

2 Modelo de Sinais

2.1 Introdução

No presente capítulo é apresentado o modelo de comunicação adotado.

O modelo matemático de sinais transmitidos por sistemas de transmissão em blocos e mais particularmente para sistemas OFDM-ZP e OFDM-CP é apresentado na Seção 2.2.1.

Na Seção 2.2.2, os sinais transmitidos são discretizados no receptor, obtendo-se um modelo vetorial equivalente para os sinais recebidos.

2.2 Modelo de Comunicação

2.2.1 Transmissão do Sinal OFDM

Um sistema de transmissão OFDM admite uma implementação digital [63] e pode ser visto de uma forma mais geral como um sistema de transmissão digital em blocos [18, 64], sendo cada bloco composto por P amostras (também chamadas sub-símbolos) transmitidas serialmente.

O modelo adotado para o transmissor de um sistema de transmissão em blocos está ilustrado na Figura 2.1.

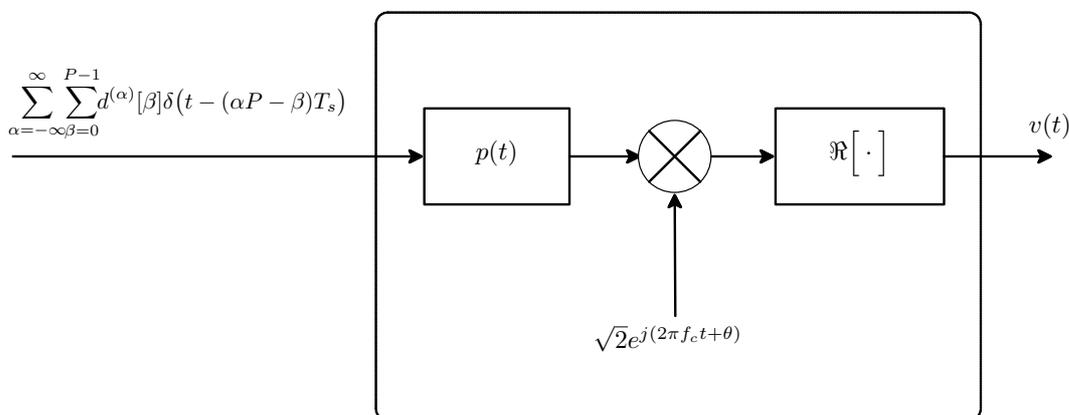


Figura 2.1: Modelo do Transmissor

Seja $v(t)$, dado por

$$\begin{aligned} v(t) &= \Re\{m(t)e^{j2\pi f_c t}\} \\ &= \Re\{m(t)\} \cos 2\pi f_c t - \Im\{m(t)\} \sin 2\pi f_c t, \end{aligned}$$

o sinal que representa uma seqüência infinita de blocos transmitidos, e sua envoltória complexa [65, 66, 67] com relação à frequência f_c , $m(t)$, dada por:

$$m(t) = \sqrt{2}e^{j\theta} \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} \sum_{\beta=0}^{P-1} d^{(\alpha)}[\beta] \delta(t - \alpha PT_s - \beta T_s) \star p(t), \quad (2.1)$$

onde $p(t)$ é o pulso formatador, de duração T_s , $d^{(\alpha)}[\beta]$ é a β -ésima amostra associada ao α -ésimo bloco transmitido, e θ é uma fase arbitrária introduzida pelo oscilador presente no transmissor. Como um bloco é composto por P amostras sua duração é portanto PT_s .

Para o caso de um sistema OFDM com M portadoras e intervalo de guarda de duração DT_s , um bloco corresponde a um símbolo OFDM acrescido de seu intervalo de guarda e tem-se $P = M + D$. As amostras que formam um sub-símbolo têm expressões diferentes para sistemas OFDM-ZP e OFDM-CP.

