PUC

LIMITES NO DESEMPENHO DA ESTIMAÇÃO DE PARÂMETROS
DE UM PROCESSO ALEATÓRIO

João Célio Barros Brandão

TESE DE MESTRADO

Rio de Janeiro, GB, Agosto de 1973

Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

Marquês de São Vicente, 209 — ZC-20

Rio de Janeiro — Brasil

Chamada: 621.3 / B8171 / TESE UC

Título: Limites no desempenho da estimação de pa

EX: 2-CENTRAL

8120

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO RIO DE JANEIRO

LIMITES NO DESEMPENHO DA ESTIMAÇÃO
DE PARÂMETROS DE UM PROCESSO ALEATÓRIO

João Celio Barros Brandão

Tese submetida como requisito parcial para
a obtenção do grau de
MESTRE EM CIÊNCIAS
EM
ENGENHARIA ELÉTRICA

Jean-Paul Gravier, Ph.D.
Orientador

22-2

Rio de Janeiro, GB, Agosto de 1973.

UC - 13206 - 1

22026

BC/d

G21.3

B814L

TESE UC

RCC

AGRADECIMENTOS

Agradeço a todos que contribuíram de alguma forma para este trabalho. Em particular, aos professores Jean Paul Gravier e José Paulo A. Albuquerque, aos colegas Graciosa, Kubrusly e Gadelha, ao Marco Antônio, Alberto e Elsi, a todos os colegas do CETUC, a CAPES e a Ivonice.

SUMÁRIO

Este trabalho apresenta um dos procedimentos adotados na avaliação do desempenho da estimação de parâmetros. Este procedimento consiste na determinação de limites inferiores no erro médio quadrático da estimação. São examinados os limites de Cramér-Rao e Ziv-Zakai abordando-se especialmente sua aplicação ao problema da estimação de parâmetros de um processo aleatório gaussiano. Em um exemplo ilustrativo os resultados obtidos são aplicados a estimação dos parâmetros da densidade espectral de potência de um processo, supondo-se para esta densidade, um modelo racional simples.

ABSTRACT

This work presents one of the possible approaches of evaluating the parameter estimation performance. This approach is based on the determination of lower bounds for the estimate mean square error. The Cramér-Rao and Ziv-Zakai bounds are studied mainly in the case of gaussian random process parameter estimation. The results are applied as an example to the estimation of the power spectral density parameters of a random process. A simple rational model is used to represent this spectral density.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO ,.....	1
CAPÍTULO 1 - MEDIDA DO DESEMPENHO NA ESTIMAÇÃO DE PARÂ- METROS	3
1.1. Limite de Cramér-Rao	4
1.1.1. Parâmetro de Sinal Determinístico	5
1.1.2. Parâmetro de Sinais Aleatórios	6
1.2. Limite de Ziv-Zakai	12
1.3. Comentários	17
CAPÍTULO 2 - PROBABILIDADE DE ERRO NO PROBLEMA DE DETE- ÇÃO BINÁRIO - APROXIMAÇÕES E LIMITES	18
2.1. Aproximação em Termos do Parâmetro $\mu(s)$	18
2.2. Um Limite Inferior na Probabilidade de Erro	23
CAPÍTULO 3 - DETERMINAÇÃO de $\mu(s)$	27
CAPÍTULO 4 - CÁLCULO DO DESEMPENHO - APLICAÇÃO EM UM CASO PARTICULAR	34
4.1. 1º Caso: Estimação de A	35
4.1.1. Limite de Cramér-Rao	35
4.1.2. Limite de Ziv-Zakai	36
4.2. 2º Caso: Estimação de ω_c	44
4.2.1. Limite de Cramér-Rao	44
4.2.2. Limite de Ziv-Zakai	47
4.3. 3º Caso: Estimação de K	52
4.3.1. Limite de Cramér-Rao	52
4.3.2. Limite de Ziv-Zakai	53
4.4. Comentários Finais	57
APÊNDICE A	59
A.1. Representação de um Processo Aleatório por uma Série de Funções Ortonormais	59

A.2. Propriedade Monotônica dos Autovalores	63
A.3. Ruído Branco	64
APÊNDICE B - AUTOVALORES E AUTOFUNÇÕES NO PROBLEMA DA	
FILTRAGEM ÓTIMA LINEAR	66
B.1. Condição de Wiener-Hopf	66
B.2. Solução para o Filtro Ótimo através dos Autovalores e Autofunções	68
APÊNDICE C - MODELO PARA O PROBLEMA DE DETEÇÃO BINÁRIA ..	72
BIBLIOGRAFIA	75

INTRODUÇÃO

Este trabalho pretende mostrar um dos possíveis procedimentos adotados quando se quer avaliar o desempenho da estimação de parâmetros de um processo aleatório.

O problema da estimação de parâmetros de processos aleatórios aparece nas mais variadas situações. Uma delas, que envolve um número de casos bem grande, acontece quando um fenômeno físico é estudado através de um modelo do qual fazem parte processos aleatórios. Em muitos casos, tais processos são caracterizados pela sua média e pela sua função covariância ou seu espectro de potência. Usualmente analisa-se o modelo supondo conhecidas as características dos processos que nele aparecem e estas características devem então, muitas vezes, ser estimadas a partir de uma função amostra. Um dos métodos utilizados para estimar o espectro de potência consiste em assumir para este uma forma particular com um ou mais parâmetros a determinar e em seguida estimar estes parâmetros. Por exemplo, assume-se que o espectro de potência $S(\omega)$ é dado por:

$$S(\omega) = \frac{a_{2n} \omega^{2n} + a_{2n-2} \omega^{2n-2} + \dots + a_0}{b_{2n} \omega^{2n} + \dots + b_0} \quad (1)$$

e estima-se os coeficientes a_i e b_i .

Outra situação em que se deve estimar um parâmetro de um processo aleatório aparece nas áreas de espectroscopia, rádio-astronomia e sonar, em problemas de classificação. Neste tipo de problema há uma fonte que gera um processo aleatório, com espectro de potência de faixa estreita, cuja frequência central identifica a fonte. O primeiro passo é estimar esta frequência central.

O procedimento adotado aqui na avaliação do desempenho da estimação de parâmetros será o de se determinar limites inferiores no erro médio quadrático cometido. Uma explicação mais detalhada deste procedimento constitui o capítulo 1, junto com a apresentação dos limites utilizados no trabalho que serão o limite de Cramér-Rão obtido por Cramér e Rão na década de 40 e o limite de Ziv-Zakai derivado recentemente por Jacob Ziv e Moshe Zakai. Por se tratar de um limite recente cuja aplicação ainda não foi estendida a muitos casos será dada mais ênfase ao segundo limite. Como este é dado em função da probabilidade de erro na detecção de um entre 2 sinais possíveis é necessário examinar a avaliação desta probabilidade. Isto é feito no capítulo 3 onde é introduzido o parâmetro $\mu(s)$ cujo emprego permite a obtenção de expressões mais simples (aproximações e limites) para a citada probabilidade de erro. Neste problema de detecção que determina o parâmetro $\mu(s)$ os sinais transmitidos serão determinísticos ou aleatórios se o parâmetro a ser estimado for respectivamente, de um sinal determinístico ou aleatório. No capítulo 4 determina-se então uma expressão para o cálculo de $\mu(s)$ relativo a esta última hipótese que é a de interesse para o trabalho. Finalmente no capítulo 5 é feita a determinação do desempenho da estimação de parâmetros de um processo gaussiano com um espectro de potência particular. O texto inclui ainda três apêndices, todos eles sobre assuntos que desempenham um papel importante no desenvolvimento do trabalho e que justificam um exame mais detalhado. Os apêndices A e B mostram como expandir um processo aleatório em funções ortonormais e como aplicar esta expansão ao problema da filtragem ótima linear. No apêndice C procura-se, finalmente, caracterizar mais detalhadamente o problema de detecção entre hipóteses binárias.

Capítulo 1

MEDIDA DO DESEMPENHO NA ESTIMAÇÃO DE PARÂMETROS

Seja A o parâmetro a ser estimado e $\hat{a}$ o seu estimador. Duas medidas do desempenho do estimador $\hat{a}$ são a sua expectância $E[\hat{a}]$ e a variância do erro da estimação

$$E[(\hat{a} - A)^2] = \sigma_{\hat{a}}^2 \quad (1)$$

Os possíveis valores da expectância de $\hat{a}$ podem ser enquadrados em 3 classes:

1. $E[\hat{a}] = A$ para todos os valores de A . Neste caso diz-se que o estimador é despolarizado.
2. $E[\hat{a}] = A + B$ onde B não é função de A . O estimador é dito polarizado com polarização conhecida.
3. $E[\hat{a}] = A + B(A)$. O estimador tem uma polarização desconhecida.

Geralmente o interesse é procurar conseguir um estimador despolarizado e com mínima variância possível.

Na maioria dos problemas de estimação de parâmetros o cálculo exato do desempenho é muito difícil. O que se faz então é recorrer a limites neste desempenho. Mas mesmo estes limites geralmente não são fáceis de se determinar.

Vários são os limites utilizados na avaliação da qualidade do estimador.² Neste trabalho serão abordados os limites de Cramér-Rao e de Ziv-Zakai que serão caracterizados a seguir.

1.1. LIMITE DE CRAMÉR-RAO

O limite de Cramér-Rao é um limite inferior da variância do erro da estimação. Na determinação deste limite será considerado o seguinte problema de estimação: deseja-se estimar o parâmetro não aleatório A do sinal $s(t,A)$ observando-se o sinal

$$r(t) = s(t,A) + n(t) \quad T_i \leq t \leq T_f \quad (2)$$

onde $n(t)$ é um ruído branco gaussiano com densidade espectral de potência $N_0/2$ e média nula.

Tanto $s(t,A)$ como $n(t)$ e consequentemente $r(t)$ podem ser expandidos em uma série de funções ortonormais $\phi_i(t)$ no intervalo (T_i, T_f) .⁹ (AP. A)

$$s(t,A) = \sum_{i=1}^{\infty} s_i(A) \phi_i(t) \quad (3)$$

onde

$$s_i = \int_{T_i}^{T_f} s(t,A) \phi_i(t) dt \quad (4)$$

Da mesma forma

$$n(t) = \sum_{i=1}^{\infty} n_i \phi_i(t) \quad (5)$$

e

$$r(t) = \sum_{i=1}^{\infty} r_i \phi_i(t) \quad (6)$$

onde n_i e r_i tem definições análogas a de s_i . A convergência existe se $\{\phi_i(t)\}$ é um conjunto completo.*¹¹

* O conjunto $\{\phi_i(t)\}$ é um conjunto completo de funções ortonormais no intervalo (T_i, T_f) somente se não existir nenhuma função $x(t)$ tal que

$$\int_{T_i}^{T_f} x(t) \phi_i(t) dt = 0 \quad \text{para qualquer } i.$$

Com isto a expressão (2) pode ser escrita em notação vetorial:

$$\vec{r} = \vec{s}(A) + \vec{n} \quad (7)$$

onde $\vec{r}$, $\vec{s}$ e $\vec{n}$ são vetores de componentes r_i , $s_i(A)$ e n_i , $i = 1, 2, \dots, \infty$.

Prova-se que se um processo aleatório é branco, qualquer conjunto de funções ortonormais conduz a coeficientes descorrelatados de variância $N_0/2$ (AP. A).

Em função do vetor observado $\vec{r} = \vec{R}$ escolhe-se o estimador $\hat{a}(\vec{R})$.³ Se o estimador é despolarizado o limite de Cramér-Rao será³:

$$E\{[\hat{a}(\vec{r}) - A]^2\} = \sigma_{\hat{a}}^2 \geq \left\{ -E \left[\frac{\partial^2 \ln p_{\vec{r}}(\vec{r}|A)}{\partial A^2} \right] \right\}^{-1} \quad (8)$$

1.1.1. Parâmetro de Sinal Determinístico

Se $s(t)$ é um sinal determinístico e o ruído é gaussiano branco de média nula, a densidade de probabilidade do vetor recebido para dado valor de A será:

$$p_{\vec{r}}(\vec{R}|A) = \prod_{i=1}^{\infty} (\pi N_0)^{-1/2} \exp \left\{ - \frac{[R_i - s_i(A)]^2}{N_0} \right\} \quad (9)$$

e

$$\frac{\partial^2}{\partial A^2} \ln p_{\vec{r}}(\vec{r}|A) = \frac{\partial^2}{\partial A^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{[r_i - s_i(A)]^2}{N_0} \quad (10)$$

Observando que³

$$\sum_{i=1}^{\infty} s_i^2(A) = \int_{T_i}^{T_f} s^2(t, A) dt \quad (11)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} r_i s_i(A) = \int_{T_i}^{T_f} r(t) s(t, A) dt \quad (12)$$

$$e \quad \sum_{i=1}^{\infty} r_i^2 = \int_{T_i}^{T_f} r^2(t) dt \quad (13)$$

chega-se a³

$$\sigma_a^2 \geq \frac{N_0}{2 \int_{T_i}^{T_f} \left[\frac{\partial s(t, A)}{\partial A} \right]^2 dt} \quad * \quad (14)$$

1.1.2. Parâmetro de Sinais Aleatórios

O problema a ser considerado é o mesmo visto antes ou seja: deseja-se estimar o parâmetro não aleatório A do sinal $s(t, A)$ da equação (2). A diferença é que $s(t, A)$ agora é um processo aleatório gaussiano, independente de $n(t)$, de m

* Observe-se que a ordem das operações derivada e expectância não deve ser alterada porque A é um parâmetro da densidade de probabilidade. Assim se for feita antes a expectância, uma nova função de A é introduzida e o resultado ficará modificado. Isto pode ser visto facilmente com um exemplo. Seja uma variável x com densidade de probabilidade de $p_x(x, A)$. Então

$$E \left[\frac{\partial}{\partial A} x \right] = 0 \quad e \quad \frac{\partial}{\partial A} [E(x)] = \frac{\partial}{\partial A} \int_{-\infty}^{\infty} x p_x(x, A) dx$$

pode ser diferente de zero.

dia nula e função covariância

$$E\{[s(t,A) - \overline{s(t,A)}][s(u,A) - \overline{s(u,A)}]\} \stackrel{\Delta}{=} K_S(t,u;A). \quad (15)$$

O procedimento usado na determinação do limite é igual ao anterior onde os sinais $r(t)$, $s(t,A)$ e $n(t)$ são expandidos em séries de funções ortonormais $\phi_i(t)$ como está mostrado nas expressões de (3) a (6). Neste caso, as componentes s_i serão variáveis aleatórias gaussianas.

