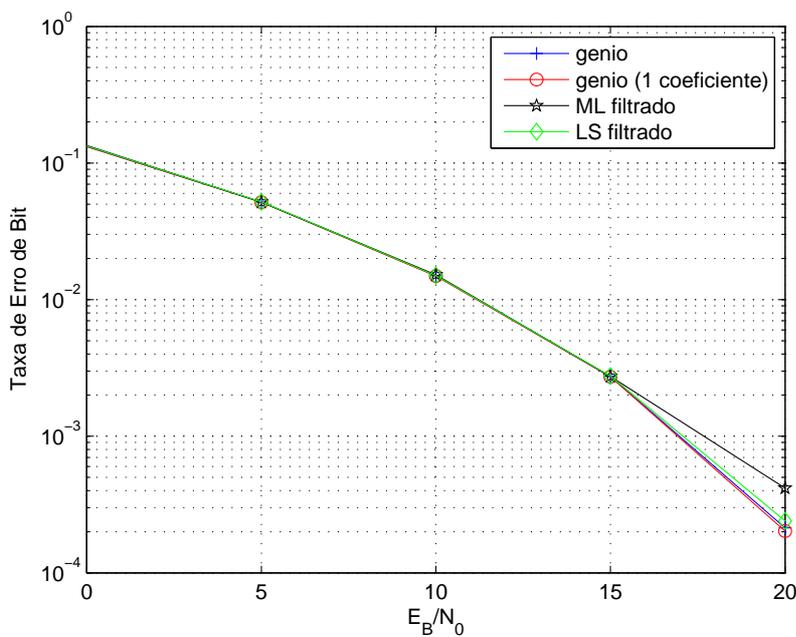


Figura 4.34: Taxa de Erro de Bit para estimador ‘cormatch’, para ambigüidade resolvida de diversas formas