

PUC

RAIMUNDO SAMPAIO NETO

EFEITOS DE INTERMODULAÇÃO EM SISTEMAS SCPC/FM COM ATIVAÇÃO POR VOZ

Tese de Mestrado

Departamento de Engenharia Elétrica

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO RIO DE JANEIRO

Rio de Janeiro, 3 de julho de 1978

Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

Rua Marquês de São Vicente 225 — ZC 19

Rio de Janeiro — Brasil

07 amade 5217 / S/C2.183E10
Título: Efectos de intercomunicación en sistemas...



EX-CENTRAL

184

RAIMUNDO SAMPAIO NETO

EFEITOS DE INTERMODULAÇÃO EM SISTEMAS SCPC/FM COM ATIVAÇÃO POR VOZ

Tese apresentada ao Departamento de Engenharia Elétrica da PUC/RJ como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Orientador: José Paulo de Almeida e Albuquerque.

Departamento de Engenharia Elétrica

Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

Rio de Janeiro, 3 de julho de 1978



30250 BC

6213
S172
TESTUC

1/2

ABSTRACT

In an SCPC/FM satellite transmission system, a large number of carriers is simultaneously amplified by the satellite TWT. Due to the nonlinear characteristics of this tube, undesired signals, resulting from the intermodulation of the desired carriers, show up at the tube output. Therefore, an appropriate link dimensioning for an SCPC/FM system requires knowledge of the effects caused by such intermodulation products, when the modulating signal is recovered.

The purpose of this work is to compute a signal-to-intermodulation noise ratio from the power spectral density of such noise at the demodulator output. This was done first from an RF spectral analysis, in which the fact that each carrier is transmitted only when voice is effectively present (voice activation) was taken into account. From expression for desired carrier and intermodulation product power spectral densities in RF, an expression for the intermodulation noise power spectral density in baseband was obtained. From this power spectral density, a signal-to-intermodulation noise ratio in a voice channel was obtained as a function of system parameters. RF power spectral densities were obtained from available measurements and taking into consideration that each carrier is modulated by a speech signal with random level.

RESUMO

Em um sistema satélite SCPC/FM, um grande número de portadoras é amplificado simultaneamente pela TWT do satélite. Devido à característica não linear desta válvula, surgem, na saída, sinais espúrios resultantes do batimento das diversas frequências e que interferem nas portadoras desejadas.

Desta forma para um bom dimensionamento de um sistema SCPC/FM é necessário o conhecimento dos efeitos produzidos por este tipo de ruído quando da recuperação do sinal modulador.

O objetivo deste trabalho é a obtenção da razão sinal-ruído de intermodulação através da determinação da densidade espectral de potência deste ruído após sofrer as operações de demodulação. Isto foi conseguido através de uma análise espectral inicial em RF, onde foram considerados os efeitos produzidos ao se transmitir a portadora somente nos períodos em que, efetivamente, haja voz presente no canal (ativação por voz). Utilizando-se as expressões para as densidades espectrais da portadora desejada e da intermodulação, em RF, foi determinada a expressão da densidade espectral de ruído em banda básica e obtida a razão sinal-ruído de intermodulação no canal de voz, como função de parâmetros do sistema. Nestas expressões foram utilizadas densidades espectrais de potência de portadoras SCPC/FM moduladas por sinais de voz com nível de potência aleatório. Tais densidades espectrais foram obtidas utilizando-se medidas disponíveis e conceitos estatísticos.

AGRADECIMENTOS

- Ao Prof. José Paulo de Almeida e Albuquerque, de quem partiu a idéia para este trabalho e tornou possível a sua realização, graças à sua orientação e apoio em todos os momentos em que se fizeram necessários.

- A Graça Muniz e ao Ernesto M.L. Filho, pelos trabalhos de datilografia e desenhos.

- Aos amigos do CETUC, pelo incentivo e colaboração, muitas vezes em detrimento de seus próprios trabalhos.

SUMÁRIO

	pág
LISTA DE FIGURAS	vii
LISTA DE TABELAS	ix
INTRODUÇÃO	1
CAPÍTULO 1 - SISTEMA SCPC/FM	6
1.1 - Compansor	6
1.2 - Ênfase	8
1.3 - Limitador de Desvios	10
1.4 - Ativação por Voz	11
CAPÍTULO 2 - CARACTERIZAÇÃO DA INTERMODULAÇÃO EM RF	12
2.1 - Caracterização dos Efeitos da não Linearidade da TWT do satélite	12
2.1.1 - O Modelo	13
2.1.2 - Resposta a uma Entrada Consistindo de Vários Sinais Passa Faixa	14
2.2 - Produtos de Intermodulação de Terceira Ordem	21
2.3 - Sistema SCPC/FM: Portadoras e Produtos de Intermodulação em RF	23
2.3.1 - Expressão para a Densidade Espectral de Potência em RF de uma Portadora SCPC/FM.....	28
2.3.2 - Expressão para a Densidade Espectral de Potência em RF de um Produto de Intermodulação de 3ª Ordem.....	35

2.3.3 - Razão Portadora-Ruído de Intermodulação em RF.....	43
--	----

CAPÍTULO 3 - CARACTERIZAÇÃO DA INTERMODULAÇÃO EM BANDA BÁSICA	50
3.1 - Interferência sobre uma Portadora Modulada em Ângulo	51
3.2 - Obtenção da Densidade Espectral de Potência da Envoltória Complexa de Sinais Passa-Faixa	55
3.3 - Ruído em Banda Básica Gerado pela Intermodulação	58
CAPÍTULO 4 - OBTENÇÃO DAS DENSIDADES ESPECTRAIS DE POTÊNCIA DA PORTADORA E DOS PRODUTOS DE INTERMODULAÇÃO.	69
4.1 - Caracterização da Amplitude de uma Portadora SCPC/FM Ativada por Voz.....	69
4.2 - Relacionamento entre as Densidades Espectrais $\bar{S}_{k/ON}(f)$ e $\bar{S}_k(f)$	71
4.3 - Relacionamento entre $\bar{S}_k(f)$ e Medidas Disponíveis.....	76
4.4 - Densidade Espectral de Potência de uma Portadora SCPC/FM Ativada por Voz, com Nível de Sinal Aleatório	82
CAPÍTULO 5 - RESULTADOS NUMÉRICOS	90
CONCLUSÕES	104
APÊNDICE A	113
APÊNDICE B	118

B.1 - Determinação de Parâmetros do Processo $x(t)$	118
B.2 - Determinação das Funções $F_{2n}(\omega)$	120
B.3 - Faixa de Frequências Ocupada pelas Funções $\tilde{F}_n(\omega)$	128
B.4 - Determinação da Função $G(\omega)$	138
REFERÊNCIAS	141

LISTA DE FIGURAS

pág

CAPÍTULO 1

- Figura 1.1 - Diagrama em Blocos: Transmissão e Recepção em um Sistema SCPC/FM..... 7

CAPÍTULO 2

- Figura 2.1 - Dispositivo Não-Linear Excitado por uma Única Portadora 17
- Figura 2.2 - Razão Portadora-Ruído de Intermodulação C/I versus "Back-Off" de Entrada b para um Grande Número de Portadoras - INTELSAT IV - TWT 49

CAPÍTULO 3

- Figura 3.1 - Diagrama em Blocos do Receptor de FM 51
- Figura 3.2 - Densidade Espectral de Potência de um Sinal Passa-Faixa 55
- Figura 3.3 - Densidade Espectral de Potência da Envoltória Complexa do Sinal Representado na Figura 3.2 57
- Figura 3.4 - Efeito sobre o r -ésimo Canal dos Produtos de Intermodulação Centrados em Canais Adjacentes..... 63

CAPÍTULO 4

- Figura 4.1 - Diagrama de Estados do Processo de Markov $x(t)$.. 70
- Figura 4.2 - Medidas de Densidades Espectrais de Potência de Portadoras SCPC/FM, Ativadas por Voz, obtidas de [7] 77
- Figura 4.3 - Densidade Espectral de Potência de uma Portadora SCPC/FM, Ativada por Voz, com Nível de Sinal Aleatório ($m = -20$ dBm0; $\beta = 5,8$ dB; $d_{TT} = 9,47$ kHz).... 89

CAPÍTULO 5

Figura 5.1 - Resposta de Frequência do Filtro de Prê-Ênfase

 $H_p(f)$ 100

APÊNDICE B

Figura B.1 - Diagrama de Fluxo do Processo $x(t)$ 122

Figura B.2 - Redução do Diagrama de Fluxo 123

Figura B.3 - Diagrama de Fluxo Modificado para a Determinação de $f_{10}^e(s)$ e $f_{20}^e(s)$ 131Figura B.4 - Redução do Diagrama da Figura B.3, visando a Determinação de $f_{10}^e(s)$ e $f_{20}^e(s)$ 131Figura B.5 - Diagrama Modificado e sua Redução, Visando a Determinação de $f_{00}^e(s)$ 132

LISTA DE TABELAS

pág

CAPÍTULO 2

Tabela 2.1 - Coeficientes para a Expansão da Função $h(\rho)$:TWT do INTELSAT IV	21
Tabela 2.2 - Valores Percentuais de η_1 em Função de m e do "Back-Off" de Entrada b	31
Tabela 2.3 - Valores Percentuais de η_2 em Função de m e do "Back-Off" de Entrada b	37
Tabela 2.4 - Erro Relativo (%) da Aproximação (2.80) em Função do "Back-Off" de Entrada b e do Número m de Portadoras.....	47
Tabela 2.5 - Erro Relativo (%) da Aproximação (2.88) em Função do "Back-Off" de Entrada b e do Número m de Portadoras.....	48

CAPÍTULO 5

Tabela 5.1 - Valores do Desvio rms do Tom de Teste (kHz), para Diferentes Valores de Desvio Padrão β (dB) do do Nível de Voz, da Faixa B(kHz) Alocada para a Portadora e da Percentagem Tolerada (%) de Usuários que sofrem Distorção por "Clipping".....	97
Tabela 5.2 - Valores de X(dB) para Diferentes Valores do Desvio Padrão β (dB) , da Faixa Alocada B(kHz) e Desvio rms do Tom de Teste Apresentados na Tabela 5.1	98
Tabela 5.3 - Valores da Correção ΔX (dB), Devida à Ênfase, Correspondentes aos Valores de X Apresentados na Tabela 5.2	101

Tabela 5.4 - Valores da Penalidade π (dB) para Diferentes Valores do Desvio Padrão β (dB), da Faixa Alocada B(kHz) e Desvios rms do Tom de Teste Apresentados na Tabela 5.1.....	103
--	-----

APÊNDICE B

Tabela B.1 - Valores de $F_{2n}(f)$, para $n=1,2,3,4$ e 5 e para Frequências entre 0 e 6 Hz	126
Tabela B.2 - Valores de $T_n(f)$, para $n=1,2,3,4$ e 5 e para Frequências entre 0 e 6 Hz	136
Tabela B.3 - Valores de $G(f)$, para Frequências entre 0 e 6 Hz	140

INTRODUÇÃO

Quando portadoras com frequências diferentes pas sam através de uma válvula amplificadora TWT, como as usadas nos satélites, as não-linearidades da válvula produzem sinais, resultantes de batimentos entre as diversas frequências e que são chamados produtos de intermodulação.

Nos sistemas SCPC (canal singelo por portadora), este efeito é agravado pela grande quantidade de portadoras pre sentes no transponder e que são amplificadas simultaneamente por uma única TWT. Geram-se assim produtos de intermodulação cujas frequências centrais dependem do tipo de produto e das frequências das portadoras que os formam resultando, portanto, na presença de sinais interferentes na faixa ocupada pelas por tadoras desejadas.

A amplitude destes produtos aumenta à medida que a potência média total das portadoras SCPC aproxima-se da potên cia de saturação da TWT do transponder (região não-linear). A razão entre a potência média total das portadoras SCPC e a po tência de saturação de entrada da TWT, expressa em decibéis, é chamada "back-off" de entrada. É sabido que quão mais próximo se opera da saturação (valores pequenos, em módulo, do "back-off") mais aumenta a potência da portadora na saída da TWT, re sultando portanto em uma maior razão sinal-ruído térmico. Entre tanto, como será verificado, quanto menor em módulo, o valor do "back-off" menor é a razão portadora-ruído de intermodulação e, conseqüentemente, menor será a razão sinal-ruído de intermo

dulação.

Desta forma um bom projeto de sistema deve procurar o "back-off" ótimo, isto é o valor que maximiza a razão sinal-ruído total no canal de voz, levando-se em conta o ruído térmico e o gerado pela intermodulação.

Para a determinação da razão sinal-ruído de intermodulação é necessária a obtenção da densidade espectral de potência deste ruído em banda básica. Isto exige o conhecimento da densidade espectral de potência do ruído que interfere em uma determinada portadora, desde sua geração na saída da TWT e incluindo os efeitos produzidos por sua passagem pelo filtro destinado a selecionar a portadora desejada e pelo demodulador de FM. Estes são, exatamente, os objetivos deste trabalho.

O capítulo 1 faz uma introdução ao sistema SCPC/FM, apresentando alguns dos procedimentos capazes de melhorar seu desempenho, tais como o emprego de ênfase, ativação por voz e compandor silábico.

O capítulo 2 caracteriza, inicialmente, a não linearidade do satélite através de uma função complexa que leva em conta a influência da amplitude do sinal de entrada na amplitude e fase do sinal de saída. Uma vez caracterizada esta não linearidade, é apresentada a expressão no tempo do sinal na saída da TWT, quando a entrada é composta de várias portadoras

SC/PC. Nesta saída ficam evidentes as portadoras desejadas e os produtos de intermodulação. A amplitude complexa de cada portadora e produtos de intermodulação é influenciada por todas as demais amplitudes de portadoras existentes na entrada da TWT. Com o uso de ativação por voz, essas amplitudes passam a ser variáveis com o tempo. Estes fatos não causariam grandes problemas se o interesse fosse apenas o conhecimento da potência da portadora e dos produtos de intermodulação, para o que bastaria uma caracterização de primeira ordem para as amplitudes. Entretanto, o grande número de portadoras na entrada da TWT e os efeitos já citados da ativação por voz tornam a obtenção exata das densidades espectrais de potência um problema não só trabalhoso como de grande esforço computacional. Conseguiu-se evitar este problema através de algumas aproximações, cuja validade foi cuidadosamente examinada. Utilizando-se estas aproximações foram obtidas expressões para a densidade espectral de potência da portadora e dos produtos de intermodulação. Em particular, para a portadora, necessitou-se da densidade espectral assumindo-se que esta portadora está em um período ativo e uma interpretação adequada para esta condição foi proposta. Ao final do capítulo é também apresentada uma expressão para a razão portadora-ruído de intermodulação em R.F. Ao longo deste capítulo, foi assumido que as portadoras possuem a mesma potência na entrada da TWT, sendo também igualmente espaçadas em frequência.

O capítulo 3 faz uso das expressões para as densidades espectrais de potência em R.F. obtidas no capítulo 2 e a

partir de análises já existentes, determina uma expressão para a densidade espectral de potência, em banda básica, do ruído gerado pela intermodulação. A análise considerada supõe independência estatística entre os sinais desejado e interferente. No caso em questão a suposição de independência, apesar de não ser satisfeita, é uma boa aproximação quando se tem um grande número de portadoras.

Para caracterizar a amplitude de uma portadora SCPC/FM ativada por voz, o capítulo 4 introduz um processo de Markov a tempo contínuo, com 3 estados representando pausas intersilábicas, pausas de escuta e períodos de atividade do sinal de voz. Fazendo uso desta caracterização é obtido o relacionamento entre as expressões das densidades espectrais de potência obtidas no capítulo 2 e medidas disponíveis sobre densidades espectrais de potência de portadoras SCPC/FM ativadas por voz, com vários níveis de potência do sinal modulador. Em seguida o nível com que o sinal de voz atinge o modulador é considerado como uma variável aleatória e uma expressão para a densidade espectral de potência de uma portadora SCPC/FM, ativada por voz, com nível de sinal aleatório, é desenvolvida. Esta será a densidade espectral utilizada nas expressões que conduzem à razão sinal-ruído de intermodulação em banda básica (NPR).

O procedimento geral proposto para a determinação da NPR é finalmente ilustrado, no capítulo 5, através de alguns resultados numéricos que expressam a quantidade, em decibéis, que deve ser somada à razão portadora-ruído de intermodu

lação a fim de obter-se a correspondente NPR. Os efeitos de u tilização de ênfase no sistema são também considerados.

Os resultados numéricos apresentados correspondem a valores usuais do espaçamento em frequência das portadoras e os correspondentes desvios rms de tom de teste são determinados levando-se, novamente, em consideração que o nível de voz, em dBm0, pode ser modelado por uma variável aleatória.

CAPÍTULO 1

SISTEMA SCPC/FM

Um sistema SCPC (single-channel-per-carrier) caracteriza-se pelo fato de que o sinal correspondente a cada canal modula uma portadora diferente. Este sistema tem grande potencialidade de aplicação quando várias estações terrenas, cada uma delas requerendo um pequeno número de canais, estão presentes na rede satélite em consideração. Nos últimos anos, as melhorias de desempenho obtidas por intermédio do uso de "compandors" tornou a utilização de sistemas SCPC/FM (portadora modulada em frequência pelo sinal de voz) bastante competitiva, relativamente a outros sistemas SCPC utilizando transmissão digital (por exemplo, SCPC/ Δ /PSK).

A figura 1.1 mostra um diagrama em blocos simplificado de um sistema SCPC/FM, em que são destacados apenas os aspectos de alguma forma relevantes dentro do presente trabalho. Este capítulo descreve de forma sucinta a função do par compressor-expansor (compansor), do par pré-ênfase/de-ênfase (ênfase), do limitador de desvios e da ativação por voz.

1.1 - Compansor

Um compansor silábico é composto de dois circuitos não lineares: um bloco compressor, incorporado ao transmissor e um bloco expansor incorporado ao receptor. Um sinal que possua um nível de potência S (dBm0), na entrada do compressor, terá um nível $S' = \frac{S+U}{2}$, na saída. O nível

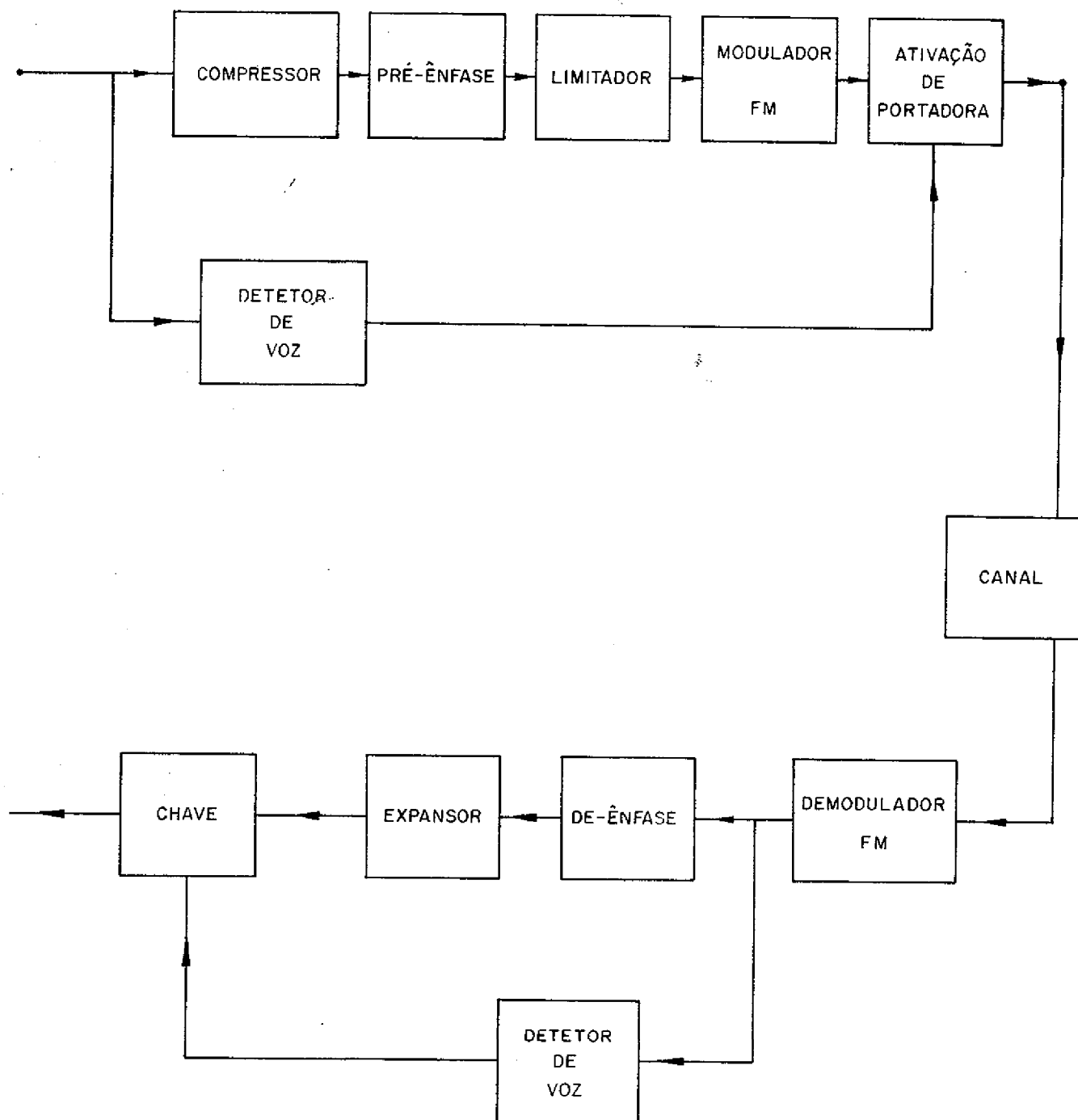


Figura 1.1 - Diagrama em Blocos: Transmissão e Recepção em um Sistema SCPC/FM

U corresponde a um nível de referência, isto é, um sinal que possua um nível de potência U não terá seu nível alterado pela passagem através do compressor. Desta forma, sinais com níveis abaixo do de referência terão seus níveis aumentados e vice-versa. Um sinal com um nível S' na entrada do expensor terá um nível $2S'-U$ na saída. Isso, significa que o sinal de voz retorna ao seu nível original ao passar pelo bloco compressor, na transmissão, e pelo bloco expensor, na recepção.

A melhoria introduzida pelo uso de compansor no sistema se deve, principalmente, ao fato de que, durante as pausas intersilábicas e de escuta presentes na conversação, o nível de ruído é reduzido drasticamente pela sua passagem através do expensor. A redução drástica do ruído, nos período em que há ausência de voz, corresponde a uma melhoria subjetiva na razão sinal-ruído. Esta melhoria é função do nível de ruído presente na entrada do expandor e do nível do sinal de voz. Para um nível de ruído de -34 dB, Boudreau and Davis sugeriram, para um nível de voz médio, 17 dB de melhoria de compansor. Sinais com níveis fracos de potência terão uma maior melhoria de compansor e vice-versa^[1].

1.2 - Ênfase

O ruído térmico na saída de um demodulador FM possui uma densidade espectral que cresce à razão de 6 dB por oitava. Esta característica faz com que tal ruído esteja quase todo concentrado nas frequências superiores.

res da banda básica, interferindo portanto, de forma bem mais acentuada nas componentes de frequências altas do sinal desejado.

Este efeito indesejável pode ser evitado com a utilização de um filtro de de-ênfase, na saída do demodulador, com a finalidade de tornar plana a densidade espectral de ruído térmico contida dentro da banda básica. Para que isso seja conseguido o filtro de de-ênfase deve ter uma resposta de frequência complementar à densidade espectral de potência do ruído térmico, ou seja deve decrecer a uma razão de 6 dB por oitava.

Para evitar-se que o sinal desejado sofra distorção ao passar pelo filtro de de-ênfase, tais sistemas possuem um filtro de pré-ênfase, na entrada do modulador de FM, com uma característica inversa à da correspondente de-ênfase, de forma que o sinal ao passar pela pré-ênfase, antes do processo de modulação, e pela de-ênfase, após a demodulação, retorna à sua forma original.

Apesar do uso de ênfase com 6 dB por oitava ser o mais indicado teoricamente, na prática esta característica pode não ser recomendável, devido a outros efeitos inerentes ao sistema. Um deles diz respeito à presença de ruído impulsivo, que surge em regiões próximas ao limiar do demodulador de FM.

Embora a característica espectral do ruído térmico cresça à razão de 6 dB por oitava, o ruído impulsivo possui característica essencialmente plana na saída do demodulador de FM. Desta forma o uso de uma de-ênfase

como a citada, que visa tornar plana a densidade espectral do ruído térmico, produz o efeito inverso no ruído impulsivo, fornecendo um incremento substancial nas componentes de baixa frequência deste ruído e podendo, portanto, causar uma forte degradação na performance do sistema, caso ele opere no limiar ou em regiões próximas, onde o ruído impulsivo possui influência acentuada.

O uso de características de ênfase que levem em conta os dois efeitos, isto é, que consigam ainda introduzir uma melhoria substancial em termos de ruído térmico e evitem uma degradação excessiva na região de ruído impulsivo, é na maioria das vezes a mais recomendável, pois permite operações, mesmo ocasionais, na região de limiar sem a degradação imposta pelo ruído impulsivo.

1.3 - Limitador de Desvios

Devido ao pré-processamento do sinal de voz (compressor, pré-ênfase) e também às diferentes características de cada usuário, torna-se necessário, nos sistemas FM, que os desvios de pico da portadora sejam mantidos compatíveis com a faixa passante nominal em FI do demodulador. Este compromisso é particularmente importante quando se opera em regiões próximas ao limiar do demodulador de FM, onde uma modulação excessiva fará aumentar substancialmente a quantidade de ruído impulsivo presente no demodulador. Os desvios excessivos podem provocar, também, a interferência entre canais adjacentes.

Para minimizar estes efeitos, um circuito li

mitador de tensão é inserido após a pré-ênfase, precedendo o modulador de FM e evitando desta forma sobredevios de frequência da portadora. Os limitadores de desvios usados nos sistemas SCPC/FM são usualmente mais severos do que os limitadores, relativamente suaves, usados nos sistemas FDM/FM. Como a limitação severa do sinal pode produzir harmônicos e produtos de intermodulação, caindo acima da faixa normal ocupada pela voz, os limitadores são seguidos de filtros passa-baixa, precedendo o modulador propriamente dito.

1.4 - Ativação por Voz

Uma grande vantagem dos sistemas SCPC/FM sobre os sistemas FDM e TDM convencionais é a possibilidade de se transmitir cada portadora somente durante os períodos em que haja, efetivamente, a presença de voz no canal. Este procedimento permite um melhor aproveitamento da potência disponível no satélite. Usualmente um fator de ativação de 40% é assumido para os sistemas SCPC, ou seja, considera-se que há voz ativa no canal telefônico somente durante 40% do tempo de ocupação deste canal.

CAPÍTULO 2

CARACTERIZAÇÃO DA INTERMODULAÇÃO EM R.F.

Este capítulo visa a determinação da densidade espectral de potência de uma portadora SCPC/FM ativada por voz, assim como dos produtos de intermodulação, gerados pela não linearidade da TWT do satélite e que interferem nesta portadora.

Uma vez caracterizada a não linearidade da válvula é possível determinar-se a expressão, no domínio do tempo, da portadora e dos produtos de intermodulação gerados na saída do dispositivo. De posse dessas expressões foram então determinadas as funções auto-correlação e as correspondentes densidades espectrais de potência em RF.

2.1 - Caracterização dos Efeitos da não Linearidade da TWT do Satélite

Quando o sinal na entrada de um dispositivo não linear apresenta uma envoltória variante no tempo, o sinal de saída sofre distorção.

Esta seção apresenta, inicialmente, um modelo que caracteriza esta distorção e que leva em conta os efeitos combinados da amplificação não linear de amplitude e da conversão AM/PM. Em seguida é apresentado o caso geral em que a entrada ao dispositivo consiste de vários sinais passa-faixa.

2.1.1/ - O Modelo

O comportamento não linear da TWT é usualmente, descrito através do relacionamento entre os sinais de entrada e saída. Desta forma se a entrada do dispositivo é um sinal genérico limitado em faixa:

$$e_i(t) = \text{Re}\{\rho(t) \exp [j\omega_0 t + j\theta(t)]\} \quad (2.1)$$

A saída correspondente é descrita por

$$e_o(t) = \text{Re}\{g[\rho(t)] \exp [j\omega_0 t + jf[\rho(t)] + j\theta(t)]\} \quad (2.2)$$

onde $g[\rho(t)]$ e $f[\rho(t)]$ representam, respectivamente, a amplificação não linear da amplitude de entrada $\rho(t)$, e a distorção de fase devida à conversão AM/PM. Convém notar que esta representação assume que a não-linearidade é "sem memória".