É possível, para várias classes de processos de interesse, encontrar um conjunto de funções ortonormais que leve a variáveis s_i descorrelatadas ou seja:

$$E[s_i s_j] = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ \lambda_i & \text{se } i = j \end{cases} \quad (16)$$

Para isto é necessário e suficiente que, (A_p, A)

$$\lambda_i \phi_i(t) = \int_{T_i}^{T_f} K_S(t,u,A) \phi_i(u) du \quad (17)$$

As funções $\phi_i(t)$ são chamadas autofunções e os valores λ_i são chamados autovalores da função covariância $K_S(t,u;A)$. Como a função covariância depende de A , os autovalores e as autofunções também dependem de A . Será usada então a notação $\lambda_i(A)$ e $\phi_i(t;A)$. Da mesma forma depende de A o coeficiente r_i pois

$$r_i = \int_{T_i}^{T_f} r(t) \phi_i(t;A) dt \stackrel{\Delta}{=} r_i(A). \quad (18)$$

Como já foi citado, para o ruído branco $n(t)$ qualquer conjunto de funções ortonormais conduz a coeficientes descorrelatados de variância $N_0/2$. Lembrando que $n(t)$ é in-

dependente de $s(t, A)$,

$$E[r_i(A)r_j(A)] = \begin{cases} \lambda_i(A) + \frac{N_0}{2} & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad (19)$$

Com isto é possível escrever $p_{\vec{r}}(\vec{r}|A)$

$$p_{\vec{r}}(\vec{r}|A) = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \left[\lambda_i(A) + \frac{N_0}{2} \right]^{1/2}} \exp - \frac{r_i^2(A)}{2 \left[\lambda_i(A) + \frac{N_0}{2} \right]} \quad (20)$$

A determinação do limite se resume agora em um problema algébrico.

Substituindo-se (20) em (8), tomando-se o logaritmo e conservando apenas as parcelas que dependem de A , vem:

$$\sigma_{\frac{1}{A}}^2 \approx - E \left[- \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial A^2} \sum_{i=1}^{\infty} \ln \left[\lambda_i(A) + \frac{N_0}{2} \right] - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial A^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{r_i^2(A)}{\lambda_i(A) + \frac{N_0}{2}} \right]^{-1} \quad (21)$$

Chamando J a expressão entre as chaves obtém-se depois de derivar 2 vezes e tomar a expectativa:

$$J = - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{E \left[\frac{\partial^2}{\partial A^2} r_i^2(A) \right]}{\lambda_i(A) + \frac{N_0}{2}} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\frac{\partial \lambda_i(A)}{\partial A} E \left[\frac{\partial}{\partial A} r_i^2(A) \right]}{\left[\lambda_i(A) + \frac{N_0}{2} \right]^2} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{\frac{\partial \lambda_i(A)}{\partial A}}{\lambda_i + \frac{N_0}{2}} \right]^2 \quad (22)$$

Observando que

$$r_i^2(A) = \int_{T_i}^{T_f} \int_{T_i}^{T_f} r(t)r(u)\phi_i(t;A)\phi_i(u;A)dtdu \quad (23)$$

tem-se que:

$$\begin{aligned} J = & -\frac{1}{2} \int_{T_i}^{T_f} \int_{T_i}^{T_f} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{K_r(t,u;A)}{\lambda_i(A) + \frac{N_0}{2}} \frac{\partial^2}{\partial A^2} [\phi_i(t;A)\phi_i(u;A)]dtdu \\ & + \int_{T_i}^{T_f} \int_{T_i}^{T_f} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\frac{\partial \lambda_i(A)}{\partial A} K_r(t,u;A)}{\left[\lambda_i(A) + \frac{N_0}{2}\right]^2} \frac{\partial}{\partial A} [\phi_i(t;A)\phi_i(u;A)]dtdu \\ & - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{\frac{\partial \lambda_i(A)}{\partial A}}{\lambda_i(A) + \frac{N_0}{2}} \right]^2 \end{aligned} \quad (24)$$

onde

$$K_r(t,u;A) \triangleq E\{[r(t)-\bar{r}(t)][r(u)-\bar{r}(u)]\} = K_s(t,u;A) + \frac{N_0}{2} \delta(t-u)$$

é a função covariância do processo $r(t)$.

De acordo com a teoria mostrada no Apêndice A, a função $K_r(t,u;A)$ pode ser expandida na série:

$$K_r(t,u;A) = \sum_{i=1}^{\infty} \left[\lambda_i(A) + \frac{N_0}{2} \right] \phi_i(t;A)\phi_i(u;A) \quad (25)$$

Substituindo-se em (24) tem-se:

$$J = -\frac{1}{2} \int_{T_i}^{T_f} \int_{T_i}^{T_f} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_j(A) + \frac{N_0}{2}}{\lambda_i(A) + \frac{N_0}{2}} \phi_j(t;A)\phi_j(u;A) \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \frac{\partial^2}{\partial A^2} [\phi_i(t;A)\phi_i(u;A)] dt du + \int_{T_i}^{T_f} \int_{T_i}^{T_f} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\frac{\partial \lambda_i(A)}{\partial A} \left[\lambda_j(A) + \frac{N_0}{2} \right]}{\left[\lambda_i(A) + \frac{N_0}{2} \right]^2} \times \\
& \times \phi_j(t;A)\phi_j(u;A) \frac{\partial}{\partial A} [\phi_i(t;A)\phi_i(u;A)] dt du - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{\frac{\partial \lambda_i(A)}{\partial A}}{\lambda_i(A) + \frac{N_0}{2}} \right]^2
\end{aligned} \quad (26)$$

Não é difícil verificar que a expressão (26) pode ser obtida a partir de

$$\begin{aligned}
J = & - \frac{1}{N_0} \int_{T_i}^{T_f} \int_{T_i}^{T_f} dt du \frac{\partial}{\partial A} \left[\sum_{i=1}^{\infty} \left[\lambda_i(A) + \frac{N_0}{2} \right] \phi_i(t;A)\phi_i(u;A) \right] \times \\
& \times \frac{\partial}{\partial A} \left[\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_j(A)}{\lambda_j(A) + \frac{N_0}{2}} \phi_j(t;A)\phi_j(u;A) \right]
\end{aligned} \quad (27)$$

O primeiro somatório em (27) é a função covariância $K_r(t,u;A)$. Definindo, (Ap. B),

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_j(A)}{\lambda_j(A) + \frac{N_0}{2}} \phi_j(t;A)\phi_j(u;A) = h(t,u;A) \quad (28)$$

obtem-se:

$$J = - \frac{1}{N_0} \int_{T_i}^{T_f} \int_{T_i}^{T_f} \frac{\partial}{\partial A} K_r(t,u;A) \frac{\partial}{\partial A} h(t,u;A) dt du \quad (29)$$

A função $h(t,u;A)$ satisfaz a seguinte equação:

$$\int_{T_i}^{T_f} K_r(t,v;A) h(v,u;A) dv = K_s(t,u;A) \quad (30)$$

que é a equação de Wiener-Hopf para o filtro ótimo linear ir realizável para a estimação de $s(t, A)$ em presença do ruído aditivo $n(t)$.

Acrescentando às suposições feitas para os processos em estudo a suposição de estacionaridade em sentido amplo a expressão (29) pode ser escrita:

$$J = - \frac{T}{N_0} \int_{-T}^T \left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right) \frac{\partial K_r(\tau; A)}{\partial A} \frac{\partial h(\tau; A)}{\partial A} d\tau \quad (31)$$

onde

$$\tau \hat{=} t - u$$

$$T \hat{=} T_f - T_i$$

Supondo finalmente um tempo de observação bem grande

$$J \approx - \frac{T}{N_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial K_r(\tau; A)}{\partial A} \frac{\partial h(\tau; A)}{\partial A} d\tau \quad (32)$$

A equação (32) no domínio da frequência fica:

$$J = - \frac{T}{N_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial S_r(\omega; A)}{\partial A} \frac{\partial H(\omega; A)}{\partial A} \frac{d\omega}{2\pi} \quad (33)$$

onde $S_r(\omega; A)$ e $H(\omega; A)$ são as transformadas de Fourier de $K_r(\tau; A)$ e $h(\tau; A)$. Mas se os processos são estacionários a expressão do filtro ótimo irrealizável $H(\omega; A)$ para T grande será:^{9, 10}

$$H(\omega; A) = \frac{S_s(\omega; A)}{S_s(\omega; A) + \frac{N_0}{2}} \quad (34)$$

e

$$\frac{\partial H(\omega; A)}{\partial A} = \frac{\frac{N_0}{2} \frac{\partial S_s(\omega; A)}{\partial A}}{\left[S_s(\omega; A) + \frac{N_0}{2} \right]^2} \quad (35)$$

Substituindo-se em (33)

$$J = - \frac{T}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\frac{\partial S_s(\omega; A)}{\partial A}}{S_s(\omega; A) + \frac{N_0}{2}} \right]^2 \frac{d\omega}{2\pi} \quad (36)$$

ou

$$J = - \frac{T}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\partial}{\partial A} \ln \left[1 + \frac{2S_s(\omega; A)}{N_0} \right] \right\}^2 \frac{d\omega}{2\pi} \quad (37)$$

O limite será, tendo em vista a definição de J em (21),

$$\sigma_{\hat{a}}^2 \geq J^{-1} \quad (38)$$

1.2. LIMITE DE ZIV-ZAKAI

Da mesma forma que o limite de Cramér-Rao, o limite de Ziv-Zakai é um limite superior do desempenho do estimador. Na introdução deste limite será suposto o seguinte problema de estimação: observando-se

$$r(t) = s(t, A) + n(t), \quad T_i \leq t \leq T_f \quad (39)$$

onde $n(t)$ é um ruído e $s(t, A)$ pode ser um sinal determinístico ou aleatório, deseja-se avaliar o desempenho da estimação de A, cujos valores são supostos estarem dentro do intervalo $[A_\alpha, A_\beta]$. Isto é feito criando-se a partir do modelo visto

acima o problema de detecção (Ap. C) binária descrito a seguir: Observando-se

$$r(t) = \begin{cases} s(t, A_1) + n(t) : & \text{Hipótese } H_1 \\ s(t, A_2) + n(t) : & \text{Hipótese } H_0 \end{cases} \quad (40)$$

onde A_1 e A_2 são dois valores particulares de A , igualmente prováveis, deve-se decidir entre H_1 e H_0 com o seguinte procedimento: estima-se $A = \hat{a}$ e escolhe-se a hipótese H_1 se $\hat{a}$ está mais próximo de A_1 e H_0 se $\hat{a}$ está mais próximo de A_2 . Este é um procedimento sub-ótimo de detecção e a probabilidade de erro associada a ele satisfaz a desigualdade:

$$P[\epsilon] \leq \frac{1}{2} \left[P\left[|\hat{a} - A_1| \geq \frac{1}{2} |A_2 - A_1| \mid A_1\right] + P\left[|\hat{a} - A_2| \geq \frac{1}{2} |A_2 - A_1| \mid A_2\right] \right] \quad (41)$$

Aplicando a desigualdade de Chebyshev^{8, 10, 12} e fazendo

$$A_2 - A_1 = \Delta \quad (42)$$

tem-se:

$$P[\epsilon] \leq \frac{1}{2} \frac{4}{\Delta^2} \{E[(\hat{a} - A_1)^2 | A_1] + E[(\hat{a} - A_2)^2 | A_2]\} \quad (43)$$

Evidentemente $P(\epsilon)$ será maior ou igual a probabilidade obtida com a detecção ótima^{9, 12}, $P_e(A_1, A_2)$. Logo

$$\frac{\Delta^2}{4} P_e(A_1, A_2) \leq \frac{1}{2} \{E[(\hat{a} - A_1)^2 | A_1] + E[(\hat{a} - A_2)^2 | A_2]\} \quad (44)$$

Da desigualdade acima serão derivados 2 limites. O primeiro é um limite no sup do erro $\hat{\epsilon}^2$ assim definido:

$$\hat{\epsilon}^2 = \sup_{A_\alpha \leq A \leq A_\beta} E[(\hat{a} - A)^2 | A] \quad (45)$$

Como $\hat{\epsilon}^2$ é maior que qualquer valor do lado direito de (40), para qualquer par de valores A_1, A_2 , tem-se,

$$\hat{\epsilon}^2 \geq \max_{A_\alpha \leq A_1, A_2 \leq A_\beta} \frac{\Delta^2}{4} P_e(A_1, A_2) \quad (46)$$

A desigualdade (46) fornece assim um limite inferior no maior erro médio quadrático da estimação, dado o parâmetro A , que aparece quando o valor de A é variado desde A_α até A_β .

O outro limite a ser derivado da desigualdade (44) será um limite no erro médio quadrático da estimação supondo-se o parâmetro A com certa distribuição estatística $p(A)$ entre A_α e A_β . O erro médio quadrático $\overline{\epsilon}^2$ é dado por:

$$\overline{\epsilon}^2 = E[(\hat{a} - A)^2] = \int_{A_\alpha}^{A_\beta} E[(\hat{a} - A)^2 | A] p(A) dA \quad (47)$$

Dividindo (47) em 2 integrais e supondo A , uma variável uniformemente distribuída, vem:

$$\overline{\epsilon}^2 = \frac{1}{2(A_\beta - A_\alpha)} \left\{ \int_{A_\alpha}^{A_\beta} E[(\hat{a} - A)^2 | A] dA + \int_{A_\alpha}^{A_\beta} E[(\hat{a} - A)^2 | A] dA \right\} \quad (48)$$

Fazendo na segunda integral uma mudança de variáveis tem-se:

$$\overline{\epsilon}^2 = \frac{1}{2(A_\beta - A_\alpha)} \left\{ \int_{A_\alpha}^{A_\beta} E[(\hat{a} - A)^2 | A] dA + \int_{A_\alpha - \Delta}^{A_\beta - \Delta} E[(\hat{a} - A - \Delta)^2 | A + \Delta] dA \right\} \quad (49)$$

Logicamente

$$\overline{\epsilon}^2 \geq \frac{1}{2(A_\beta - A_\alpha)} \left\{ \int_{A_\alpha}^{A_\beta - \Delta} E[(\hat{a} - A)^2 | A] dA + \int_{A_\alpha}^{A_\beta - \Delta} E[(\hat{a} - A - \Delta)^2 | A + \Delta] dA \right\} \quad (50)$$

ou

$$\overline{\epsilon^2} \geq \frac{1}{2(A_\beta - A_\alpha)} \int_{A_\alpha}^{A_\beta - \Delta} E[(\hat{a} - A)^2 | A] + E[(\hat{a} - A - \Delta)^2 | A + \Delta] dA \quad (51)$$

Mas de acordo com (44) pode-se escrever:

$$\overline{\epsilon^2} \geq \frac{1}{(A_\beta - A_\alpha)} \int_{A_\alpha}^{A_\beta - \Delta} \frac{\Delta^2}{4} P_e(A, A + \Delta) dA \quad (52)$$

Se

$$P_e(A, A + \Delta) = P_e(\Delta) \quad (53)$$

o que ocorre em muitos casos⁵, a desigualdade (52) é simplificada:

$$\overline{\epsilon^2} \geq \frac{(A_\beta - A_\alpha - \Delta) \Delta^2}{(A_\beta - A_\alpha)} \frac{1}{4} P_e(\Delta) \quad (54)$$