OFDM-ZP

Sistemas OFDM-ZP têm um intervalo de guarda inserido ao final de cada símbolo. Esse intervalo de guarda nada mais é do que um período de silêncio [56]. A envoltória complexa do sinal que representa uma seqüência infinita de símbolos OFDM-ZP transmitidos é dada por:

$$m_{\text{ZP}}(t) = \sqrt{2}e^{j\theta} \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} \sum_{\beta=0}^{P-1} \tilde{s}_{\text{ZP}}^{(\alpha)}[\beta] \delta(t - \alpha PT_s - \beta T_s) \star p(t). \quad (2.2)$$

As amostras \tilde{s}_{ZP} em (2.2) satisfazem:

$$\tilde{s}_{\text{ZP}}^{(i)}[k] = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{n=0}^{M-1} s^{(i)}[n] e^{j\frac{2\pi nk}{M}} & , 0 \leq k \leq M-1 \\ 0 & , M \leq k \leq P-1 \end{cases} \quad (2.3)$$

onde $s^{(i)}[n]$ é uma variável aleatória complexa que representa o i -ésimo símbolo de informação oriundo de uma constelação bidimensional e transmitido pela n -ésima subportadora, com $\mathbb{E}[|s^{(i)}[n]|^2] = E_{i,n}$ e $\mathbb{E}[s^{(i)}[n]] = 0$. Ainda na expressão (2.3), que define as amostras \tilde{s}_{ZP} , observa-se que $\tilde{s}_{\text{ZP}}^{(i)}[k]$, para $0 \leq k \leq M-1$, é a k -ésima componente da transformada de Fourier discreta inversa (IDFT) de M pontos da seqüência discreta $\{s^{(i)}[n]\}_{n=0}^{M-1}$ [8].

Seja F_M a matriz da transformada discreta de Fourier (DFT) (normalizada) de M pontos definida como [68]:

$$\mathbf{F}_M = \frac{1}{\sqrt{M}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & W_M^1 & W_M^2 & \dots & W_M^{(M-1)} \\ 1 & W_M^2 & W_M^4 & \dots & W_M^{2(M-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & W_M^{(M-1)} & W_M^{2(M-1)} & \dots & W_M^{(M-1)(M-1)} \end{bmatrix}, \quad (2.4)$$

com $W_M = e^{-\frac{j2\pi}{M}}$. A matriz \mathbf{F}_M é unitária, ou seja:

$$\mathbf{F}_M^{-1} = \mathbf{F}_M^H, \quad \mathbf{F}_M \mathbf{F}_M^H = \mathbf{I}_M, \quad \mathbf{F}_M^H \mathbf{F}_M = \mathbf{I}_M.$$

Seja também o vetor $\mathbf{s}(i)$, de tamanho $M \times 1$, definido por

$$\mathbf{s}(i) = [s^{(i)}[0] \ s^{(i)}[1] \ \dots \ s^{(i)}[M-1]]^T,$$

e que contém os símbolos de informação transmitidos por cada uma das M subportadoras durante o i -ésimo intervalo de sinalização OFDM.

O vetor $\tilde{\mathbf{s}}_{\text{ZP}}(i)$, de tamanho $P \times 1$, dado por

$$\tilde{\mathbf{s}}_{\text{ZP}}(i) = [\tilde{s}_{\text{ZP}}^{(i)}[0] \ \tilde{s}_{\text{ZP}}^{(i)}[1] \ \dots \ \tilde{s}_{\text{ZP}}^{(i)}[P-1]]^T,$$

que contém as P amostras do i -ésimo símbolo OFDM-ZP transmitido, pode portanto ser escrito em função do vetor $\mathbf{s}(i)$ e da matriz \mathbf{F}_M como segue:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{s}}_{\text{ZP}}(i) &= \begin{bmatrix} \mathbf{I}_M \\ \mathbf{0}_{D \times M} \end{bmatrix} \mathbf{F}_M^H \mathbf{s}(i) \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{F}_M^H \\ \mathbf{0}_{D \times M} \end{bmatrix} \mathbf{s}(i) \\ &= \mathbf{F}_{\text{ZP}} \mathbf{s}(i), \end{aligned} \quad (2.5)$$

onde

$$\mathbf{F}_{\text{ZP}} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_M^H \\ \mathbf{0}_{D \times M} \end{bmatrix}. \quad (2.6)$$