A expressão (2.2) pode ser reescrita na forma

$$e_o(t) = \text{Re}\{H(\rho) \exp [j\omega_0 t + j\theta(t)]\} \quad (2.3)$$

onde

$$H(\rho) = g(\rho) \exp [jf(\rho)] \quad (2.4)$$

é a função complexa que caracteriza o dispositivo não linear, tendo sido suprimida a variável t para maior simplicidade de notação.

2.1.2 - Resposta a uma Entrada Consistindo de Vários Sinais Passa Faixa

Para a aplicação dos resultados de 2.1.1 ao caso de portadoras SCPC/FM, ativadas por voz, é conveniente considerar-se, inicialmente, o caso geral em que a entrada do dispositivo não linear é formada pela soma de m sinais limitados em faixa, ou seja

$$e_i(t) = \operatorname{Re}\left\{ \sum_{\ell=1}^m A_{\ell}(t) \exp [j\omega_0 t + j\theta_{\ell}(t)] \right\} \quad (2.5)$$

e que pode ser escrita na forma de (2.1)

$$e_i(t) = \operatorname{Re}\{\rho(t) \exp [j\omega_0 t + j\theta(t)]\} \quad (2.6)$$

sendo

$$\begin{cases} \rho(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)} \\ \theta(t) = \operatorname{tg}^{-1} \frac{y(t)}{x(t)} \end{cases} \quad (2.7)$$

onde

$$x(t) = \sum_{\ell=1}^m A_{\ell}(t) \cos \theta_{\ell}(t) \quad (2.8)$$

e

$$y(t) = \sum_{\ell=1}^m A_{\ell}(t) \operatorname{sen} \theta_{\ell}(t) \quad (2.9)$$

Para o sinal de entrada em (2.6) e de acordo com o que foi visto em 2.1.1, o sinal de saída, também limitado em faixa, é representado por

$$e_o(t) = \text{Re}\{g[\rho(t)] \exp[j\omega_0 t + j\theta(t) + jf[\rho(t)]]\} \quad (2.10)$$

Pode ser mostrado [2] que é possível ainda expressar-se $e_o(t)$ na forma

$$e_o(t) = \text{Re}\{\exp[j\omega_0 t] \sum_{\substack{k_1, k_2, \dots, k_m = -\infty \\ (k_1 + k_2 + \dots + k_m) = 1}}^{+\infty} M(k_1, k_2, \dots, k_m, t) \cdot$$

$$\cdot \exp\left[j \sum_{\ell=1}^m k_\ell \theta_\ell(t)\right]\} \quad (2.11)$$

onde a restrição

$$\sum_{\ell=1}^m k_\ell = 1$$

é uma consequência do sinal $e_o(t)$ ser limitado em faixa pelo filtro de saída do transponder.

A amplitude complexa $M(k_1, k_2, \dots, k_m, t)$, que é expressa por

$$M(k_1, k_2, \dots, k_m, t) = \int_0^\infty \gamma \cdot \prod_{\ell=1}^m J_{k_\ell}[\gamma \cdot A_\ell(t)] d\gamma \int_0^\infty \rho g(\rho) \exp[jf(\rho)] J_1(\gamma \rho) d\rho \quad (2.12)$$

pode ser calculada através de expansões em série^[2] de

$$g(\rho) \exp[jf(\rho)].$$

Em particular considera-se a expansão em funções de Bessel

$$H(\rho) = g(\rho) \exp[jf(\rho)] = \sum_{s=1}^L b_s J_1(\alpha s \rho) \quad (2.13)$$

onde:

α é um número real;

$\{b_s\}$ são coeficientes complexos que levam em conta a conversão AM/PM;

$J_1(.)$ é a função de Bessel de primeira espécie e primeira ordem;

L é o número de termos necessários para uma aproximação adequada da função $H(\rho)$.

A introdução de (2.13) em (2.12) leva a uma expressão bastante simples para a amplitude complexa, resultando:

$$M(k_1, k_2, \dots, k_m, t) = \sum_{s=1}^L b_s \prod_{\ell=1}^m J_{k_\ell} [\alpha s A_\ell(t)] \quad (2.14)$$

Portanto, de acordo com (2.11), se a entrada do dispositivo não linear consiste de uma soma de portadoras com amplitudes $A_\ell(t)$ e ângulos $\theta_\ell(t)$, o sinal resultante na saída do dispositivo será também uma soma de sinais caracterizados por uma m-upla de inteir

ros (k_1, k_2, \dots, k_m) com amplitudes $M(k_1, k_2, \dots, k_m, t)$ dadas por (2.14) e ângulos

$$\sum_{\ell=1}^m k_{\ell} \theta_{\ell}(t)$$

Desta forma, o termo do somatório em (2.11) no qual $k_r = 1$ e $k_{\ell} = 0$ ($\ell \neq r$) é a componente da saída correspondente à r -ésima portadora. Todos os termos que não são desta forma, para algum r , são indesejáveis e constituem o ruído de intermodulação em R.F.

Para a determinação numérica dos coeficientes complexos da expansão, indicada por (2.13), são utilizadas curvas obtidas experimentalmente, para uma única portadora, e que relacionam a potência de saída P_o e a defasagem ϕ_o entre saída e entrada à potência de entrada P_i . A figura 2.1 mostra os sinais de entrada e saída do dispositivo não linear nesta situação.

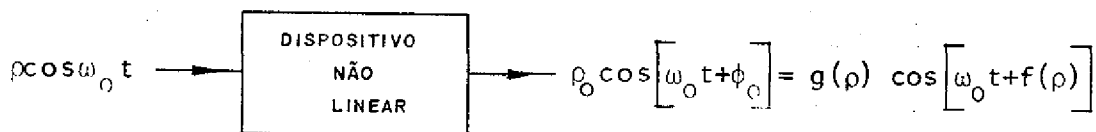


Figura 2.1 - Dispositivo Não-linear Excitado por uma Única Portadora

As amplitudes ρ e ρ_o se relacionam às potências de entrada e saída através de

$$\rho = \sqrt{2P_i}$$

$$\rho_o = \sqrt{2P_o}$$

(2.15)

As curvas medidas são fornecidas usualmente com as potências reais, normalizadas em relação às potências de saturação de entrada e saída do dispositivo. Representando tais potências por $P_{s,i}$ e $P_{s,o}$, respectivamente, as amplitudes normalizadas definidas por

$$\bar{\rho} = \sqrt{2 \cdot \frac{P_i}{P_{s,i}}} = \frac{\rho}{\sqrt{P_{s,i}}}$$

(2.16)

$$\bar{\rho}_o = \sqrt{2 \cdot \frac{P_o}{P_{s,o}}} = \frac{\rho_o}{\sqrt{P_{s,o}}}$$

podem ser obtidas diretamente das curvas experimentais. Se g' é a função que relaciona $\bar{\rho}_o$ a $\bar{\rho}$, ou seja

$$\bar{\rho}_o = g'(\bar{\rho})$$

então a função g que relaciona ρ_o a ρ pode ser obtida de g' através dos valores de

$$g(\rho) = \rho_o = \sqrt{P_{s,o}} \cdot \bar{\rho}_o = \sqrt{P_{s,o}} \cdot g'(\bar{\rho}) = \sqrt{P_{s,o}} \cdot g'(\rho / \sqrt{P_{s,i}}) \quad (2.17)$$

Da mesma forma se f' é a função que relaciona ϕ_o a $\bar{\rho}$, ou seja

$$\phi_0 = f'(\bar{\rho})$$

a função f que relaciona ϕ_0 a ρ é obtida de f' através dos valores de

$$f(\rho) = \phi_0 = f'(\bar{\rho}) = f'(\rho/\sqrt{P_{s,i}}) \quad (2.18)$$

A partir das curvas $(P_0/P_{s,o}) \times (P_i/P_{s,i})$ e $\phi_0 \times (P_i/P_{s,i})$, usualmente fornecidas, e de (2.16) podem ser obtidas as curvas $\bar{\rho}_0 \times \bar{\rho}$ e $\phi_0 \times \bar{\rho}$, que representam g' e f' , respectivamente. De posse de g' e f' é possível então determinar os coeficientes da expansão da função h definida por

$$h(x) = g'(x) \exp \left[\int f'(x) \right] = \sum_{s=1}^L b'_s J_1(\alpha_s x) \quad (2.19)$$

As expressões (2.17) e (2.18) permitem escrever o relacionamento entre h e a função H definida em (2.13), pois

$$\begin{aligned} h(x/\sqrt{P_{s,i}}) &= g'(x/\sqrt{P_{s,i}}) \exp \left[\int f'(x/\sqrt{P_{s,i}}) \right] = \frac{g(x)}{\sqrt{P_{s,o}}} \exp \left[f(x) \right] \\ &= \frac{H(x)}{\sqrt{P_{s,o}}} \end{aligned} \quad (2.19)$$

e portanto

$$H(\rho) = h(\rho/\sqrt{P_{s,i}}) \cdot \sqrt{P_{s,o}} \quad (2.20)$$

Verifica-se facilmente que, se em (2.12), $H(\rho)$ for substituído por $h(\rho)$ e as amplitudes $A_\ell(t)$ ($\ell=1,2,\dots,m$) de entrada forem substituídas pelas amplitudes normalizadas com relação à raiz quadrada da potência de saturação de entrada do dispositivo não linear, ou seja,

$$\bar{A}_\ell(t) = \frac{A_\ell(t)}{\sqrt{P_{s,i}}} \quad (2.21)$$

o resultado será a amplitude complexa de saída $M(k_1, k_2, \dots, k_m, t)$ normalizada com relação à raiz quadrada da potência de saturação de saída do dispositivo, isto é

$$\bar{M}(k_1, k_2, \dots, k_m, t) = \frac{M(k_1, k_2, \dots, k_m, t)}{\sqrt{P_{s,o}}} = \sum_{s=1}^L b'_s \prod_{\ell=1}^m J_{k_\ell} \left[\alpha_s \bar{A}_\ell(t) \right] \quad (2.22)$$

Um método numérico para obtenção dos coeficientes complexos b'_s da expansão de h a partir das curvas de $\bar{\rho}_0 \times \bar{\rho}$ e $\phi_0 \times \bar{\rho}$ é mostrado em [2], onde foi verificado que 10 termos são suficientes para representar adequadamente não linearidades típicas.

São transcritos na tabela 2.1 os coeficientes obtidos com $\alpha = 0.6$, a partir das curvas de uma TWT do Intelsat IV.

$\begin{smallmatrix} s \\ b' \end{smallmatrix}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Real	3.089	-0.946	-0.2075	1.399	-0.1674	-0.4258	0.3040	0.4548	-0.5160	0.2435
Imag.	1.045	-1.034	1.992	-0.900	-0.6464	0.6189	1.017	-2.342	1.837	-0.6750

Tabela 2.1 - Coeficientes para expansão da função $h(\rho)$: TWT do INTELSAT IV

2.2 - Produtos de Intermodulação de Terceira Ordem

O ângulo $\theta_\ell(t)$ da ℓ -ésima portadora em (2.5) pode ser escrito de forma geral como sendo

$$\theta_\ell(t) = \omega_\ell t + \phi_\ell(t) + \lambda_\ell \quad (2.23)$$

de tal forma que $(\omega_0 + \omega_\ell)$ é a frequência da ℓ -ésima portadora, $\phi_\ell(t)$ corresponde ao sinal que modula em fase esta portadora e λ_ℓ é a sua fase.

Denomina-se produto de intermodulação de 3^a. ordem qualquer termo do somatório (2.11) associado a uma m -upla (k_1, k_2, \dots, k_m) em que

$$\sum_{\ell=1}^m |k_\ell| = 3$$

ou seja, qualquer termo cuja frequência central é do tipo

$$\omega_0 + (\omega_a + \omega_b - \omega_c) \quad \text{ou} \quad \omega_0 + (2\omega_a - \omega_b)$$

Westcott^[3] mostrou que para o caso do sinal de entrada da TWT ser constituído de m portadoras igualmente espaçadas em frequência e com amplitudes iguais, a potência correspondente aos produtos do tipo $\omega_0 + (\omega_a + \omega_b - \omega_c)$ é 6 dB maior que a correspondente aos da forma $\omega_0 + (2\omega_a - \omega_b)$, quando o número m de portadoras tende a infinito. É possível também mostrar que a potência dos produtos de quinta ordem é muito menor que a dos de terceira ordem.

Quanto ao número de produtos de terceira ordem que se localizam em um determinado canal, são transcritos a seguir os resultados apresentados por Westcott^[3]. Representando-se por $D_{m,r}$, o número de produtos que se localizam no r -ésimo canal para o caso de m portadoras igualmente espaçadas, tem-se para produtos do tipo $\omega_0 + (2\omega_a - \omega_b)$

$$D_{m,r} = \frac{1}{2} \{ m - 2 - \frac{1}{2} [1 - (-1)^m] \cdot (-1)^r \} \quad (2.24)$$

e para os do tipo $\omega_0 + (\omega_a + \omega_b - \omega_c)$

$$D_{m,r} = \frac{r}{2} [m - r + 1] + \frac{1}{4} [(m-3)^2 - 5] - \frac{1}{8} [1 - (-1)^m] [-1]^{m+r} \quad (2.25)$$

Desta forma, $D_{m,r}$ cresce com m para os produtos do tipo $\omega_0 + (2\omega_a - \omega_b)$ e com m^2 para os do tipo $\omega_0 + (\omega_a + \omega_b - \omega_c)$ o que indica que, para m suficientemente grande, os últimos são predominantes. Verifica-se também que para este caso $D_{m,r}$ é máximo para $r = \frac{m}{2}$ e

$$D_{m, \frac{m}{2}} = \frac{3}{8} m^2 - \frac{5}{4} m + 1$$

o que significa que o canal central é o pior em termos de ruído de intermodulação.

Portanto com base nas conclusões de Westcott será assumido na próxima seção que, para o cálculo do ruído de intermodulação, é necessário considerar-se somente os produtos do tipo $\omega_0 + (\omega_a + \omega_b - \omega_c)$ que se localizem no canal central o que, conforme visto, representa o pior caso.

2.3 - Sistema SCPC/FM: Portadoras e Produtos de Intermodulação em RF

Em um sistema SCPC/FM com ativação por voz a entrada ao dispositivo não linear pode ser escrita, de acordo com (2.5)

$$e_i(t) = \text{Re}\{\tilde{e}_i(t)\} = \text{Re}\{e^{j\omega_0 t} \sum_{\ell=1}^m A_{\ell}(t) \exp[j\theta_{\ell}(t)]\} \quad (2.26)$$

onde m é o número de portadoras na entrada da TWT, $A_{\ell}(t)$ é a amplitude da ℓ -ésima portadora e cujo ângulo $\theta_{\ell}(t)$ é da forma descrita em conexão com (2.23), sendo λ_{ℓ} assumida uma variável aleatória, uniformemente distribuída no intervalo $[0, 2\pi)$.

Considerou-se em (2.26) que todos os m canais es

tão em uso. Entretanto, devido à ativação por voz, cada portadora pode estar "ON" ou OFF". Desta forma $A_\ell(t)$ pode assumir, para cada t , os valores 0 ou A sendo, portanto, variável no tempo.

Como em um sistema SCPC cada portadora corresponde a um usuário diferente, as seguintes afirmações sobre os conjuntos $\{\lambda_\ell\}$, $\{\phi_\ell(t)\}$, $\{A_\ell(t)\}$ ($\ell = 1, \dots, m$) são assumidas nesta seção:

- i) $\{\lambda_\ell\}$ é formado de variáveis aleatórias independentes entre si;
- ii) cada um dos conjuntos $\{\phi_\ell(t)\}$ e $\{A_\ell(t)\}$ é formado por processos estocásticos independentes entre si;
- iii) o conjunto das amplitudes $\{A_\ell(t)\}$ é independente de $\phi_k(t)$ para $k \neq \ell$.

Admite-se ainda que cada λ_ℓ é independente do conjunto formado pelas demais fases e pelos conjuntos $\{\phi_k(t)\}, \{A_k(t)\}$, $k = 1, \dots, m$.

A caracterização do processo $A_\ell(t)$ será considerada com maiores detalhes no capítulo 4. No momento é de interesse somente a caracterização de primeira ordem:

$$P[A_\ell(t) = A] = p \quad \ell = 1, \dots, m \quad (2.27)$$

sendo p o fator de ativação de voz.

De posse da caracterização de primeira ordem

do processo $A_\ell(t)$, é possível determinar-se uma expressão para o "back-off" de entrada do satélite, no caso de um sistema SCPC /FM, ativado por voz.

O "back-off" multi-portadora de entrada do satélite é usualmente definido como a razão entre a potência média total na entrada da TWT e a potência de saturação de entrada, para uma única portadora, ou seja

$$b = \frac{P_{T,i}}{P_{s,i}} \quad (2.28)$$

onde

$$P_{T,i} = E \left[e_i^2(t) \right] \quad (2.29)$$

com $e_i(t)$ fornecido por (2.26). Tem-se

$$\begin{aligned} E \left[e_i^2(t) \right] &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ E \left[\tilde{e}_i^2(t) \right] + E \left[\tilde{e}_i^*(t) \tilde{e}_i(t) \right] \right\} \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ E \left[e^{j2\omega_0 t} \sum_{\ell=1}^m \sum_{k=1}^m A_\ell(t) A_k(t) \exp \left[j\theta_\ell(t) + j\theta_k(t) \right] \right] + \right. \\ &\quad \left. + E \left[\sum_{\ell=1}^m \sum_{k=1}^m A_\ell(t) A_k(t) \exp \left[j\theta_\ell(t) - j\theta_k(t) \right] \right] \right\} \quad (2.30) \end{aligned}$$

Devido às condições de independência assumidas nesta seção, é possível colocar em evidência no primeiro valor

esperado entre chaves o termo

$$E \left[e^{j(\lambda_\ell + \lambda_k)} \right] = \begin{cases} E \left[e^{j\lambda_\ell} \right] \cdot E \left[e^{j\lambda_k} \right] & \dots \ell \neq k \\ E \left[e^{j2\lambda_\ell} \right] & \dots \ell = k \end{cases} \quad (2.31)$$

e no segundo

$$E \left[e^{j(\lambda_\ell - \lambda_k)} \right] = \begin{cases} E \left[e^{j\lambda_\ell} \right] \cdot E \left[e^{-j\lambda_k} \right] & \dots \ell \neq k \\ 1 & \dots \ell = k \end{cases} \quad (2.32)$$

como

$$E \left[e^{jn\lambda} \right] = 0$$

para λ uniformemente distribuído entre 0 e 2π e qualquer n inteiro, o valor esperado em (2.31) é sempre nulo e o valor esperado em (2.32) só é diferente de zero quando $\ell = k$, o que levado em (2.30) fornece

$$E \left[e_i^2(t) \right] = \frac{1}{2} E \left[\sum_{\ell=1}^m A_\ell^2(t) \right] = \frac{1}{2} m p A^2 \quad (2.33)$$

e portanto de (2.28)

$$b = \frac{\frac{1}{2} m p A^2}{P_{s,i}} \quad (2.34)$$

No que se segue, será utilizada (2.22) que fornece uma expressão para as amplitudes complexas normalizadas dos sinais na saída da TWT e onde o processo

$$\bar{A}_\ell(t) = \frac{A_\ell(t)}{\sqrt{P_{s,i}}}$$

assume os valores

$$\bar{A} = \frac{A}{\sqrt{P_{s,i}}} \quad (2.35)$$

com probabilidade p e zero com probabilidade $(1-p)$.

Utilizando-se (2.34) é possível expressar-se \bar{A} em função do "back-off" de entrada b

$$\bar{A} = \sqrt{\frac{2b}{mp}} \quad (2.36)$$

Daqui por diante, para maior simplicidade de notação, $\bar{A}_\ell(t)$, b'_s e $\bar{M}(k_1, k_2, \dots, k_m, t)$ em (2.22) serão representados respectivamente por $A_\ell(t)$, b_s e $M(k_1, k_2, \dots, k_m, t)$, e \bar{A} sim

plamente por A, ficando implícito que se trata de valores normalizados.

2.3.1 - Expressão para a Densidade Espectral de Potência, em RF, de uma Portadora SCPC/FM

Para o sinal de entrada caracterizado por (2.26) e de acordo com o que foi visto na seção 2.1, a componente de saída correspondente a r-ésima portadora é obtida de (2.11) e (2.22) com $k_r = 1$ e $k_\ell = 0$ ($\ell \neq r$), ou seja

$$e_o(r,t) = \text{Re}\{\tilde{e}_o(r,t)\} = \text{Re}\{\exp[j\omega_o t] \cdot \exp[j\theta_r(t)] M(r,t)\} \quad (2.37)$$

onde

$$M(r,t) = \sum_{s=1}^L b_s J_1(\alpha s A_r(t)) \prod_{\substack{\ell=1 \\ (\ell \neq r)}}^m J_0(\alpha s A_\ell(t)) \quad (2.38)$$

No caso de um sistema com grande número de portadaras é possível obter-se uma aproximação mais simples para (2.38). Para tanto seja x_m definido por

$$x_m = \prod_{\substack{\ell=1 \\ (\ell \neq r)}}^m J_0(\alpha s A_\ell(t)) - \left[p J_0(\alpha s A) + (1-p) \right]^{m-1} \quad (2.39)$$

É fácil mostrar (Apêndice A) que, para cada t, a sequência de variáveis aleatórias $\{x_m\}$ converge, em média quadrada

tica, para zero quando m tende a infinito (na realidade $x_m \rightarrow 0$ na média de ordem k para qualquer k inteiro maior ou igual a 1).

Este resultado sugere que, para m grande, (2.38) possa ser aproximado por um outro processo

$$\hat{M}(r,t) = \sum_{s=1}^L b_s J_1(\alpha s A_r(t)) \left[p J_0(\alpha s A) + (1-p) \right]^{m-1} \quad (2.40)$$

Definindo agora

$$\varepsilon_1(t) = M(r,t) - \hat{M}(r,t) \quad (2.41a)$$

ou seja

$$M(r,t) = \hat{M}(r,t) + \varepsilon_1(t) \quad (2.41b)$$

Verifica-se, facilmente, que $\varepsilon_1(t)$ e $\hat{M}(r,t)$ são processos ortogonais pois

$$\varepsilon_1^*(t+\tau) = \sum_{n=1}^L b_n^* J_1(\alpha n A_r(t+\tau)) \left[\prod_{\substack{\ell=1 \\ (\ell \neq r)}}^m J_0(\alpha n A_\ell(t+\tau)) - (p J_0(\alpha n A) + (1-p)) \right]^{m-1} \quad (2.42)$$

e portanto

$$\begin{aligned}
 E \left[\hat{M}(r, t) \cdot \varepsilon_1^*(t+\tau) \right] &= \sum_{s=1}^L \sum_{n=1}^L b_s b_n^* (p J_0(\alpha s A) + (1-p))^{m-1} \\
 &\cdot E \left[\prod_{\substack{\ell=1 \\ (\ell \neq r)}}^m J_0(\alpha n A_\ell(t+\tau)) - (p J_0(\alpha n A) + (1-p))^{m-1} \right] \\
 &\cdot E \left[J_1(\alpha s A_r(t)) J_1(\alpha n A_r(t+\tau)) \right]
 \end{aligned}
 \tag{2.43}$$

Como

$$\begin{aligned}
 E \left[\prod_{\substack{\ell=1 \\ (\ell \neq r)}}^m J_0(\alpha n A_\ell(t)) \right] &= \prod_{\substack{\ell=1 \\ (\ell \neq r)}}^m E \left[J_0(\alpha n A_\ell(t)) \right] = \\
 &(p J_0(\alpha n A) + (1-p))^{m-1}
 \end{aligned}
 \tag{2.44}$$

independentemente de t , obtém-se

$$E \left[\hat{M}(r, t) \cdot \varepsilon_1^*(t+\tau) \right] = 0 \quad \forall \tau
 \tag{2.45}$$

que é a definição de ortogonalidade para os dois processos.

O resultado em (2.45) e a expressão (2.41b) signi

fica em particular que

$$E \left[|M(r,t)|^2 \right] = E \left[|\hat{M}(r,t)|^2 \right] + E \left[|\varepsilon_1(t)|^2 \right] \quad (2.46)$$

e a aproximação, de $M(r,t)$, dada por (2.40), pode ser então avaliada através do comportamento da quantidade

$$\eta_1 = \frac{E \left[|\varepsilon_1(t)|^2 \right]}{E \left[|\hat{M}(r,t)|^2 \right]} \quad (2.47)$$

para diferentes valores de m e diferentes valores do "back-off" de entrada b .

A tabela 2.2 apresenta alguns resultados obtidos para η_1 , com as características da TWT do INTELSAT IV e com um fator de ativação de voz $p=0.4$

$b(\text{dB}) \backslash m$	50	100	200	400	800	1000
- 1.0	0.621	0.305	0.152	0.074	0.040	0.033
- 4.0	0.448	0.223	0.112	0.055	0.026	0.027
- 8.0	0.218	0.110	0.054	0.032	0.016	0.018
-12.0	0.096	0.05	0.023	0.014	0.008	0.026

Tabela 2.2 - Valores percentuais de η_1 em função de m e do "back-off" de entrada b

Note-se que para $m \geq 50$ o valor de η_1 é menor que 0.63% para todos os valores de "back-off". Desta forma será assumido ao longo desta seção que $M(r,t)$ pode ser substituído por $\hat{M}(r,t)$ dado por (2.40).

O próximo passo necessário para a obtenção da densidade espectral de potência da portadora em RF é a determinação de sua função autocorrelação

$$E[e_o(r,t) \cdot e_o(r,t + \tau)]$$

Entretanto em um sistema SCPC/FM ativado por voz, a recepção é interrompida quando a portadora não está ativa (OFF), portanto para a análise dos efeitos da intermodulação, em uma particular portadora, será de interesse a densidade espectral de potência assumindo-se que esta portadora está ativa(ON). Esta densidade espectral de potência foi interpretada como sendo a transformada de Fourier da função autocorrelação de $e_o(r,t)$ condicionada, para cada $[t, t + \tau]$, à ocorrência do evento

$$B_o(t, t + \tau) = \{\omega : A_r(t) = A, A_r(u) = A \quad \forall u \in [t, t+\tau]\} \quad (2.48)$$

Desta forma a função autocorrelação de $e_o(r,t)$, dada por (2.37), condicionada a $B_o(t, t+\tau)$ e assumindo a aproximação em (2.40) se escreve, após desenvolvimento análogo àquele que permitiu obter (2.33) a partir de (2.30).

$$R_{r/on}(\tau) = E \left[e_o(r, t) e_o(r, t+\tau) \mid B_o(t, t+\tau) \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[e^{j(\omega_o + \omega_r)\tau} \sum_{s=1}^L \sum_{\ell=1}^L b_s^* b_\ell R_{s\ell/on}(\tau) \right]$$

$$\left[p J_o(\alpha s A) + (1-p) \right]^{m-1} \left[p J_o(\alpha \ell A) + (1-p) \right]^{m-1} \quad (2.49)$$

onde

$$R_{s\ell/on}(\tau) = E \left[J_1(\alpha s A_r(t)) J_1(\alpha \ell A_r(t+\tau)) \cdot e^{j\phi_r(t+\tau)} \cdot e^{-j\phi_r(t)} \mid B_o(t, t+\tau) \right]$$

Lembrando que o evento $B_o(t, t+\tau)$ acarreta $A_r(t)=A$ e $A_r(t+\tau)=A$ vem

$$R_{s\ell/on}(\tau) = J_1(\alpha s A) J_1(\alpha \ell A) E \left[e^{j\phi_r(t+\tau)} \cdot e^{-j\phi_r(t)} \mid B_o(t, t+\tau) \right] \quad (2.50)$$

Introduzindo (2.50) em (2.49) e observando que o valor esperado em (2.50) é uma quantidade real, conforme será verificado no capítulo 4, obtém-se

$$\begin{aligned}
 R_{r/on}(\tau) &= \frac{1}{2} E \left[e^{j\phi_r(t+\tau)} e^{-j\phi_r(t)} \middle| B_o(t, t+\tau) \right] \\
 &\cdot \operatorname{Re} \left\{ e^{j(\omega_o + \omega_r)\tau} \cdot \sum_{s=1}^L \sum_{\ell=1}^L b_s^* b_\ell J_1(\alpha s A) \cdot J_1(\alpha \ell A) \right. \\
 &\quad \left. \left[p J_o(\alpha s A) + (1-p) \right]^{m-1} \cdot \left[p J_o(\alpha \ell A) + (1-p) \right]^{m-1} \right\} \quad (2.51)
 \end{aligned}$$

Desta forma, a densidade espectral de potência as sumindo-se que a r -ésima portadora está ativa pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
 S_{r/on}(\omega) &= \frac{1}{2} \left| \sum_{s=1}^L b_s J_1(\alpha s A) \left[p J_o(\alpha s A) + (1-p) \right]^{m-1} \right|^2 \cdot \\
 &\cdot \left\{ E \left[e^{j\phi_r(t+\tau)} e^{-j\phi_r(t)} \middle| B_o(t, t+\tau) \right] \cdot \cos \left[(\omega_o + \omega_r)\tau \right] \right\} \quad (2.52)
 \end{aligned}$$

ou finalmente

$$S_{r/on}(\omega) = \frac{1}{2} C \left\{ \bar{S}_{r/on} \left[\omega - (\omega_o + \omega_r) \right] + \bar{S}_{r/on} \left[\omega + (\omega_o + \omega_r) \right] \right\} \quad (2.53)$$

onde

$$C = R_{r/on}(0) = \frac{1}{2} \left| \sum_{s=1}^L b_s J_1(\alpha s A) \left[p J_o(\alpha s A) + (1-p) \right]^{m-1} \right|^2 \quad (2.54)$$

é a potência da portadora e

$$\bar{S}_{r/on}(\omega) = \int \{E[e^{j\phi_r(t+\tau)} e^{-j\phi_r(t)} | B_o(t, t+\tau)]\} \quad (2.55)$$

será obtido no capítulo 4.