Como (54) é válida para qualquer Δ no intervalo $(0, A_\beta - A_\alpha)$

$$\overline{\epsilon^2} \geq \max_{0 \leq \Delta \leq A_\beta - A_\alpha} \frac{(A_\beta - A_\alpha - \Delta) \Delta^2}{A_\beta - A_\alpha} \frac{1}{4} P_e(\Delta) \quad (55)$$

Os resultados apresentados são devidos a Jacob Ziv e Moshe Zakai⁵ sendo que o limite em (55) foi melhorado por Seidman⁶, desenvolvendo (49) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \overline{\epsilon^2} = \frac{1}{2(A_\beta - A_\alpha)} & \left\{ \int_{A_\alpha}^{A_\beta - \Delta} E[(\hat{a} - A)^2 | A] dA + \int_{A_\alpha}^{A_\beta - \Delta} E[(\hat{a} - A - \Delta)^2 | A + \Delta] dA \right. \\ & \left. + \int_{A_\beta - \Delta}^{A_\beta} E[(\hat{a} - A)^2 | A] dA + \int_{A_\alpha - \Delta}^{A_\alpha} E[(\hat{a} - A - \Delta)^2 | A + \Delta] dA \right\} \quad (56) \end{aligned}$$

Fazendo uma mudança de variáveis na última integral:

$$\begin{aligned} \overline{\epsilon^2} = & \frac{1}{2(A_\beta - A_\alpha)} \left[\int_{A_\alpha}^{A_\beta - \Delta} \{E[(\hat{a} - A)^2 | A] + E[(\hat{a} - A - \Delta)^2 | A + \Delta]\} dA \right. \\ & \left. + \int_{A_\beta - \Delta}^{A_\beta} \{E[(\hat{a} - A)^2 | A] + E[(\hat{a} - A - \Delta + A_\beta - A_\alpha)^2 | A + \Delta - A_\beta + A_\alpha]\} dA \right] \quad (57) \end{aligned}$$

Aplicando-se (44) em (57) chega-se a:

$$\begin{aligned} \overline{\epsilon^2} \geq & \frac{1}{(A_\beta - A_\alpha)} \left[\int_{A_\alpha}^{A_\beta - \Delta} \frac{\Delta^2}{4} P_e(A, A + \Delta) dA + \int_{A_\beta - \Delta}^{A_\beta} \frac{(\Delta - A_\beta + A_\alpha)^2}{4} \right. \\ & \left. \times P_e(A, A + \Delta - A_\beta + A_\alpha) dA \right] \quad (58) \end{aligned}$$

É claro que:

$$P_e(A, A + \Delta) = P_e(A + \Delta, A) \quad (59)$$

Se for suposto então que $P_e(A, A + \Delta) = P_e(\Delta)$, tem-se $P_e(\Delta) = P_e(-\Delta)$ e

$$\overline{\epsilon^2} \geq \frac{(A_\beta - A_\alpha - \Delta)\Delta^2}{4(A_\beta - A_\alpha)} P_e(\Delta) + \frac{\Delta(A_\beta - A_\alpha - \Delta)}{4(A_\beta - A_\alpha)} P_e(A_\beta - A_\alpha - \Delta) \quad (60)$$

ou ainda:

$$\overline{\epsilon^2} \geq \max_{0 \leq \Delta \leq A_\beta - A_\alpha} \frac{(A_\beta - A_\alpha - \Delta)}{4(A_\beta - A_\alpha)} \left[\Delta P_e(\Delta) + (A_\beta - A_\alpha - \Delta) P_e(A_\beta - A_\alpha - \Delta) \right] \quad (61)$$

Do que foi visto, pode-se concluir que o problema da determinação dos limites de Ziv-Zakai é principalmente o problema de determinar a probabilidade de erro na detecção ótima entre 2 hipóteses. Se $s(t, A)$ no problema em estudo é

um sinal determinístico, o cálculo da probabilidade de erro mínima não apresenta dificuldade.^{3,9,12} O mesmo não acontece, entretanto, se $s(t,A)$ é um processo aleatório. Neste caso, geralmente, o cálculo exato da probabilidade de erro é inviável⁴ e o recurso é recorrer a aproximações.

1.3. COMENTÁRIOS

É essencial fazer alguns comentários sobre os limites apresentados principalmente quando se deseja fazer um confronto entre eles. O primeiro é que o limite de Cramér-Rao dado por (8) se aplica somente a estimadores despolarizados*, enquanto os de Ziv-Zakai se aplicam a qualquer classe de estimadores. Outra observação é que o limite de Cramér-Rao é um limite local ou seja é uma medida do desempenho da estimação dado o valor real do parâmetro e em geral é uma função deste valor. Por sua vez o limite de Ziv-Zakai é uma medida da média do desempenho obtida a partir de alguma hipótese a respeito da distribuição do parâmetro em um dado intervalo. Deve-se notar que quando o parâmetro A está contido em um intervalo $[A_\alpha, A_\beta]$ não se pode obter em uma situação real um estimador despolarizado para todos os pontos do intervalo pois isto implicaria em um erro nulo nos extremos A_α e A_β .

Ainda com relação ao limite de Cramér-Rao note-se que como o estimador é despolarizado a variância do erro σ_a^2 será igual ao erro médio quadrático $\bar{\epsilon}^2$.

* O limite de Cramér-Rao pode ser estendido a estimadores polarizados mas a expressão obtida não tem muita utilidade pois é função da polarização que em geral é desconhecida.

Capítulo 2

PROBABILIDADE DE ERRO NO PROBLEMA DE DETEÇÃO BINÁRIO
APROXIMAÇÕES E LIMITES

Quando o cálculo exato da probabilidade de erro é impraticável, a solução é utilizar aproximações ou limites. Será examinada aqui, inicialmente, uma aproximação que será extensivamente usada no presente trabalho.

2.1. APROXIMAÇÃO EM TERMOS DO PARÂMETRO $\mu(s)$

O critério de Bayes para o problema de detecção especificado em (40) com custos iguais para os 2 tipos de erro, pode ser expresso da seguinte forma (AP. C):

$$\frac{p_{\vec{r}}(\vec{R}|H_1)}{p_{\vec{r}}(\vec{R}|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{P_0}{P_1} \quad (64)$$

onde P_0 e P_1 são as probabilidades a priori das hipóteses H_0 e H_1 . O termo da esquerda é chamado razão de verossimilhança e representado por $\Lambda(\vec{R})$. O termo da direita denomina-se limiar e é representado por η . Assim, o teste de Bayes é com-
parar a função $\Lambda(\vec{R})$ com o limiar η . Se $\Lambda(\vec{R}) > \eta$ escolhe-se a hipótese H_1 . Se $\Lambda(\vec{R}) < \eta$ escolhe-se H_0 . Definindo-se

$$\ln \Lambda(\vec{R}) \triangleq \lambda(\vec{R}) \quad (65)$$

$$\text{e} \quad \ln \eta \triangleq \gamma \quad (66)$$

um teste equivalente é:

$$\ell(\vec{R}) \underset{H_0}{\overset{H_1}{>}} \gamma \quad (67)$$

A probabilidade de erro na detecção será:

$$P_e = P_0 P_f + P_1 P_m \quad (68)$$

onde

$$P_f = \int_{\gamma}^{\infty} p_{\ell}(L|H_0) dL \quad (69)$$

e

$$P_m = \int_{-\infty}^{\gamma} p_{\ell}(L|H_1) dL \quad (70)$$

P_f será a probabilidade de escolher H_1 dado que a hipótese verdadeira é H_0 . E P_m será a probabilidade de escolher a hipótese H_0 dado que H_1 é a verdadeira.

As quantidades P_f e P_m são chamadas respectivamente probabilidade de falso alarme e probabilidade de falsa desmobilização. A razão das denominações fica clara quando se associa o problema de detecção entre hipóteses binárias ao problema de um radar que deve decidir entre as 2 hipóteses seguintes:

H_0 : o alvo inimigo a ser detetado está ausente

H_1 : o alvo está presente

A função geratriz de momentos da variável ℓ na hipótese H_0 é:

$$\phi_{\ell|H_0}(s) \triangleq E(e^{s\ell}|H_0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{sL} p_{\ell|H_0}(L|H_0) dL \quad (71)$$

Será apresentado agora o parâmetro designado por $\mu(s)$ e que desempenha o papel principal neste desenvolvimento

$$\mu(s) \triangleq \ln \int_{-\infty}^{\infty} e^{sL} p_{\ell|H_0}(L|H_0) dL \quad (72)$$

ou

$$e^{\mu(s)} \triangleq \phi_{\ell|H_0}(s) \quad (73)$$

É conveniente também definir uma nova variável x_s em termos de sua densidade de probabilidade

$$p_{x_s}(x) \triangleq \frac{e^{sx} p_{\ell|H_0}(x|H_0)}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{sL} p_{\ell|H_0}(L|H_0) dL} = \frac{e^{sx} p_{\ell|H_0}(x|H_0)}{e^{\mu(s)}} \quad (74)$$

Pode-se verificar facilmente que

$$E[x_s] = \frac{d\mu(s)}{ds} \triangleq \dot{\mu}(s) \quad (75)$$

e

$$\text{Var}[x_s] = \frac{d^2\mu(s)}{ds^2} \triangleq \ddot{\mu}(s) \quad (76)$$

Tendo em vista estas definições, a expressão (69)

fica:

$$P_f = e^{\mu(s)} \int_{\gamma}^{\infty} e^{-sx} p_{x_s}(x) dx \quad (77)$$

O passo seguinte é definir a variável aleatória padronizada y

$$y \triangleq \frac{x_s - E[x_s]}{(\text{Var}[x_s])^{1/2}} \quad (78)$$

Com isto, (77) pode ser escrita

$$P_f = e^{\mu(s) - s\dot{\mu}(s)} \int_{\gamma - \dot{\mu}(s)}^{\infty} e^{-s\sqrt{\ddot{\mu}(s)}} p_y(Y) dY \quad (79)$$

É possível achar um valor de s tal que

$$\dot{\mu}(s) = \gamma \quad (80)$$

e tem-se para (79):

$$P_f = e^{\mu(s) - s\dot{\mu}(s)} \int_0^{\infty} e^{-s\sqrt{\ddot{\mu}(s)}} p_y(Y) dY \quad (81)$$

Em muitos casos a densidade de probabilidade do vetor $\vec{r}$ é tal que y se aproxima de uma variável gaussiana quando o número de componentes de $\vec{r}$ tende a infinito.^{3,7} Um caso em que isto acontece é aquele em que os r_i são independentes de mesma densidade de probabilidade, com médias e variâncias finitas.* A variável y então, tenderá a uma variável gaussiana de média nula e variância unitária.

Substituindo-se $p_y(Y)$ pelo seu limite:

$$P_f = e^{\mu(s) - s\dot{\mu}(s)} \int_0^{\infty} e^{-s\sqrt{\ddot{\mu}(s)}} Y \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-Y^2/2} dY \quad (82)$$

É fácil mostrar que (82) se reduz a

$$P_f = \exp[\mu(s) - s\dot{\mu}(s) + \frac{s^2}{2} \ddot{\mu}(s)] \text{erfc}[s\sqrt{\ddot{\mu}(s)}] \quad (83)$$

* O problema definido em (40) pode facilmente se enquadrar nesta categoria desde que $r(t)$ seja um processo gaussiano expresso em termos de suas auto-funções como foi visto no Cap. 1.

onde $\text{erfc}(\cdot)$ é a função erro complementar assim definida:

$$\text{erfc}(\alpha) \triangleq \int_{\alpha}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx \quad (83.a)$$

O mesmo que foi feito em relação a P_f pode ser feito em relação a P_M . Notando que

$$p_{\ell|H_1}(x|H_1) = e^x p_{\ell|H_0}(x|H_0) \quad (84)$$

chega-se a:

$$P_M = \exp[\mu(s) + (1-s)\dot{\mu}(s) + \frac{(s-1)^2}{2} \ddot{\mu}(s)] \text{erfc}[(1-s)\sqrt{\ddot{\mu}(s)}] \quad (85)$$

Substituindo (83) e (85) em (68) tem-se finalmente a expressão da probabilidade de erro.

Quando as hipóteses são equiprováveis é evidente que $\gamma = 0$. Logo a equação (80) fica:

$$\dot{\mu}(s) = 0 \quad (86)$$

Observando (76) é claro que:

$$\ddot{\mu}(s) \geq 0$$

Portanto, a solução da equação (86) é o valor $s = s_m$ que minimiza $\mu(s)$ e a expressão da probabilidade de erro será

$$P_e = \frac{1}{2} \exp[\mu(s_m) + \frac{s_m^2}{2} \ddot{\mu}(s_m)] \text{erfc}[s_m \sqrt{\ddot{\mu}(s_m)}] + \frac{1}{2} \exp[\mu(s_m) + \frac{(1-s_m)^2}{2} \ddot{\mu}(s_m)] \text{erfc}[(1-s_m) \sqrt{\ddot{\mu}(s_m)}] \quad (88)$$

Quando o argumento da função erro complementar é maior que 3

pode ser usada a seguinte aproximação¹²:

$$\operatorname{erfc}(\alpha) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi} \alpha} e^{-\alpha^2/2} \quad (89)$$

Com isto a equação (88) fica:

$$P_e \approx [2\sqrt{2\pi}\ddot{u}(s_m) s_m(1-s_m)]^{-1} \exp[\mu(s_m)] . \quad (90)$$

Utilizando-se a expressão (88) ou (90), é claro que o problema da determinação da probabilidade de erro recai no problema de determinar $\mu(s)$. Será examinado então, a seguir, o cálculo de $\mu(s)$ relativo ao problema básico proposto em (40). Antes entretanto será apresentado um limite inferior na probabilidade de erro.

2.2. UM LIMITE INFERIOR NA PROBABILIDADE DE ERRO

Será demonstrado a seguir que a probabilidade de erro P_e para o problema definido em (40) satisfaz a seguinte desigualdade:

$$P_e \geq \frac{1}{2} \{\min[P_0, P_1]\} e^{2\mu(1/2)}$$

A probabilidade de erro pode ser dada pela seguinte expressão, (Ap. C) :

$$P_e = P_1 \int_{Z_0} p_{\vec{r}}^+ |_{H_1} (\vec{r} | H_1) d\vec{r} + P_0 \int_{Z_1} p_{\vec{r}}^+ |_{H_1} (\vec{r} | H_0) d\vec{r} \quad (91)$$

onde P_1 e P_0 são as probabilidades a priori das hipóteses H_1 e H_0 . Z_1 e Z_0 são as regiões, no espaço de $\vec{r}$, em que se decide respectivamente pelas hipóteses H_1 e H_0 .