OFDM-CP

Sistemas OFDM-CP têm um intervalo de guarda inserido no início de cada símbolo OFDM a ser transmitido. O intervalo de guarda é na verdade um prefixo cíclico, ou seja, uma cópia das D últimas amostras do símbolo OFDM (antes da inserção do intervalo de guarda) [56]. Assim, a envoltória complexa do sinal que representa uma seqüência infinita de símbolos OFDM-CP transmitidos é dada por:

$$m_{\text{CP}}(t) = \sqrt{2}e^{j\theta} \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} \sum_{\beta=0}^{P-1} \tilde{s}_{\text{CP}}^{(\alpha)}[\beta] \delta(t - \alpha PT_s - \beta T_s) \star p(t), \quad (2.7)$$

onde as amostras \tilde{s}_{CP} obedecem:

$$\tilde{s}_{\text{CP}}^{(i)}[k] = \begin{cases} \tilde{s}_{\text{CP}}^{(i)}[k + M] & , 0 \leq k \leq D - 1 \\ \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{n=0}^{M-1} s^{(i)}[n] e^{j\frac{2\pi n(k-D)}{M}} & , D \leq k \leq P - 1 \end{cases}. \quad (2.8)$$

Identificando uma vez mais a IDFT na expressão para as amostras \tilde{s}_{CP} em (2.8), pode-se escrever o vetor $\tilde{\mathbf{s}}_{\text{CP}}(i)$, de tamanho $P \times 1$, contendo as P amostras do i -ésimo símbolo OFDM-CP transmitido e definido por

$$\tilde{\mathbf{s}}_{\text{CP}}(i) = [\tilde{s}_{\text{CP}}^{(i)}[0] \ \tilde{s}_{\text{CP}}^{(i)}[1] \ \dots \ \tilde{s}_{\text{CP}}^{(i)}[P - 1]]^T,$$

em função do vetor $\mathbf{s}(i)$ como segue:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{s}}_{\text{CP}}(i) &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{D \times (M-D)} & \mathbf{I}_D \\ & \mathbf{I}_M \end{bmatrix} \mathbf{F}_M^H \mathbf{s}(i) \\ &= \mathbf{F}_{\text{CP}} \mathbf{s}(i), \end{aligned} \quad (2.9)$$

com

$$\mathbf{F}_{\text{CP}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{D \times (M-D)} & \mathbf{I}_D \\ & \mathbf{I}_M \end{bmatrix} \mathbf{F}_M^H. \quad (2.10)$$

2.2.2 Recepção do Sinal OFDM

O diagrama em blocos do equivalente passa-baixas do sistema de transmissão/recepção está ilustrado na Figura 2.2. A envoltória complexa $m(t)$, do sinal $v(t)$, definida na Seção anterior, é transmitida através de um canal passa-baixa seletivo em frequência e não-seletivo no tempo, cuja resposta ao impulso é denotada $h_c(t)$. O sinal resultante é corrompido por ruído aditivo gaussiano branco (AWGN) e filtrado por um filtro de detecção com resposta ao impulso⁽¹⁾ $h_d(t)$. Supondo recuperação perfeita de portadora pelo receptor, a envoltória complexa do agregado de sinais presente na saída do filtro de detecção, denotada $r(t)$, é dada por:

$$r(t) = \frac{e^{-j\theta}}{\sqrt{2}} \left\{ m(t) \star h_c(t) \star h_d(t) + n_w(t) \star h_d(t) \right\}, \quad (2.11)$$

⁽¹⁾Usualmente, o filtro de detecção $h_d(t)$ é casado ao filtro formatador de pulso $p(t)$, garantindo assim, em canal AWGN, a máxima razão sinal-ruído na saída do filtro de detecção nos instantes de amostragem.