2.3.2 - Expressão para a Densidade Espectral de Potência em RF, de um Produto de Intermodulação de 3ª ordem

Como foi dito na seção 2.2, serão considerados nes ta seção somente os produtos de intermodulação do tipo $\omega_o + (\omega_a + \omega_b - \omega_c)$.

O termo correspondente a um produto de intermodulação genérico do tipo acima é obtido de (2.11) e (2.22) tomando-se $k_a=1$, $k_b=1$, $k_c=-1$ (a, b e $c \in \{1, 2, \dots, m\}$, $a \neq b \neq c$) e pode ser escrito

$$e_o(a, b, -c, t) = \text{Re}\{\tilde{e}_o(a, b, -c, t)\} = \text{Re}\{\exp(j\omega_o t) \cdot \exp[j\theta_a(t) + j\theta_b(t) - j\theta_c(t)] \cdot M(a, b, -c, t)\} \quad (2.56)$$

onde

$$M(a, b, -c, t) = \sum_{s=1}^L b_s J_1(\alpha s A_a(t)) J_1(\alpha s A_b(t)) J_{-1}(\alpha s A_c(t)) \cdot \prod_{\substack{\ell=1 \\ (\ell \neq a, b, c)}}^m J_o(\alpha s A_\ell(t)) \quad (2.57)$$

A convergência de x_m , expressa por (2.39), para zero sugere que para m grande (2.57) possa ser aproximado por um outro processo

$$\hat{M}(a,b,-c,t) = \sum_{s=1}^L b_s J_1(\alpha s A_a(t)) J_1(\alpha s A_b(t)) J_{-1}(\alpha s A_c(t)) [p J_0(\alpha s A) + (1-p)]^{m-3} \quad (2.58)$$

Definindo-se agora

$$\epsilon_2(t) = M(a,b,-c,t) - \hat{M}(a,b,-c,t) \quad (2.59a)$$

ou seja

$$M(a,b,-c,t) = \hat{M}(a,b,-c,t) + \epsilon_2(t) \quad (2.59b)$$

verifica-se, de forma inteiramente análoga ao que foi feito para a portadora no item 2.3.1, que $\epsilon_2(t)$ e $\hat{M}(a,b,-c,t)$ são processos ortogonais, o que significa em particular que

$$E[|M(a,b,-c,t)|^2] = E[|\hat{M}(a,b,-c,t)|^2] + E[|\epsilon_2(t)|^2] \quad (2.60)$$

Mantendo-se ainda o mesmo critério usado no item 2.3.1, a aproximação sugerida em (2.58) será avaliada através do comportamento da quantidade

$$\eta_2 = \frac{E[|\epsilon_2(t)|^2]}{E[|\hat{M}(a,b,-c,t)|^2]} \quad (2.61)$$

para diferentes valores de m e do "back-off" b .

A tabela 2.3 apresenta alguns resultados obtidos para η_2 , para a TWT do INTELSAT IV, com $p=0.4$

$\begin{matrix} m \\ b(\text{dB}) \end{matrix}$	50	100	200	400	800	1000
-1.0	7.34	3.64	1.81	0.90	0.45	0.36
-4.0	3.32	1.66	0.84	0.42	0.21	0.19
-8.0	2.50	1.26	0.60	0.29	0.10	0.28
-12.0	1.32	0.67	0.34	0.18	0.17	0.38

Tabela 2.3 - Valores percentuais de η_2 em função de m e do "back-off de entrada b

Note-se que para $m \geq 200$ o valor de η_2 é menor que 1,81% para todos os valores de "back-off", decrescendo rapidamente com o aumento de m .

Desta forma será assumido ao longo desta seção que $M(a, b, -c, t)$ pode ser substituído por $\hat{M}(a, b, -c, t)$ dado por (2.58).

Na análise da interferência, provocada pela intermodulação, na r -ésima portadora, serão de interesse os produtos do tipo $\omega_o + (\omega_a + \omega_b - \omega_c)$ que caem exatamente sobre esta portadora, ou seja aqueles cuja frequência central coincide com a frequência da portadora, sendo portanto caracterizados por

$$\omega_a + \omega_b - \omega_c = \omega_r \quad (2.62)$$

A função autocorrelação de um produto desta forma é obtida a partir da expressão de $e_o(a, b, -c, t)$ dada por (2.56) e

pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
 R(a,b,-c,\tau) &= E \left[e_o(a,b,-c,t) e_o(a,b,-c,t+\tau) \right] \\
 &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ E \left[\tilde{e}_o(a,b,-c,t) \tilde{e}_o(a,b,-c,t+\tau) \right] + \right. \\
 &\quad \left. + E \left[\tilde{e}_o^*(a,b,-c,t) \cdot \tilde{e}_o(a,b,-c,t+\tau) \right] \right\} \quad (2.63)
 \end{aligned}$$

Devido as condições de independência estatística assumidas na seção 2.3, pode-se colocar em evidência no primeiro valor esperado entre chaves o fator

$$E[\exp(j2\lambda_a + j2\lambda_b - j2\lambda_c)] = E[e^{j2\lambda_a}] \cdot E[e^{j2\lambda_b}] \cdot E[e^{-j2\lambda_c}] \quad (2.64)$$

e como

$$E[e^{jn\lambda}] = 0$$

para λ uniformemente distribuído em $[0, 2\pi)$ e todo n inteiro, a expressão (2.63) reduz-se a

$$R(a,b,-c,t) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ E \left[\tilde{e}_o^*(a,b,-c,t) \cdot \tilde{e}_o(a,b,-c,t+\tau) \right] \right\} \quad (2.65)$$

ou, utilizando (2.62) e assumindo-se a aproximação para $M(a,b,-c,t)$ dada por (2.58)

$$R(a,b,-c,\tau) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ e^{j(\omega_o + \omega_r)\tau} \sum_{s=1}^L \sum_{\ell=1}^L b_s^* b_\ell R_{s\ell}(a,b,-c,\tau) \right. \\ \left. \left[p J_0(\alpha s A) + (1-p) \right]^{m-3} \cdot \left[p J_0(\alpha \ell A) + (1-p) \right]^{m-3} \right\} \quad (2.66)$$

onde

$$R_{s\ell}(a,b,-c,\tau) = E \left[J_1(\alpha \ell A_a(t+\tau)) J_1(\alpha s A_a(t)) e^{j[\phi_a(t+\tau) - \phi_a(t)]} \right. \\ \cdot J_1(\alpha \ell A_b(t+\tau)) J_1(\alpha s A_b(t)) e^{j[\phi_b(t+\tau) - \phi_b(t)]} \\ \left. \cdot J_1(\alpha \ell A_c(t+\tau)) J_1(\alpha s A_c(t)) e^{-j[\phi_c(t+\tau) - \phi_c(t)]} \right] \quad (2.67)$$

Novamente, devido as condições de independência já citadas, (2.67) pode ser expressa como o produto de três valores esperados do tipo

$$E \left[J_1(\alpha \ell A_k(t+\tau)) J_1(\alpha s A_k(t)) e^{j[\phi_k(t+\tau) - \phi_k(t)]} \right] = \\ E_{A_k(t+\tau), A_k(t)} \left\{ E \left[J_1(\alpha \ell A_k(t+\tau)) J_1(\alpha s A_k(t)) e^{j[\phi_k(t+\tau) - \phi_k(t)]} \right]_{A_k(t+\tau), A_k(t)} \right\} = \\ = \sum_{j=0}^1 \sum_{i=0}^1 P \left[A_k(t+\tau) = jA, A_k(t) = iA \right] \cdot J_1(\alpha \ell jA) J_1(\alpha s iA) E \left[e^{j[\phi_k(t+\tau) - \phi_k(t)]} \right]_{A_k(t+\tau)=jA, A_k(t)=iA} = \\ = P_{11}(\tau) \cdot J_1(\alpha \ell A) J_1(\alpha s A) E \left[e^{j[\phi_k(t+\tau) - \phi_k(t)]} \right]_{A_k(t+\tau)=A, A_k(t)=A} \quad (2.68)$$

onde

$$P_{11}(\tau) = P[A_k(t+\tau) = A, A_k(t) = A], \quad k=a,b,c \quad (2.69)$$

Substituindo (2.68) em (2.67) obtêm-se, finalmente

$$R_{sl}(a,b,-c,\tau) = P_{11}^3(0) \cdot J_1(\alpha l A)^3 \cdot J_1(\alpha s A)^3 \cdot R_a(\tau) \cdot R_b(\tau) \cdot R_c^*(\tau) \quad (2.70)$$

com

$$R_k(\tau) = \frac{P_{11}(\tau)}{P_{11}(0)} \cdot E \left[e^{j[\phi_k(t+\tau) - \phi_k(t)]} \right]_{A_k(t+\tau)=A, A_k(t)=A} \quad k=a,b,c \quad (2.71)$$

Finalmente, a introdução de (2.70) em (2.66), observando-se que o valor esperado em (2.71) é uma quantidade real, conforme será verificado no capítulo 4, conduz à seguinte expressão para a função correlação

$$R(a,b,-c,\tau) = \frac{1}{2} \left| \sum_{s=1}^L b_s J_1(\alpha s A)^3 [p J_0(\alpha s A) + (1-p)]^{m-3} \right|^2 \cdot P_{11}^3(0) \cdot R_a(\tau) \cdot R_b(\tau) \cdot R_c(\tau) \cdot \cos[(\omega_o + \omega_r)\tau] \quad (2.72)$$

Desta forma a densidade espectral de potência de um produto de intermodulação pode ser expressa como

$$S(a,b,-c,\omega) = \frac{1}{2} P_l \left[\overline{S}_p(\omega - (\omega_o + \omega_r)) + \overline{S}_p(\omega + (\omega_o + \omega_r)) \right] \quad (2.73)$$

onde

$$P_I = R(a,b,-c,0) = \frac{1}{2} \left| \sum_{s=1}^L b_s J_1(\alpha s A)^3 \left[p J_0(\alpha s A) + (1-p) \right]^{m-3} \right|^2 P_{11}^3(0) \quad (2.74)$$

é a potência do produto de intermodulação e

$$\bar{S}_p(\omega) = \bar{S}_a * \bar{S}_b * \bar{S}_c(\omega) \quad (2.75)$$

com

$$\bar{S}_k(\omega) = \mathcal{F} [R_k(\tau)] = \mathcal{F} \left\{ \frac{P_{11}(\tau)}{P_{11}(0)} \cdot E \left[e^{j[\phi_k(t+\tau) - \phi_k(t)]} \right]_{A_k(t+\tau)=A, A_k(t)=A} \right\}$$

$$k = a, b, c \quad (2.76)$$

que será obtido no capítulo 4.

O conjunto formado por (2.73), (2.74), (2.75) e (2.76) constitui uma expressão para a densidade espectral de potência de um produto de intermodulação típico caindo no r -ésimo canal. O sinal interferente total neste canal será a soma dos $D_{m,r}$ produtos de intermodulação que se localizam neste canal. Será mostrado a seguir que quaisquer dois produtos com estas características são processos ortogonais, o que significa que a densidade espectral de potência total do sinal interferente reduz-se à soma das $D_{m,r}$ densidades espectrais correspondentes a cada produto.

Para mostrar isso, considere-se dois produtos particulares caindo no r -ésimo canal, ou seja, dois produtos $e_o(a,b,-c,t)$

e $e_o(a', b', -c', t)$ gerados pelos conjuntos $(\omega_a, \omega_b, \omega_c)$ e $(\omega_{a'}, \omega_{b'}, \omega_{c'})$ tais que

$$\omega_a + \omega_b - \omega_c = \omega_r$$

e

$$\omega_{a'} + \omega_{b'} - \omega_{c'} = \omega_r$$

A correlação entre os dois se escreve

$$E[e_o(a, b, -c, t) \cdot e_o(a', b', -c', t+\tau)] =$$

$$\frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ E[\tilde{e}_o(a, b, -c, t) \cdot \tilde{e}_o(a', b', -c', t+\tau)] + \right.$$

$$\left. E[\tilde{e}_o^*(a, b, -c, t) \tilde{e}_o(a', b', -c', t+\tau)] \right\} \quad (2.77)$$

Desta forma, de acordo com (2.56), (2.23) e com as condições de independência já citadas, é possível, no primeiro valor esperado entre chaves colocar em evidência o fator

$$E[\exp(\lambda_a + \lambda_b - \lambda_c + \lambda_{a'} + \lambda_{b'} - \lambda_{c'})]$$

que é sempre nulo e no segundo o fator

$$E[\exp(\lambda_{a'} - \lambda_a + \lambda_{b'} - \lambda_b + \lambda_c - \lambda_{c'})]$$

que só não será nulo se os conjuntos $(\omega_a, \omega_b, \omega_c)$ e $(\omega_{a'}, \omega_{b'}, \omega_{c'})$ forem formados pelos mesmos elementos. Desde que, com três quaisquer frequências centrais pode-se produzir somente um produto

caindo no r -ésimo canal, os dois conjuntos citados nunca podem ser idênticos. Portanto a correlação entre quaisquer dois produtos que caem no r -ésimo canal é nula, sendo os mesmos então processos ortogonais.

A densidade espectral de potência total do sinal interferente no r -ésimo canal pode agora ser escrita a partir de (2.73) como

$$S_{I,r}(\omega) = \frac{1}{2} P_I \sum_{i=1}^{D_{m,r}} \left[\bar{S}_{p_i}(\omega - (\omega_o + \omega_r)) + \bar{S}_{p_i}(\omega + (\omega_o + \omega_r)) \right] \quad (2.78)$$

onde P_I é expresso por (2.74) e $\bar{S}_{p_i}(\omega)$ por (2.75) e (2.76), com o índice i denotando um dos possíveis conjuntos de frequências $(\omega_a, \omega_b, \omega_c)$ tais que

$$\omega_a + \omega_b - \omega_c = \omega_r$$

2.3.3 - Razão Portadora - Ruído de Intermodulação em RF

A ortogonalidade entre os produtos implica, obviamente, que a potência média total de intermodulação é a soma das potências médias de cada produto ou seja

$$I = D_{m,r} P_I \quad (2.79)$$

e a razão portadora-ruído de intermodulação em RF, se escreve, através de (2.54), (2.79) e (2.74)

$$\left(\frac{C}{P}\right) = \frac{\left| \sum_{s=1}^L b_s J_1(\alpha s A) [p J_0(\alpha s A) + (1-p)]^{m-1} \right|^2}{D_{m,r} \cdot p^3 \cdot \left| \sum_{s=1}^L b_s J_1(\alpha s A)^3 [p J_0(\alpha s A) + (1-p)]^{m-3} \right|^2} \quad (2.80)$$

onde foi usado o fato de que

$$P_{11}(0) = P[A_{\lambda}(t) = A] \triangleq p \quad (2.81)$$

É conveniente lembrar que (2.54) e (2.74) são valores aproximados para a potência da portadora e do produto de intermodulação, devido às aproximações assumidas para $M(r,t)$ e $M(a,b,-c,t)$ visando facilitar a obtenção das densidades espectrais correspondentes.

Para um número de portadoras muito grande, novas aproximações podem ser feitas para a potência da portadora e da intermodulação em RF. Tais aproximações foram utilizadas por Youssefzadeh^[4] e baseiam-se no fato de que a amplitude normalizada dada por (2.36) torna-se pequena quando m é grande da mesma forma que o parâmetro $\alpha s A$ ($s \leq 10, \alpha = 0.6$).

Portanto, para valores elevados de m tem-se

$$J_0(\alpha s A) \approx 1$$

o que acarreta

$$x_s = 1 - J_0(\alpha s A) \ll 1 \quad (2.82)$$

e que permite a aproximação

$$p J_0(\alpha s A) + (1-p) = 1-p[1-J_0(\alpha s A)] = 1-p x_s \approx (1-x_s)^p = [J_0(\alpha s A)]^p \quad (2.83)$$

Introduzindo-se a aproximação dada por (2.83) em (2.80) e ainda considerando-se que para m grande

$$p(m-1) \approx pm$$

e

$$p(m-3) \approx pm$$

resulta

$$\left(\frac{C}{I}\right) = \frac{\left| \sum_{s=1}^L b_s J_1(\alpha s A) [J_0(\alpha s A)]^{pm} \right|^2}{D_{m,r} \cdot p^3 \left| \sum_{s=1}^L b_s [J_1(\alpha s A)]^3 [J_0(\alpha s A)]^{pm} \right|^2} \quad (2.84)$$

Esta expressão pode ainda ser reduzida, para efeito de cálculo, através do uso das aproximações de primeira ordem para as funções de Bessel

$$J_1(x) \approx \frac{x}{2} \quad (2.85a)$$

e

$$J_0(x) \approx e^{-\left(\frac{x}{2}\right)^2} \quad (2.85b)$$

para x suficientemente pequeno.

Utilizando-se as expressões dadas por (2.85) e a expressão (2.36) em (2.84), resulta

$$\left(\frac{C}{I}\right) = \frac{4m^2}{D_{m,r} \alpha^4 p b^2} \cdot \frac{\left| \sum_{s=1}^L b_s s \exp\left[-\frac{\alpha^2 b}{2} s^2\right] \right|^2}{\left| \sum_{s=1}^L b_s s \exp\left[-\frac{\alpha^2 b}{2} s^2\right] \right|^2} \quad (2.86)$$

que é a expressão encontrada por Youssefzadeh [4] para a razão portadora-ruído de intermodulação no caso de um grande número de portadoras.

Considerando-se agora o pior caso, isto é a razão portadora-ruído no canal central, e lembrando que para m grande a quantidade $D_{m,r}$ pode ser aproximada por

$$D_{m,r_c} \approx \frac{3}{8} m^2 \quad (2.87)$$

onde r_c é a ordem do canal central, obtem-se finalmente

$$\left(\frac{C}{I}\right) = \frac{1}{p} \cdot \frac{32}{3\alpha^4 b^2} \cdot \frac{\left| \sum_{s=1}^L b_s s \exp\left[-\frac{\alpha^2 b}{2} s^2\right] \right|^2}{\left| \sum_{s=1}^L b_s s^3 \exp\left[-\frac{\alpha^2 b}{2} s^2\right] \right|^2} \quad (2.88)$$

Para julgar as aproximações para a razão portadora-ruído de intermodulação, contidas em (2.80) e (2.88) seria necessário calcular exatamente essa razão. Por desenvolvimento análogo àquele que conduziu a (2.54), mas sem introduzir a aproximação (2.40) chega-se a

$$C = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^L \sum_{n=1}^L b_s b_n^* J_1(\alpha_s A) J_1(\alpha_n A) \left[p J_0(\alpha_s A) J_0(\alpha_n A) + (1-p) \right]^{m-1} \quad (2.89)$$

Da mesma forma, por desenvolvimento análogo àquele que conduziu a (2.74), mas sem introduzir a aproximação (2.58) chega-se a

$$P_I = \frac{1}{2} p^3 \sum_{s=1}^L \sum_{n=1}^L b_s b_n^* J_1(\alpha_s A)^3 J_1(\alpha_n A)^3 \left[p J_0(\alpha_s A) J_0(\alpha_n A) + (1-p) \right]^{m-3} \quad (2.90)$$

A razão portadora-ruído de intermodulação calculada a partir de (2.89) e (2.90) é comparada com as aproximações (2.80) e (2.88) nas tabelas 2.4 e 2.5, onde são apresentados os erros relativos correspondentes a cada uma das aproximações, para alguns valores do "back-off" de entrada b e do número m de portadoras.

$\begin{matrix} m \\ b \end{matrix}$	50	100	200	400	800	1000
-1.0	6.67	3.33	1.66	0.82	0.41	0.33
-4.0	2.86	1.43	0.72	0.36	0.18	0.16
-8.0	2.28	1.15	0.54	0.26	0.09	0.26
-12.0	1.23	0.62	0.31	0.17	0.16	0.16

Tabela 2.4 - Erro relativo (%) da aproximação (2.80) em função do "back-off" de entrada b e do número m de portadoras

$\begin{matrix} m \\ b \end{matrix}$	50	100	200	400	800	1000
-1.0	3.34	1.55	0.72	0.33	0.13	0.10
-4.0	5.96	2.94	1.47	0.74	0.37	0.29
-8.0	6.17	3.06	1.53	0.77	0.44	0.13
-12.0	6.88	3.48	1.78	0.86	0.37	0.22

Tabela 2.5 - Erro relativo (%) da aproximação (2.88) em função do "back-off" de entrada b e do número m de portadoras

Os resultados apresentados nas tabelas 2.4 e 2.5 mostram que, para efeito de cálculo da razão portadora-ruído de intermodulação, tanto a aproximação (2.80) quanto (2.88) conduzem a um erro relativo menor que 2% para valores de m maiores ou iguais a 200.

Em particular a aproximação (2.88) permite concluir que para valores elevados de m a razão portadora-ruído de intermodulação é essencialmente independente do número de portadoras. Isto permite a obtenção de uma curva única para a razão portadora-ruído de intermodulação versus "back-off" de entrada, para uma dada TWT.

A figura 2.2 apresenta a curva correspondente à TWT, cuja expansão em funções de Bessel é caracterizada pelos coeficientes dados na tabela 2.1.

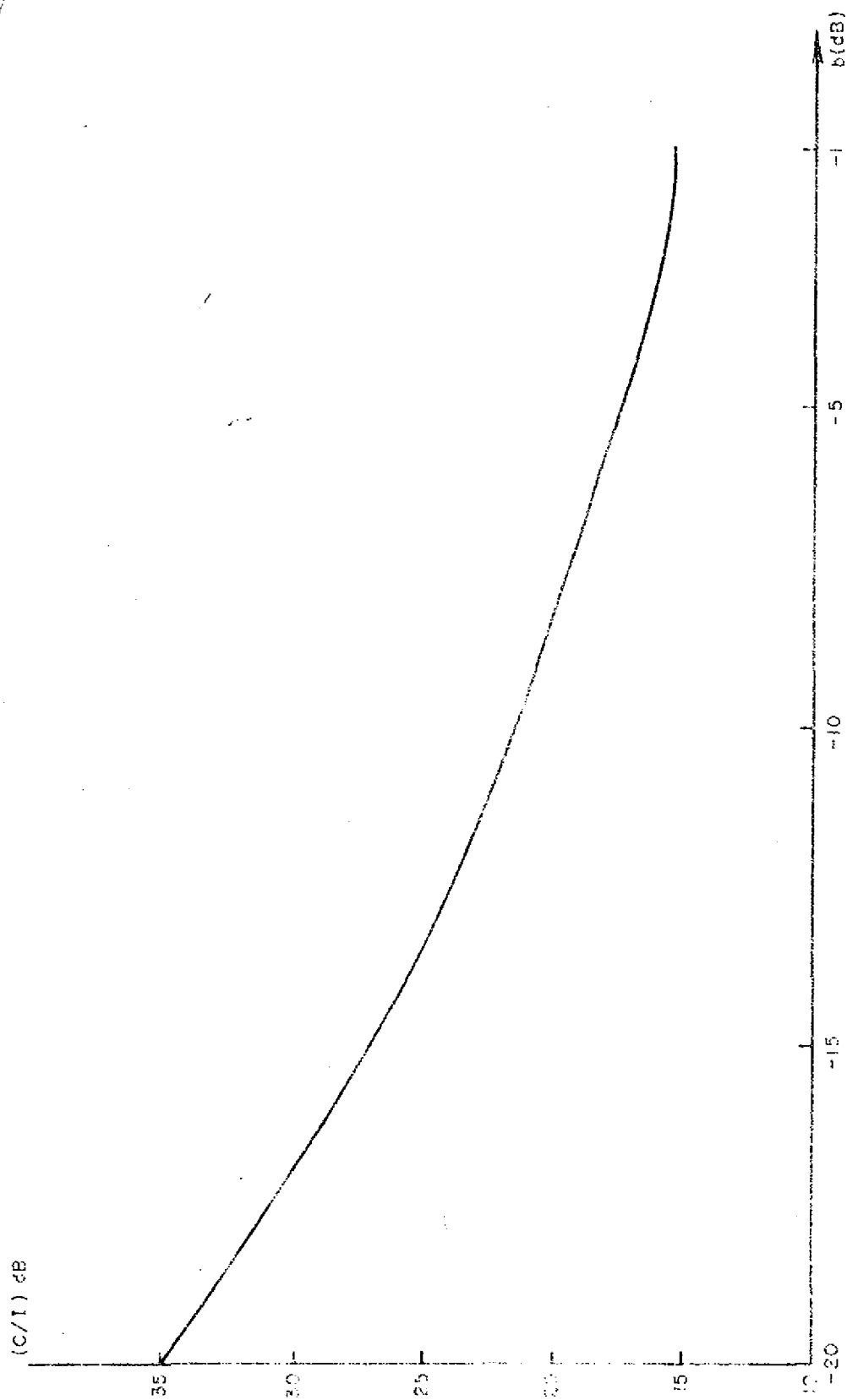


Figura 2.2 - Razão Portadora-Ruído de Intermodulação C/I versus "Back-off" de Entrada b para um grande Número de Portadoras - INTELSAT IV - TWT

CAPÍTULO 3

CARACTERIZAÇÃO DA INTERMODULAÇÃO EM BANDA BÁSICA

No capítulo anterior foram determinadas expressões para as densidades espectrais de potência em RF, de uma portadora SCPC/FM' ativada por voz e dos produtos de intermodulação de terceira ordem, gerados pela passagem de várias portadoras SCPC/FM através de um dispositivo não linear. Em particular, foram examinados os produtos de mesma frequência central que a portadora desejada. Tais produtos não serão, portanto, totalmente filtrados pelo filtro do receptor destinado a selecionar a portadora e irão produzir uma interferência no sinal demodulado, isto é, na banda básica.

O objetivo desse capítulo é, utilizando-se as densidades espectrais de potência em RF dos sinais desejado e interferente, determinar-se a densidade espectral da interferência na banda básica, ou seja, depois que o sinal composto de entrada tenha sofrido as operações de demodulação. De posse desta densidade espectral de potência, o ruído em banda básica pode ser obtida por simples integração.

A figura 3.1 apresenta um esquema simplificado do sistema de demodulação.