É evidente que

$$P_e \geq \min[P_0, P_1] \left\{ \int_{Z_0} p_{\vec{r}|H_1}(\vec{R}|H_1) d\vec{R} + \int_{Z_1} p_{\vec{r}|H_0}(\vec{R}|H_0) d\vec{R} \right\} \quad (92)$$

Pela desigualdade de Schwarz pode-se escrever para uma região S,

$$\begin{aligned} \int_S [p_{\vec{r}|H_1}(\vec{R}|H_1) p_{\vec{r}|H_0}(\vec{R}|H_0)]^{1/2} d\vec{R} &\leq \left[\int_S p_{\vec{r}|H_1}(\vec{R}|H_1) d\vec{R} \right. \\ &\times \left. \int_S p_{\vec{r}|H_0}(\vec{R}|H_0) d\vec{R} \right]^{1/2} \leq \left(\int_S p_{\vec{r}|H_m}(\vec{R}|H_m) d\vec{R} \right)^{1/2}, \quad m=0,1 \end{aligned} \quad (93)$$

Usando este resultado em (92) tem-se:

$$\begin{aligned} P_e \geq \min[P_0, P_1] &\left\{ \left(\int_{Z_0} [p_{\vec{r}|H_1}(\vec{R}|H_1) p_{\vec{r}|H_0}(\vec{R}|H_0)]^{1/2} d\vec{R} \right)^2 + \right. \\ &\left. + \left(\int_{Z_1} [p_{\vec{r}|H_1}(\vec{R}|H_1) p_{\vec{r}|H_0}(\vec{R}|H_0)]^{1/2} d\vec{R} \right)^2 \right\} \end{aligned} \quad (94)$$

Observando que

$$e^{\mu(1/2)} = \int_{-\infty}^{\infty} [p_{\vec{r}|H_1}(\vec{R}|H_1) p_{\vec{r}|H_0}(\vec{R}|H_0)]^{1/2} d\vec{R} \quad (95)$$

e chamando

$$e^{\mu(1/2)} \triangleq \alpha \quad (96)$$

a expressão (94) fica:

$$P_e \geq \min[P_0, P_1] \left\{ \left(\int_{Z_0} [p_{\vec{r}}^+|_{H_1}(\vec{R}|H_1) p_{\vec{r}}^+|_{H_0}(\vec{R}|H_0)]^{1/2} d\vec{R} \right)^2 + \left(\alpha - \int_{Z_0} [p_{\vec{r}}^+|_{H_1}(\vec{R}|H_1) p_{\vec{r}}^+|_{H_0}(\vec{R}|H_0)]^{1/2} d\vec{R} \right)^2 \right\} \quad (97)$$

Fazendo

$$\int_{Z_0} [p_{\vec{r}}^+|_{H_1}(\vec{R}|H_1) p_{\vec{r}}^+|_{H_0}(\vec{R}|H_0)]^{1/2} d\vec{R} \triangleq x \quad (98)$$

tem-se

$$P_e \geq \min[P_0, P_1] [x^2 + (\alpha - x)^2] \quad (99)$$

O lado direito desta desigualdade é minimizado para $x = \frac{\alpha}{2}$ e o valor mínimo é:

$$\frac{\alpha^2}{2} = \frac{1}{2} e^{2\mu(1/2)} \quad (100)$$

Dai finalmente

$$P_e \geq \min[P_0, P_1] \frac{1}{2} e^{2\mu(1/2)} \quad (101)$$

Se as hipóteses forem equiprováveis

$$P_e \geq \frac{1}{4} e^{2\mu(1/2)} \quad (102)$$

Observe-se que para hipóteses equiprováveis o limite de Chernoff^{3,12} fornece:

$$P_e \leq \frac{1}{2} e^{\mu(s_m)} \quad (103)$$

UNIVERSIDADE CATOLICA
28.069/11.4.75

Como s_m é o valor de s que minimiza $\mu(s)$ nota-se que a probabilidade de erro ficará entre os limites abaixo:

$$\frac{1}{4} e^{2\mu(1/2)} \leq P_e \leq \frac{1}{2} e^{\mu(1/2)} \quad (104)$$

Capítulo 3

DETERMINAÇÃO DE $\mu(s)$

Será visto aqui o cálculo do parâmetro $\mu(s)$ para o problema de detecção proposto em (40), onde $s(t, A)$ será suposto um processo aleatório Gaussiano de média nula e função co variância $K_s(t, u; A)$ e $n(t)$ um ruído branco gaussiano de média nula e densidade espectral de potência $N_0/2$.

A definição de $\mu(s)$

$$\mu(s) \triangleq \ln \int_{-\infty}^{\infty} e^{sL} p_{\ell|H_0}(L|H_0) dL \quad (105)$$

pode ser expressa em termos de $p_{\vec{r}|H_1}$ e $p_{\vec{r}|H_0}$. Como ℓ é função de $\vec{r}$, pode-se escrever:

$$\mu(s) = \ln \int_{-\infty}^{\infty} e^{s\ell(\vec{r})} p_{\vec{r}|H_0}(\vec{r}|H_0) d\vec{r} \quad (106)$$

Recordando que

$$\ell(\vec{r}) \triangleq \ln \frac{p_{\vec{r}|H_1}(\vec{r}|H_1)}{p_{\vec{r}|H_0}(\vec{r}|H_0)} \quad (107)$$

(106) fica:

$$\mu(s) = \ln \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [p_{\vec{r}|H_1}(\vec{r}|H_1)]^s [p_{\vec{r}|H_0}(\vec{r}|H_0)]^{1-s} d\vec{r} \quad (108)$$

Para utilizar a expressão (108) será usado outro método de caracterizar os processos aleatórios $s(t, A_1) + n(t)$ e $s(t, A_2) + n(t)$. Neste método o processo $r(t)$ é amostrado a cada T/N

segundos durante o intervalo T de observação. Obtém-se assim um vetor $\vec{r}$ N -dimensional cuja matriz covariância é uma versão amostrada da função covariância do processo. Fazendo-se $N \rightarrow \infty$, o vetor $\vec{r}$ representa o processo $r(t)$.

As componentes do vetor $\vec{r}$ serão $r_i \triangleq r(t_i)$, onde t_i é o instante correspondente a i -ésima amostra. As matrizes covariância nas 2 hipóteses serão:

$$[K_{1,0}] \triangleq E(\vec{r}\vec{r}^T | H_{1,0}) \quad (*) \quad (109)$$

As matrizes $[K_1]$ e $[K_0]$ são matrizes $N \times N$ cujos elementos nas 2 hipóteses serão:

$$K_{1,ij} = K_{s1,ij} + \frac{N_0}{2} \delta_{ij} \quad (110)$$

e

$$K_{0,ij} = K_{s0,ij} + \frac{N_0}{2} \delta_{ij} \quad (111)$$

onde

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad (112)$$

$$K_{s1,ij} = K_s(t_i, t_j; A_1) \quad (113.a)$$

e

$$K_{s0,ij} = K_s(t_i, t_j; A_2) \quad (113.b)$$

Observe-se que

* O vetor $\vec{r}$ será representado pela matriz coluna

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_N \end{bmatrix}$$

$$[K_{1,0}] = [K_{s1,0}] + \frac{N_0}{2} [I] \quad (114)$$

onde $[I]$ é a matriz identidade.

Agora pode-se escrever $p_{\vec{r}}^{\vec{r}}|_{H_{1,0}}(\vec{R}|_{H_{1,0}})$. Como o vetor $\vec{r}$ será gaussiano tem-se:

$$p_{\vec{r}}^{\vec{r}}|_{H_{1,0}}(\vec{R}|_{H_{1,0}}) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2} |K_{1,0}|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \vec{R}^T [K_{1,0}]^{-1} \vec{R}\right) \quad (115)$$

O símbolo $|\cdot|$ significa o determinante da matriz.

Aplicando-se (115) em (108), e designando $\mu(s)$ por $\mu_N(s)$, já que se trata de um número N de amostras,

$$\begin{aligned} \mu_N(s) = \ln \{ & |K_1|^{-s/2} |K_0|^{-(1-s)/2} \\ & \times 2\pi^{-N/2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{1}{2} \vec{R}^T (s[K_1]^{-1} + (1-s)[K_0]^{-1}) \vec{R} \right] d\vec{R} \} \end{aligned} \quad (116)$$

A integral acima pode ser resolvida facilmente. Basta observar que o integrando é uma densidade de probabilidade conjunta gaussiana a menos de uma constante. Obtém-se:

$$\mu_N(s) = \ln \left[|K_1|^{-s/2} |K_0|^{-(1-s)/2} |s[K_1]^{-1} + (1-s)[K_0]^{-1}|^{-1} \right] \quad (117)$$

Multiplicando-se e dividindo por $|K_1|^{1/2} |K_0|^{1/2}$ e reorganizando-se os termos:

$$\mu_N(s) = \frac{1}{2} \{ (1-s) \ln |K_1| + s \ln |K_0| - \ln |s[K_0] + (1-s)[K_1]| \} \quad (118)$$

Substituindo-se (114) em (118) tem-se:

$$\mu_N(s) = \frac{1}{2} \left\{ (1-s) \ln | [I] + \frac{2}{N_0} [K_{s1}] | + s \ln | [I] + \frac{2}{N_0} [K_{s0}] | \right. \\ \left. - \ln | [I] + \frac{2}{N_0} (s[K_{s0}] + (1-s)[K_{s1}]) | \right\} \quad (119)$$

Cada termo da expressão acima é o logaritmo do determinante de uma matriz. Mas o determinante de uma matriz é igual ao produto dos seus autovalores. Deste modo, pode-se escrever:

$$\ln | [I] + \frac{2}{N_0} [K_{s1}] | = \sum_{i=1}^N \ln \left(1 + \frac{2}{N_0} \lambda_{s1,i} \right) \quad (120)$$

onde $\lambda_{s1,i}$ é o i -ésimo autovalor da matriz $[K_{s1}]$.

Quando $N \rightarrow \infty$ o somatório em (120) função dos autovalores da matriz $[K_{s1}]$ se aproxima do mesmo somatório, função dos autovalores do Kernel (Ap. C) $K_s(t,u;A_1)$.¹³ Assim,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \ln \left(1 + \frac{2}{N_0} \lambda_{s1,i} \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \ln \left[1 + \frac{2}{N_0} \lambda_i(A_1) \right] \quad (121)$$

onde $\lambda_i(A_1)$ designa o i -ésimo autovalor de $K_s(t,u;A_1)$. Aplicando (120) e (121) em (119) obtém-se:

$$\mu(s) = \lim_{N \rightarrow \infty} \mu_N(s) = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} (1-s) \ln \left[1 + \frac{2}{N_0} \lambda_i(A_1) \right] + \right. \\ \left. + s \ln \left[1 + \frac{2}{N_0} \lambda_i(A_2) \right] - \ln \left[1 + \frac{2}{N_0} \lambda_i^c \right] \right\} \quad (122)$$

onde λ_i^c é o i -ésimo autovalor da função

$$(1-s)K_s(t,u;A_1) + sK_s(t,u;A_2) \triangleq K_c(t,u) \quad (123)$$

A seguir é necessário colocar (122) em uma forma mais adequada. Isto será feito para um dos termos do somatório

rio e será evidentemente válido para os outros.

A equação que define os autovalores λ_i de uma determinada função está mostrada em (17) e (A.9). Considerando T_f uma variável, os autovalores e as autofunções serão funções de T_f . Para ressaltar este fato os autovalores e as autofunções de $K_s(t,u;A)$ serão representados por $\lambda_i(A, T_f)$ e $\phi_i(t; A, T_f)$. Com estas considerações pode-se escrever:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \ln \left[1 + \frac{2\lambda_i(A, T_f)}{N_0} \right] = \int_{T_i}^{T_f} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \sum_{i=1}^{\infty} \ln \left[1 + \frac{2}{N_0} \lambda_i(A, t) \right] \right\} dt \quad (124)$$

Mas

$$\frac{\partial}{\partial t} \sum_{i=1}^{\infty} \ln \left[1 + \frac{2}{N_0} \lambda_i(A, t) \right] = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\frac{\partial}{\partial t} \lambda_i(A, t)}{\frac{N_0}{2} + \lambda_i(A, t)} \quad (125)$$

Pode-se mostrar, [Ap. A - eq. (A.17)], que:

$$\frac{\partial}{\partial t} \lambda_i(A, t) = \lambda_i(A, t) \phi_i^2(t; A, t) \quad (126)$$

onde $\lambda_i(A, t)$ e $\phi_i(t; A, t)$, de acordo com a notação introduzida são dados por:

$$\lambda_i(A, t) \phi_i(t; A, t) = \int_{T_i}^t K_s(t, u; A) \phi_i(u; A, t) du \quad (127)$$

Com isto (124) fica

$$\sum_{i=1}^{\infty} \ln \left[1 + \frac{2}{N_0} \lambda_i(A, T_f) \right] = \int_{T_i}^{T_f} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_i(A, t) \phi_i^2(t; A, t)}{\frac{N_0}{2} + \lambda_i(A, t)} dt \quad (128)$$

De uma maneira análoga ao que foi feito em (28) define-se:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_i(A,t)}{\frac{N_0}{2} + \lambda_i(A,t)} \phi_i(t;A,t) \phi_i(u;A,t) = h_0(t,u;A,t) \quad (129)$$

e pode-se verificar que $h(t,u;A,t)$ satisfaz a seguinte equação [Ap. B - Sec. B2.2] ,

$$\int_{T_i}^t h_0(t,v;A,t) K_r(u,v;A) dv = K_s(t,u;A) \quad \begin{matrix} T_i < t \leq T_f \\ T_i < u \leq t \end{matrix} \quad (130)$$

que é a equação de Wiener Hopf para o filtro linear ótimo realizável, para o problema de se estimar $s(t,A)$ em presença do ruído $n(t)$. Comparando (128) com (129) tem-se:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \ln \left[1 + \frac{2}{N_0} \lambda_i(T_f) \right] = \int_{T_i}^{T_f} h_0(t,t;A,t) dt \quad (131)$$

Mas, [Ap. B] ,

$$\frac{N_0}{2} h_0(t,t;A,t) = \varepsilon_0(t;A) \quad (132)$$

onde $\varepsilon_0(t;A)$ é o erro do filtro linear ótimo realizável. Com isto é possível colocar (122) em termos de erros de filtros ótimos lineares realizáveis. A expressão será a seguinte:

$$u(s) = \frac{1}{N_0} \int_{T_i}^{T_f} \{ [(1-s) \varepsilon_0(t;A_1)] + s \varepsilon_0(t;A_2) - \varepsilon_c(t) \} dt \quad (133)$$

onde $\varepsilon_c(t)$ é o erro do filtro ótimo realizável para o problema da estimação de um processo, cuja função covariância é $K_c(t,u)$, em presença do ruído $n(t)$.