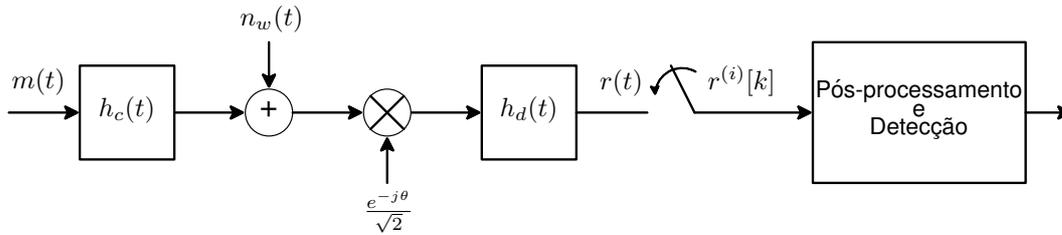


Figura 2.2: Equivalente passa-baixa do sistema de comunicações

onde $n_w(t)$ é a envoltória complexa, com relação à frequência f_c , do ruído aditivo gaussiano branco presente na entrada do receptor.

O processo $n_w(t)$ é caracterizado como segue:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[n_w(t)] &= 0 \quad \forall t; \\ \mathbb{E}[n_w(t_1)n_w^*(t_2)] &= 2N_0\delta(t_2 - t_1); \\ \mathbb{E}[n_w(t_1)n_w(t_2)] &= 0, \quad \forall (t_1, t_2), \text{ (incluindo } t_1 = t_2) \end{aligned}$$

e sua densidade espectral de potência é dada por:

$$S_{n_w}(f) = 2N_0.$$

Susbtituindo (2.1) em (2.11) chega-se a:

$$\begin{aligned} r(t) &= \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} \sum_{\beta=0}^{P-1} d^{(\alpha)}[\beta]\delta(t - \alpha PT_s - \beta T_s) \star p(t) \star h_c(t) \star h_d(t) + \\ &\quad + \frac{e^{-j\theta}}{\sqrt{2}} n_w(t) \star h_d(t) \\ &= \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} \sum_{\beta=0}^{P-1} d^{(\alpha)}[\beta]h(t - \alpha PT_s - \beta T_s) + n(t), \end{aligned}$$

onde

$$h(t) = p(t) \star h_c(t) \star h_d(t)$$

é a resposta ao impulso do canal equivalente formado pela associação em cascata do filtro formatador $p(t)$, do canal de comunicação $h_c(t)$ e do filtro de detecção $h_d(t)$, e

$$n(t) = \frac{e^{-j\theta}}{\sqrt{2}} n_w(t) \star h_d(t)$$

é o ruído gaussiano presente na saída do filtro de detecção⁽²⁾.

⁽²⁾É comum a escolha do par $\{p(t), h_d(t)\}$ de tal forma que o pulso $u(t) = p(t) \star h_d(t)$ satisfaça o primeiro critério de Nyquist [69, 66]. Nestas condições, e supondo que $h_c(t) = \sum_n a_n \delta(t - \tau_n)$ com $\tau_n = m_n T_s$ e $\{m_n\}$ inteiros, então $h(lT_s) = a_l u(0)$ para l inteiro. Por exemplo, se $p(t)$ tem resposta em frequência da forma raiz quadrada de cosseno levantado, a resposta em frequência de