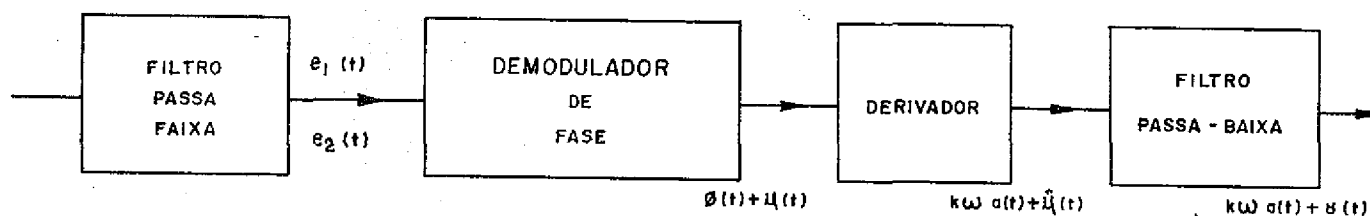


Figura 3.1 - Diagrama em Blocos do Receptor de FM

A análise que se segue é baseada no trabalho desenvolvido por Pontano, Fuenzalida e Chitre [5], e que trata da interferência de um sinal arbitrário passa-faixa sobre uma portadora modulada em ângulo.

3.1 - Interferência sobre uma Portadora Modulada em Ângulo

Seja $e_1(t)$ a portadora desejada e $e_2(t)$ o sinal passa-faixa interferente. Tais sinais podem ser caracterizados pela representação complexa utilizada para sinais passa-faixa.

$$e_1(t) = \text{Re} \{z_1(t)\} = \text{Re} \{V_1(t) e^{j\omega_1 t}\} \quad (3.1a)$$

$$e_2(t) = \text{Re} \{z_2(t)\} = \text{Re} \{V_2(t) e^{j\omega_2 t}\} \quad (3.1b)$$

onde $V_1(t)$ e $V_2(t)$ são as envoltórias complexas e ω_1 e ω_2 são as frequências centrais dos dois sinais.

As expressões (3.1a) e (3.1b) podem ainda ser colocadas na forma

$$e_i(t) = \text{Re} \{ A_i(t) e^{j\theta_i(t)} e^{j\omega_i t} \}, \quad i = 1, 2 \quad (3.2)$$

onde $A_i(t)$ é a envoltória real do sinal $e_i(t)$.

É suposto que os sinais estão definidos na entrada do demodulador de fase da portadora desejada, cuja amplitude $A_1(t)$ é na realidade uma constante que será representada por A_1 .

São assumidas ainda as seguintes hipóteses:

i) Os sinais moduladores $\theta_1(t)$ e $\theta_2(t)$ são representados por

$$\theta_1(t) = \phi_1(t) + \lambda \quad (3.3a)$$

$$\theta_2(t) = \phi_2(t) \quad (3.3b)$$

onde o processo $\phi_1(t)$ e a variável aleatória λ são estatísticamente independentes, com λ uniformemente distribuído entre 0 e 2π .

ii) Os sinais $e_1(t)$ e $e_2(t)$ são estatisticamente independentes.

O sinal na saída do demodulador de fase pode ser caracterizado por

$$x(t) = \phi_1(t) + \mu(t) \quad (3.4)$$

onde $\mu(t)$, o erro em relação à saída desejada, pode ser expresso por

$$\mu(t) = \frac{\alpha(t)}{z_1(t)} \quad (3.5a)$$

onde

$$\alpha(t) = \frac{z_1(t) + z_2(t)}{z_1(t)} \quad (3.5b)$$

Com estas considerações pode ser mostrado [5] que os processos $\phi_1(t)$ e $\mu(t)$ são ortogonais e que portanto a função autocorrelação do sinal $x(t)$ na saída do demodulador de fase é dada por

$$R_x(\tau) = R_{\phi_1}(\tau) + R_{\mu}(\tau) \quad (3.6)$$

Assim para determinar-se a densidade espectral da interferência na saída do demodulador de fase basta, o conhecimento de $R_{\mu}(\tau)$.

Esta função autocorrelação foi determinada em [5] tomando-se, em seguida, a transformada de Fourier para a obtenção da densidade espectral de potência. O resultado final para esta densidade espectral assume a forma

$$S_{\mu}(f) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{4m^2 A_1^4} \left[T_m(f-m \cdot \Delta F) + T_m(-f-m \cdot \Delta F) \right] \quad (3.7)$$

onde

$$\Delta F = f_2 - f_1 \quad (3.8)$$

$$T_m(f) = S_{V_2^m}(f) * S_{V_1^m}(-f) \quad (3.9)$$

e

$$S_{V_i^m}(f) = \mathcal{F} [R_{V_i^m}(\tau)] = \mathcal{F} \left\{ E [V_i^*(t) V_i(t+\tau)]^m \right\} \quad i=1,2 \quad (3.10)$$

No caso de interferência pequena, isto é, quando o sinal interferente é bastante fraco em presença da portadora desejada, é mostrado que a série em (3.7) pode ser aproximada pelo seu primeiro termo.

Portanto em condições de razão portadora - ruído alta, a densidade espectral da interferência reduz-se a

$$S_{\mu}(f) = \frac{1}{4 A_1^4} [T_1(f-\Delta F) + T_1(-f-\Delta F)] \quad (3.11)$$

com

$$T_1(f) = S_{V_2}(f) * S_{V_1}(-f) \quad (3.12)$$

e

$$S_{V_i}(f) = \mathcal{F} [R_{V_i}(\tau)] = \mathcal{F} \left\{ E [V_i^*(t) V_i(t+\tau)] \right\} \quad i = 1,2 \quad (3.13)$$

ou seja, $S_{V_i}(f)$ é a densidade espectral de potência da envoltória complexa do sinal $e_i(t)$.

3.2 - Obtenção da Densidade Espectral de Potência da Envoltória Complexa de Sinais Passa Faixa

Seja $e(t)$ um sinal passa-faixa aleatório, cuja densidade espectral de potência é conhecida, e sejam ω_1 e $2W$, respectivamente, a frequência central e a largura de faixa ocupada pelo sinal, como indicado na figura 3.2.

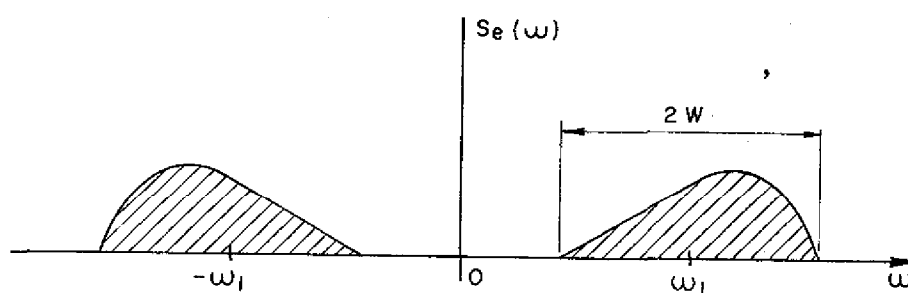


Figura 3.2 - Densidade Espectral de Potência de um Sinal Passa-Faixa

Pode ser mostrado [6] que um sinal desta forma pode sempre ser expresso como a soma de dois processos componentes

$$e(t) = e_c(t) \cos \omega_1(t) + e_s(t) \sin \omega_1(t) \quad (3.14)$$

onde $e_c(t)$ e $e_s(t)$ têm densidades espectrais de potência idênticas limitadas à frequência angular W e que são relacionadas à densidade espectral de potência de $e(t)$ através de

$$S_{e_c}(w) = S_{e_s}(w) = \begin{cases} S_e(w+\omega_1) + S_e(w-\omega_1) & \dots |w| \leq W \\ 0 & |w| > W \end{cases} \quad (3.15a)$$

Além disso, $S_{e_c e_s}(w)$, a densidade espectral de potência cruzada de $e_c(t)$ e $e_s(t)$, é dada por

$$S_{e_c e_s}(w) = -S_{e_s e_c}(w) = \begin{cases} j[S_e(w-\omega_1) - S_e(w+\omega_1)] & \dots |w| \leq W \\ 0 & |w| > W \end{cases} \quad (3.15b)$$

A expressão (3.14) pode ser escrita de forma equivalente

$$e(t) = \text{Re}\{V(t) e^{j\omega_1 t}\} \quad (3.16)$$

onde

$$V(t) = e_c(t) - j e_s(t) \quad (3.17)$$

é a envoltória complexa do sinal $e(t)$.

Utilizando-se (3.17), a função auto-correlação da envoltória complexa $V(t)$ se escreve

$$\begin{aligned} R_V(\tau) &= E[V^*(t) \cdot V(t+\tau)] = E[(e_c(t) + j e_s(t))(e_c(t+\tau) - j e_s(t+\tau))] \\ &= R_{e_c}(\tau) - j R_{e_c e_s}(\tau) + j R_{e_s e_c}(\tau) + R_{e_s}(\tau) \end{aligned} \quad (3.18)$$

Tomando a transformada de Fourier de ambos os membros de (3.18) obtêm-se para a densidade espectral de potência de $V(t)$

$$\begin{aligned} S_V(\omega) &= S_{e_s}(\omega) - j S_{e_c e_s}(\omega) + j S_{e_s e_c}(\omega) + S_{e_s}(\omega) = \\ &= 2S_{e_c}(\omega) - 2j S_{e_c e_s}(\omega) \end{aligned} \quad (3.19)$$

A introdução de (3.15a) e (3.15b) em (3.19) permite a obtenção do relacionamento entre as densidades espectrais de potência de $V(t)$ e $e(t)$

$$S_V(\omega) = \begin{cases} 4S_e(\omega - \omega_1) & \dots \quad |\omega| \leq W \\ 0 & |\omega| > W \end{cases} \quad (3.20)$$

Portanto a densidade espectral de potência da envoltória complexa de um sinal aleatório passa-faixa é obtida deslocando-se para a origem a porção da densidade espectral do sinal correspondente a frequências negativas multiplicada por 4. Para o sinal representado na figura 3.2, tal procedimento resultaria na figura 3.3.

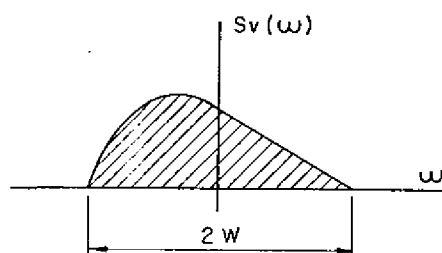


Figura 3.3 - Densidade Espectral de Potência da Envoltória Complexa do Sinal Representado na figura 3.2

3.3 - Ruído em Banda Básica Gerado pela Intermodulação

Os resultados apresentados nas seções 3.1 e 3.2 podem ser aplicados na determinação da interferência em banda básica provocada pela intermodulação.

O sinal desejado, isto é, a r -ésima portadora, é um sinal passa-faixa cuja densidade espectral de potência, as sumindo-se que a portadora está "ON", é fornecido por (2.53), (2.54), e (2.55).

O sinal interferente, formado pela soma dos pro dutos de intermodulação que caem no r -ésimo canal, é um sinal passa-faixa com densidade espectral de potência fornecida por (2.78), (2.74), (2.75) e (2.76).

Utilizando-se (2.37) e (2.40), o sinal desejado po de ainda ser colocado na forma apresentada em (3.2)

$$e_o(r,t) = \text{Re} \left\{ |\hat{M}(r,t)| e^{j[\phi_r(t) + \lambda_r + \alpha(t)]} \cdot e^{j(\omega_o + \omega_r)t} \right\} \quad (3.21)$$

onde $\alpha(t)$ é a fase de $\hat{M}(r,t)$

Entretanto, como já foi dito, é de interesse a caracterização da portadora assumindo-se que ela está "ON", o que acarreta

$$A_r(t) = A$$

em (2.40). Desta forma $\hat{M}(r,t)$ passa a não depender de t e o sinal desejado, doravante representado por $e_1(t)$, se escreve

$$e_1(t) = e_{o/ON}(r,t) = \text{Re} \left\{ A_1 e^{j[\phi_r(t) + \lambda_r + \alpha]} e^{j\omega_1 t} \right\} \quad (3.22)$$

onde

$$A_1 = \left| \sum_{s=1}^L b_s J_1(\alpha s A) [p J_0(\alpha s A) + (1-p)]^{m-1} \right| \quad (3.23)$$

e

$$\omega_1 = \omega_o + \omega_r$$

Como, de acordo com o que foi assumido na seção 2.3, λ_r é variável aleatória uniformemente distribuída entre 0 e 2π e independente do processo $\phi_r(t)$, a hipótese (i) da seção 3.1 está satisfeita. Para que os resultados desta seção possam, finalmente, ser aplicados ao caso da intermodulação é necessária ainda a verificação da hipótese (ii), ou seja, a condição de independência estatística entre os sinais desejado e interferente.

A priori, tal condição não é satisfeita, pois sendo o sinal interferente formado pela soma de todos os produtos que atendem à condição

$$\omega_a + \omega_b - \omega_c = \omega_r \quad (a \neq b \neq c)$$

existirão alguns em que a portadora desejada contribui para a formação do produto. Tais termos não serão, obviamente, independentes desta portadora. Entretanto, para um grande número de canais, a potência correspondente aos produtos não independentes da portadora desejada é desprezível em presença dos demais.

Para verificar isto, seja ω_{r_c} a frequência correspondente ao canal central, o que corresponde ao pior caso. Os únicos produtos, caindo no canal central e para os quais a portadora correspondente contribui, são caracterizados por

$$\omega_a + \omega_b - \omega_{r_c} = \omega_{r_c} \quad (3.24)$$

o que significa que as frequências ω_a e ω_b de portadoras que irão compor um produto desta forma devem satisfazer a condição

$$\frac{\omega_a + \omega_b}{2} = \omega_{r_c} \quad (3.25)$$

ou seja deverão se localizar simetricamente em relação ao canal central.

Desta forma, em m canais, o número de produtos em que ω_a e ω_b satisfazem a condição (3.25) é expresso por

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{m-2}{2} \dots m \text{ par} \\ \frac{m-1}{2} \dots m \text{ ímpar} \end{array} \right. \quad (3.26)$$

O número total de produtos que caem no canal central é, para m suficientemente grande, dado por (2.87). Comparando (2.87) com (3.26) e lembrando que todos os produtos possuem igual potência, conclui-se que, para m grande, a potência correspondente aos produtos que não satisfazem a condição de independência é desprezível em presença da potência dos demais. Isto permite dizer ainda que a parcela de ruído produzida na banda básica pelos produtos não independentes é desprezível em presença da parcela gerada pelos independentes. Desta forma a análise pode, com pequeno erro, ser restrita aos produtos independentes ou ainda considerar todos os produtos como sendo independentes da portadora desejada. Assim o sinal interferente torna-se estatisticamente independente do sinal desejado, ficando portanto satisfeita a condição (ii) da seção 3.1.

Uma vez atendidas as condições exigidas, as expressões obtidas na seção 3.1 podem agora ser utilizadas para a determinação da densidade espectral de potência em banda básica da interferência gerada pela intermodulação.

Será considerado aqui o caso de interferência pequena. Para tanto é necessária a obtenção das densidades espectrais de potência das envoltórias complexas dos sinais desejado e interferente na entrada do demodulador de fase.

Utilizando-se a expressão (2.53) para a densidade espectral da portadora e os resultados obtidos na seção 3.2, obtêm-se para a envoltória do sinal desejado

$$S_{V_1}(f) = 2 C \bar{S}_{r/ON}(f) \quad (3.27)$$

onde C é expresso por (2.54), $\bar{S}_{r/ON}(f)$ por (2.55) e tendo sido considerada desprezível a influência do filtro passa-faixa, na entrada do demodulador, sobre a densidade espectral da portadora.

Será mostrado no capítulo 4 que todos os produtos do tipo $\omega_a + \omega_b - \omega_c$ possuem a mesma forma espectral e portanto a densidade espectral de intermodulação em RF, dada por (2.78), pode ser escrita como

$$S_{I,r}(f) = \frac{1}{2} P_I D_{m,r} \left[\bar{S}_p(f-f_1) + \bar{S}_p(f+f_1) \right] \quad (3.28)$$

onde

$$f_1 = f_o + f_r$$

é a frequência da portadora desejada e $\bar{S}_p(f)$ é fornecida por (2.75) e (2.76).

Se a densidade espectral de intermodulação for muito espalhada, existe a possibilidade de produtos de intermodulação centrados em canais vizinhos ao canal desejado não serem completamente filtrados e portanto a densidade espectral do sinal interferente na entrada do demodulador de fase, doravante representado por $e_2(t)$, se escreve de forma geral como

$$S_{e_2}(f) = [S_{l,r}(f) + S_{l,r+1}(f) + S_{l,r-1}(f)] |H(f)|^2 \quad (3.29)$$

onde $H(f)$ é a função de transferência do filtro passa-faixa centrado em f_1 .

A figura 3.4 ilustra a situação descrita.

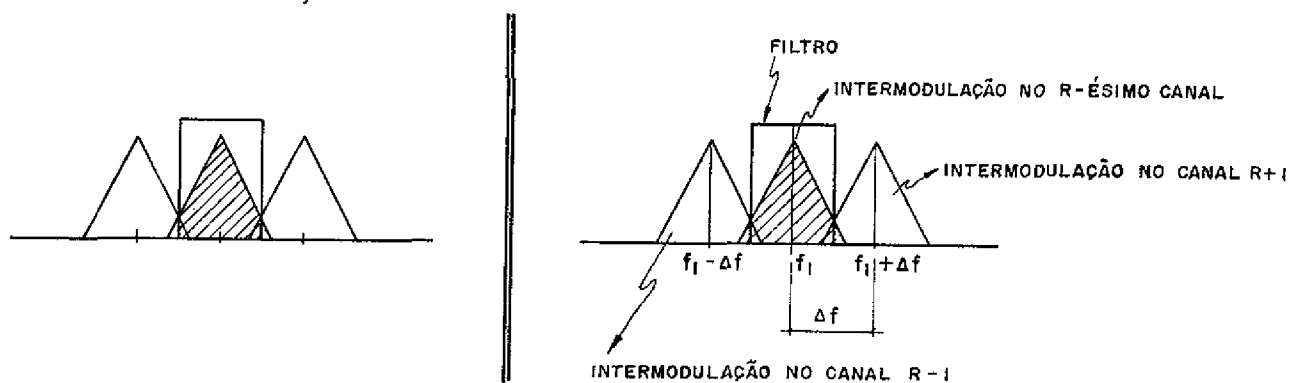


Figura 3.4 - Efeito sobre o r-ésimo canal dos produtos de intermodulação centrados em canais adjacentes

Utilizando-se (3.28), (3.29) e os resultados obtidos na seção 3.2, resulta para a densidade espectral de potência da envoltória complexa do sinal interferente, na entrada do demodulador de fase

$$S_{V_2}(f) = 2 P_1 \left[D_{m,r} \bar{S}_p(f) + D_{m,r+1} \bar{S}_p(f+\Delta f) + D_{m,r-1} \bar{S}_p(f-\Delta f) \right] \cdot |H_o(f)|^2 \quad (3.30)$$

onde $|H_o(f)|^2$ é a porção de $|H(f)|^2$ correspondente às frequências negativas, levada para a origem, e Δf é o espaçamento

entre as portadoras SCPC.

Para um grande número de canais verifica-se facilmente que

$$D_{m,r} \approx D_{m,r+1} \approx D_{m,r-1}$$

e portanto (3.30) pode ainda ser escrita

$$\begin{aligned} S_{V_2}(f) &= 2 P_I D_{m,r} \left[\bar{S}_p(f) + \bar{S}_p(f-\Delta f) + \bar{S}_p(f+\Delta f) \right] |H_o(f)|^2 \\ &= 2 I \left[\bar{S}_p(f) + \bar{S}_p(f-\Delta f) + \bar{S}_p(f+\Delta f) \right] |H_o(f)|^2 \end{aligned} \quad (3.31)$$

onde I é a potência de intermodulação em RF no r -ésimo canal.

Finalmente, utilizando-se (3.11), (3.12), (3.27) e (3.31), obtêm-se para a densidade espectral de interferência na saída do demodulador de fase

$$S_\mu(f) = \frac{1}{A_1^4} \text{C.I.} \left[S_o(f) * \bar{S}_{r/ON}(-f) + S_o(-f) * \bar{S}_{r/ON}(f) \right] \quad (3.32)$$

onde

$$S_o(f) = \left[\bar{S}_p(f) + \bar{S}_p(f-\Delta f) + \bar{S}_p(f+\Delta f) \right] |H_o(f)|^2 \quad (3.33)$$

As expressões de A_1 dada por (3.23) e C dado por (2.54) permitem escrever

$$A_1^2 = 2C$$

ou

$$A_1^4 = 4C^2$$

o que acarreta

$$S_{\mu}(f) = \frac{1}{4(C/I)} \left[S_o(f) * \overline{S}_{r/ON}(-f) + S_o(-f) * \overline{S}_{r/ON}(f) \right] \quad (3.34)$$

De acordo com o esquema do demodulador apresentado na figura 3.1, o sinal resultante na saída do demodulador de fase passa pelo derivador, sendo então recuperado o sinal modulador $k_{\omega} a(t)$ acrescido de um ruído $\dot{\mu}(t)$. A densidade espectral de potência desta parcela é obtida por:

$$S_{\dot{\mu}}(\omega) = S_{\mu}(\omega) |j\omega|^2$$

ou

$$S_{\dot{\mu}}(f) = S_{\mu}(f) (2\pi f)^2 \quad (3.35)$$

Este ruído é parcialmente filtrado pelo filtro passa-baixa para frequências de áudio, resultando finalmente um ruído $\gamma(t)$ com densidade espectral de potência

$$S_{\gamma}(f) = S_{\dot{\mu}}(f) \cdot |H_V(f)|^2 = (2\pi f)^2 S_{\mu}(f) \cdot |H_V(f)|^2 \quad (3.36)$$

onde $H_v(f)$ é a função de transferência do filtro de áudio.

A potência do sinal desejado após a demodulação é expressa por

$$P_s = E[k_\omega^2 a^2(t)] = E[\Delta\omega^2(t)] = d_\omega^2 \quad (3.37)$$

onde d_ω^2 é o valor médio quadrático do desvio instantâneo de frequência angular da portadora (em rad^2/s^2) ou ainda

$$P_s = (2\pi)^2 d_f^2 \quad (3.38)$$

onde d_f^2 é agora o desvio médio quadrático de frequências em Hz^2/s^2 .

As expressões (3.38) e (3.36) permitem a determinação da razão sinal-ruído de intermodulação no canal de voz (NPR).

$$\text{NPR} = \frac{P_s}{P_Y} = \frac{(2\pi)^2 d_f^2}{\int_{-\infty}^{\infty} S_Y(f) df} = \frac{d_f^2}{\int_{-\infty}^{\infty} f^2 S_\mu(f) \cdot |H_v(f)|^2 df} \quad (3.39)$$

A quantidade d_f^2 pode ser obtida diretamente da densidade espectral da envoltória complexa da portadora desejada. Para mostrar este fato, será utilizada a caracterização da portadora SCPC assumindo-se que esta portadora está ON, fornecido por (3.22), onde

$$V_1(t) = A_1 e^{j[\phi_r(t) + \lambda_r + \alpha]} \quad (3.40)$$

é a envoltória complexa do sinal desejado, cuja densidade espectral de potência $S_{V_1}(f)$ é fornecida por (3.27).

A derivada de $V_1(t)$, representada por $\dot{V}_1(t)$ se escreve

$$\dot{V}_1(t) = j A_1 \frac{d\phi_r(t)}{dt} e^{j[\phi_r(t) + \lambda_r + \alpha]} \quad (3.41)$$

e sua potência média

$$P_{\dot{V}_1} = E[\dot{V}_1(t) \cdot \dot{V}_1^*(t)] = A_1^2 E\left[\left(\frac{d\phi_r(t)}{dt}\right)^2\right] \quad (3.42)$$

ou, lembrando que

$$\frac{d\phi_r(t)}{dt} = k_\omega a_r(t)$$

vem

$$P_{\dot{V}_1} = A_1^2 E[k_\omega^2 a_r^2(t)] = A_1^2 d_\omega^2 = A_1^2 (2\pi)^2 d_f^2 \quad (3.43)$$

Desta forma

$$d_f^2 = \frac{1}{A_1^2 (2\pi)^2} \cdot P_{\dot{V}_1} \quad (3.44)$$

Mas $P_{\dot{V}_1}$ pode ainda ser determinada através da densidade espectral de $\dot{V}_1(t)$

$$P_{\dot{V}_1} = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\dot{V}_1}(f) df = (2\pi)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} f^2 S_{V_1}(f) df \quad (3.45)$$

A introdução de (3.45) em (3.44) permite escrever

$$d_f^2 = \frac{1}{A_1^2} \int_{-\infty}^{+\infty} f^2 S_{V_1}(f) df \quad (3.46)$$

ou ainda utilizando-se (3.27) e lembrando que

$$A_1^2 = 2C$$

tem-se

$$d_f^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} f^2 \bar{S}_{r/ON}(f) df \quad (3.47)$$

É conveniente lembrar que toda a análise é feita assumindo-se que a portadora está ativa ("ON"). Como, no sistema SCPC ativado por voz, a atividade da portadora está diretamente relacionada com a atividade do sinal de voz $a_r(t)$, a quantidade d_f^2 obtida em (3.47) é diretamente proporcional à potência do sinal $a_r(t)$, dado que este sinal está em um período ativo. Na realidade esta é a potência de interesse.

CAPÍTULO 4

OBTENÇÃO DAS DENSIDADES ESPECTRAIS DE POTÊNCIA DA PORTADORA E DOS
PRODUTOS DE INTERMODULAÇÃO

As expressões desenvolvidas no capítulo anterior e que conduzem à determinação da NPR em (3.39) dependem fundamentalmente do conhecimento das densidades espectrais $\bar{S}_{r/ON}(\omega)$ e $\bar{S}_k(\omega)$, definidas por (2.55) e (2.76), respectivamente. Neste capítulo são relacionadas, inicialmente, as expressões para estas densidades espectrais quando referidas a uma mesma portadora, isto é, $\bar{S}_{k/ON}(\omega)$ e $\bar{S}_k(\omega)$ (k genérico). Esta última é então, relacionada a medidas da densidade espectral de potência de portadoras SCPC/FM ativadas por voz, disponíveis em [7]. Finalmente é verificado que $\bar{S}_k(\omega)$ independe de k , ou seja independe da particular portadora.

Para que tais relacionamentos sejam possíveis, a seção 4.1 apresenta uma caracterização mais completa para a amplitude de uma portadora SCPC/FM ativada por voz.

4.1 - Caracterização da Amplitude de uma Portadora SCPC/FM Ativada por Voz

A amplitude $A(t)$ de cada portadora pode assumir os valores A ou 0 , dependendo da presença ou ausência de voz ativa. Entretanto é conveniente que a caracterização do estado do sinal de voz, correspondente a cada portadora, faça distinção entre pausas intersilábicas e pausas de escuta. Desta forma, o estado da amplitude $A(t)$ é melhor caracterizado através de um

processo auxiliar $x(t)$ possuindo 3 estados $\{x(t)=0, x(t)=1, x(t)=2\}$, definidos através de

$$\{\omega : x(t)=0\} = \{\omega : A(t)=0, \text{ pausa de escuta em } t\}$$

$$\{\omega : x(t)=1\} = \{\omega : A(t)=A\}$$

$$\{\omega : x(t)=2\} = \{\omega : A(t)=0, \text{ pausa intersilábica em } t\}$$

Foi assumido ao longo desta seção que o processo $x(t)$ pode ser modelado como um processo de Markov a tempo contínuo. Isto implica que o tempo de permanência do processo em cada estado é uma variável aleatória exponencial com média

$$\frac{1}{\lambda_i} \quad (i = 0, 1, 2) \quad (4.1)$$

Como transições entre os estados 0 e 2 não ocorrem o diagrama de estados correspondente ao processo $x(t)$ resume-se ao mostrado na figura 4.1.

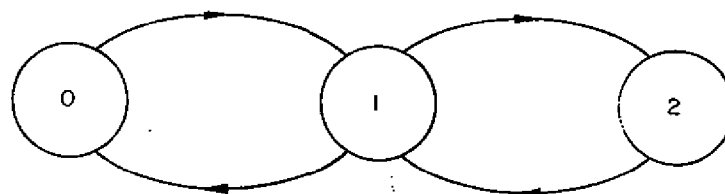


Figura 4.1 - Diagrama de estados do processo de Markov $x(t)$

A matriz \underline{P} das probabilidades de transição associadas a este processo se escreve

$$\underline{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ p_{10} & 0 & p_{12} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

onde p_{ij} é a probabilidade de que, dado que o processo ocupava o estado i e que ocorreu uma transição, esta transição tenha sido para o estado j . Os elementos de uma linha da matriz \underline{P} devem somar 1, portanto

$$p_{12} = 1 - p_{10} \quad (4.3)$$

Valores para λ_i ($i=0,1,2$) e para p_{10} são apresentados no Apêndice B. A seção 4.2 desenvolve a expressão da densidade espectral de potência da envoltória complexa de uma portadora SCPC/FM, permitindo o relacionamento entre $\bar{S}_{k/ON}(\omega)$ e $\bar{S}_k(\omega)$.