A expressão (133) pode ser colocada em uma forma mais simples depois de algumas considerações sobre os erros dos filtros ótimos realizáveis. No problema de filtragem ótima visto aqui, o processo a ser estimado mais o ruído en-

tram no filtro no instante $t = T_i$. Haverá nos instantes seguintes um transiente depois do qual é atingido o regime estacionário em que o erro não é mais função do tempo. Teoricamente, isto só ocorre para $t = \infty$. Mas pode ser visto, [Ref. 3, pgs. 547 a 555], que $\epsilon_o(t)$ aproxima-se rapidamente de ϵ_∞ . (*) Assim, se o tempo de observação $T = T_f - T_i$ for grande comparado com o transiente, (133) pode ser escrita:

$$\mu(s) = \frac{T}{N_o} [(1-s) \epsilon_\infty(A_1) + s \epsilon_\infty(A_2) - \epsilon_\infty] \quad (134)$$

O cálculo de $\mu(s)$ recai finalmente no cálculo de ϵ_∞ . Supondo $s(t, A)$ um processo estacionário pelo menos de sentido amplo, com densidade espectral de potência racional $S_s(\omega; A)$ pode-se empregar o resultado obtido originalmente por Yovits e Jackson e que está deduzido em³ pg. 498 e⁹ pg. 313:

$$\epsilon_\infty(A) = \frac{N_o}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \left[1 + \frac{2S_s(\omega; A)}{N_o} \right] \frac{d\omega}{2\pi} \quad (135)$$

Com isto obtem-se a expressão final de $\mu(s)$:

$$\begin{aligned} \mu(s) = \frac{T}{2} \int_{-\infty}^{\infty} & \left\{ (1-s) \ln \left[1 + \frac{2S_s(\omega; A_1)}{N_o} \right] + s \ln \left[1 + \frac{2S_s(\omega; A_2)}{N_o} \right] \right. \\ & \left. - \ln \left[1 + \frac{2[(1-s)S_s(\omega; A_1) + sS_s(\omega; A_2)]}{N_o} \right] \right\} \frac{d\omega}{2\pi} \quad (136) \end{aligned}$$

* $\epsilon_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \epsilon_o(t)$

Capítulo 4

CÁLCULO DO DESEMPENHO - APLICAÇÃO EM UM CASO PARTICULAR

Neste capítulo será feito um exemplo de aplicação dos resultados derivados anteriormente na avaliação do desempenho da estimação de parâmetros de um processo aleatório $s(t)$ gaussiano de média nula e densidade espectral de potência $S_s(\omega)$. Uma das densidades espectrais de potência mais utilizadas em várias aplicações e que permite em geral a obtenção de resultados analíticos será usada também aqui. Este espectro é dado por:

$$S_s(\omega) = \frac{2KA}{\omega^2 + K^2} \quad (137)$$

onde A é o valor médio quadrático do processo e K é proporcional à sua largura de faixa.

O processo assim definido está enquadrado na classe dos processos Gauss-Markov de importância em muitas aplicações. A corrente de ruído térmico em um resistor devido a um eletrão, por exemplo, é um processo aleatório com as características especificadas acima. De um modo geral este processo aparece no estudo do movimento Browniano das partículas. Sobre um outro aspecto a densidade espectral acima é um polinômio com apenas 1 polo e nenhum zero, ou seja, a configuração polinomial mais simples. Porém, a análise deste caso pode ser de utilidade na orientação de uma possível aplicação a outros espectros racionais mais complexos. Quanto aos espectros racionais, sua importância ficou mais acentuada com o emprego das técnicas de variáveis de estado^{3,8} na caracterização dos processos aleatórios e na solução de problemas como o da filtragem ótima linear.

O processo considerado aqui será observado em presença de ruído gaussiano branco de densidade espectral de potência $N_0/2$ em um intervalo de tempo T . Nestas condições será feita uma avaliação do desempenho da estimação dos parâmetros A e K da expressão (137). E quando o processo $s(t)$ é modulado por uma senóide de frequência ω_c , a mesma avaliação pode ser feita para ω_c . Serão estudados então, 3 casos:

1º) Processo $s(t)$:

Estimação de A com K conhecido.

2º) Processo $2s(t) \cos \omega_c t$:

Estimação de ω_c com A e K conhecidos.

3º) Processo $s(t)$:

Estimação de K com A conhecido.

Para cada um destes casos serão calculados os limites de Cramér-Rao e Ziv-Zakai. Será dedicado um interesse bem maior ao segundo limite já que sua aplicação parece não ter sido ainda estendida aos casos considerados aqui.

4.1. 1º CASO: ESTIMAÇÃO DE A

4.1.1. Limite de Cramér-Rao

De acordo com (38)

$$\sigma_a^2 = \overline{\varepsilon^2} \geq J^{-1} \quad (139)$$

onde J é dado por (37). Substituindo-se $S_s(\omega)$ em (37) por sua expressão em (137), tem-se depois de resolver a integral e fazer algumas simplificações:

$$J^{-1} = \frac{KN_o^2}{2T} (1 + \Lambda)^{3/2} \quad (140)$$

onde

$$\Lambda = \frac{4A}{KN_o}$$

$$T = T_f - T_i$$

Dai

$$\overline{\epsilon^2} \geq \frac{KN_o^2}{2T} (1 + \Lambda)^{3/2} \quad (141)$$

4.1.2. Limite de Ziv-Zakai

Como está explicado no capítulo 1, o limite de Ziv-Zakai é determinado criando-se um problema de detecção relacionado ao problema de estimação considerado. Neste primeiro caso o problema de detecção será o seguinte: observando-se o sinal

$$r(t) = \begin{cases} s(t, A_1) + n(t) & ; H_1 \\ s(t, A_2) + n(t) & : H_0 \end{cases} \quad (142)$$

deve-se decidir entre as hipóteses H_1 e H_0 . No modelo acima $s(t, A_1)$ e $s(t, A_2)$ são processos aleatórios de densidade espectral de potência:

$$S_s(\omega; A_1) = \frac{2KA_1}{\omega^2 + K^2} \quad (143.a)$$

e

$$S_s(\omega; A_2) = \frac{2KA_2}{\omega^2 + K^2} \quad (143.b)$$

A_1 e A_2 são 2 valores particulares igualmente prováveis de um parâmetro A que está contido no intervalo $[A_\alpha, A_\beta]$.

Como já foi dito antes, o problema principal aqui é a determinação da probabilidade de erro mínima $P_e(A_1, A_2)$ que vai ser feita através do parâmetro $\mu(s)$

Determinação de $\mu(s)$

Para se determinar o parâmetro $\mu(s)$ o ponto de partida será a equação (136). Substituindo-se $S_s(\omega; A_1)$ e $S_s(\omega; A_2)$ por suas respectivas expressões, e resolvendo-se as integrais chega-se a:

$$\mu(s) = \frac{TK}{2} [(1-s) \sqrt{1 + \Lambda_1} + s \sqrt{1 + \Lambda_2} - \sqrt{1 + \Lambda(s)}] \quad (144)$$

onde

$$\Lambda_1 = \frac{4A_1}{KN_o}, \quad \Lambda_2 = \frac{4A_2}{KN_o} \quad \text{e} \quad \Lambda(s) = s\Lambda_2 + (1-s)\Lambda_1$$

Para se utilizar a expressão (88) no cálculo da probabilidade de erro é necessário achar s_m , resolvendo-se a equação:

$$\left. \frac{d\mu(s)}{ds} \right|_{s=s_m} = 0 \quad (145)$$

Substituindo-se (144) em (145) e resolvendo-se chega-se a:

$$s_m = \frac{2n - m}{4n} \quad (146)$$

onde

$$n \triangleq \sqrt{1 + \Lambda_2} + \sqrt{1 + \Lambda_1} \quad (147)$$

$$m \triangleq \sqrt{1 + \Lambda_2} - \sqrt{1 + \Lambda_1} \quad (148)$$

Substituindo-se (146) em (144) obtem-se:

$$\mu(s_m) = - \frac{TK}{8} \frac{m^2}{n} \quad (149)$$

Derivando $\mu(s)$ pela segunda vez e substituindo-se (146) na expressão obtida, tem-se:

$$\ddot{\mu}(s_m) = TK \frac{m^2}{n} \quad (150)$$

Sup do erro

Determinada a probabilidade de erro mínima através de (88), cujos parâmetros foram calculados em (146), (149) e (150), a expressão do limite no sup do erro, (46), pode-se escrever imediatamente:

$$\begin{aligned} \hat{\varepsilon}^2 \geq & \max_{A_\alpha \leq A_1, A_2 \leq A_\beta} \frac{(A_2 - A_1)^2}{4} \frac{1}{2} \exp \left[\frac{TKm^3}{32n^3} (m-4n) \right] \\ & \times \operatorname{erfc} \left[\sqrt{TK} \frac{m(2n-m)}{4n^{3/2}} \right] + \frac{1}{2} \exp \left[\frac{TKm^3}{32n^3} (m+4n) \right] \\ & \times \operatorname{erfc} \left[\sqrt{TK} \frac{m(2n+m)}{4n^{3/2}} \right] \end{aligned} \quad (151)$$

A expressão a que se chegou é bastante complexa e ainda deve

ser maximizada. Uma solução analítica aqui torna-se impraticável e nem mesmo conclusões qualitativas quanto ao comportamento do limite podem ser tiradas.

Pode-se chegar a uma expressão mais simples para o caso em que o ruído é bem maior que o sinal, isto é:

$$\frac{N_o}{2} \gg \frac{2KA}{\omega^2 + K^2} \quad (152)$$

ou simplesmente

$$\frac{N_o}{2} \gg \frac{2A}{K}$$

que implica em:

$$\Lambda_1 \ll 1 \quad \text{e} \quad \Lambda_2 \ll 1 \quad (153)$$

Desenvolvendo-se em série m e n tem-se

$$n = 2 + \frac{\Lambda_1}{2} + \frac{\Lambda_2}{2} + \dots \quad (154.a)$$

e

$$m = \frac{\Lambda_2}{2} - \frac{\Lambda_1}{2} - \frac{\Lambda_1^2}{8} + \frac{\Lambda_2^2}{8} + \dots \quad (154.b)$$

Como $\Lambda_{1,2} \ll 1$,

$$n \approx 2 \quad (155.a)$$

e

$$m \approx \frac{\Lambda_2 - \Lambda_1}{2} = \frac{2\Delta}{KN_o} \quad (155.b)$$

sendo

$$\Delta \triangleq A_2 - A_1$$

Nota-se também que $m \ll n$. Com isto (151) fica:

$$\hat{\varepsilon}^2 \geq \max_{A_\alpha < A_1, A_2 < A_\beta} \frac{\Delta^2}{4} \frac{1}{2} \left[\exp\left(\frac{TKm^3}{32}\right) + \exp\left(-\frac{TKm^3}{32}\right) \right] \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{TK}{8}} m\right) \quad (156)$$

A diferença $(A_2 - A_1)^2$ pode ser colocada em função de m e n :

$$(A_2 - A_1)^2 = \frac{K^2 N_o}{16} m^2 n^2 \quad (157)$$

Substituindo em (156) e notando que $n^2 \approx 4$

$$\hat{\varepsilon}^2 \geq \max_{A_\alpha < A_1, A_2 < A_\beta} \frac{K^2 N_o^2}{16} m^2 \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{TK}{8}} m\right) \cosh\left(\frac{TKm^3}{32}\right) \quad (158)$$

Na maximização de (158) recai-se numa equação transcendental que além de ser bastante complexa necessita do conhecimento do produto TK para ser resolvida. Uma situação que leva a uma solução simples é aquela em que o produto TK é de uma ordem de grandeza tal que

$$\frac{TKm^3}{32} \ll 1 \quad (159)$$

o que permite escrever-se:

$$e^{\frac{TKm^3}{32}} = 1 + \frac{TKm^3}{32} + \frac{1}{2} \left(\frac{TKm^3}{32}\right)^2 + \dots \approx 1 \quad (160)$$

Esta consideração é evidentemente encorajada pelo fato de que $m \ll 1$. A presença em (159) de m^3 no numerador e de um denominador bem maior que 1 dá para o produto TK uma faixa bem grande de valores que satisfaçam a aproximação acima. Deste

modo (158) fica:

$$\hat{\epsilon}^2 \geq \max_{A_\alpha \leq A_1, A_2 \leq A_\beta} \frac{K^2 N_o^2}{16} m^2 \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{TK}{8}} m\right) \quad (161)$$

e a maximização agora é bem simples. Notando que $A_\alpha \leq A_1, A_2 \leq A_\beta$ corresponde a $0 \leq m \leq M$ onde

$$M = \sqrt{1 + \frac{4A_\beta}{KN_o}} - \sqrt{1 + \frac{4A_\alpha}{KN_o}}, \quad (162)$$

chega-se depois de derivar (161) e resolver uma equação transcendental a:

$$\hat{\epsilon}^2 \geq \begin{cases} 0,083 \frac{KN_o^2}{T} & M \geq 1,2 \sqrt{\frac{8}{TK}} \\ \frac{K^2 N_o^2}{16} M^2 \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{TK}{8}} M\right) & M \leq 1,2 \sqrt{\frac{8}{TK}} \end{cases} \quad (163)$$

Erro médio quadrático

Na suposição de uma relação sinal ruído pequena tem-se, pela equação (155.b)

$$m \approx \frac{2\Delta}{KN_o}$$

onde $\Delta = A_2 - A_1$.

Substituindo em (156) a expressão ficará função apenas de Δ e o limite para o erro médio quadrático poderá ser escrito imediatamente através da aplicação de (55) ou (61). Note-se que $P_e(\Delta)$ é a expressão entre as chaves em

(156). Aplicando-se (55) tem-se:

$$\bar{\epsilon}^2 \geq \max_{0 \leq \Delta \leq A_\beta - A_\alpha} \frac{(A_\beta - A_\alpha) - \Delta}{(A_\beta - A_\alpha)} \frac{\Delta^2}{4} \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left[\frac{\Delta}{KN_0} \sqrt{\frac{KT}{2}} \right] \cosh \left[\frac{KT \Delta^3}{4 (KN_0)^3} \right] \quad (164)$$

Utilizando-se (61):

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon}^2 \geq \max_{0 \leq \Delta \leq A_\beta - A_\alpha} \frac{(A_\beta - A_\alpha - \Delta) \Delta}{4 (A_\beta - A_\alpha)} & \left\{ \Delta \operatorname{erfc} \left[\sqrt{\frac{KT}{2}} \frac{\Delta}{KN_0} \right] \cosh \left[\frac{KT}{4} \left(\frac{\Delta}{KN_0} \right)^3 \right] \right. \\ & \left. + (A_\beta - A_\alpha - \Delta) \operatorname{erfc} \left[\sqrt{\frac{KT}{2}} \left(\frac{A_\beta - A_\alpha - \Delta}{KN_0} \right) \right] \cosh \left[\frac{KT}{4} \left(\frac{A_\beta - A_\alpha - \Delta}{KN_0} \right)^3 \right] \right\} \quad (165) \end{aligned}$$

A maximização desta expressão para vários valores dos parâmetros $B = KT$ e $\Lambda_0 = 4(A_\beta - A_\alpha)/KN_0$ permite obter as curvas mostradas na figura (1). Aí está desenhada também a curva correspondente ao limite de Cramér-Rao dado por (141), desprezando-se, porém, o Λ em presença de 1. Deve-se notar que o parâmetro B é proporcional ao produto tempo vezes banda.