Amostrando o sinal $r(t)$ na saída do filtro de detecção nos instantes $t = iPT_s + kT_s$, ou seja, amostrando à taxa de sub-símbolo, tem-se:

$$\begin{aligned} r^{(i)}[k] &= r(t = iPT_s + kT_s) \\ &= \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} \sum_{\beta=0}^{P-1} d^{(\alpha)}[\beta] h((i - \alpha)PT_s + (k - \beta)T_s) + \\ &\quad + n(iPT_s + kT_s). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Definindo a resposta ao impulso discreta do canal (equivalente) como

$$h[(i - \alpha)P + (k - \beta)] = h((i - \alpha)PT_s + (k - \beta)T_s),$$

e as amostras do processo de ruído na saída do filtro de detecção como

$$n^{(i)}[k] = n(iPT_s + kT_s),$$

a Equação (2.12) fica:

$$\begin{aligned} r^{(i)}[k] &= \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} \sum_{\beta=0}^{P-1} d^{(\alpha)}[\beta] h[(i - \alpha)P + (k - \beta)] + n^{(i)}[k] \\ &= \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} \sum_{\gamma=k-P+1}^k d^{(\alpha)}[k - \gamma] h[(i - \alpha)P + \gamma] + n^{(i)}[k]. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Supondo agora que $h[l] = 0$ para $l \notin \{0, 1, \dots, L\}$, ou seja, que a resposta ao impulso do canal (equivalente) amostrado tenha ordem L (ou comprimento $L + 1$), e $L < P$, chega-se à seguinte expressão para as amostras do sinal discreto recebido $r^{(i)}[k]$ em (2.13):

$$r^{(i)}[k] = \begin{cases} \sum_{\gamma=0}^k d^{(i)}[k - \gamma] h[\gamma] + \sum_{\gamma=k+1}^L d^{(i-1)}[P + k - \gamma] h[\gamma] + \\ \quad + n^{(i)}[k], & 0 \leq k \leq L - 1 \\ \sum_{\gamma=0}^L d^{(i)}[k - \gamma] h[\gamma] + n^{(i)}[k] & , L \leq k \leq P - 1 \end{cases} \quad (2.14)$$

Da Equação (2.14) observa-se que as L primeiras amostras do i -ésimo bloco recebido contêm amostras do i -ésimo bloco transmitido mas também amostras do $(i - 1)$ -ésimo bloco transmitido, caracterizando assim a chamada interferência entre

$h_d(t)$ também será da forma raiz quadrada de coseno levantado e por conseguinte $u(t)$ terá resposta em frequência da forma coseno levantado satisfazendo assim o primeiro critério de Nyquist.

blocos (ou *InterBlock Interference* - IBI). O termo $\sum_{\gamma=0}^L d^{(i)}[k - \gamma]h[\gamma]$ no lado direito da Equação (2.14) caracteriza a convolução discreta do equivalente discreto do canal com as amostras que compõem os blocos transmitidos.

Definindo o vetor $\mathbf{d}^{(i)}$, de tamanho $P \times 1$, contendo as P amostras do i -ésimo bloco:

$$\mathbf{d}^{(i)} = [d^{(i)}[0] \ d^{(i)}[1] \ \dots \ d^{(i)}[P - 1]]^T,$$

e coletando P amostras (supondo sincronismo de blocos perfeito), é possível reescrever a Equação (2.14) de forma matricial:

$$\mathbf{r}^{(i)} = \mathbf{H}\mathbf{d}^{(i)} + \mathbf{H}_{\text{IBI}}\mathbf{d}^{(i-1)} + \mathbf{n}^{(i)}. \quad (2.15)$$

A Figura 2.3 ilustra o modelo vetorial de sinais obtido em (2.15).