4.2 - Relacionamento entre as Densidades Espectrais $\bar{S}_{k/ON}(f)$ e $\bar{S}_k(f)$

As expressões (2.26) e (2.23) permitem escrever a envoltória complexa $V_k(t)$ de uma portadora SCPC/FM, genérica, na forma

$$V_k(t) = A_k(t) e^{j\phi_k(t)} \cdot e^{j\lambda_k} \quad (4.4)$$

A função autocorrelação desta envoltória complexa é então

$$R_{V_k}(\tau) = E[V_k^*(t) V_k(t+\tau)] = E\left[A_k(t) A_k(t+\tau) e^{j\phi_k(t+\tau)} e^{-j\phi_k(t)}\right] \quad (4.5)$$

ou ainda, utilizando-se valores esperados condicionais e (2.69)

$$\begin{aligned} R_{V_k}(\tau) &= A^2 P[A_k(t) = A, A_k(t+\tau) = A] \cdot E\left[e^{j\phi_k(t+\tau)} e^{-j\phi_k(t)} \middle| A_k(t) = A, A_k(t+\tau) = A\right] = \\ &= A^2 P_{11}(\tau) \cdot E\left[e^{j\phi_k(t+\tau)} e^{-j\phi_k(t)} \middle| A_k(t) = A, A_k(t+\tau) = A\right] \quad (4.6) \end{aligned}$$

Definindo-se o evento

$$B_{2n}(t, t+\tau) = \{\omega : x_k(t) = 1 \text{ e houve } 2n \text{ transições em } (t, t+\tau]\} \quad n=0, 1, 2, \dots \quad (4.7)$$

resulta que

$$\{\omega : A_k(t) = A, A_k(t+\tau) = A\} = \bigcup_{n=0}^{\infty} B_{2n}(t, t+\tau) \quad (4.8)$$

onde os eventos da união são disjuntos. Portanto,

$$R_{V_k}(\tau)$$

pode ser escrito

$$R_{V_k}(\tau) = A^2 P_{11}(\tau) \sum_{n=0}^{\infty} E \left[e^{j\phi_k(t+\tau)} e^{-j\phi_k(t)} \middle| A_k(t)=A, A_k(t+\tau)=A, B_{2n}(t, t+\tau) \right] \cdot P[B_{2n}(t, t+\tau) | A_k(t) = A, A_k(t+\tau) = A] \quad (4.9)$$

ou, em vista de (4.8)

$$R_{V_k}(\tau) = A^2 E \left[e^{j\phi_k(t+\tau)} e^{-j\phi_k(t)} \middle| B_0(t, t+\tau) \right] \cdot P[B_0(t, t+\tau)] + A^2 \sum_{n=1}^{\infty} E \left[e^{j\phi_k(t+\tau)} e^{-j\phi_k(t)} \middle| B_{2n}(t, t+\tau) \right] \cdot P[B_{2n}(t, t+\tau)] \quad (4.10)$$

Dividindo-se ambos os membros de (4.10) por $A^2 P_{11}(0)$, aplicando a transformada de Fourier e lembrando que

$$P_{11}(0) = P[A_k(t)=A] = P[x_k(t)=1] = p$$

resulta, a partir de (4.6), (2.76) e (2.55), que

$$\bar{S}_k(\omega) = \bar{S}_{k/0N} * F_0(\omega) + \sum_{n=1}^{\infty} S_{2n} * F_{2n}(\omega) \quad (4.11)$$

onde

$$S_{2n}(\omega) = E \left[e^{j\phi_k(t+\tau)} e^{-j\phi_k(t)} \middle| B_{2n}(t, t+\tau) \right], \quad n=1, 2, \dots \quad (4.12)$$

e

$$F_{2n}(\omega) = \mathcal{F} [f_{2n}(\tau)], \quad n=0, 1, 2, \dots \quad (4.13)$$

com

$$f_{2n}(\tau) = P[B_{2n}(t, t+\tau) | x_k(t)=1] \quad n=0, 1, 2, \dots \quad (4.14)$$

Note-se

$$f_0(0) = 1 \quad (4.15)$$

$$f_{2n}(0) = 0 \quad \text{para } n \geq 1 \quad (4.16)$$

o que significa que a área sob a curva $F_{2n}(f)$ ($n \geq 1$) é nula. Além disso é mostrado no Apêndice B que tais curvas concentram-se em uma faixa de frequências muito baixas, sendo desprezíveis os valores acima de uma faixa B igual a 3,5 Hz. Isto implica que se a curva $S_{2n}(f)$ correspondente for também concentrada em uma faixa de frequências muito baixas, cada convolução no somatório em (4.11) estará também restrita a uma faixa muito pequena de frequências. Por outro lado se $S_{2n}(f)$ concentrar-se em uma faixa muito maior que $F_{2n}(f)$, ou seja $S_{2n}(f)$ pode ser considerada aproximadamente constante em uma faixa $2B$ igual a 7 Hz, então

$$\begin{aligned} S_{2n} * F_{2n}(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} S_{2n}(\alpha) \cdot F_{2n}(f-\alpha) d\alpha \cong \int_{f-B}^{f+B} S_{2n}(\alpha) F_{2n}(f-\alpha) d\alpha \cong \\ &\cong S_{2n}(f) \int_{f-B}^{f+B} F_{2n}(f-\alpha) d\alpha \end{aligned}$$

resultando então, de (4.16)

$$S_{2n} * F_{2n}(f) \cong 0 \quad (4.17)$$

As conclusões acima permitem escrever

$$\bar{S}_k(f) = \bar{S}_{k/ON} * F_o(f) \quad (4.18)$$

que é válida, exceto talvez para frequências muito baixas.

A expressão (4.18) pode ser ainda simplificada, pois (4.15) implica que $F_o(f)$ possui área unitária além de estar também restrita a frequências muito baixas. Na realidade, 99% da área sob a curva $F_o(f)$ está concentrada em uma faixa menor que 6.8 Hz (Apêndice B). Estes resultados associados ao fato de $\bar{S}_k(f)$ não ser restrita somente a frequências muito baixas - como será verificado quando relacionada às medidas disponíveis - permite que $F_o(f)$ possa ser substituído por um impulso de área unitária para efeito de determinação de sua convolução com $\bar{S}_{k/ON}(f)$. Portanto de (4.18) tem-se

$$\bar{S}_k(f) = \bar{S}_{k/ON} * F_o(f) \cong \bar{S}_{k/ON} * \delta(f) = \bar{S}_{k/ON}(f) \quad (4.19)$$

Esta aproximação é válida exceto, talvez, para frequências muito baixas.

Para possibilitar o conhecimento de $\bar{S}_k(f)$, e portanto de $\bar{S}_{k/ON}(f)$, a seção 4.3 apresenta a relacionamento entre esta densidade espectral de potência e medidas disponíveis.

4.3 Relacionamento entre $\bar{S}_k(f)$ e Medidas Disponíveis

A figura 4.2 apresenta medidas, realizadas em la boratório, da densidade espectral de potência de uma portadora SCPC/FM, ativada por voz e compreendendo vários níveis (em dBm0) do sinal modulador [7]. Estas medidas disponíveis corres pondem a sinais moduladores nos quais as pausas de escuta não são consideradas, incluindo portanto somente períodos ati vos de voz e pausas intersilábicas. Desta forma a densida de espectral de potência da envoltória complexa desta portado ra pode ser interpretada como a transformada de Fourier da função autocorrelação da envoltória complexa, condiciona da para cada intervalo $[t, t+\tau]$, à ocorrência do evento

$$C_o(t, t+\tau) = \{\omega : x_k(t) \neq 0 \text{ e o estado } 0 \text{ não é ocupado no intervalo } (t, t+\tau]\}$$

Assim, representando-se por $S_m(\omega)$ a densidade espectral medida, resulta

$$S_m(\omega) = \mathcal{F} \left\{ E \left[A_k(t) A_k(t+\tau) e^{j\phi_k(t+\tau)} e^{-j\phi_k(t)} \middle| C_o(t, t+\tau) \right] \right\} \quad (4.20)$$

ou ainda, utilizando-se valores esperados condicionais

$$S_m(\omega) = A^2 \mathcal{F} \left\{ E \left[e^{j\phi_k(t+\tau)} \cdot e^{-j\phi_k(t)} \middle| C_o(t, t+\tau), A_k(t)=A, A_k(t+\tau)=A \right] \cdot P \left[A_k(t)=A, A_k(t+\tau)=A \middle| C_o(t, t+\tau) \right] \right\} \quad (4.21)$$

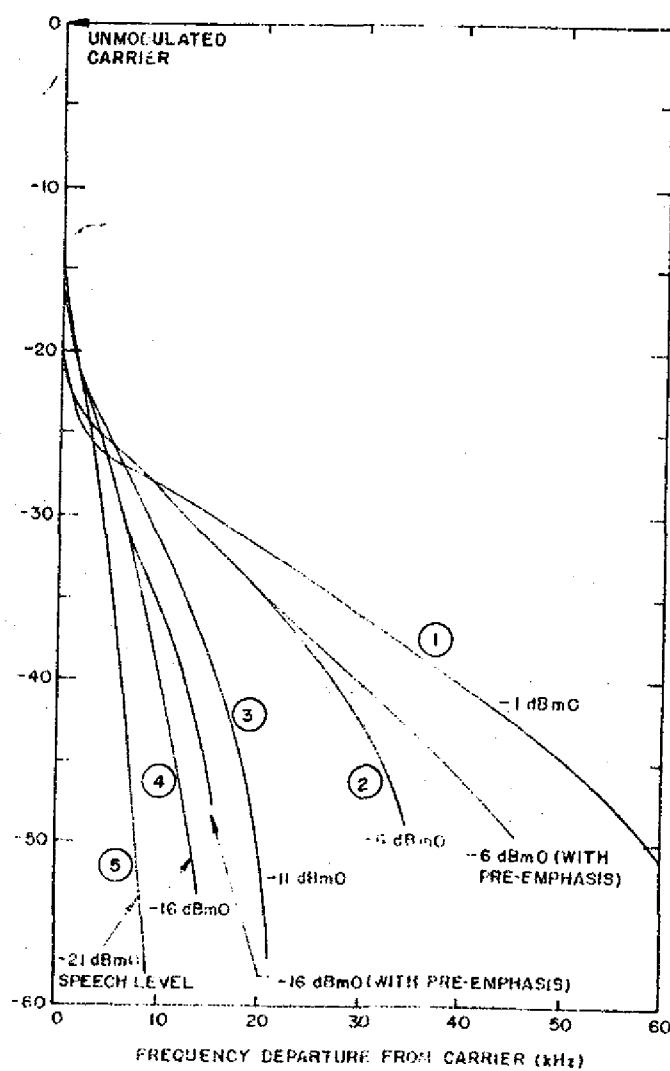


Figura 4.2 - Medidas de Densidades Espectrais de Potência de Portadoras SCPC/FM, Ativadas por Voz, obtidas de [7].

Desta forma

$$R_m(0) = A^2 \cdot P[A_k(t)=A | x_k(t) \neq 0] = A^2 \frac{P[A_k(t)=A]}{P[x_k(t) \neq 0]} \quad (4.22)$$

e portanto

$$\begin{aligned} \bar{S}_m(\omega) = & \frac{P[x_k(t) \neq 0]}{P[A_k(t)=A]} \cdot \int \left\{ E \left[e^{j\phi_k(t+\tau)} \cdot e^{-j\phi_k(t)} \middle| C_0(t, t+\tau), A_k(t)=A, A_k(t, t+\tau)=A \right] \right. \\ & \left. \cdot P[A_k(t)=A, A_k(t, t+\tau)=A | C_0(t, t+\tau)] \right\} \end{aligned} \quad (4.23)$$

onde

$$\bar{S}_m(\omega) = \frac{S_m(\omega)}{R_m(0)} \quad (4.24)$$

é a densidade espectral de potência medida, normalizada para área unitária.

Definindo-se agora o evento

$$C_n(t, t+\tau) = \{\omega : x_k(t) \neq 0 \text{ e o estado } 0 \text{ é ocupado } n \text{ vezes no intervalo } (t, t+\tau)\} \quad (4.25)$$

resulta que

$$\{\omega : A_k(t)=A, A_k(t+\tau)=A\} = \bigcup_{n=0}^{\infty} Z_n(t, t+\tau) \quad (4.26)$$

onde

$$Z_n(t, t+\tau) = \{\omega : A_k(t)=A, A_k(t+\tau)=A\} \cap C_n(t, t+\tau) \quad (4.27)$$

e os eventos na união são disjuntos. Portanto, de forma análoga à apresentada na seção 4.2, a expressão (4.6) pode ser escrita:

$$R_{V_k}(\tau) = A^2 P_{11}(\tau) \sum_{n=0}^{\infty} E \left[e^{j\phi_k(t+\tau)} \cdot e^{-j\phi_k(t)} \middle| A_k(t)=A, A_k(t+\tau)=A, Z_n(t, t+\tau) \right] \\ \cdot P \left[Z_n(t, t+\tau) \middle| A_k(t)=A, A_k(t+\tau)=A \right] \quad (4.28)$$

ou ainda, tendo em vista (4.27)

$$R_{V_k}(\tau) = A^2 P_{11}(\tau) \sum_{n=0}^{\infty} E \left[e^{j\phi_k(t+\tau)} \cdot e^{-j\phi_k(t)} \middle| A_k(t)=A, A_k(t+\tau)=A, C_n(t, t+\tau) \right] \\ \cdot P \left[C_n(t, t+\tau) \middle| A_k(t)=A, A_k(t+\tau)=A \right] \quad (4.29)$$

Isolando-se, agora, o termo em $n=0$, tem-se

$$R_{V_k}(\tau) = A^2 E \left[e^{j\phi_k(t+\tau)} \cdot e^{-j\phi_k(t)} \middle| A_k(t)=A, A_k(t+\tau)=A, C_0(t, t+\tau) \right] \cdot \\ \cdot P \left[A_k(t)=A, A_k(t+\tau)=A \middle| C_0(t, t+\tau) \right] \cdot P \left[C_0(t, t+\tau) \right] + \\ + A^2 \sum_{n=1}^{\infty} E \left[e^{j\phi_k(t+\tau)} \cdot e^{-j\phi_k(t)} \middle| A_k(t)=A, A_k(t+\tau)=A, C_n(t, t+\tau) \right] \cdot \\ \cdot P \left[C_n(t, t+\tau), A_k(t)=A, A_k(t+\tau)=A \right] \quad (4.30)$$

Dividindo-se ambos os membros de (4.30) por $A^2 P_{11}(0)$ e aplicando a transformada de Fourier resulta de (4.6), (2.76) e (4.23)

$$\bar{S}_k(\omega) = \bar{S}_m * \left\{ \frac{P[C_0(t, t+\tau)]}{P[x_k(t) \neq 0]} \right\} + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{S}_n * \tilde{F}_n(\omega) \quad (4.31)$$

onde

$$\tilde{S}_n(\omega) = \mathcal{F} \left\{ E \left[e^{j\phi_k(t+\tau) - j\phi_k(t)} \middle| A_k(t)=A, A_k(t+\tau)=A, C_n(t, t+\tau) \right] \right\} \quad n=1, 2, \dots \quad (4.32)$$

e

$$\tilde{F}_n(\omega) = \mathcal{F} \{ \tilde{f}_n(\tau) \} \quad , \quad n=1, 2, \dots \quad (4.33)$$

com

$$\begin{aligned} \tilde{f}_n(\tau) &= P \left[C_n(t, t+\tau), A_k(t+\tau)=A \middle| A_k(t)=A \right] \\ &= P \left[C_n(t, t+\tau), x_k(t+\tau)=1 \middle| x_k(t)=1 \right] \end{aligned} \quad (4.34)$$

Desta forma

$$\tilde{f}_n(0) = 0 \quad \text{para } n \geq 1 \quad (4.35)$$

o que significa que a área sob as curvas $\tilde{F}_n(\omega)$ ($n \geq 1$) é nula. O Apêndice B mostra que tais curvas são também concentradas em uma faixa de frequências muito baixas. Portanto a expressão (4.31)

e argumentos inteiramente análogos aos da seção 4.2 permitem es
crever a aproximação

$$\bar{S}_k(\omega) = \bar{S}_m * G(\omega) \quad (4.32)$$

onde

$$G(\omega) = \mathcal{F}[g(\tau)] \quad (4.33)$$

com

$$g(\tau) = \frac{P[C_o(t, t+\tau)]}{P[x_k(t) \neq 0]} \quad (4.34)$$

Assim como (4.18) a expressão (4.32) é válida exceto, talvez, pa-
ra frequências muito baixas.

Ainda resultados obtidos no Apêndice B, que mos-
tram que $G(\omega)$ está também restrita à frequências muito baixas,
associados ao fato de que

$$g(0) = 1 \quad (4.35)$$

e a argumentos novamente similares aos utilizados na seção 4.2,
permitem a simplificação de (4.32), resultando finalmente

$$\bar{S}_k(f) = \bar{S}_m(f) \quad (4.36)$$

exceto, talvez, para frequências muito baixas.

As aproximações (4.19) e (4.36) resultam do fato de que as transições entre os estados do processo considerado são associadas a frequências muito menores do que a faixa de desvios de frequência da portadora.

4.4 - Densidade Espectral de Potência de uma Portadora SCPC/FM Ativada por Voz, com Nível de Sinal Aleatório

A figura 4.2 mostra que a densidade espectral de uma portadora SCPC/FM depende do nível do sinal de voz. Desta forma as expressões (4.19) e (4.36) são melhor representadas através de

$$\bar{S}_{k/ON}(f, \sigma_k) = \bar{S}_k(f, \sigma_k) \quad (4.37a)$$

e

$$\bar{S}_k(f, \sigma_k) = \bar{S}_m(f, \sigma_k) \quad (4.37b)$$

onde foi explicitada a dependência dessas densidades espectrais com os respectivos níveis de voz, dados por

$$20 \log \sigma_k \text{ (dBm0)}$$

As medidas apresentam a densidade espectral de uma portadora SCPC/FM como sendo localmente simétrica em torno da frequência da portadora. Desta forma a densidade espectral de sua envoltória complexa é uma função par de f , acarretando que tanto \bar{S}_k e $\bar{S}_{k/ON}$ são funções pares de f , possuindo portanto transformadas inversas reais e confirmando o que havia sido

adiantado no capítulo 2.

De modo a conseguir a obtenção de densidades espectrais de potência correspondentes a níveis não disponíveis na figura 4.2, procurou-se relacionar tais densidades espectrais com uma outra tomada como referência, correspondente a um valor arbitrário σ_0 e para a qual dispunha-se de medidas. A relação

$$\bar{S}_k(f, \sigma_k) = \frac{\sigma_0}{\sigma_k} \bar{S}_m\left(f, \frac{\sigma_0}{\sigma_k}, \sigma_0\right) \quad (4.38)$$

foi analisada, comparando-se $\bar{S}_k(f, \sigma_k)$ obtida de (4.38) com a curva da figura 4.2 correspondente a este σ_k , isto é, $\bar{S}_m(f, \sigma_k)$. Esta comparação mostrou que estas duas curvas são apenas ligeiramente diferentes, independentemente de qual estava sendo obtida e qual havia sido tomada como referência. Além disso, cálculos da NPR baseados em densidades espectrais de potência medidas e nas correspondentes densidades, obtidas através de (4.38), diferiram de menos de 0.1 dB. Estes resultados são suficientes para permitir a utilização de (4.38) que, tendo em vista (4.37a) e (4.37b), permite a obtenção de \bar{S}_k e $\bar{S}_{k/ON}$ bastando para isso o conhecimento do nível do sinal de voz correspondente a k-ésima portadora.

A dependência das densidades espectrais de portadoras SCPC/FM com os respectivos níveis de voz exige que para a determinação da NPR, considerações sejam feitas sobre os níveis dos sinais correspondentes à portadora desejada e a cada portadora que forme um produto de intermodulação que interfira na desejada. Uma primeira consideração poderia ser

a de supor-se todas as portadoras com níveis iguais a um determinado nível médio. Esta parece ser, a priori, uma situação média razoável para ser considerada. Entretanto um enfoque mais preciso leva em conta que o nível com que o sinal de voz atinge o modulador é, ele próprio, uma variável aleatória. Para que isto seja feito basta observar-se a função autocorrelação dada por (2.76)

$$\bar{R}_k(\tau) = \frac{P_{11}(\tau)}{P_{11}(0)} E \left[e^{j[\phi_k(t+\tau) - \phi_k(t)]} \middle| A_k(t)=A, A_k(t+\tau)=A \right] \quad (4.39)$$

e que pode ainda ser escrita, utilizando-se valores esperados condicionais

$$\bar{R}_k(\tau) = \int_0^\infty p_{\sigma_k}(X) \frac{P_{11}(\tau)}{P_{11}(0)} E \left[e^{j[\phi_k(t+\tau, \sigma_k) - \phi_k(t, \sigma_k)]} \middle| A_k(t)=A, A_k(t+\tau)=A, \sigma_k=X \right] dX \quad (4.40)$$

onde $p_{\sigma_k}(X)$ é a função densidade de probabilidade do nível σ_k do sinal de voz e a notação $\phi_k(t, \sigma_k)$ explicita a dependência do processo $\phi_k(t)$ com σ_k . Tomando-se, agora, a transformada de Fourier em ambos os membros de (4.40) e lembrando que

$$\bar{S}_k(\omega, \sigma_k) = \int \left\{ \frac{P_{11}(\tau)}{P_{11}(0)} E \left[e^{j[\phi_k(t+\tau, \sigma_k) - \phi_k(t, \sigma_k)]} \middle| A_k(t)=A, A_k(t+\tau)=A, \sigma_k \right] \right\} \quad (4.41)$$

resulta

$$\bar{S}_k(\omega) = \int_0^\infty p_{\sigma_k}(X) \bar{S}_k(\omega, X) dX \quad (4.42)$$

ou ainda

$$\bar{S}_k(f) = \int_0^{\infty} p_{\sigma}(X) \bar{S}_k(f, X) dX \quad (4.43)$$

onde foi levado em conta que os níveis dos sinais moduladores de cada portadora são variáveis aleatórias idênticamente distribuídas, isto é,

$$p_{\sigma_k}(X) = p_{\sigma}(X) \quad (4.44)$$

para qualquer k .

Introduzindo-se (4.38) em (4.43) e através da mudança de variáveis

$$u = f \cdot \frac{\sigma_0}{X} \quad f \geq 0 \quad (4.45)$$

chega-se a

$$\bar{S}_k(f) = \int_0^{\infty} \frac{\sigma_0}{u} p_{\sigma}\left(f \frac{\sigma_0}{u}\right) \cdot \bar{S}_m(u, \sigma_0) du, \quad f \geq 0 \quad (4.46)$$

Note-se que (4.46) independe de k e portanto $\bar{S}_p(f)$ dado por (2.75) é ainda o mesmo para qualquer produto de intermodulação, como havia sido adiantado no capítulo 3.

A quantidade $20 \log \sigma$, que é o nível do sinal de voz em dBm0, pode ser modelada como uma variável aleatória Gaussiana com média m e desvio padrão β ^[7]. Desta forma, verifica-se facilmente que, σ possui função densidade log-normal,

podendo ser escrita como

$$p_{\sigma}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_1 \alpha} \exp \left[- \frac{(\ln \alpha - m')^2}{2 \sigma_1^2} \right] \quad (4.47)$$

onde

$$\sigma_1 = \frac{\ln 10}{20} \cdot \beta \quad (4.48)$$

e

$$m' = \frac{\ln 10}{20} m \quad (4.49)$$

A introdução de (4.47) em (4.46) conduz finalmente a

$$\bar{S}_k(f) = \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_1 f} \exp \left\{ - \frac{[\ln(f/u) - m_1]^2}{2 \sigma_1^2} \right\} S_m(u, \sigma_0) du \quad (4.50)$$

para $f \geq 0$ e qualquer k . Em (4.50)

$$m_1 = \frac{\ln 10}{20} (m - a) \quad (4.51)$$

onde

$$a = 20 \log \sigma_0 \quad (4.52)$$

é o nível em dBm0 do sinal correspondente à densidade espectral tomada como referência.

No final do capítulo 3 foi mostrado que, uma vez conhecida a densidade espectral de potência de uma portadora SCPC/FM, ativada por voz e na condição "ON", a potência correspondente ao sinal modulador em um período ativo é proporcional à integral, em todo eixo f , desta densidade espectral de potência normalizada e multiplicada por f^2 . Além disso, as seções (4.2) e (4.3) mostraram que a condição "ON" só modificaria a densidade espectral medida em frequências muito baixas. Desta forma, a potência média, em um período ativo, do sinal modulador correspondente a qualquer das densidades espectrais medidas é dada por

$$P_{AT} = k \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} f^2 \bar{S}_m(f) df \quad (4.53)$$

onde k só depende das constantes do modulador.

A potência média deste sinal, considerando-se os períodos ativos e não ativos é dada por

$$P_s = p \cdot P_{AT} \quad (4.54)$$

onde p é o fator de ativação de voz.

Desta forma, uma vez fixada uma das densidades espectrais medidas para ser usada como referência e conhecido o desvio rms do tom de teste, o nível em dBm0 do sinal correspondente à densidade espectral de referência se escreve

$$a = 10 \log \frac{P_s}{\text{Potência do tom de teste}} = 10 \log p \cdot \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} f^2 \bar{S}_m(f, \sigma_0) df}{d_{TT}^2} \quad (4.55)$$

onde d_{TT} é o desvio rms do tom de teste.

Valores usualmente atribuídos a m e β , a média e o desvio padrão de $20 \log \sigma$ (dBm0), são -20 dBm0 e 5.8 dB, respectivamente [7]. A figura 4.3 apresenta a densidade espectral de potência dada por (4.50) computada para esses valores de m e β e onde foi usado, como exemplo, um desvio rms do tom de teste de 9.47 kHz.

A figura 4.2 permite ainda observar-se que o uso de pré-ênfase altera a densidade espectral de potência da portadora somente para frequências onde os níveis de potência já estão bastante atenuados. Este fato sugere que a densidade espectral de potência dada por (4.50) pode ser usada também em sistemas que utilizem pré-ênfase. Neste caso, o efeito nos valores da NPR provocados pela utilização de ênfase, podem ser levados em conta somente através da influência do filtro de dê-ênfase no ruído de intermodulação.