Comentários

Como já foi observado no capítulo 1, o limite de Cramér-Rao se aplica a estimadores despolarizados enquanto o limite de Ziv-Zakai se aplica a qualquer classe de estimador. Com estas considerações em mente é interessante confrontar-se os resultados obtidos para os 2 limites. Para uma pequena relação sinal ruído o limite de Cramér-Rao obtido em (140) pode ser aproximado para:

$$\bar{\epsilon}^2 \geq \frac{KN_0}{2T} \quad (166)$$

Fig. 1

Nas mesmas condições o limite de Ziv-Zakai para o sup do erro no intervalo (A_α, A_β) obtido em (162) é:

$$\hat{\epsilon}^2 \geq 0,083 \frac{KN_0^2}{T} \quad (167)$$

Observa-se então que o limite de Cramér-Rao é bem maior. A mesma coisa pode ser observada examinando as curvas da fig. (1). Isto pode indicar que o seu desempenho é melhor que o de Ziv-Zakai. Mas é possível também que se possa obter com um estimador polarizado um erro inferior ao obtido sem polarização de tal forma que este erro esteja abaixo do limite de Cramér-Rao. Neste caso, necessariamente a curva Z-Z estará abaixo da curva C-R.

A figura 2 mostra a variação dos limites com o parâmetro B para um dado valor de Λ_0 . Vê-se que o limite de Ziv-Zakai para os valores menores de B tende a uma constante. A medida que B aumenta, os limites passam a variar da mesma forma ou seja inversamente proporcional a B. Como $B = KT$ este é o comportamento dos limites com T para um valor de K constante.

4.2. 2º CASO: ESTIMAÇÃO DE ω_c

4.2.1. Limite de Cramér-Rao

O espectro $S_g(\omega)$ neste caso será

Fig. 2

$$S_s(\omega; \omega_c) = \frac{2KA}{(\omega + \omega_c)^2 + K^2} + \frac{2KA}{(\omega - \omega_c)^2 + K^2} \quad (169)$$

No cálculo de J através de (37) será suposto que ω_c é grande o suficiente para que as 2 parcelas praticamente não se superponham (Fig. 3.a) e para que a relação sinal ruído em $\omega = 0$ seja praticamente igual a zero.

Fig. 3

Estas suposições permitem escrever (37) da seguinte forma:

$$J = -\frac{T}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial \omega_c} \ln \left[1 + \frac{4KA}{N_o [(\omega + \omega_c)^2 + K^2]} \right]^2 \frac{d\omega}{2\pi} - \frac{T}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial \omega_c} \ln \left[1 + \frac{4KA}{N_o [(\omega - \omega_c)^2 + K^2]} \right]^2 \frac{d\omega}{2\pi} \quad (170)$$

O cálculo de J deste modo fica mais simples e leva a:

$$J = \frac{T}{K} \frac{(1 + \Lambda)^{-1/2} + (1 + \Lambda)^{1/2} - 2}{1 + (1 + \Lambda)^{1/2}} \quad (171)$$

onde

$$\Lambda = \frac{4A}{KN_o}$$

Daí:

$$\overline{\epsilon^2} > \frac{K}{T} \frac{1 + (1 + \Lambda)^{1/2}}{(1 + \Lambda)^{-1/2} + (1 + \Lambda)^{1/2} - 2} \quad (172)$$

4.2.2. Limite de Ziv-Zakai

Os 2 espectros envolvidos na determinação deste limite são:

$$S_s(\omega; \omega_{c1}) = \frac{2KA}{(\omega - \omega_{c1})^2 + K^2} + \frac{2KA}{(\omega + \omega_{c1})^2 + K^2} \quad (173)$$

e

$$S_s(\omega; \omega_{c2}) = \frac{2KA}{(\omega - \omega_{c2})^2 + K^2} + \frac{2KA}{(\omega + \omega_{c2})^2 + K^2} \quad (174)$$

com $\omega_\alpha \leq \omega_{c1}, \omega_{c2} \leq \omega_\beta$.

Serão considerados neste desenvolvimento apenas os valores de ω_{c1} e ω_{c2} tais que os espectros $S_s(\omega; \omega_{c1})$ e $S_s(\omega; \omega_{c2})$ sejam praticamente disjuntos (Fig. 3.b). Embora isto seja uma restrição é provável que os valores de ω_{c1} e ω_{c2} que maximizam o limite de Ziv-Zakai satisfaçam as condições acima. Além disto supõe-se que a relação sinal ruído seja praticamente igual a zero em $\omega = 0$. Estas restrições permitem simplificações como a que foi feita em (170), no cálculo de $\mu(s)$ através da expressão (136). Chega-se a:

$$\mu(s) = KT\{1 + \sqrt{1 + \Lambda} - \sqrt{1 + s\Lambda} - \sqrt{1 + (1 - s)\Lambda}\} \quad (175)$$

onde $\Lambda = 4A/KN_0$.

Verifica-se facilmente que

$$\left. \frac{d\mu(s)}{ds} \right|_{s=s_m} = 0 \quad (176)$$

conduz a

$$s_m = \frac{1}{2} \quad (177)$$

$$u(s_m) = KT(1 + \sqrt{1+\Lambda} - 2\sqrt{1 + \frac{\Lambda}{2}}) \quad (178)$$

e

$$\ddot{u}(s_m) = \frac{KT}{2} \Lambda^2 (1 + \frac{1}{2} \Lambda)^{-3/2} \quad (179)$$

Sup do erro

Substituindo em (88) e utilizando-se (46) chega-se ao limite para o sup do erro

$$\begin{aligned} \hat{\epsilon}^2 \geq & \frac{1}{4} (\omega_\beta - \omega_\alpha)^2 \exp \left\{ KT(1 + \sqrt{1+\Lambda} - 2\sqrt{1 + \frac{\Lambda}{2}}) + \frac{KT}{16} \Lambda^2 (1 + \frac{1}{2} \Lambda)^{-3/2} \right\} \\ & \times \operatorname{erfc} \left[\frac{1}{2} \sqrt{\frac{KT}{2}} \Lambda (1 + \frac{\Lambda}{2})^{-3/4} \right] \end{aligned} \quad (180)$$

A maximização neste caso é imediata já que a probabilidade de erro não depende dos valores de ω_c por causa da suposição de espectros disjuntos para os processos $s(t, \omega_{c1})$ e $s(t, \omega_{c2})$.

Supondo a relação sinal ruído bem pequena tem-se

$$\Lambda \ll 1.$$

Utilizando-se esta condição para aproximar (180) chega-se a

$$\hat{\epsilon}^2 > \frac{(\omega_\beta - \omega_\alpha)^2}{4} \exp\left(\frac{3KT}{64} \Lambda^3\right) \operatorname{erfc} \left[\sqrt{\frac{KT}{8}} \Lambda \left(1 - \frac{3\Lambda}{8}\right) \right] \quad (181)$$

Aproximando ainda mais,

$$\bar{\epsilon}^2 > \frac{(\omega_\beta - \omega_\alpha)^2}{4} \exp\left(\frac{3KT}{64} \Lambda^3\right) \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{KT}{8}} \Lambda\right) \quad (182)$$

Erro Médio Quadrático

O que dificulta o cálculo do erro médio quadrático é o fato de que a probabilidade de erro $P_e(A_1, A_2)$, em (52), depende as vezes não só da diferença $A_2 - A_1 = \Delta$. Aqui, entretanto, isto não acontece e usando-se (55) tem-se:

$$\bar{\epsilon}^2 > \max_{0 \leq \Delta \omega \leq \omega_\beta - \omega_\alpha} \frac{(\omega_\beta - \omega_\alpha - \Delta\omega)}{\omega_\beta - \omega_\alpha} \frac{(\Delta\omega)^2}{4} P_e \quad (183)$$

onde $\Delta\omega = \omega_{c2} - \omega_{c1}$ e P_e é a probabilidade de erro que pode ser uma das expressões usadas em (180), (181) e (182) conforme o caso. Fazendo-se a maximização, obtem-se:

$$\bar{\epsilon}^2 > \frac{(\omega_\beta - \omega_\alpha)^2}{27} P_e \quad (184)$$

A utilização de (61) fornece um resultado ainda melhor

$$\bar{\epsilon}^2 > \max_{0 \leq \Delta\omega \leq \omega_\beta - \omega_\alpha} (\omega_\beta - \omega_\alpha - \Delta\omega) \frac{\Delta\omega}{4} P_e \quad (185)$$

Maximizando

$$\bar{\epsilon}^2 > \frac{(\omega_\beta - \omega_\alpha)^2}{16} P_e \quad (186)$$

Na fig. (4) estão desenhadas curvas correspondentes aos limites de Cramér-Rao e Ziv-Zakai dados por (172) e (186) para vários valores do parâmetro $B = KT$. Tem-se no eixo horizontal a relação sinal ruído $\Lambda = 4A/KN_0$, enquanto os valores

do eixo vertical correspondem a relação em dB entre o limite no erro médio quadrático e o tamanho do intervalo $W \triangleq \omega_\beta - \omega_\alpha$. Dentro destas condições as curvas do limite de Cramér-Rao de penderão de W o que não acontece com as do limite de Ziv-Zakai. Supõe-se, então, para as primeiras um intervalo $W=20K$. Se o intervalo for diferente, W_1 por exemplo, a curva correspondente será obtida a partir da primeira, somando-se $10 \log(W/W_1)$. Deve-se notar que a banda do processo $s(t)$ é proporcional a K . Mais precisamente, os pontos de 3 dB do processo $s(t)$ são $\omega = \pm K$. Daí a razão de se colocar $W = nK$. Observe-se ainda que as curvas da fig. (4) são válidas para as condições especificadas na derivação dos limites e para se atender a condição de espectros disjuntos na derivação do limite de Ziv-Zakai deve-se ter $W \gg K$.

Comentários

No confronto entre os 2 limites note-se primeiramente que os comentários feitos no caso 1, com relação aos casos de aplicação de um ou de outro limite, também são válidos aqui. Neste caso porém, o valor relativo dos limites será influenciado pelo tamanho do intervalo. Nota-se, por outro lado, que o limite de Ziv-Zakai é praticamente constante para as relações sinal ruído mais baixas e apresenta um efeito limiar, ou seja, perde completamente o significado a partir de uma determinada relação sinal ruído.

Analisando o comportamento dos 2 limites com respeito ao tempo de observação, pode-se chegar a um gráfico de configuração análoga ao da figura (4), invertendo-se os papéis de Λ_0 e B . Isto permite concluir que para tempos de observação pequenos o limite de Ziv-Zakai tende a uma constante. E para tempos de observação grandes seu decaimento é muito mais rápido que o limite de Cramér-Rao. Isto pode ser visto também, substituindo-se a função $\text{erfc}(\cdot)$ que está impli

Fig. 4

cita em (147) pela aproximação

$$\operatorname{erfc}(x) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi} x} e^{-x^2/2} \quad (187)$$

válida para $x > 3$.

Com isto o limite de Ziv-Zakai fica:

$$\bar{\epsilon}^2 \geq \frac{W^2}{16\Lambda} (\pi KT)^{-1/2} \left(1 + \frac{1}{2} \Lambda\right)^{3/4} \exp \left[KT \left(1 + \sqrt{1+\Lambda} - 2\sqrt{1 + \frac{\Lambda}{2}}\right) \right] \quad (188)$$

O decaimento é portanto proporcional a $(1/\sqrt{T})e^{-bt}$, ($b>0$) contrastando com o decaimento simplesmente inversamente proporcional a T do limite de Cramér-Rao.

4.3. 3º CASO: ESTIMAÇÃO DE K

4.3.1. Limite de Cramér-Rao

O espectro $S_s(\omega)$ a ser substituído em (37) é:

$$S_s(\omega; K) = \frac{2KA}{\omega^2 + K^2} \quad (189)$$

e a derivada será, evidentemente, em relação a K . O resultado a que se chega é:

$$\bar{\epsilon}^2 \geq \frac{8A}{N_o T} \frac{(1 + \Lambda)^{3/2}}{\left(1 + \frac{\Lambda}{2}\right) \left[\Lambda \left(1 + \frac{\Lambda}{2}\right) + 4(1 + \Lambda)\right] - (4 + \Lambda)(1 + \Lambda)^{3/2}} \quad (190)$$

onde $\Lambda = 4A/KN_o$

4.3.2 Limite de Ziv-Zakai

Neste caso os dois espectros que aparecem na derivação do limite de Ziv-Zakai são

$$S_s(\omega; K_1) = \frac{2K_1 A}{\omega^2 + K_1^2} \quad (191)$$

e

$$S_s(\omega; K_2) = \frac{2K_2 A}{\omega^2 + K_2^2} \quad (192)$$

com $K_\alpha \leq K_1, K_2 \leq K_\beta$.

O cálculo de $\mu(s)$ através de (136) conduz a uma expressão muito complicada que tornará ainda mais complexa o cálculo da probabilidade de erro. Entretanto, se já no cálculo de $\mu(s)$ for feita a suposição de ruído bem maior que o sinal, pode-se obter resultados mais simples.

Os 2 primeiros termos de (136) chamados aqui de $\mu_1(s)$ e $\mu_2(s)$ são obtidos facilmente.

$$\mu_1(s) = \frac{K_1 T}{2} (1 - s) \left[\sqrt{1 + \Lambda_1} - 1 \right] \quad (193)$$

$$\mu_2(s) = \frac{K_2 T}{2} s \left[\sqrt{1 + \Lambda_2} - 1 \right] \quad (194)$$

onde

$$\Lambda_1 = \frac{4A}{K_1 N_0} \quad \text{e} \quad \Lambda_2 = \frac{4A}{K_2 N_0}.$$

O terceiro termo, $\mu_3(s)$, será:

$$\mu_3(s) = -\frac{T}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \left\{ 1 + \frac{2}{N_0} \left[\frac{2sK_2 A}{\omega^2 + K_2^2} + \frac{2(1-s)K_1 A}{\omega^2 + K_1^2} \right] \right\} \frac{d\omega}{2\pi} \quad (195)$$

O cálculo exato deste termo conduz a uma expressão complexa. Com a suposição de relação sinal ruído bem pequena, ou seja,

$$\frac{2KA}{\omega^2 + K^2} \ll \frac{N_0}{2} \quad (196)$$

e como $0 \leq s \leq 1$, pode-se considerar a seguinte aproximação:

$$\ln(1 + x_1 + x_2) \approx x_1 + x_2 - \frac{x_1^2}{2} - \frac{x_2^2}{2} \quad (*) \quad (197)$$

onde

$$x_1 = \frac{4sK_2A}{N_0(\omega^2 + K_2^2)} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{4(1-s)K_1A}{N_0(\omega^2 + K_1^2)} \quad (198)$$

e o resultado obtido para $\mu_3(s)$ será:

$$\mu_3(s) \approx -\frac{TA}{N_0} + \frac{TA^2}{N_0^2} \left[\frac{s^2}{K_2} + \frac{(1-s)^2}{K_1} \right] \quad (199)$$

A expressão de $\mu(s)$ ficará então:

$$\mu(s) = \frac{T}{2} \left\{ s(K_2\sqrt{1+\Lambda_2} - K_3\sqrt{1+\Lambda_1} + K_1 - K_2) + K_1(\sqrt{1+\Lambda_1} - 1) - \frac{2A}{N_0} + \frac{2A^2}{N_0^2} \left[\frac{s^2}{K_2} + \frac{(1-s)^2}{K_1} \right] \right\} \quad (200)$$

* O termo de 2º grau da série de Taulor seria

$$- \frac{(x_1 + x_2)^2}{2}$$

Despreza-se o produto cruzado para garantir a manutenção da desigualdade no limite de Ziv-Zakai.