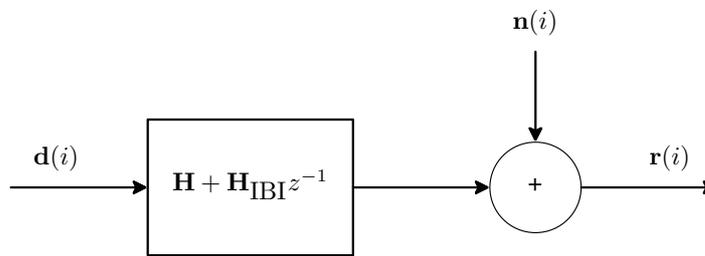


Figura 2.3: Modelo vetorial de sinais

Em (2.15), a matriz \mathbf{H} , de tamanho $P \times P$ é uma matriz Toeplitz com primeira coluna $[h[0] \ \dots \ h[L] \ \underbrace{0 \ \dots \ 0}_{P-L-1 \text{ zeros}}]^T$, ou seja:

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} h[0] & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ h[1] & h[0] & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ h[2] & h[1] & h[0] & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & h[0] & \vdots & \dots & \vdots \\ h[L] & h[L-1] & h[L-2] & \dots & \ddots & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & h[L] & \dots & h[0] \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

e representa a matriz de convolução do canal discreto $h[k]$. A matriz \mathbf{H}_{IBI} , Toeplitz e de tamanho $P \times P$, com primeira linha $[\underbrace{0 \ \dots \ 0}_{P-L \text{ zeros}} \ h[L] \ \dots \ h[1]]$ ou seja:

$$\mathbf{H}_{\text{IBI}} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & h[L] & \dots & h[1] \\ \vdots & \ddots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \ddots & \dots & h[L] \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

modela a interferência entre blocos. Ainda na Equação (2.15),

$$\mathbf{n}(i) = [n^{(i)}[0] \ n^{(i)}[1] \ \dots \ n^{(i)}[P-1]]^T \quad (2.18)$$

é vetor gaussiano complexo com a seguinte caracterização⁽³⁾:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[n^{(i)}[k]] &= 0, \text{ para } k = (1, 2, \dots, P); \\ \mathbb{E}[n^{(i)}[k]n^{(i)}[l]^*] &= \begin{cases} N_0 & , \ k = l; \\ 0 & , \ k \neq l; \end{cases} \\ \mathbb{E}[n^{(i)}[k]n^{(i)}[l]] &= 0, \ \forall (l, k), \text{ (incluindo } k = l) \end{aligned}$$

ou seja, $\mathbf{n}(i)$ é vetor Gaussiano branco (complexo) com matriz covariância dada por:

$$\mathbf{K}_{\mathbf{n}} = \mathbb{E}[\mathbf{n}(i)\mathbf{n}(i)^H] = N_0\mathbf{I}_P = \sigma^2\mathbf{I}_P \quad (2.19)$$

e

$$\mathbb{E}[\mathbf{n}(i)\mathbf{n}(i)^T] = \mathbf{0}.$$

Finalmente, substituindo-se (2.5) em (2.15) chega-se ao modelo vetorial de sinais para o OFDM-ZP:

$$\mathbf{r}_{\text{ZP}}(i) = \mathbf{H}\mathbf{F}_{\text{ZPS}}(i) + \mathbf{H}_{\text{IBI}}\mathbf{F}_{\text{ZPS}}(i-1) + \mathbf{n}(i). \quad (2.20)$$

De forma análoga, utilizando (2.9) chega-se ao modelo vetorial de sinais para o OFDM-CP:

$$\mathbf{r}_{\text{CP}}(i) = \mathbf{H}\mathbf{F}_{\text{CPS}}(i) + \mathbf{H}_{\text{IBI}}\mathbf{F}_{\text{CPS}}(i-1) + \mathbf{n}(i). \quad (2.21)$$

A detecção dos vetores $\mathbf{s}(i)$ é objeto do próximo capítulo.

⁽³⁾Supõe-se que o pulso $\zeta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_d(\beta-t)h_d^*(\beta)d\beta$ satisfaz o primeiro critério de Nyquist, e que $\int_{-\infty}^{\infty} |h_d(t)|^2 dt = 1$. Por exemplo, se $h_d(t)$ tem resposta em frequência da forma raiz quadrada de cosseno levantado, então $\zeta(t)$ satisfaz o primeiro critério de Nyquist.