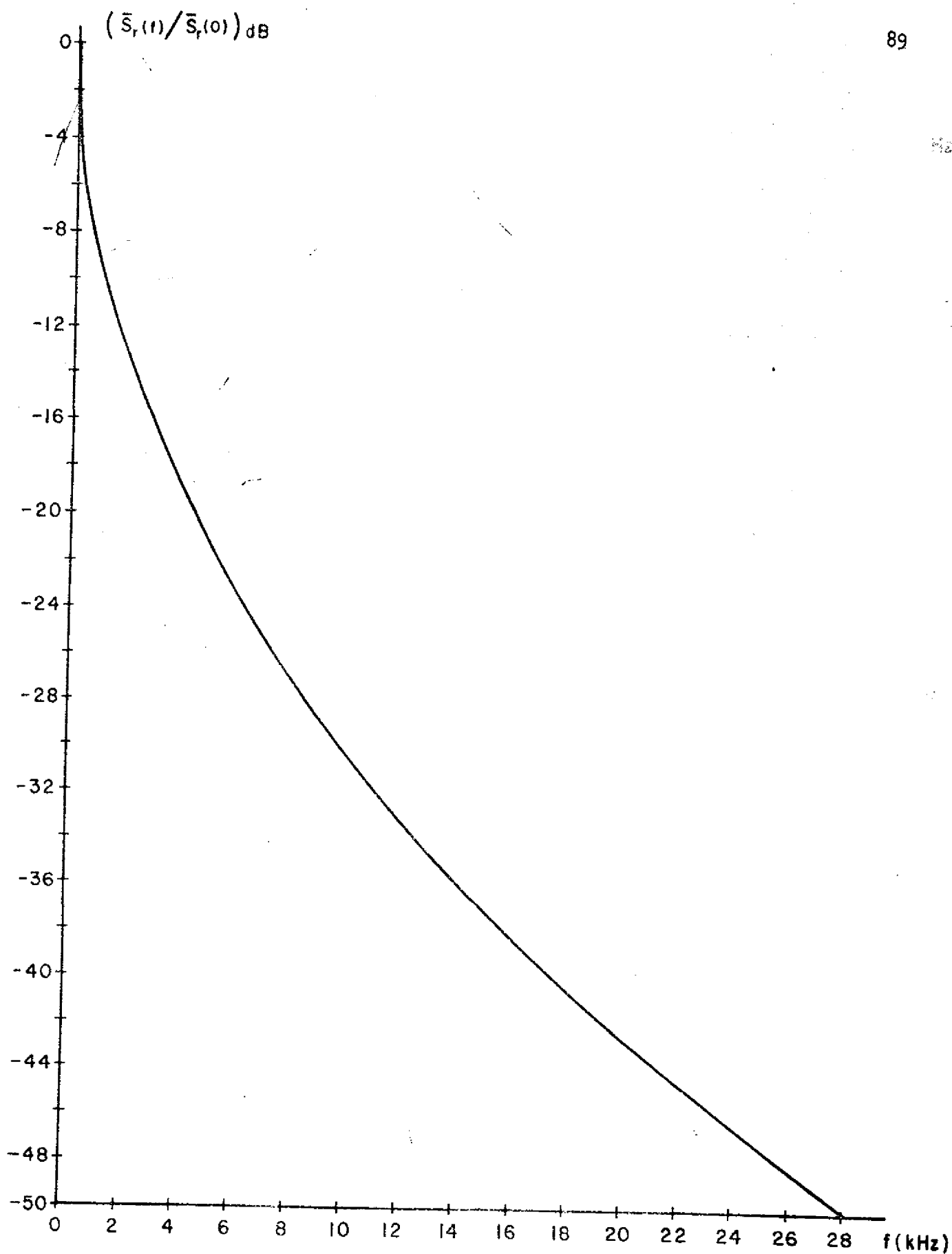


Figura 4.3 - Densidade Espectral de Potência de uma Portadora SCPC/FM, Ativada por Voz, com Nível de Sinal Aleatório ($m=-20$ dBm0; $\beta = 5,8$ dB; $d_{TT} = 9,47$ kHz).

CAPÍTULO 5

RESULTADOS NUMÉRICOS

No capítulo anterior foi mostrado que exceto, talvez para frequências muito baixas

$$\bar{S}_{k/ON}(f) = \bar{S}_k(f) = \bar{S}(f) \quad \text{para } \forall k \quad (5.1)$$

onde $\bar{S}(f)$ é uma função par de f dada por (4.50). Desta forma $\bar{S}_p(f)$ em (2.75) é também uma função par de f .

O filtro passa-faixa destinado a selecionar a portadora desejada é suposto ideal com faixa passante igual a B , portanto $|H_o(f)|^2$ e $S_o(f)$ em (3.33) são ainda funções pares de f .

As considerações acima e ainda as expressões (3.34), (3.39) e (3.47) permitem escrever a razão sinal-ruído de intermodulação no canal de voz na forma

$$\text{NPR(dB)} = \frac{C}{I} \text{ (dB)} + X \text{ (dB)} \quad (5.2)$$

onde

$$X(\text{dB}) = 10 \log \frac{2 \cdot \int_0^{\infty} f^2 \bar{S}(f) df}{\int_{f_i}^{f_s} f^2 (\bar{S} * S_o)(f) df} \quad (5.3)$$

com

$$S_o(f) = \begin{cases} \bar{S}_p(f) + \bar{S}_p(f-\Delta f) + \bar{S}_p(f+\Delta f) & \text{para } |f| \leq B/2 \\ 0 & \text{fora deste intervalo} \end{cases} \quad (5.4)$$

sendo Δf o espaçamento entre as portadoras e

$$\bar{S}_p = \bar{S} * \bar{S} * \bar{S}(f) \quad (5.5)$$

A expressão (5.3) supõe também um filtro de áudio ideal com frequências de corte inferior f_i e superior f_s .

Para a determinação de $\bar{S}(f)$ foi tomada como referência a curva 1 da figura 4.2, normalizada para área unitária, resultando para o parâmetro a definido em (4.55), com $p=0.4$

$$a(d_{TT}) = 10 \log 0.4 + 20 \log 14 - 20 \log d_{TT}(\text{kHz}) = 18.94 - 20 \log d_{TT}(\text{kHz}) \quad (5.6)$$

Desta forma, $\bar{S}(f)$ se escreve a partir de (4.50), (4.48) e (4.51)

$$\bar{S}(f) = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_1 f} \exp\left\{-\frac{[\ln(f/u) - m_1]^2}{2\sigma_1^2}\right\} \bar{S}_1(u) du \quad (5.7)$$

com

$$\sigma_1 = \frac{\ln 10}{20} \beta \quad (5.8)$$

$$m_1 = \frac{\ln 10}{20} (m - 18.94 + 20 \log d_{TT}(\text{kHz})) \quad (5.9)$$

onde \bar{S}_1 representa a densidade espectral correspondente à curva 1 da figura 4.2, normalizada para área unitária.

Note-se ainda que uma expressão analítica, pode ser obtida para o numerador do argumento do logaritmo em (5.3), pois de (5.7) vem

$$2 \int_0^{\infty} f^2 \bar{S}(f) df = 2 \int_0^{\infty} \bar{S}_1(u) \left[\int_0^{\infty} f^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1 f} \exp \left\{ -\frac{[\ln f - (\ln u + m_1)]^2}{2\sigma_1^2} \right\} df \right] du \quad (5.10)$$

A integral entre colchetes pode ser interpretada como o momento de 2ª ordem de uma variável aleatória log-normal de parâmetros σ_1 e $\ln u + m_1$, portanto

$$\begin{aligned} 2 \cdot \int_0^{\infty} f^2 \bar{S}(f) df &= 2 \cdot \int_0^{\infty} \bar{S}_1(u) e^{2(\ln u + m_1 + \sigma_1^2)} du = \\ &= e^{2(m_1 + \sigma_1^2)} \cdot 2 \cdot \int_0^{\infty} u^2 \bar{S}_1(u) du \end{aligned} \quad (5.11)$$

Utilizando-se agora o parâmetro a , definido em (4.55), e ainda (4.51), vem

$$\begin{aligned} 2 \cdot \int_0^{\infty} f^2 \bar{S}(f) df &= e^{2 \cdot \frac{m}{20} \ln 10} \cdot e^{2\sigma_1^2} \cdot e^{-\frac{a}{10} \ln 10} \cdot \frac{d_{TT}^2}{P} \cdot 10^{\frac{a}{10}} \\ &= \frac{d_{TT}^2}{P} \cdot e^{2(\sigma_1^2 + \frac{\ln 10}{20} m)} \end{aligned} \quad (5.12)$$

A expressão (5.2) mostra que, uma vez conhecido (C/I) , o valor de X resume os efeitos da intermodulação em sistemas SCPC/FM.

No capítulo 2 foi mostrado que, para uma dada não-linearidade e para um grande número de portadoras, a razão (C/I) depende somente do "back-off" de entrada b . Esta dependência foi mostrada na figura 2.2 para a TWT do INTELSAT IV.

Para a determinação dos valores de X foi realizado um programa que fazendo uso das expressões apresentadas neste capítulo obtêm tais valores, bastando para isso o conhecimento do seguinte conjunto de parâmetros:

- Δf - espaçamento, em frequência, das portadoras SCPC/FM
- B - faixa alocada para o sinal em RF
- d_{TT} - desvio rms do tom de teste
- m - média (em dBm0) da distribuição dos níveis de voz (valor usual de -20 dBm0)
- β - desvio padrão (em dB) da distribuição dos níveis de voz (valor usual de 5,8 dB)
- f_s e f_i - limites, superior e inferior, de frequência do canal de voz (assumidos aqui como sendo, respectivamente, 3400 Hz e 300 Hz).

Os valores que serão apresentados neste capítulo correspondem a sistemas SCPC/FM com separação entre portadoras de 22.5 kHz, 30 kHz e 45 kHz, assumindo-se para as correspondentes

faixas alocadas os valores 19 kHz, 25.3 kHz e 38 kHz, respectivamente.

Obviamente deve haver um compromisso entre o desvio rms d_{TT} do tom de teste e a faixa B alocada para a portadora. Será apresentado a seguir o critério utilizado aqui para a determinação destes desvios levando em conta, como foi dito no capítulo anterior, que o nível com que o sinal de voz atinge o modulador é uma variável aleatória.

Com a intenção de evitar-se sobredevio de frequência da portadora, é usual utilizar-se em sistemas SCPC/FM um limitador precedendo o modulador FM. Desta forma o desvio rms máximo do tom de teste pode ser determinado a partir de uma dada percentagem tolerável de usuários que sofram distorção por "clipping", produzido pelo limitador de amplitude de sinal.

Considerou-se que o sinal sofre distorção por "clipping" quando a limitação corresponder a um valor inferior a um nível 15 dB acima do valor rms do sinal, quando ativo. Neste caso foi verificado, estatisticamente, que o sinal sofrerá corte durante uma percentagem de tempo tal, que a degradação subjetiva introduzida torna-se excessiva^[7] caracterizando desta forma uma distorção por "clipping".

Portanto se L é o valor de amplitude máxima imposta pelo limitador, P_{AT} é a potência média do sinal considerando-se somente períodos ativos e P_{TT} é a potência do tom de teste,

o sinal sofrerá distorção sempre que P_{AT} for tal que

$$20 \log \frac{L}{\sqrt{P_{AT}}} \leq 15 \quad (5.13)$$

ou

$$20 \log \frac{L}{\sqrt{P_{TT}}} - 10 \log \frac{P_{AT}}{P_{TT}} \leq 15 \quad (5.14)$$

O segundo termo do lado esquerdo é o nível ativo, em dBm0, do sinal de voz, sendo portanto uma variável aleatória Gaussiana de média $(m - 10 \log p)$ e desvio padrão β . Representando-se por x esta variável, resulta de (5.14) que o sinal sofrerá distorção sempre que

$$z = x + 15 \geq 20 \log \frac{L}{\sqrt{P_{TT}}} = 20 \log \frac{\Delta f_{MAX}}{d_{TT}} = y \quad (5.15)$$

onde Δf_{MAX} é o desvio máximo de frequência imposto pelo limitador e z é agora variável aleatória Gaussiana de média

$$m_z = m - 10 \log p + 15 \quad (5.16)$$

e desvio padrão β .

Chamando-se de ϵ a máxima percentagem tolerável de usuários que sofrem distorção, resulta

$$P[z \geq y] \leq \epsilon \quad (5.17)$$

onde

$$P[z \geq y] = \int_y^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\beta} e^{-\frac{(z-m_z)^2}{2\beta^2}} dz = \text{erfc} \left[\frac{y-m_z}{\beta} \right]$$

Portanto (5.17) se escreve

$$\text{erfc} \left[\frac{y-m_z}{\beta} \right] \leq \epsilon \quad (5.19)$$

ou

$$y \geq \beta \cdot \text{erfc}^{-1}[\epsilon] + m_z \quad (5.20)$$

Utilizando-se o valor de y , dado em (5.15), vem

$$d_{TT} \leq \Delta f_{\text{MAX}} \cdot 10^{-(m_z + \beta \text{erfc}^{-1}[\epsilon])/20} \quad (5.21)$$

A regra de Carson permite relacionar a faixa alocada ao máximo desvio permissível, através da expressão

$$B = 2(\Delta f_{\text{MAX}} + f_s) \quad (5.22)$$

resultando finalmente

$$d_{TT} \leq \left(\frac{B-2f_s}{2} \right) \cdot 10^{-(m_z + \beta \text{erfc}^{-1}[\epsilon])/20} \quad (5.23)$$

onde f_s é a frequência superior do sinal de voz e m_z é dado por (5.16).

Na tabela 5.1 são apresentados valores de d_{TT} obtidos através de (5.23), utilizando-se para a média m da distribuição do nível de voz o valor -20dBm0 , para o desvio padrão β os valores 4,0 dB, 5,0 dB e 5,8 dB, que são representativos da faixa usual de valores de β [7], e para percentagens aceitáveis de usuários que sofrem distorção por "clipping" os valores 10%, 5% e 3%

ϵ		10%	5%	3%
$\beta = 5,8$	$B = 19$	2.91	2.27	1.95
	$B = 25,3$	4.42	3.45	2.96
	$B = 38$	7.45	5.82	4.99
$\beta = 5,0$	$B = 19$	3.21	2.65	2.32
	$B = 25,3$	4.97	4.01	3.52
	$B = 38$	8.35	6.67	5.93
$\beta = 4,0$	$B = 19$	3.80	3.20	2.88
	$B = 25,3$	5.76	4.85	4.37
	$B = 38$	9.71	8.19	7.36

Tabela 5.1 - Valores do desvio rms do tom de teste (kHz), para diferentes valores de desvio padrão β (dB) do nível de voz, da faixa B (kHz) alocada para a portadora e da percentagem tolerada (%) de usuários que sofrem distorção por "clipping".

A tabela 5.2 apresenta os valores de X correspondentes aos mesmos valores de β (dB), B (kHz) e desvio rms do tom de teste apresentados na tabela 5.1

ϵ		10%	5%	3%
$\beta = 5.8$	$B = 19$	-0.65	-1.35	-1.60
	$B = 25.3$	1.33	0.02	-0.60
	$B = 38$	5.20	3.19	2.10
$\beta = 5.0$	$B = 19$	-1.93	-1.65	-1.90
	$B = 25.3$	1.04	-0.17	-0.75
	$B = 38$	5.12	3.16	2.25
$\beta = 4.0$	$B = 19$	-1.30	-1.86	-2.11
	$B = 25.3$	0.94	-0.14	-0.69
	$B = 38$	5.20	3.72	2.80

Tabela 5.2 - Valores de X (dB) para diferentes valores do desvio padrão β (dB), da faixa alocada B (kHz) e desvios rms do tom de teste apresentados na tabela 5.1.

Nos resultados apresentados na tabela 5.2 não foram considerados os efeitos devidos à utilização de ênfase no sistema. Como já havia sido mencionado ao final do capítulo 4, este efeito pode ser levado em conta através da influência do filtro de de-ênfase no ruído de intermodulação em banda-básica. Desta forma a NPR em (5.2) pode ser colocada na forma geral

$$NPR(dB) = \frac{C}{I} (dB) + X(dB) + \Delta X(dB) \quad (5.24)$$

onde $X(\text{dB})$ é obtido de (5.3) e $\Delta X(\text{dB})$, a correção na NPR devida à utilização de ênfase no sistema, se escreve

$$\Delta X(\text{dB}) = \begin{cases} 0 & \dots \text{ em sistemas que não utilizem ênfase} \\ 10 \log \frac{\int_{f_i}^{f_s} f^2 [\bar{S} * \bar{S}_o(f)] df}{\int_{f_i}^{f_s} f^2 [\bar{S} * \bar{S}_o(f)] \cdot \frac{1}{|H_p(f)|^2} df} & \dots \text{ em sistemas com ênfase} \end{cases} \quad (5.25)$$

onde $H_p(f)$ é a característica de frequência do filtro de pré-ênfase. Foi utilizada aqui a característica mostrada na figura 5.1. Esta resposta de frequência está normalizada de tal forma que, para o sinal telefônico convencional adotado pelo CCIR [8], resultariam potências iguais para o sinal de voz antes e depois do filtro de pré-ênfase.

A tabela 5.3 mostra os valores de $\Delta X(\text{dB})$ correspondentes aos mesmos parâmetros considerados em conexão com a tabela 5.2.

Uma vez de posse da razão portadora-ruído de intermodulação, que não exige para sua determinação uma análise espectral, muitas vezes a razão sinal-ruído é calculada tratando-se tal ruído como um ruído térmico equivalente, ou seja, um ruído-térmico com uma potência igual à da intermodulação, após o filtro de RF. Como a densidade espectral de potência da

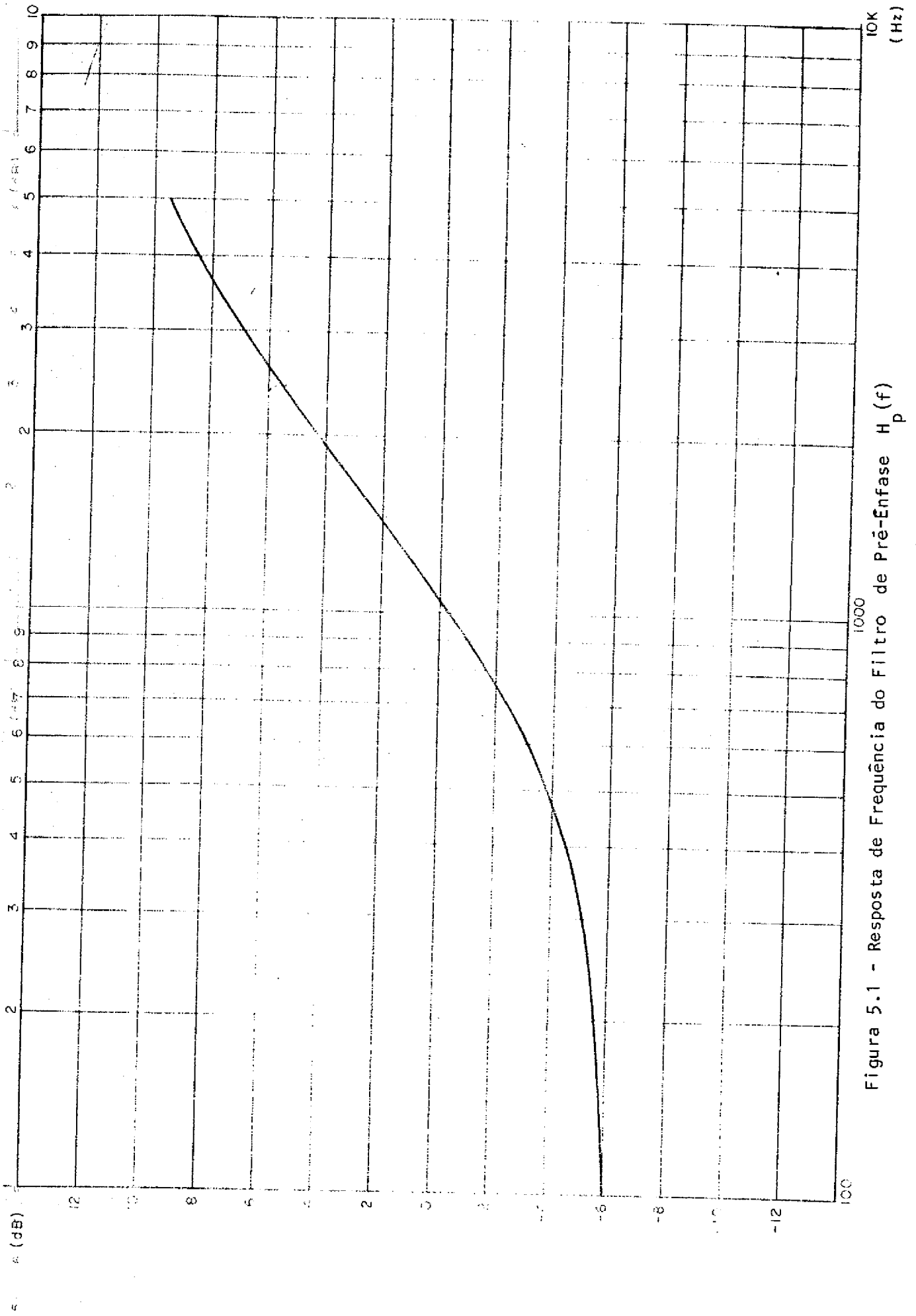


Figura 5.1 - Resposta de Frequência do Filtro de Pré-Ênfase $M_p(f)$

c		10%	5%	3%
$\beta = 5.8$	B = 19	2.21	1.45	0.94
	B = 25.3	3.21	2.70	2.25
	B = 38	4.00	3.68	3.43
$\beta = 5.0$	B = 19	2.36	1.68	1.21
	B = 25.3	3.36	2.89	2.56
	B = 38	4.12	3.85	3.67
$\beta = 4.0$	B = 19	2.57	2.03	1.65
	B = 25.3	3.57	3.22	2.97
	B = 38	4.26	4.09	3.96

Tabela 5.3 - Valores da correção $\Delta X(\text{dB})$, devida à ênfase, correspondentes aos valores de X apresentados na tabela 5.2.

intermodulação não é plana em RF, o valor da NPR em decibéis, resultante da aplicação da expressão correspondente ao ruído térmico é acrescida de uma certa quantidade, na tentativa de contrabalançar o efeito na NPR provocado pela forma não plana da densidade espectral de potência da intermodulação [7]. Entretanto, a falta de uma análise espectral detalhada do problema e consequentemente uma indefinição nos valores dos parâmetros capazes de caracterizar de forma apropriada a densidade espectral em questão, conduzem a resultados controversos para essa "penalidade".

A razão sinal-ruído térmico em banda-básica pode ser colocada na forma

$$\frac{S}{N} = \frac{C}{P} \cdot B_{RF} \cdot \frac{P_s}{\frac{1}{3}(f_s^3 - f_i^3)} \quad (5.26)$$

ou, em decibéis

$$\frac{S}{N} \text{ (dB)} = \frac{C}{P} \text{ (dB)} + Y \text{ (dB)} \quad (5.27)$$

com

$$Y \text{ (dB)} = 10 \log \frac{3 B_{RF} \cdot P_s}{(f_s^3 - f_i^3)} \quad (5.28)$$

onde P_s é a potência do sinal de voz em banda básica e P é a potência de ruído térmico após o filtro de RF.

Utilizando-se (5.2), com a potência de intermodulação igual a P , e ainda (5.3), resulta para a penalidade π (dB)

$$\pi \text{ (dB)} = \frac{S}{I} \text{ (dB)} - \frac{S}{N} \text{ (dB)} = X \text{ (dB)} - Y \text{ (dB)} \quad (5.29)$$

ou ainda

$$\pi \text{ (dB)} = 10 \log \frac{f_s^3 - f_i^3}{3 B_{RF} \int_{f_i}^{f_s} f^2 (\bar{S} * S_o(f)) df} \quad (5.50)$$

A tabela 5.4 apresenta os valores de π correspondente aos mesmos valores de β (dB), B (kHz) e desvios rms do tom de teste apresentados na tabela 5.1.

ϵ		10%	5%	3%
$\beta = 5.8$	$B = 19$	0.57	2.06	3.13
	$B = 25.3$	-2.30	-1.45	-0.74
	$B = 38$	-4.72	-4.59	-4.35
$\beta = 5.0$	$B = 19$	0.18	1.40	2.31
	$B = 25.3$	-2.60	-1.95	-1.40
	$B = 38$	-4.83	-4.81	-4.69
$\beta = 4.0$	$B = 19$	-0.34	0.59	1.27
	$B = 25.3$	-2.95	-2.54	-2.18
	$B = 38$	-4.89	-5.0	-5.0

Tabela 5.4 - Valores da penalidade π (dB) para diferentes valores do desvio padrão β (dB), da faixa alocada B (kHz) e desvios rms do tom de teste apresentados na tabela 5.1.

CONCLUSÕES

Os procedimentos seguidos ao longo deste trabalho, visando a determinação da razão sinal-ruído de intermodulação, possuem alguns aspectos relevantes que cumpre ressaltar.

A amplitude da portadora SCPC/FM, na entrada da TWT, é uma constante durante os períodos de atividade. O capítulo 2 mostra, que a amplitude complexa de cada portadora SCPC/FM, na saída da válvula, é variável com o tempo, ou seja o sinal sofre uma distorção em amplitude e fase. Entretanto a análise da convergência desenvolvida neste mesmo capítulo mostrou que esta amplitude complexa converge, em média quadrática, para uma constante, quando m cresce indefinidamente. Este fato permite concluir que quanto maior for o número de portadoras em um sistema SCPC, ativado por voz, menor será a distorção de amplitude e fase sofrida por cada portadora ao atravessar o dispositivo não linear. Naturalmente, em qualquer hipótese, haverá efeitos de intermodulação sobre cada uma das portadoras SCPC/FM.

Por outro lado, a verificação da convergência mencionada permitiu chegar-se a expressões razoavelmente simples para a densidade espectral de potência das portadoras e dos produtos de intermodulação. Caso tal convergência não se verificasse a densidade espectral de potência da portadora não possuiria a mesma forma na saída e na entrada da TWT, sendo alterada pela convolução com uma densidade espectral de potência cuja obtenção exata envolveria, não só a caracterização de 2ª ordem para as amplitudes das portadoras,

como transformadas de expressões que tornariam o problema intra
tável mesmo com a utilização de computador.

De forma análoga, a densidade espectral de um produto de intermodulação não poderia ser obtida simplesmente através da convolução de três densidades espectrais de porta
doras, sendo alterada de forma semelhante à descrita para a portadora.

A expressão para a razão portadora-ruído de inter
modulação, apresentada no final do capítulo 2 e ilustrada para uma TWT do INTELSAT IV, comprova que esta razão é tanto menor quanto menor for o módulo do "back-off" de entrada na TWT, além de ser também essencialmente independente do número de portadoras quando este número é elevado.

No capítulo 3, uma análise simples permitiu a com
paração entre as potências dos produtos de 3ª ordem que de
pendem estatisticamente da portadora interferida e a potência total dos produtos de 3ª ordem interferentes. Esta análise, associada ao fato da amplitude da portadora poder ser consi
derada constante, durante o período de atividade (para um número grande de portadoras no sistema), permitiu a utiliza
ção de resultados já existentes na determinação da densida
de espectral do ruído gerado pela intermodulação, na saída do demodulador de FM. O mesmo tipo de análise pode ser tentado para sistemas SCPC/FM com configurações diferentes da apresen
tada neste trabalho.

As medidas disponíveis sobre densidades espectrais de potência de portadoras SCPC/FM, ativadas por voz, não correspondem exatamente a uma situação real, pois nos sinais de voz, usados para modular a portadora, não estão incluídas as pausas de escuta, normais em uma conversação telefônica. É, no entanto, necessário verificar a possível influência que tais pausas poderiam ter na densidade espectral de potência de uma portadora SCPC/FM e também obter a densidade espectral de potência de tal portadora, ao se considerar somente um período de atividade. A análise destes problemas levou à introdução, no capítulo 4, de um processo de Markov de 3 estados caracterizando pausas intersilábicas, períodos de atividade e pausas de escuta na amplitude da portadora.

O procedimento seguido no capítulo 4 permitiu mostrar que a densidade espectral de potência da envoltória complexa de uma portadora SCPC/FM, obtida ao considerar-se somente um período de atividade ("ON"), só difere da densidade espectral da envoltória complexa da portadora SCPC/FM em frequências muito baixas. O mesmo acontece quando pausas de escuta não são consideradas. Desta forma, as medidas disponíveis podem caracterizar a densidade espectral de potência de uma portadora SCPC/FM, mesmo na condição "ON".

Devido à incerteza no conhecimento do nível de potência do sinal que modula uma determinada portadora, a densidade espectral de potência de uma portadora SCPC/FM com nível de sinal aleatório, obtida ainda no capítulo 4, desempenha papel de grande importância. O enfoque estatístico

modela, de forma conveniente, a incerteza com relação ao nível de voz que modula a portadora desejada e, principalmente, a incerteza na forma de cada um dos milhares de produtos de intermodulação de terceira ordem que interferem nesta portadora.

No capítulo 5, os resultados apresentados para ilustrar o procedimento geral proposto para a determinação da NPR, permitem algumas conclusões. A quantidade $X(\text{dB})$, que deve ser adicionada à razão portadora-ruído para a obtenção da NPR, depende fundamentalmente do conjunto de parâmetros apresentado neste capítulo. Entretanto, os parâmetros m e β , média (em dBm0) e desvio padrão (em dB) da distribuição dos níveis de potência dos sinais moduladores, não são, propriamente, característicos de um sistema SCPC/FM. Desta forma, ao se comentar a influência dos parâmetros de tal sistema na razão sinal ruído de intermodulação, estas quantidades podem ser consideradas constantes.