Sup do erro

Como (200) é uma expressão aproximada não é conveniente calcular a probabilidade de erro utilizando (88) pois esta expressão contém a derivada segunda de $\mu(s)$ que calculada através de (200) pode levar a um erro muito grande. Será utilizado então aqui o limite superior na probabilidade de erro dado por (102) ou seja

$$P_e \geq \frac{1}{4} e^{2\mu(1/2)} \quad (201)$$

Substituindo (200) em (201) para $s = 1/2$ tem-se:

$$P_e(K_2, K_1) \geq \frac{1}{4} e^{-\frac{TA^2}{2N_o^2} \left(\frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2} \right)} \quad (202)$$

e o limite de Ziv-Zakai para o sup do erro será:

$$\hat{E}^2 \geq \max_{K_\alpha \leq K_1, K_2 \leq K_\beta} \frac{(K_2 - K_1)^2}{16} e^{-\frac{TA^2}{2N_o^2} \left(\frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2} \right)} \quad (203)$$

Maximizando

$$\hat{E}^2 \geq \frac{(K_\beta - K_o)^2}{16} e^{-\frac{TA^2}{2N_o^2} \left(\frac{1}{K_\beta} + \frac{1}{K_o} \right)} \quad (204)$$

onde

$$K_o = \frac{TA^2}{8N_o^2} \left(\sqrt{1 + \frac{16K_\beta N_o^2}{TA^2}} - 1 \right) \quad (205)$$

* Como tem sido suposto até aqui as hipóteses $K = K_1$ e $K = K_2$ são equiprováveis o que permite o emprego da expressão (201).

Erro Médio Quadrático

Comparando-se (61) e (202) pode-se escrever:

$$\begin{aligned} \overline{\varepsilon^2} \geq & \max_{0 \leq \Delta \leq K_\beta - K_\alpha} \frac{1}{K_\beta - K_\alpha} \int_{K_\alpha}^{K_\beta - \Delta} \frac{\Delta^2}{16} \exp \left[- \frac{TA^2}{2N_o^2} \left(\frac{1}{K} + \frac{1}{K+\Delta} \right) \right] dK \\ & + \frac{1}{K_\beta - K_\alpha} \int_{K_\beta - \Delta}^{K_\beta} \frac{(K_\beta - K_\alpha - \Delta)^2}{16} \exp \left[- \frac{TA^2}{2N_o^2} \left(\frac{1}{K} + \frac{1}{K - K_\beta + K_\alpha + \Delta} \right) \right] dK \quad (206) \end{aligned}$$

A integral em (206) pode ser simplificada no caso em que $K_\alpha T \ll K_\alpha^2 N_o^2 / A^2$ (observe-se que $K_\alpha^2 N_o^2 / A^2$ é muito grande pois $K_\alpha N_o / 4A \gg 1$). Ao se verificar esta condição pode-se fazer a seguinte aproximação:

$$e^{-\frac{TA^2}{2N_o^2} \times \frac{1}{K}} \approx 1 - \frac{TA^2}{2N_o^2 K}$$

e (206) fica:

$$\begin{aligned} \overline{\varepsilon^2} \geq & \max_{0 \leq \Delta \leq K_\beta - K_\alpha} \frac{\Delta^2}{16(K_\beta - K_\alpha)} \left[K_\beta - K_\alpha - \Delta - \frac{TA^2}{2N_o^2} \ln \left(\frac{K_\beta - \Delta}{K_\alpha + \Delta} \times \frac{K_\beta}{K_\alpha} \right) \right] \\ & + \frac{(K_\beta - K_\alpha - \Delta)^2}{16(K_\beta - K_\alpha)} \left[\Delta - \frac{TA^2}{2N_o^2} \ln \left(\frac{K_\alpha + \Delta}{K_\beta - \Delta} \times \frac{K_\beta}{K_\alpha} \right) \right] \quad (209) \end{aligned}$$

Comentários

Nota-se neste terceiro caso, mais que nos 2 primeiros, uma complexidade bastante grande nos cálculos dos limites mesmo com as aproximações introduzidas. Em relação ao limite de Cramér-Rao pode-se notar que ele depende do valor

do parâmetro a ser estimado como era de se esperar e para se fazer uma comparação com o limite de Ziv-Zakai seria necessário tomar-se para K um valor no intervalo (K_α, K_β) . Quanto ao limite de Ziv-Zakai a expressão a que se chegou deve ser ainda maximizada. Não há problema em se fazer esta maximização numericamente quando se conhecem os valores dos parâmetros. Porém uma comparação entre os 2 limites análoga a que foi feita nos casos precedentes é impraticável aqui devido ao grande número de parâmetros que se deve conhecer.

Sobre a variação dos limites com o tempo de observação tudo indica que como no segundo caso o limite de Ziv-Zakai terá um decaimento mais rápido. No limite em (165) pode-se notar que se $T \rightarrow \infty$, $K_0 = K_\beta$ e o decaimento é exponencial.

4.4 COMENTÁRIOS FINAIS

Para os três casos apresentados no início do capítulo foi determinado o limite de Cramér-Rao e procurou-se de terminar os limites de Ziv-Zakai, bem como fazer uma comparação entre os dois limites. Ao se pretender esta comparação, a expectativa maior foi a possibilidade de se obter para o limite de Ziv-Zakai um valor maior que o de Cramér-Rao. Como o limite de Ziv-Zakai é menos restritivo seu desempenho seria definitivamente melhor que o outro limite. Havia para isto uma motivação que era o trabalho de Seidman⁶ que chegou a este resultado para a estimação de parâmetros de um sinal determinístico. No presente trabalho isto se verificou no 2º caso dentro de uma faixa de valores de relação sinal ruído, faixa esta que aumenta com o intervalo do parâmetro. No 1º caso não se chegou a este resultado mas deve-se notar que, por causa da complexidade dos cálculos, só foram considera-

dos valores pequenos de relação sinal ruído. Seria portanto, de interesse, estender-se a comparação a valores maiores da relação sinal ruído. Uma outra conclusão, imediata em todos os casos, é a complexidade bem maior do limite de Ziv-Zakai.

Deve-se também ressaltar aqui, ao se fazer estes comentários finais, a importância dos 3 primeiros capítulos onde se procurou estabelecer uma sistemática geral para a avaliação do desempenho de uma estimação e chegar a expressões aplicáveis à estimação de parâmetros de um processo aleatório.

Apêndice A

A.1. REPRESENTAÇÃO DE UM PROCESSO ALEATÓRIO POR UMA SÉRIE DE FUNÇÕES ORTONORMAIS

A representação ortonormal de um sinal determinístico⁹ pode ser estendida aos processos aleatórios. Seja um processo aleatório $x(t)$. O objetivo aqui será então escrever $x(t)$ no intervalo $[T_i, T_f]$ da seguinte forma:

$$x(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N x_i \phi_i(t) \quad T_i \leq t \leq T_f \quad (A.1)$$

onde

$$x_i \triangleq \int_{T_i}^{T_f} x(t) \phi_i(t) dt \quad (A.2)$$

e $\{\phi_i(t)\}$ é um conjunto de funções ortonormais. A convergência desejada para a expressão (A.1) será em média quadrática, isto é, a série converge para $x(t)$ se

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E\left\{\left[x(t) - \sum_{i=1}^N x_i \phi_i(t)\right]^2\right\} = 0 \quad T_i \leq t \leq T_f \quad (A.3)$$

Quando a convergência se verifica, o conjunto $\{\phi_i(t)\}$ é chamado conjunto completo.

Deseja-se ainda obter um conjunto $\{\phi_i(t)\}$ que leve na expressão (A.1) a coeficientes x_i descorrelatados ou seja,

$$E[(x_i - m_i)(x_j - m_j)] = \lambda_i \delta_{ij} \quad (A.4)$$

onde

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

Para simplificar assume-se que $m_i = 0$. Substituindo-se (A.2) em (A.4) obtem-se uma equação integral que permitirá a obtenção das funções $\phi_i(t)$.

$$\lambda_i \delta_{ij} = E \left[\int_{T_i}^{T_f} x(t) \phi_i(t) dt \int_{T_i}^{T_f} x(u) \phi_j(u) du \right] \quad (\text{A.6})$$

Passando a expectância para dentro da integral chega-se a

$$\lambda_i \delta_{ij} = \int_{T_i}^{T_f} \phi_i(t) dt \int_{T_i}^{T_f} E[x(t)x(u)] \phi_j(u) du \quad (\text{A.7})$$

Como a média do processo é suposta zero, temos na segunda integral a função covariância $K_x(t,u)$ e a equação fica:

$$\lambda_i \delta_{ij} = \int_{T_i}^{T_f} \phi_i(t) dt \int_{T_i}^{T_f} K_x(t,u) \phi_j(u) du \quad (\text{A.8})$$

Verifica-se que a equação acima é satisfeita se somente se

$$\lambda_j \phi_j(t) = \int_{T_i}^{T_f} K_x(t,u) \phi_j(u) du \quad (\text{A.9})$$

As funções $\phi_i(t)$ são chamadas autofunções e os números λ_i são chamados autovalores. A função $K_x(t,u)$ recebe o nome de Kernel da equação

Da teoria das equações integrais^{11,13,14,15} se

$$\iint_{T_i}^{T_f} K_x^2(t, u) dt du \leq \infty \quad (A.10)$$

existe pelo menos um número real $\lambda \neq 0$ e uma função $\phi(t)$ que satisfazem (A.9), observando-se a restrição:

$$0 < \int_{T_i}^{T_f} \phi^2(t) dt < \infty \quad (A.11)$$

Para processos com valor médio quadrático finito a condição (A.10) é atendida pois

$$\iint_{T_i}^{T_f} K_x^2(t, u) dt du \leq \left(\int_{T_i}^{T_f} E[x^2(t)] dt \right)^2 < \infty \quad (A.12)$$

As seguintes propriedades se observam em relação a equação integral (A.9)¹¹

1. Se $\phi_j(t)$ é uma solução de (A.9) então $c\phi_j(t)$ é também uma solução. Isto significa que as autofunções podem ser normalizadas.

2. Se $\phi_1(t)$ e $\phi_2(t)$ são autofunções associadas ao mesmo autovalor λ , $c_1\phi_1(t) + c_2\phi_2(t)$ também é.

3. As autofunções correspondentes a diferentes autovalores são ortogonais.

4. Existe no máximo um conjunto infinito contável de autovalores e todos são limitados, isto é, $|\lambda_j| \leq M$ e $M < \infty$.

5. Para um λ_i particular há no máximo um número finito de autofunções linearmente independentes.

6. A função covariância é não negativa definida, is

to é:

$$\int_{T_i}^{T_f} \int_{T_i}^{T_f} K_x(t,u) f(t) f(u) dt du \geq 0 \quad (\text{A.13})$$

para qualquer $f(t)$ com energia finita. Então, todos os autovalores diferentes de zero serão positivos.

7. A função $K_x(t,u)$, sendo não negativa definida, pode ser expandida na série:

$$K_x(t,u) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \phi_i(t) \phi_i(u) \quad (\text{A.14})$$

onde a convergência é uniforme para $T_i \leq t, u \leq T_f$. Isto constitui o teorema de Mercer¹⁴.

8. Se a desigualdade em (A.13) é estrita, a função $K_x(t,u)$ é dita positiva definida. Se isto acontece, as autofunções formam um conjunto completo de funções ortogonais. Qualquer função determinística com energia finita pode então ser expandida em termos das autofunções.

9. Se $K_x(t,u)$ é não positiva definida as autofunções não podem formar um conjunto completo de funções ortogonais.

10. A soma dos autovalores é igual ao valor esperado da energia do processo no intervalo (T_i, T_f) . Isto é,

$$E \left[\int_{T_i}^{T_f} x^2(t) dt \right] = \int_{T_i}^{T_f} K_x(t,t) dt = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \quad (\text{A.15})$$

(Observe-se que $x(t)$ tem média nula).

Estas propriedades mostram a possibilidade de se

ter um conjunto $\{\phi_i(t)\}$ de funções ortonormais que levem em (A.2) a coeficientes x_i decorrelatados. Além disto o emprego da propriedade 7 permite mostrar a convergência em (A.3), assegurando assim a expansão do processo $x(t)$ em funções ortonormais com coeficientes decorrelatados.

A expansão em série vista aqui é conhecida como expansão de Karhunen-Loève.

A.2. PROPRIEDADE MONOTÔNICA DOS AUTOVALORES

Seja a equação integral (A.9) escrita da seguinte forma

$$\lambda_i(T_f)\phi(t;T_f) = \int_{T_i}^{T_f} K_x(t,u)\phi_i(u;T_f)du \quad (A.16)$$

apenas para frisar a dependência de T_f na solução.

Propriedade: A derivada de um autovalor em relação a T_f é dada por

$$\frac{\partial \lambda_i(T_f)}{\partial T_f} = \lambda_i(T_f)\phi_i^2(T_f;T_f) \quad (A.17)$$

o que significa que $\lambda_i(T_f)$ é uma função monotonicamente crescente com T_f .

Prova: Multiplicando-se os 2 lados de (A.16) por $\phi_i(t;T_f)$ e integrando em relação a t , tem-se:

$$\lambda_i(T_f) = \int_{T_i}^{T_f} \int_{T_i}^{T_f} \phi_i(t;T_f)K_x(t,u)\phi_i(u;T_f)dtdu \quad (A.18)$$

Derivando em relação a T_f e utilizando (A.16) no resultado chega-se a:

$$\frac{\partial \lambda_i(T_f)}{\partial T_f} = 2\lambda_i(T_f) \int_{T_i}^{T_f} \frac{\partial \phi_i(t; T_f)}{\partial T_f} \phi_i(t; T_f) dt + 2\lambda_i(T_f) \phi_i^2(T_f; T_f) \quad (\text{A.19})$$

Para reduzir esta equação note-se que

$$\int_{T_i}^{T_f} \phi_i^2(t; T_f) dt = 1 \quad (\text{A.20})$$

Derivando (A.20) com relação a T_f tem-se

$$2 \int_{T_i}^{T_f} \frac{\partial \phi_i(t; T_f)}{\partial T_f} \phi_i(t; T_f) dt + \phi_i^2(T_f; T_f) = 0 \quad (\text{A.21})$$

Substituindo-se (A.21) em (A.19) chega-se a

$$\frac{\partial \lambda_i(T_f)}{\partial T_f} = \lambda_i(T_f) \phi_i^2(T_f; T_f) \quad (\text{A.22})$$

A.3. RUÍDO BRANCO

Seja o ruído branco $n(t)$ de densidade espectral. $N_0/2$ é média nula. A função autocovariância do processo será:

$$K_n(t, u) = \frac{N_0}{2} \delta(t - u) \quad (\text{A.23})$$

Para o processo $n(t)$ a equação que define os autovalores e autofunções será:

$$\lambda \phi(t) = \int_{T_i}^{T_f} \frac{N_0}{2} \delta(t - u) \phi(u) du \quad (A.24)$$

Esta equação é satisfeita para $\lambda = N_0/2$ e $\phi(t)$ qualquer. Logo, qualquer conjunto de funções ortonormais é adequado para expandir este processo. O ruído branco não satisfaz, portanto, a propriedade 5. Isto se explica pelo fato de que as propriedades apresentadas assumem um processo $x(t)$ de valor médio quadrático finito o que não acontece com $n(t)$.