Ao se aumentar o desvio rms do tom de teste, utilizado no sistema, a densidade espectral de potência da portadora sofre um alargamento, correspondendo portanto a uma maior potência de sinal. Entretanto a densidade espectral do ruído de intermodulação também sofre um alargamento, de forma que o efeito final na NPR não seria totalmente previsível. A tabela 5.2. mostra que o aumento do desvio rms do tom de teste provoca, efetivamente, um aumento no valor final da NPR. Entretanto, para uma determinada faixa alocada, quanto maior é este desvio, maior é a probabilidade de um determinado

usuário sofrer distorção por "clipping". Desta forma, ao se dimensionar o desvio rms do tom de teste para o sistema, estes dois efeitos devem ser levados em conta. O capítulo 5 sugere também uma fórmula para se relacionar o desvio rms do tom de teste com a probabilidade de um determinado usuário sofrer distorção por "clipping" (ou de forma equivalente a percentagem de usuários que sofrem este tipo de distorção). Esta fórmula pode ser usada para o dimensionamento do sistema.

A tabela 5.3 mostra que a melhoria introduzida pelo uso de ênfase no sistema também aumenta com o aumento do desvio rms do tom de teste. Como foi dito, quanto maior este desvio mais alargada será a densidade espectral da intermodulação na saída do demodulador de fase, tendendo desta forma a tornar-se plana, na faixa de frequências de voz, e portanto parabólica após a passagem pelo derivador. Desta maneira, a característica de frequência do ruído de intermodulação em banda básica tende à do ruído térmico quando se utiliza desvios altos. Este fato explica o aumento da melhoria, devida à utilização de ênfase, com o aumento do desvio do tom de teste.

A tabela 5.4 apresenta as correções que devem ser feitas na razão sinal-ruído de intermodulação obtida ao considerar-se este ruído como um ruído térmico de mesma potência em R.F. Os resultados mostram que esta penalidade varia sensivelmente com os parâmetros do sistema e que portanto uma tentativa de se fixar um determinado valor para esta penalidade

pode fazer com que o sistema seja super-dimensionado, o que é economicamente indesejável, ou sub-dimensionado, o que é tecnicamente indesejável.

Alguns comentários já foram feitos com respeito à representatividade da densidade espectral de potência de uma portadora SCPC/FM com nível de sinal aleatório. Entretanto, novas considerações podem ser feitas visando, principalmente, uma possível extensão deste trabalho.

No capítulo 4, foi mostrado que uma vez conhecido o nível do sinal de voz correspondente a uma determinada portadora, sua densidade espectral pode ser obtida de uma outra conhecida e tomada como referência. Desta forma, ao se introduzir uma aleatoriedade no nível deste sinal, esta densidade espectral de potência passou a ser, na realidade, um processo estocástico $\bar{S}(f, \sigma)$, cujas funções amostra são funções de f . A média $\bar{S}(f)$ deste processo coincide com a densidade espectral de potência da portadora, quando modulada por um sinal com nível aleatório de potência. Apesar de $\bar{S}(f)$ ser, por definição, a densidade espectral de potência para o modelo em questão, uma análise ainda mais exigente poderia incluir, de alguma forma, possíveis variações de $\bar{S}(f, \sigma)$ em torno de sua média $\bar{S}(f)$.

A densidade espectral total $S_1(f)$ da intermodulação, que interfere em uma determinada portadora, é também um processo, com funções amostra funções de f , resultante da soma das densidades espectrais de todos os produtos de intermo

dulação que interferem na portadora. Tais produtos, por sua vez, são formados pela convolução das três densidades espectrais correspondentes às portadoras que os formam.

A utilização de $\bar{S}(f)$ na obtenção da densidade espectral de um produto de intermodulação, através de sua dupla-convolução, equivale a considerar-se a média do processo $S_1(f)$ como sendo a densidade espectral de potência da intermodulação. Embora esta seja, por definição, a densidade espectral de potência do modelo em questão, uma análise mais exigente poderia, assim como no caso da portadora desejada, incluir os efeitos de possíveis variações de $S_1(f)$ em torno de sua média. Entretanto, neste caso, $S_1(f)$ é, para cada f , uma soma de um número muito grande de variáveis aleatórias idênticamente distribuídas, que são os valores das densidades espectrais de cada produto, para este f . Parece, a priori, que tal situação conduziria, pela lei dos grandes números, à conclusão de que a variância de $S_1(f)$ converge, para cada f , para zero. Isto significaria que, para um grande número de portadoras, variações de $S_1(f)$ em torno de sua média são muito pouco prováveis. Este fato, que necessita ainda de uma demonstração, reduziria a análise de possíveis variações apenas ao caso da portadora.

Um modo de se levar em conta estas variações seria a determinação da quantidade X , definida no capítulo 5, como uma função do nível da portadora desejada, isto é

$$X(\sigma) = 10 \log \frac{2 \int_0^{\infty} f^2 \bar{S}(f, \sigma) df}{\int_0^{\infty} f^2 (S_0 * \bar{S}(f, \sigma) df)}$$

onde $S_0(f)$ é único para um dado conjunto de parâmetros do sistema, e $\bar{S}(f, \sigma)$ pode ser determinada, para cada σ , a partir de uma densidade espectral de referência.

Como a densidade da variável aleatória σ é conhecida, é possível determinar-se a densidade de probabilidade de X , e consequentemente da razão sinal-ruído de intermodulação. É assim possível obter o valor de razão sinal-ruído de intermodulação, que é excedido com uma dada probabilidade.

Esta é a sugestão para uma possível continuação deste trabalho.

APÊNDICE A

A variável aleatória x_m definida por (2.39) pode ser escrita, para cada t , como

$$x_m(t) = y_m(t) - \overline{y_m(t)} \quad (\text{A.1})$$

onde

$$y_m(t) = \prod_{\substack{\ell=1 \\ (\ell \neq r)}}^m J_0(\alpha s A_\ell(t)) \quad (\text{A.2})$$

será mostrado inicialmente que $y_m(t)$ possui a propriedade

$$i) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \overline{y_m(t)^k} = \lim_{m \rightarrow \infty} \overline{y_m(t)}^k \quad \text{para} \quad k \geq 1$$

Para mostrar isso, os dois limites serão calculados separadamente

$$\overline{y_m(t)} = \left[p + q J_0(\alpha s A) \right]^{m-1} \quad (\text{A.3})$$

com

$$A = \sqrt{\frac{2b}{mp}} \quad (\text{A.4})$$

Portanto quando m cresce indefinidamente, A torna-se muito pequeno e a seguinte equivalência pode ser usada

$$J_0(\alpha s A) \simeq e^{\frac{-\alpha^2 s^2 A^2}{4}} \quad (\text{A.5})$$

Desta forma, no limite, tem-se

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \overline{y_m(t)} = \lim_{m \rightarrow \infty} \left[p + a e^{\frac{-\alpha^2 s^2 A^2}{4}} \right]^{m-1} \quad (\text{A.6})$$

A introdução de (A.4) em (A.6) permite escrever

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \overline{y_m(t)} = \lim_{m \rightarrow \infty} \left[p + q e^{\frac{-\alpha^2 s^2 b}{2mp}} \right]^{m-1} = \lim_{m \rightarrow \infty} C_m^{m-1} \quad (\text{A.7})$$

O limite em (A.7) é uma indeterminação do tipo $(+1)^\infty$. Para que tal indeterminação possa ser levantada basta escrever a igualdade

$$\lim_{m \rightarrow \infty} C_m^{m-1} = \lim_{m \rightarrow \infty} e^{(m-1) \ln C_m} = \lim_{m \rightarrow \infty} \exp \left[\frac{\ln C_m}{1/(m-1)} \right] \quad (\text{A.8})$$

O argumento da exponencial em (A.8)

$$S_m = \frac{\ln C_m}{1/(m-1)} \quad (\text{A.9})$$

é uma sequência que conduz a uma indeterminação do tipo $0/0$, quando m tende a infinito. Seja agora

$$S(x) = \frac{\ln C(x)}{1/(x-1)} \quad x \text{ real} \quad (\text{A.10})$$

onde

$$C(x) = \left[p + q e^{\frac{-\alpha^2 s^2 b}{2xp}} \right]$$

Obviamente

$$\lim_{m \rightarrow \infty} S_m = \lim_{x \rightarrow \infty} S(x) \quad (\text{A.11})$$

já que infinito é ponto de acumulação tanto para os inteiros quanto para os reais. O teorema de L'Hôpital permite escrever agora

$$\lim_{x \rightarrow \infty} S(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{d}{dx} [\ln C(x)]}{\frac{d}{dx} [1/(x-1)]} \quad (\text{A.12})$$

e que conduz a

$$\lim_{x \rightarrow \infty} S(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} S_m = - \frac{\alpha^2 s^2 b}{2} \quad (\text{A.13})$$

Finalmente de (A.7), (A.8), (A.9) e (A.13) resulta

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \overline{y_m(t)} = \exp \left[- \frac{\alpha^2 s^2 b}{2} \right] \quad (\text{A.14})$$

Para o outro limite tem-se inicialmente

$$\overline{y_m(t)^k} = \overline{\prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq r}}^m J_0(\alpha s A_\ell(t))^k} = \left[p + q J_0(\alpha s A)^k \right]^{m-1} \quad (\text{A.15})$$

Portanto

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \overline{y_m(t)^k} = \lim_{m \rightarrow \infty} \left[p + q e^{-\frac{\alpha^2 s^2 A^2}{4}} \right]^{m-1} = \lim_{m \rightarrow \infty} \left[p + q e^{-\frac{\alpha^2 s^2 A^2}{4}} \right]^{m-1} \quad (\text{A.16})$$

onde

$$\alpha'^2 = \alpha^2 k$$

Comparando (A.16) com (A.6) e utilizando (A.14) resulta imediatamente

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \overline{y_m(t)^k} = \exp \left[- \frac{\alpha^2 s^2 b}{2} \right] = \exp \left[- \frac{\alpha^2 s^2 b}{2} \cdot k \right] = \left[\lim_{m \rightarrow \infty} \overline{y_m(t)} \right]^k \quad (\text{A.17})$$

ou ainda

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \overline{y_m(t)^k} = \lim_{m \rightarrow \infty} \overline{y_m(t)^k}$$

ii) será mostrado agora que para qualquer sequência de variáveis aleatórias y_m satisfazendo (i) tem-se

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \overline{(y_m - \bar{y}_m)^k} = 0 \quad \text{para } k \geq 1$$

O desenvolvimento de $(y_m - \bar{y}_m)^k$ através do binômio de Newton, permite escrever

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \overline{(y_m - \bar{y}_m)^k} &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \overline{y_m^i} \cdot \bar{y}_m^{k-i} (-1)^{k-i} = \\ &= \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \lim_{m \rightarrow \infty} \overline{y_m^i} \cdot \lim_{m \rightarrow \infty} \bar{y}_m^{k-i} (-1)^{k-i} \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

Utilizando-se a propriedade (i), (A.18) se escreve

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \overline{(y_m - \bar{y}_m)^k} &= \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \lim_{m \rightarrow \infty} \bar{y}_m^i \cdot \lim_{m \rightarrow \infty} \bar{y}_m^{k-i} (-1)^{k-i} = \\ &= \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \lim_{m \rightarrow \infty} \bar{y}_m^k (-1)^{k-i} = \lim_{m \rightarrow \infty} \bar{y}_m^k \times \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-1)^{k-i} \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

Como

$$(1-1)^k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} 1^k (-1)^{k-i} = 0 \quad \text{para } k \geq 1 \quad (\text{A.20})$$

resulta de (A.19) e (A.20)

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \overline{(y_m - \bar{y}_m)^k} = 0 \quad \text{para } k \geq 1$$

A definição de x_m dada por (A.1) e os resultados apresentados conduzem imediatamente a

$$\lim_{m \rightarrow \infty} E[x_m^k] = 0 \quad \text{para } k \geq 1 \quad (\text{A.21})$$

ou seja x_m converge para 0 na média de ordem k , para qualquer k inteiro maior ou igual a 1.

APÊNDICE B

B.1 - Determinação de Parâmetros do Processo $x(t)$

O vetor das probabilidades de estado associadas ao processo $x(t)$, se escreve

$$\underline{\phi}(t) = (P[x(t)=0] ; P[x(t)=1] ; P[x(t)=2]) \quad (B.1)$$

Para um tempo t , suficientemente grande, tem-se para a primeira componente deste vetor

$$P[x(t)=0] = 0.5 \quad (B.2)$$

pois em uma conversação telefônica pode ser assumido que, em um instante genérico, a probabilidade de um usuário estar falando é igual à probabilidade de estar escutando.

A segunda componente do vetor é o fator de ativação de voz p . Portanto

$$P[x(t)=1] = 0,4 \quad (B.3)$$

resultando

$$\underline{\phi}(t) = (0,5 ; 0,4 ; 0,1) \quad (B.4)$$

Um processo de Markov é monodêsmico ^[9] quando o vetor das probabilidades de estado converge para um vetor

constante. A referência [9] mostra que o vetor limite $\underline{\phi}$ satisfaz a equação

$$\underline{\phi} \cdot \underline{A} = \underline{0} \quad (\text{B.5})$$

com

$$\underline{A} = \underline{\Lambda} (\underline{P} - \underline{I}) \quad (\text{B.6})$$

onde $\underline{\Lambda}$ é a matriz diagonal formada pelos parâmetros λ_i , \underline{P} é a matriz das probabilidades de transição associada ao processo $x(t)$ e \underline{I} é a matriz identidade.

Para o processo em questão, (B.6) e (4.2) conduzem a

$$(0,5 \quad 0,4 \quad 0,1) \begin{bmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 \\ \lambda_1 p_{10} & -\lambda_1 & \lambda_1(1-p_{10}) \\ 0 & \lambda_2 & -\lambda_2 \end{bmatrix} = \underline{0} \quad (\text{B.7})$$

que fornece um sistema com duas equações linearmente independentes e quatro incógnitas.

O tempo médio de duração de um período "ON" pode ser tomado como [10]

$$\frac{1}{\lambda_1} = 1,5 \text{ s} \quad (\text{B.8})$$

Foi considerado aqui como sendo um tempo médio razoável para a duração de um período de escuta o correspondente a cinco vezes o do período "ON", ou seja

$$\frac{1}{\lambda_0} = \frac{5}{\lambda_1} \quad (\text{B.9})$$

A rigor o fator 5 é um tanto arbitrário, mas as conclusões que se deseja extrair deste Apêndice são de caráter qualitativo, não sendo sensíveis a possíveis variações deste fator. As expressões (B.7), (B.8) e (B.9) conduzem ao seguinte conjunto de valores

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= 0,13 \text{ Hz} \\ \lambda_1 &= 0,66 \text{ Hz} \\ \lambda_2 &= 2 \text{ Hz} \\ p_{10} &= 0,25 \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

B.2 - Determinação das Funções $F_{2n}(\omega)$

As funções $F_{2n}(\omega)$ ($n=0,1,2,\dots$) definidas em (4.13) representam a transformada de Fourier de $f_{2n}(\tau)$ ($n=0,1,2,\dots$) onde

$$f_{2n}(\tau) = P[B_{2n}(t, t+\tau) | x_k(t) = 1] \quad n=0,1,2,\dots \quad (\text{B.11})$$

Da definição do evento $B_{2n}(t, t+\tau)$ dada por (4.7) resulta

$$f_{2n}(\tau) = P[\text{haver } 2n \text{ transições em } (t, t+\tau] \mid x_k(t)=1] \quad (\text{B.12})$$

A condição $x_k(t)=1$ em (B.12) permite ainda escrever-se

$$f_{2n}(\tau) = P[\text{haver } 2n \text{ transições em } (t, t+\tau], x_k(t+\tau)=1 \mid x_k(t)=1] \quad (\text{B.13})$$

Para valores de τ maiores que 0, a probabilidade expressa em (B.13) é definida em [9] e representada de forma geral por $\phi_{ij}(m|\tau)$, onde os índices caracterizam, respectivamente, o estado ocupado pelo processo de Markov no início e ao final do intervalo, e o argumento representa o número de transições que ocorrem no processo quando este intervalo tem duração τ .

Na referência são desenvolvidas equações recursivas, para a determinação dessas probabilidades, fazendo uso das propriedades características dos processos de Markov. A utilização da transformada geométrico-exponencial conduz a equações bastante simplificadas, no domínio de z (geométrica) e s (exponencial).

As equações obtidas podem ser representadas através de diagramas que permitem obter-se, de forma bastante prática, expressões para $\phi_{ij}^{ge}(z|s)$, a transformada geométrica-exponencial de $\phi_{ij}(m|\tau)$.

Pode-se dizer, de forma bastante simplista, que nesses diagramas os nós representam os estados, as setas

as transições possíveis entre os estados, ponderadas por uma função de z e s que atua como uma "função de transferência" e é chamada de transmissão entre um extremo e outro de cada seta.

Utilizando-se os procedimentos descritos em [9], resultou, para o processo descrito no início do capítulo 4, o diagrama apresentado na figura B.1

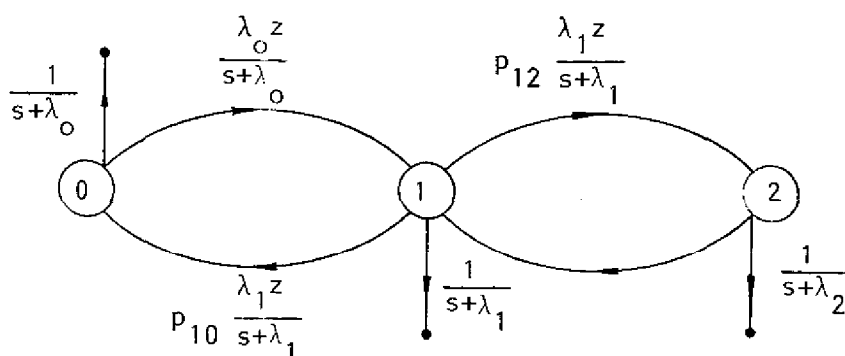


Figura B.1 - Diagrama de Fluxo do Processo $x(t)$

Neste diagrama os pontos que se unem aos nós são chamados prolongamentos dos nós. $\phi_{ij}^{ge}(z|s)$ corresponde, para cada par (i, j) , à transmissão total entre o nó i e o prolongamento do nó j . A transmissão total entre dois pontos é determinada de forma inteiramente análoga à que seria usada para a obtenção da função de transferência total entre dois pontos de um sistema linear com diagrama de fluxo análogo ao do processo.

Desta forma os diagramas de fluxo podem ser reduzidos de forma análoga, através de associações em série, paralela, função de transferência de malhas etc.

A figura B.2 (a e b) mostra a redução do diagrama apresentado na figura B.1, visando a determinação de $\phi_{11}^{ge}(z|s)$.

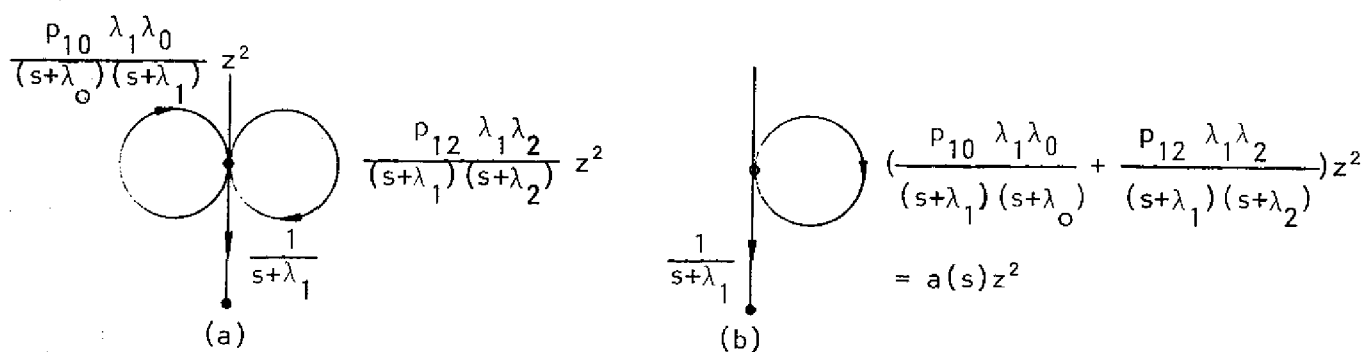


Figura B.2 - Redução do Diagrama de Fluxo

O diagrama da figura B.2 (b) permite escrever agora

$$\phi_{11}^{ge}(z|s) = \frac{1}{s+\lambda_1} \frac{1}{1-a(s)z^2} \quad (B.14)$$

Invertendo-se, inicialmente, a transformada geométrica resulta para a transformada exponencial

$$\phi_{11}^e(m|s) = \frac{1}{2} \frac{1}{s+\lambda_1} \left[a(s)^{\frac{m}{2}} + (-1)^m a(s)^{\frac{m}{2}} \right] = \frac{1}{2} \frac{1}{(s+\lambda_1)} a(s)^{\frac{m}{2}} \left[1 + (-1)^m \right] \quad (B.15)$$

ou ainda

$$\phi_{11}^e(2n|s) = \frac{1}{s + \lambda_1} a(s)^n \quad (\text{B.16})$$

A substituição de $a(s)$ em (B.16) conduz finalmente a

$$\phi_{11}^e(2n|s) = \frac{[p_{10}\lambda_1\lambda_0(s+\lambda_2) + p_{12}\lambda_1\lambda_2(s+\lambda_0)]^n}{(s+\lambda_1)^{n+1}(s+\lambda_0)^n(s+\lambda_2)^n} \quad n=0,1,2,\dots \quad (\text{B.17})$$

A inversão da transformada exponencial levaria aos valores de $f_{2n}(\tau)$ para $\tau \geq 0$. Desta forma

$$\phi_{11}^e(2n|s) \triangleq \int_0^\infty \phi_{11}(2n|\tau) e^{-s\tau} d\tau = \int_0^\infty f_{2n}(\tau) e^{-s\tau} d\tau \quad (\text{B.18})$$

Verifica-se facilmente que $f_{2n}(\tau)$ é uma função par de τ e portanto sua transformada de Fourier pode ser escrita

$$\begin{aligned} F_{2n}(\omega) &= \mathcal{F}[f_{2n}(\tau)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{2n}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^0 f_{2n}(\alpha) e^{-j\omega\alpha} d\alpha + \int_0^\infty f_{2n}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

fazendo-se

$$\alpha = -\tau$$

na primeira das integrais em (B.19) e lembrando que f_{2n} é função par resulta

$$F_{2n}(\omega) = 2 \operatorname{Re} \left\{ \int_0^{\infty} f_{2n}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \right\} \quad (\text{B.20})$$

Como $\phi_{11}^e(2n|s)$ é um quociente de polinômios, com grau do numerador inferior ao do denominador e sem polos em 0, a integral em (B.20) e a expressão (B.18) permitem escrever diretamente

$$F_{2n}(\omega) = 2 \operatorname{Re} \left\{ \phi_{11}^e(2n|s) \Big|_{s=j\omega} \right\} \quad n=0,1,2,\dots \quad (\text{B.21})$$

Utilizando-se (B.21) e (B.17) foram obtidos, em computador, os valores de $F_{2n}(f)$ para $n=1,2,3,4$ e 5 e para uma faixa compreendendo frequências entre 0 e 6 Hz. Estes valores estão listados na tabela B.1.

Os resultados mostram que estas funções possuem máximo em $f=0$ e oscilam em uma faixa muito pequena de frequências, após a qual tendem rapidamente para zero. Na tabela B.1, encontra-se assinalado, para cada uma das funções, o valor a partir do qual todos os valores da função estão mais de 50 dB abaixo do valor máximo. A frequência correspondente ao valor assinalado limita a faixa de frequências, consideradas ainda significativas, desta função. Estas faixas diminuíram com o aumento de n e no pior caso ($n=1$) esta faixa resultou inferior a 3,5 Hz.

f (Hz)	n=1	n=2	n=3	n=4	n=5	f (Hz)
0.000000	3.0303020E+00	3.0303001E+00	3.0302982E+00	3.030282E+00	3.0302963E+00	0.000000
0.020000	2.1985741E+00	1.3292034E+00	4.7224009E-01	-2.5400412E-01	-7.7695417E-01	0.020000
0.040000	1.2205286E+00	-5.8577122E-03	-7.1494139E-01	-3.9191115E-01	-7.0244789E-01	0.040000
0.060000	4.5121598E-01	-6.2192438E-01	-7.9710273E-01	-4.7015059E-01	-7.9610765E-01	0.060000
0.080000	-7.2202682E-02	-7.4927294E-01	-4.8575504E-01	-5.8560356E-02	1.3724744E-01	0.080000
0.100000	-3.6507404E-01	-6.2763107E-01	-1.8544400E-01	9.5124543E-02	9.7553730E-02	0.100000
0.120000	-4.0262774E-01	-4.4161916E-01	-1.5605949E-02	3.5930465E-02	3.1306736E-02	0.120000
0.140000	-5.2097130E-01	-2.7786016E-01	5.0225334E-02	5.739297E-02	1.7011058E-05	0.140000
0.160000	-4.9744391E-01	-1.5912807E-01	6.1836705E-02	2.6302703E-02	-7.3095821E-03	0.160000
0.180000	-4.5083880E-01	-8.1463337E-02	5.2568690E-02	5.517388E-03	-9.1152747E-03	0.180000
0.200000	-3.9700782E-01	-3.4053490E-02	3.8536502E-02	8.8970354E-03	-3.5814950E-03	0.200000
0.220000	-3.4397006E-01	-6.7931221E-03	2.6222162E-02	-2.1506302E-03	-1.7267345E-03	0.220000
0.240000	-2.9575735E-01	7.8087263E-03	1.6882293E-02	-2.6033914E-03	-6.9269771E-04	0.240000
0.260000	-2.5247240E-01	1.4814243E-02	1.0424726E-02	-2.2186311E-03	-2.0130296E-04	0.260000
0.280000	-2.1544802E-01	1.7430633E-02	5.1824913E-03	-1.6546594E-03	-1.8734208E-05	0.280000
0.300000	-1.8387651E-01	1.7629847E-02	3.4937952E-03	-1.1499508E-03	6.1735976E-05	0.300000
0.320000	-1.5713966E-01	1.6588770E-02	1.8391344E-03	-7.6505147E-04	6.9256494E-05	0.320000
0.340000	-1.3457465E-01	1.4990665E-02	8.4976759E-04	-4.9377678E-04	5.7855307E-05	0.340000
0.360000	-1.1555332E-01	1.3218999E-02	2.7789897E-04	-3.1120423E-04	4.2914332E-05	0.360000
0.380000	-9.9514484E-02	1.1478797E-02	3.7458958E-05	-1.9198930E-04	2.9939081E-05	0.380000
0.400000	-8.5972846E-02	9.8708346E-03	-1.9850107E-04	-1.1581352E-04	2.0094114E-05	0.400000
0.420000	-7.4516714E-02	8.4365457E-03	-2.6896922E-04	-6.7988234E-05	1.3151457E-05	0.420000
0.440000	-6.4901216E-02	7.1847662E-03	-2.8801081E-04	-3.8428261E-05	9.4540516E-06	0.440000
0.460000	-5.6539245E-02	6.1073750E-03	-2.7929153E-04	-2.0460339E-05	5.3585663E-06	0.460000
0.480000	-4.9492352E-02	5.1883496E-03	-2.5685946E-04	-9.7565917E-06	3.3550350E-06	0.480000
0.500000	-4.3463454E-02	4.4088736E-03	-2.2885820E-04	-9.7565917E-06	2.0751722E-05	0.500000
0.520000	-3.8289316E-02	3.7500104E-03	-1.9983575E-04	-3.5489193E-06	1.2660239E-06	0.520000
0.540000	-3.3934733E-02	3.1941175E-03	-1.7219558E-04	-9.0633193E-08	7.5912988E-07	0.540000
0.560000	-2.9937589E-02	2.7254266E-03	-1.4707935E-04	2.5363188E-06	4.4448859E-07	0.560000
0.580000	-2.6554683E-02	2.3301891E-03	-1.24899368E-04	2.7997030E-06	2.5119289E-07	0.580000
0.599999	-2.3758464E-02	1.9966410E-03	-1.0567092E-04	2.7549959E-06	1.3327596E-07	0.599999
0.619999	-2.1234155E-02	1.7147949E-03	-8.9206545E-05	2.5536283E-06	6.4128017E-08	0.619999
0.639999	-1.9027561E-02	1.4762632E-03	-7.5225485E-05	2.2343351E-06	2.3544601E-08	0.639999
0.659999	-1.7097182E-02	1.2740189E-03	-6.3418469E-05	1.9976924E-06	8.6351593E-10	0.659999
0.679999	-1.5392691E-02	1.1021891E-03	-5.3482916E-05	1.7207749E-06	-1.1029399E-08	0.679999
0.699999	-1.3893805E-02	9.5589086E-04	-4.5140769E-05	1.4670804E-06	-1.6475887E-08	0.699999
0.719999	-1.2569152E-02	8.3104937E-04	-3.8144353E-05	1.2420069E-06	-1.8249082E-08	0.719999
0.739999	-1.1395507E-02	7.2427327E-04	-3.2278709E-05	1.0464528E-06	-1.7993574E-08	0.739999
0.759999	-1.0353073E-02	6.3273078E-04	-2.7359813E-05	8.7891544E-07	-1.5674370E-08	0.759999
0.779999	-9.4249919E-03	5.5406708E-04	-2.3328118E-05	7.3676638E-07	-1.4908068E-08	0.779999
0.799999	-8.5968003E-03	4.8630964E-04	-1.9764775E-05	6.1676552E-07	-1.3020127E-08	0.799999
0.819999	-7.9561082E-03	4.2730979E-04	-1.6348338E-05	5.1646055E-07	-1.1193031E-08	0.819999
0.839999	-7.1922243E-03	3.7718471E-04	-1.4391564E-05	4.3240141E-07	-9.5176844E-09	0.839999
0.859999	-6.5959468E-03	3.3327425E-04	-1.2318593E-05	3.6223457E-07	-8.0313953E-09	0.859999
0.879999	-6.0592964E-03	2.9510120E-04	-1.0566349E-05	3.0372644E-07	-5.7403580E-09	0.879999
0.899999	-5.5753775E-03	2.6184251E-04	-9.0824560E-06	2.5496104E-07	-5.6369807E-09	0.899999
0.919999	-5.1381625E-03	2.3280134E-04	-7.8233588E-06	2.1431129E-07	-4.7021551E-09	0.919999
0.939999	-4.7424249E-03	2.0738866E-04	-6.7529181E-06	1.8041078E-07	-3.9163268E-09	0.939999
0.959999	-4.3835975E-03	1.8510461E-04	-5.8410460E-06	1.5211697E-07	-3.2591401E-09	0.959999
0.979999	-4.0576607E-03	1.6552329E-04	-5.0626750E-06	1.2847693E-07	-2.7114733E-09	0.979999