De acordo com a propriedade 7 pode-se escrever:

$$K_n(t, u) = \frac{N_0}{2} \delta(t - u) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{N_0}{2} \phi_i(t) \phi_i(u) \quad (A.25)$$

onde $\{\phi_i(t)\}$ é um conjunto completo qualquer de funções ortonormais.

Apêndice B

AUTOVALORES E AUTOFUNÇÕES NO PROBLEMA
DA FILTRAGEM ÓTIMA LINEAR

O problema da filtragem ótima linear de um processo aleatório $s(t)$ em presença de ruído aditivo $n(t)$ está representado na fig (B.1)

Fig. B.1

Deseja-se determinar um sistema linear que forneça uma estimativa ótima de $s(t)$, designada por $\hat{s}(t)$, a partir do processo $r(t) = s(t) + n(t)$, observado no intervalo (T_i, T_f) . São feitas aqui as suposições de que o ruído $n(t)$ é branco de densidade espectral de potência $N_0/2$ e independente de $s(t)$. As funções covariâncias de $s(t)$ e $r(t)$ são designadas por $K_s(t,u)$ e $K_r(t,u)$.

B.1. CONDIÇÃO DE WIENER-HOPF

Se o critério considerado para a estimação ótima é minimizar o erro médio quadrático

$$\epsilon_h(t) \triangleq \overline{[s(t) - \hat{s}(t)]^2} \quad (B.1)$$

chega-se a seguinte equação para o sistema ótimo^{3,9,10} de resposta impulsional $h_o(t,u)$:

$$K_s(t,u) = \int_{T_i}^{T_f} h_o(t,v) K_r(u,v) dv \quad T_i \leq t, u \leq T_f \quad (B.2)$$

ou

$$K_s(t,u) = \int_{T_i}^{T_f} h_o(t,v) K_s(u,v) dv + \frac{N_o}{2} h_o(t,u) \quad T_i \leq t, u \leq T_f \quad (B.3)$$

já que

$$K_r(u,v) = K_s(u,v) + N_o \delta(u - v) \quad (B.4)$$

Erro Médio Quadrático

A estimativa $\hat{s}(t)$ será dada por:

$$\hat{s}(t) = \int_{T_i}^{T_f} h_o(t,u) r(u) du \quad (B.5)$$

Substituindo-se (B.5) em (B.1) obtém-se:

$$\begin{aligned} \epsilon_o(t) = s^2(t) - 2 \int_{T_i}^{T_f} h_o(t,u) \overline{s(t)r(u)} du + \\ + \iint_{T_i}^{T_f} h_o(t,u) h_o(t,v) \overline{r(u)r(v)} dudv \end{aligned} \quad (B.6)$$

onde $\epsilon_o(t)$ é o erro médio quadrático mínimo. Tomando-se as expectâncias e lembrando que $s(t)$ é independente de $n(t)$ vem:

$$\begin{aligned} \varepsilon_o(t) = & K_s(t,t) - 2 \int_{T_i}^{T_f} h_o(t,u) K_s(t,u) du \\ & + \int_{T_i}^{T_f} \int_{T_i}^{T_f} h_o(t,u) h_o(t,v) K_r(u,v) dudv \end{aligned} \quad (B.7)$$

A expressão acima pode ser reescrita assim:

$$\begin{aligned} \varepsilon_o(t) = & K_s(t,t) - \int_{T_i}^{T_f} h_o(t,u) K_s(t,u) du \\ & - \int_{T_i}^{T_f} h_o(t,u) \left[K_s(t,u) - \int_{T_i}^{T_f} h_o(t,v) K_r(u,v) dv \right] du \end{aligned} \quad (B.8)$$

De acordo com (B.2) o termo entre os colchetes é zero. Daí:

$$\varepsilon_o(t) = K_s(t,t) - \int_{T_i}^{T_f} h_o(t,u) K_s(t,u) du \quad (B.9)$$

Comparando com B.3, tem-se finalmente:

$$\varepsilon_o(t) = \frac{N_o}{2} h_o(t,t) \quad (B.10)$$

B.2. SOLUÇÃO PARA O FILTRO ÓTIMO ATRAVÉS DOS AUTOVALORES E AUTOFUNÇÕES

B.2.1. Filtro Ótimo Irrealizável

De acordo com os resultados do apêndice A, pode-se

expandir a função covariância $K_s(t,u)$ na série:

$$K_s(t,u) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \phi_i(t) \phi_i(u) \quad (B.11)$$

onde λ_i e $\phi_i(t)$ são soluções de (A.9) onde o Kernel $K_x(t,u)$ é substituído por $K_s(t,u)$.

A covariância do ruído branco $n(t)$ pode ser expandida da mesma forma utilizando-se qualquer conjunto completo de funções ortonormais e todos os autovalores iguais a $N_0/2$ (Seção A.3). Se $K_s(t,u)$ é positiva definida, o conjunto $\{\phi_i(t)\}$ empregado em (B.11) é completo. Se $K_s(t,u)$ é apenas não negativa definida, é necessário completar-se o conjunto $\{\phi_i(t)\}$ para a expansão de $K_n(t,u)$. De qualquer forma $n(t)$ pode ser escrito como em (A.25),

$$K_n(t,u) = \frac{N_0}{2} \delta(t-u) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{N_0}{2} \phi_i(t) \phi_i(u) \quad (B.12)$$

Juntando (B.11) e (B.12) tem-se

$$K_r(t,u) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\lambda_i + \frac{N_0}{2} \right) \phi_i(t) \phi_i(u) \quad (B.13)$$

Como o conjunto $\{\phi_i(t)\}$ é completo qualquer função determinística de energia finita pode ser expandida através dele. Isso permite então tentar para $h_o(t,u)$ a seguinte solução:

$$h_o(t,u) = \sum_{i=1}^{\infty} h_i \phi_i(t) \phi_i(u) \quad (B.14)$$

Substituindo-se (B.14), (B.11) e (B.13) em (B.2) obtém-se

$$h_o(t,u) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \frac{N_o}{2}} \phi_i(t) \phi_i(u) \quad (B.15)$$

Olhando para (B.10) vê-se que o erro médio quadrático pode ser expandido na série:

$$\varepsilon_o(t) = \frac{N_o}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \frac{N_o}{2}} \phi_i^2(t) \quad (B.16)$$

B.2.2 Filtro Ótimo Realizável

A solução da equação (B.2) levará a um sistema não causal, portanto irrealizável. Impondo-se a restrição de realizabilidade para o sistema $h_o(t,u)$, isto é:

$$h_o(t,u) = 0 \quad \text{para } t < u$$

chega-se a seguinte equação correspondente a (B.2):

$$K_s(t,u) = \int_{T_i}^t h_o(t,v) K_r(u,v) dv \quad \begin{matrix} T_i \leq t \leq T_f \\ T_i \leq u \leq t \end{matrix} \quad (B.17)$$

A solução para $h_o(t,u)$ em termos dos autovalores e autofunções continua válida mas agora a equação integral (A.9) que define $\{\lambda_i\}$ e $\{\phi_i(\alpha)\}$ será:

$$\lambda_i(t) \phi_i(\alpha; t) = \int_{T_i}^t K_s(\alpha, \beta) \phi_i(\beta; t) d\beta \quad * \quad (B.18)$$

* Os autovalores e as autofunções são representados aqui por $\lambda_i(t)$ e $\phi_i(\alpha; t)$ para evidenciar a sua dependência com t .

Para $h_0(t, u)$ obtém-se como em (B.15)

$$h_0(t, u) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_i(t)}{\lambda_i(t) + \frac{N_0}{2}} \phi_i(\alpha; t) \phi_i(u; t) \Big|_{\alpha=t} \quad (\text{B.19})$$

e para o erro médio quadrático:

$$\varepsilon_0(t) = \frac{N_0}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_i(t)}{\lambda_i(t) + \frac{N_0}{2}} \phi_i^2(\alpha; t) \Big|_{\alpha=t} \quad (\text{B.20})$$

Observa-se então que para cada valor de t o conjunto de autovalores e autofunções usados nas expansões de $h_0(t, u)$ e $\varepsilon_0(t)$ é redefinido de acordo com (B.18).

A expansão de processos aleatórios através de autofunções e autovalores, bem como a utilização destas expansões no problema da filtragem ótima linear assumem um papel importantíssimo em todo o desenvolvimento das teorias de detecção e estimação de parâmetros de processos aleatórios.

Apêndice C

MODELO PARA O PROBLEMA DE DETEÇÃO BINÁRIA

Os componentes básicos de um problema simples de detecção são mostrados na figura C.1.

Fig. C.1

O ponto de partida é uma fonte que gera uma saída entre duas possíveis. Estas saídas são chamadas hipóteses e são representadas por H_0 e H_1 . Tem-se em seguida, um mecanismo de transição. Este mecanismo pode ser visto como um dispositivo que conhece qual é a hipótese verdadeira e baseado neste conhecimento gera no espaço das observações Z um ponto, definido pelo vetor $\vec{r}$, segundo uma lei de probabilidade. Se o espaço Z é contínuo, esta lei pode ser uma densidade de probabilidade do vetor $\vec{r}$, dado cada uma das hipóteses H_0 e H_1 ou seja: $p_{\vec{r}}(\vec{r}|H_0)$ e $p_{\vec{r}}(\vec{r}|H_1)$. Finalmente, vem um dispositivo de decisão que tendo acesso ao espaço das observações escolhe como verdadeira a hipótese H_0 ou H_1 através de uma regra de decisão. Esta regra de decisão levará uma divisão do espaço das observações Z em duas regiões Z_0 e Z_1 (Fig. C.2) e a regra consiste em escolher H_0 quando o vetor $\vec{r}$ estiver na região Z_0 e escolher H_1 quando $\vec{r}$ estiver em Z_1 . De acor-

do com um dado critério existe uma determinação ótima das regiões Z_0 e Z_1 ou seja uma regra de decisão ótima.

Fig. C.2

Critério de Bayes

No problema de detecção apresentado há 4 possíveis cursos de ação:

1. H_0 é verdadeira; escolhe-se H_0
2. H_0 é verdadeira; escolhe-se H_1
3. H_1 é verdadeira; escolhe-se H_1
4. H_1 é verdadeira; escolhe-se H_0

Evidentemente a primeira e a terceira alternativas correspondem a uma decisão correta enquanto as outras duas correspondem a decisões erradas. O critério de Bayes permite chegar a uma regra de decisão ótima baseado nas seguintes suposições. A primeira é que as saídas da fonte, H_0 e H_1 , são associadas as probabilidades P_0 e P_1 , denominadas probabilidades a priori. Estas probabilidades representam a informação do observador sobre a fonte independente do curso de ação seguido. A segunda é que a cada curso de ação acima é associada

do um custo representados respectivamente por C_{00} , C_{01} , C_{11} e C_{10} . O critério consiste, então, em minimizar o custo médio da experiência. A regra de decisão ótima obtida é expressa por:^{3,8}

$$\Lambda(\vec{R}) \begin{matrix} \xrightarrow{H_1} \\ \xleftarrow{H_0} \end{matrix} \eta \quad (C.1)$$

onde

$$\Lambda(\vec{R}) = \frac{p_F^+(\vec{R}|H_1)}{p_F^+(\vec{R}|H_0)} \quad (C.2)$$

e

$$\eta = \frac{P_0(C_{10} - C_{00})}{P_1(C_{01} - C_{11})} \quad (C.3)$$

O significado de (C.1) é o seguinte: Se $\Lambda(\vec{R}) > \eta$ associa-se o ponto especificado por $\vec{R}$ a região Z_1 ; se $\Lambda(\vec{R}) < \eta$ o ponto é associado a Z_0 . A função $\Lambda(\vec{R})$ é chamada razão de verossimilhança. O critério de Bayes conduz assim ao chamado teste da razão de verossimilhança. A constante η é conhecida como o limiar do teste.

BIBLIOGRAFIA

1. H. M. Graciosa, *Desempenho de Modelos Racionais na Identificação de Espectros de Potência de Grande Resolução*, Tese de Mestrado - PUC/RJ, 1972.
2. J. P. A. Albuquerque, *Parameter Estimation Performance*, Notas não publicadas - MIT, 1971.
3. H. L. Van Trees, *Detection Estimation and Modulation Theory*, Vol. I, Wiley, New York, 1968.
4. H. L. Van Trees, *Detection Estimation and Modulation Theory*, Vol. III, Wiley, New York, 1968.
5. Jacob Ziv e Moshe Zakai, *Some Lower Bounds on Signal Parameter Estimation*, IEEE Trans - Information Theory, Maio de 1969.
6. L. P. Seidman, *Performance Limitations and Error Calculations for Parameter Estimation*, Proc. IEEE, Maio de 1970.
7. W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and its Applications*, Vol. II, Wiley, New York, 1966.
8. A. P. Sage e J. L. Melsa, *Estimation Theory with Applications to Communications and Control*, McGraw-Hill, 1971.
9. B. P. Lathi, *An Introduction to Random Signals and Communication Theory*, International Textbook, 1968.
10. A. Papoulis, *Probability, Random Variables and Stochastic Process*, McGraw-Hill, 1965.
11. W. B. Davenport e W. L. Root, *An Introduction to the Theory of Random Signals and Noise*, McGraw-Hill, 1958.
12. J. M. Wozencraft, J. M. Jacobs, *Principles of Communication Engineering*, Wiley, 1967.

13. W. V. Lovitt, *Linear Integral Equations*, McGraw-Hill, New York, 1924.
14. R. Courant e D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics* Interscience Publishers, New York, 1953.
15. F. G. Tricomi, *Integral Equations*, Interscience Publishers New York, 1957.

Tese apresentada aos Senhores:

Antônio Figueira

José Paulo de Almeida e Albuquerque

Carlos Silva Kubrusly

Visto e permitida a impressão
Rio de Janeiro, 6 / 9 / 73.

José Sales Amari
Coordenador dos Programas de Pós-Graduação
e Pesquisas do Centro Técnico Científico