0.999999	-3.7611220E-03	1.4828291E-04	-4.3969358E-06	1.0870190E-07	-2.2552103E-09
1.099998	-2.6230919E-03	8.7775494E-05	-2.3725793E-06	4.8446715E-08	-9.1106855E-10
1.199998	-1.8320572E-03	5.4009288E-05	-1.1914990E-06	2.2618956E-08	-3.8059267E-10
1.299997	-1.3937553E-03	3.4378987E-05	-6.6119799E-07	1.1043177E-08	-1.6559207E-10
1.399997	-1.0391921E-03	2.3546199E-05	-3.3070357E-07	5.6205316E-09	-7.5247392E-11
1.499996	-7.9504633E-04	1.5181166E-05	-2.2656718E-07	2.9718579E-09	-3.5593029E-11
1.599996	-6.1829528E-04	1.0464357E-05	-1.3889678E-07	1.6269944E-09	-1.7492244E-11
1.699995	-4.8787426E-04	7.3655810E-06	-8.7454565E-08	9.1938390E-10	-8.9059957E-12
1.799994	-3.8999133E-04	5.2827490E-06	-5.6408756E-08	5.3472371E-10	-4.6863503E-12
1.899994	-3.1540054E-04	3.8536200E-06	-3.7187760E-08	3.1929437E-10	-2.5411240E-12
1.999993	-2.5777402E-04	2.8545783E-06	-2.5008305E-08	1.9529439E-10	-1.4155301E-12
2.099993	-2.1265641E-04	2.1442665E-06	-1.7125600E-08	1.2211160E-10	-3.1025388E-13
2.199992	-1.7703389E-04	1.6313643E-06	-1.1923937E-08	7.913537E-11	-4.7447679E-13
2.299992	-1.4852703E-04	1.2557330E-06	-8.4298506E-09	5.0648556E-11	-2.3397651E-13
2.399991	-1.2552319E-04	9.7703287E-07	-6.0439973E-09	3.3496372E-11	-1.7342833E-13
2.499990	-1.0679767E-04	7.6776143E-07	-4.3900634E-09	2.2508988E-11	-1.0792018E-13
2.599990	-9.1432157E-05	6.0887612E-07	-3.2273704E-09	1.5351151E-11	-6.8338022E-14
2.699989	-7.8728801E-05	4.8699360E-07	-2.3922643E-09	1.0614532E-11	-4.3931732E-14
2.799989	-6.8153691E-05	3.9260260E-07	-1.8023028E-09	7.4341679E-12	-2.8738791E-14
2.899988	-5.9293703E-05	3.1885304E-07	-1.3671051E-09	5.2596007E-12	-1.9047413E-14
2.999988	-5.1826151E-05	2.6074747E-07	-1.0464536E-09	3.7774124E-12	-1.2793091E-14
3.099987	-4.5496650E-05	2.1461301E-07	-8.0786711E-10	2.7364534E-12	-8.7004920E-15
3.199986	-4.0101339E-05	1.7771436E-07	-6.2868355E-10	2.0020586E-12	-5.9870593E-15
3.299985	-3.5485369E-05	1.4800165E-07	-4.9294346E-10	1.4784944E-12	-4.1657622E-15
3.399985	-3.1512696E-05	1.2391934E-07	-3.8926307E-10	1.1014861E-12	-2.9297477E-15
3.499984	-2.8090176E-05	1.0428244E-07	-3.0945446E-10	8.2745020E-13	-2.0798064E-15
3.599984	-2.5102155E-05	8.178633E-08	-2.4757196E-10	6.2549430E-13	-1.4907064E-15
3.699984	-2.2502350E-05	7.4899901E-08	-1.9925459E-10	4.7788238E-13	-1.0779580E-15
3.799983	-2.0240812E-05	6.3894561E-08	-1.6128149E-10	3.6710439E-13	-7.8608350E-16
3.899982	-1.8251536E-05	5.4728815E-08	-1.3125173E-10	2.8390354E-13	-5.7793995E-16
3.999982	-1.6500577E-05	4.7059714E-08	-1.0736262E-10	2.2096235E-13	-4.2799355E-16
4.099981	-1.4950449E-05	4.0614616E-08	-8.8251517E-11	1.7302208E-13	-3.1931539E-16
4.199981	-1.358208E-05	3.5175432E-08	-7.2880590E-11	1.3626393E-13	-2.3988185E-16
4.299980	-1.2365012E-05	3.0566802E-08	-6.0454614E-11	1.0791677E-13	-1.8139862E-16
4.399979	-1.1285834E-05	2.6647008E-08	-5.0360299E-11	9.5915433E-14	-1.3803994E-16
4.499979	-1.0318603E-05	2.3300899E-08	-4.2121723E-11	8.8745036E-14	-1.0567885E-16
4.599978	-9.4527586E-06	2.0434641E-08	-3.5367986E-11	5.5272674E-14	-8.1372470E-17
4.699978	-8.6757973E-06	1.7971125E-08	-2.9807490E-11	4.4646151E-14	-6.3003131E-17
4.799977	-7.9770143E-06	1.5847064E-08	-2.5210939E-11	3.6222971E-14	-4.9039320E-17
4.899977	-7.3471474E-06	1.4010013E-08	-2.1396024E-11	2.9514043E-14	-3.8365378E-17
4.999976	-6.7782148E-06	1.2416564E-08	-1.8218108E-11	2.4146206E-14	-3.0161493E-17
5.099976	-6.2632753E-06	1.1030494E-08	-1.5561191E-11	1.9832362E-14	-2.3823477E-17
5.199975	-5.7962952E-06	9.8215267E-09	-1.3332101E-11	1.6350785E-14	-1.8902387E-17
5.299974	-5.3720250E-06	8.7642960E-09	-1.1455713E-11	1.3529525E-14	-1.5063224E-17
5.399974	-4.9858500E-06	7.8374143E-09	-9.8710913E-12	1.1234313E-14	-1.2054154E-17
5.499973	-4.6337518E-06	7.0228658E-09	-8.5287402E-12	9.3600054E-15	-9.6851997E-18
5.599973	-4.3121781E-06	6.3053335E-09	-7.3881890E-12	7.8239062E-15	-7.8121468E-18
5.699972	-4.0180112E-06	5.6718683E-09	-6.4163275E-12	6.5603312E-15	-6.3250779E-18
5.799972	-3.7485024E-06	5.1113922E-09	-5.5858946E-12	5.5176234E-15	-5.1397165E-18
5.899971	-3.5012035E-06	4.6144493E-09	-4.8743752E-12	4.6542428E-15	-4.1911538E-18
5.999970	-3.2739608E-06	4.1729571E-09	-4.2631801E-12	3.9371243E-15	-3.4292824E-18

Tabela B.1 - Valores de $F_{2n}(f)$, para $n=1,2,3,4$ e 5 e para Frequências entre 0 e 6 Hz

A expressão (B.17) com $n=0$ e (B.21) fornecem pa
ra $F_o(f)$

$$F_o(f) = 2 \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{j2\pi f + \lambda_1} \right\} = \frac{2\lambda_1}{(2\pi)^2 f^2 + \lambda_1^2} \quad (\text{B.22})$$

que possui área unitária. Para se determinar a faixa $(-B, B)$ na qual concentra-se 99% da área sob esta curva basta fazer

$$\int_{-B}^{+B} F_o(f) df = 0,99 \quad (\text{B.23})$$

resultando

$$\frac{2}{\pi} \operatorname{tg}^{-1} \frac{2\pi B}{\lambda_1} = 0,99 \quad (\text{B.24})$$

ou ainda, utilizando-se o valor de $\lambda_1 = 2/3$

$$B = \frac{1}{2\pi} \operatorname{tg} 0,99 \cdot \frac{\pi}{2} = 6,75 \text{ Hz} \quad (\text{B.25})$$

o que mostra que $F_o(f)$ está praticamente concentrada em uma fai
xa de frequências inferior a 6,8 Hz.

B.3 - Faixa de Frequências Ocupada pelas Funções $\tilde{F}_n(\omega)$

As funções $\tilde{F}_n(\omega)$ ($n=1,2,\dots$) definidas em (4.33) representam a transformada de Fourier $\tilde{f}_n(\tau)$ ($n=1,2,3,\dots$) onde

$$\tilde{f}_n(\tau) = P[C_n(t, t+\tau), x_k(t+\tau)=1 | x_k(t)=1] \quad (B.27)$$

Da definição do evento $C_n(t, t+\tau)$ dada por (4.25) resulta

$$\tilde{f}_n(\tau) = P[\text{estado 0 ser ocupado } n \text{ vezes em } (t, t+\tau], x_k(t+\tau)=1 | x_k(t)=1] \quad (B.28)$$

Inicialmente será examinado o comportamento da probabilidade em (B.28), independentemente do estado final, isto é o comportamento de

$$\omega_{10}(n|\tau) \triangleq P[\text{estado 0 ser ocupado } n \text{ vezes em } (t, t+\tau] | x_k(t)=1] \quad (B.29)$$

Esta probabilidade é definida em [9], para valores de τ maiores que zero e representada de forma geral por $\omega_{ij}(n|\tau)$, onde os índices caracterizam, respectivamente, o estado ocupado pelo processo no início do intervalo e o estado cujo número de ocupações está sendo considerado. O argumento representa o número de ocupações deste estado, quando o intervalo tem duração τ .

De forma análoga à descrita em B.2 são obtidas expressões para $\omega_{ij}^{ge}(z|s)$, a transformada geométrica - exponencial de $\omega_{ij}(n|\tau)$. A natureza das expressões obtidas não permite sua representação através de um diagrama de fluxo como o apresentado em B.2.

Entretanto $\omega_{ij}^{ge}(z/s)$ pode ser relacionado às transformadas exponenciais das densidades de probabilidade dos tempos de primeira passagem do processo que, por sua vez, podem ser obtidos através de diagramas de fluxo.

Dado que o processo estava no estado i em t , o tempo que o processo leva para ocupar pela primeira vez o estado j é uma variável aleatória cuja densidade de probabilidade é representada por $f_{ij}(\tau)$ com transformada exponencial representada por $f_{ij}^e(s)$.

O relacionamento entre $\omega_{ij}^{ge}(z|s)$ e as transformadas das densidades de probabilidade dos tempos de primeira passagem é dada por

$$\omega_{ij}^{ge}(z|s) = \frac{1}{s} \left[1 - \frac{(1-z) f_{ij}^e(s)}{1-z f_{jj}^e(s)} \right] \quad (B.30)$$

ou, para o caso de interesse

$$\omega_{10}^{ge}(z|s) = \frac{1}{s} \left[1 - \frac{(1-z) f_{10}^e(s)}{1-z f_{00}^e(s)} \right] \quad (B.31)$$

O diagrama de fluxo da figura B.1 pode ser utilizado na determinação de $f_{ij}^e(s)$, após a introdução das seguintes modificações:

a) se $i \neq j$ remove-se todas as setas que deixam o nó j incluindo-se seu prolongamento. A transmissão, no diagrama de fluxo resultante, entre o nó i e o nó j é $f_{ij}^e(s)$.

b) Se $i = j$, transfere-se todas as setas que entram no nó i para outro nó i^* que não possui setas saintes. A transmissão, neste diagrama, entre o nó i original e o nó i^* adicional é $f_{ii}^e(s)$.

A figura B.3 apresenta a diagrama da figura B.1 modificado para a determinação de $f_{10}^e(s)$ e $f_{20}^e(s)$.

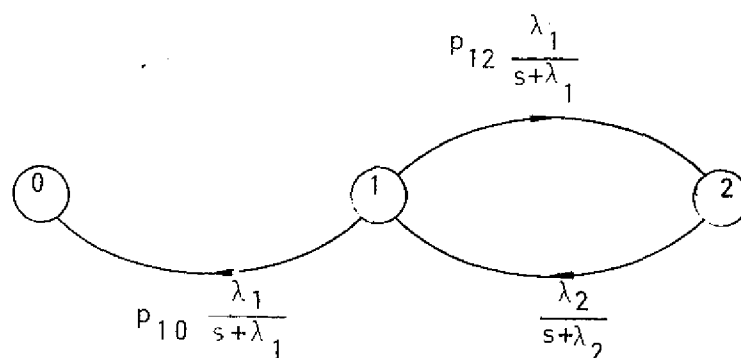


Figura B.3 - Diagrama de fluxo modificado para a determinação de $f_{10}^e(s)$ e $f_{20}^e(s)$

A figura B.4 apresenta a redução do diagrama da figura B.3 visando a determinação de $f_{10}^e(s)$ (a) e $f_{20}^e(s)$ (b).

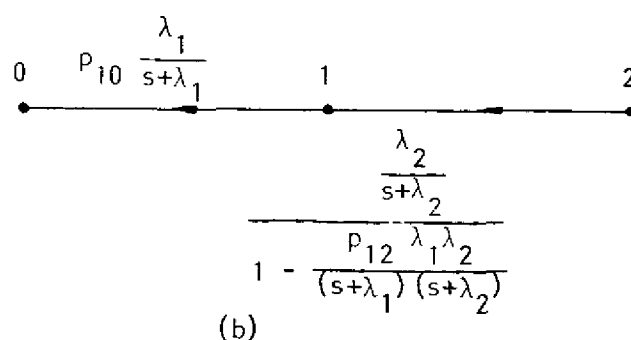
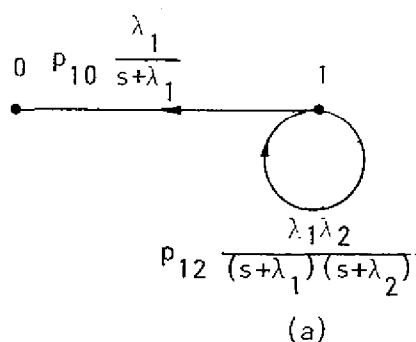


Figura B.4 - Redução do diagrama da figura B.3, visando a determinação de $f_{10}^e(s)$ e $f_{20}^e(s)$

A figura B.4 permite escrever para $f_{10}^e(s)$

$$f_{10}^e(s) = p_{10} \frac{\lambda_1}{s+\lambda_1} \cdot \frac{1}{1 - \frac{p_{12} \lambda_1 \lambda_2}{(s+\lambda_1)(s+\lambda_2)}} = \frac{p_{10} \lambda_1 (s+\lambda_2)}{s^2 + (\lambda_1 + \lambda_2)s + p_{10} \lambda_1 \lambda_2} \quad (\text{B.32})$$

e para $f_{20}^e(s)$

$$f_{20}^e(s) = \frac{\frac{p_{10} \lambda_1 \lambda_2}{(s+\lambda_1)(s+\lambda_2)}}{1 - \frac{p_{12} \lambda_1 \lambda_2}{(s+\lambda_1)(s+\lambda_2)}} = \frac{p_{10} \lambda_1 \lambda_2}{s^2 + (\lambda_1 + \lambda_2)s + p_{10} \lambda_1 \lambda_2} \quad (\text{B.33})$$

A figura B.5 apresenta o diagrama da figura B.1 modificado (a) e sua redução (b), visando a determinação de $f_{00}^e(s)$

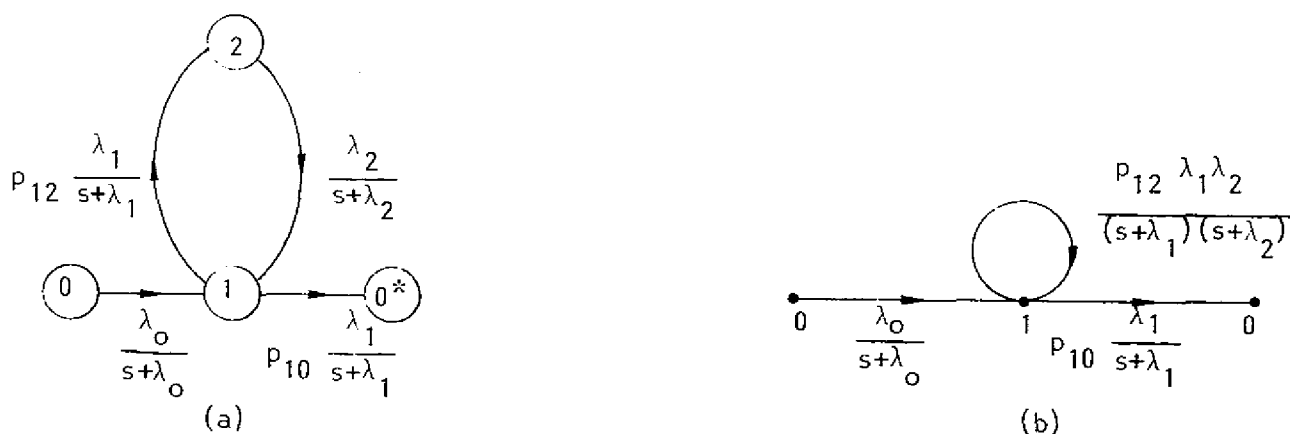


Figura B.5 - Diagrama modificado e sua redução, visando a determinação de $f_{00}^e(s)$

A figura B.5 (b) permite escrever

$$f_{00}^z(s) = \frac{p_{10} \lambda_1 \lambda_0}{(s+\lambda_0)(s+\lambda_1)} \cdot \frac{1}{1 - \frac{p_{12} \lambda_1 \lambda_2}{(s+\lambda_1)(s+\lambda_2)}} = \frac{p_{10} \lambda_1 \lambda_0 (s+\lambda_2)}{(s^2 + (\lambda_1 + \lambda_2)s + p_{10} \lambda_1 \lambda_2)(s+\lambda_0)} \quad (B.34)$$

A substituição de (B.32) e (B.34) em (B.31) leva à determinação de $\omega_{10}^{ge}(z|s)$. Entretanto é mais conveniente inverter a transformada geométrica em (B.31) antes de proceder à substituição. Portanto, de (B.31) tem-se

$$\omega_{10}^{ge}(z|s) = \frac{1}{s} \left[1 - \frac{f_{10}^e(s)}{1-f_{00}^e(s)z} + z \cdot \frac{f_{10}^e(s)}{1-f_{00}^e(s)z} \right] \quad (B.35)$$

Invertendo-se a transformada geométrica, através de uma tabela de transformadas, resulta para a transformada exponencial

$$\omega_{10}^e(n|s) = \begin{cases} \frac{1}{s} \left[f_{10}^e(s) \cdot [f^e(s)]^n + f_{10}^e(s) [f^e(s)]^{n-1} \right] & \text{para } n \geq 1 \quad (B.36a) \\ \frac{1}{s} \left[1 - f_{10}^e(s) \right] & \text{para } n = 0 \quad (B.36b) \end{cases}$$

Introduzindo-se agora (B.32) e (B.34) em (B.36a) e após manipulações algébricas chega-se a

$$\omega_{10}(n|s) = \frac{\lambda_o^{n-1}}{(s+\lambda_o)^n} \cdot \frac{[p_{10}\lambda_1(s+\lambda_2)]^n [s^2+c_1s+c_2]}{[s^2+(\lambda_1+\lambda_2)s+p_{10}\lambda_1\lambda_2]^{n+1}} \quad (\text{B.37})$$

para $n \geq 1$ e onde

$$c_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_o \quad (\text{B.38a})$$

e

$$c_2 = p_{10}\lambda_1(\lambda_2 - \lambda_o) + \lambda_o(\lambda_1 + \lambda_2) \quad (\text{B.38b})$$

Para a determinação exata das funções $\tilde{F}_n(\omega)$ ($n = 1, 2, \dots$) seria necessário o conhecimento de $\tilde{f}_n(\tau)$. Entretanto para se ter uma idéia da faixa de frequências ocupada por estas funções, que é o objetivo dessa seção, é suficiente o conhecimento de $\omega_{10}(n|\tau)$ definida em (B.29) e cuja transformada exponencial foi determinada nesta seção e é fornecida por (B.37). Isto pode ser verificado escrevendo-se, inicialmente, (B.29) na forma

$$\begin{aligned} \omega_{10}(n|\tau) &= P[A_n(t, t+\tau) | x_k(t)=1] = P[A_n(t, t+\tau), x_k(t+\tau)=0 | x_k(t)=1] \\ &+ P[A_n(t, t+\tau), x_k(t+\tau)=1 | x_k(t)=1] + \\ &+ P[A_n(t, t+\tau), x_k(t+\tau)=2 | x_k(t)=1] \end{aligned} \quad (\text{B.39})$$

para $\tau \geq 0$ e onde

$$A_n(t, t+\tau) = \{\omega : \text{o estado } 0 \text{ é ocupado } n \text{ vezes em } (t, t+\tau]\} \quad (\text{B.40})$$

Desta forma

$$\begin{aligned} \omega_{10}(n|\tau) = & \tilde{f}_n(\tau) + P[A_n(t, t+\tau), x_k(t+\tau)=0 | x_k(t)=1] + \\ & + P[A_n(t, t+\tau), x_k(t+\tau)=2 | x_k(t)=1] \quad \tau \geq 0 \end{aligned} \quad (\text{B.41})$$

como é razoável supor-se que a faixa de frequências significativas das transformadas de Fourier das três funções de τ , aparecendo no segundo membro de (B.41), não se diferenciem de forma acentuada, é possível ter uma idéia da faixa de frequências ocupada por

$$F_n(\omega) = 2 \operatorname{Re} \left\{ \int_0^{\infty} \tilde{f}_n(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \right\} \quad n=1,2,\dots \quad (\text{B.42})$$

examinando-se o comportamento de

$$T_n(\omega) \triangleq 2 \operatorname{Re} \left\{ \int_0^{\infty} \omega_{10}(n|\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \right\} = 2 \operatorname{Re} \left\{ \omega_{10}^e(n|s) \Big|_{s=j\omega} \right\} \quad (\text{B.43})$$

Na tabela B.2 estão listados os valores de $T_n(f)$ obtidos de (B.43) e (B.37), para $n=1,2,3,4$ e 5, e para uma faixa compreendendo frequências entre 0 e 6 Hz.

Da mesma forma descrita em B.2, as frequências correspondentes aos valores assinalados na tabela B.2 limitam a faixa de frequências significativas destas funções. Estas faixas

f (Hz)	n=1	n=2	n=3	n=4	n=5
0.000000	3.0710205E+01	3.0812912E+01	3.0915955E+01	3.1019363E+01	3.1123077E+01
0.020000	-3.3743095E+00	-6.4318409E+00	5.9502125E-01	1.7621078E+00	-7.4252903E-02
0.040000	-3.2948799E+00	-6.0592420E-02	1.6298592E-01	-3.5792947E-02	1.1059435E-03
0.060000	-1.7186384E+00	8.5612416E-02	5.7720318E-03	-1.9319131E-03	2.4939189E-03
0.080000	-1.0071507E+00	4.2663746E-02	-5.3358637E-04	-1.1202634E-04	1.4558999E-05
0.100000	-6.5590584E-01	2.0908304E-02	-4.1334305E-04	-5.9613703E-06	1.1678321E-06
0.120000	-4.6065736E-01	1.1107206E-02	-1.9334159E-04	1.0056565E-06	1.1991359E-07
0.140000	-3.4166586E-01	6.3876373E-03	-9.5766416E-05	8.2051139E-07	1.3034211E-08
0.160000	-2.6394606E-01	3.1926999E-03	-4.8863438E-05	4.2401730E-07	6.9693750E-10
0.180000	-2.1040618E-01	2.5398835E-03	-2.6477370E-05	2.1076713E-07	-4.9904703E-10
0.200000	-1.7194129E-01	1.7206506E-03	-1.5160076E-05	1.0758760E-07	-3.9109395E-10
0.220000	-1.4335525E-01	1.2092972E-03	-9.1097845E-06	5.7231027E-08	-2.2634392E-10
0.240000	-1.2151039E-01	8.7645976E-04	-5.7078105E-06	3.1772068E-08	-1.2428150E-10
0.260000	-1.0442287E-01	6.5136026E-04	-3.7077238E-06	1.8360439E-08	-6.8437617E-11
0.280000	-9.0789974E-02	4.9584778E-04	-2.48449833E-06	1.1003642E-08	-3.8452685E-11
0.300000	-7.9727411E-02	3.8439129E-04	-1.7113844E-06	6.8131421E-09	-2.2152064E-11
0.320000	-7.0617974E-02	3.0297131E-04	-1.2069668E-06	4.3427910E-09	-1.3113238E-11
0.340000	-6.3020349E-02	2.4228895E-04	-8.6919306E-07	2.8406468E-09	-7.9582729E-12
0.360000	-5.6611910E-02	1.9625085E-04	-6.3762457E-07	1.9014115E-09	-4.9457383E-12
0.380000	-5.1152572E-02	1.6077296E-04	-4.7549293E-07	1.2992430E-09	-3.1416623E-12
0.400000	-4.6460524E-02	1.3304749E-04	-3.5983089E-07	9.0436725E-10	-2.0352097E-12
0.420000	-4.2395990E-02	1.1110678E-04	-2.7591796E-07	6.4009820E-10	-1.3442684E-12
0.440000	-3.8849801E-02	9.3547482E-05	-2.1410350E-07	4.5995230E-10	-9.0257858E-13
0.460000	-3.5736121E-02	7.9350226E-05	-1.6795195E-07	3.3507619E-10	-6.1548184E-13
0.480000	-3.2986246E-02	6.7764602E-05	-1.3304975E-07	2.4719649E-10	-4.2573952E-13
0.500000	-3.0544803E-02	5.8230304E-05	-1.0633550E-07	1.8446034E-10	-2.9839694E-13
0.520000	-2.8366692E-02	5.0323026E-05	-8.5728844E-08	1.3911558E-10	-2.1170901E-13
0.540000	-2.6414901E-02	4.3718523E-05	-6.9628300E-08	1.0595069E-10	-1.5191537E-13
0.560000	-2.4658322E-02	3.8166055E-05	-5.6956111E-08	8.1427282E-11	-1.1015584E-13
0.580000	-2.3072772E-02	3.3469530E-05	-4.6898059E-08	6.3110295E-11	-8.0680579E-14
0.599999	-2.1635368E-02	2.9474890E-05	-3.8854111E-08	4.9300508E-11	-5.9634697E-14
0.619999	-2.0328380E-02	2.6059221E-05	-3.2375098E-08	3.8797382E-11	-4.4452203E-14
0.639999	-1.9136436E-02	2.3124448E-05	-2.7122034E-08	3.0743713E-11	-3.3421440E-14
0.659999	-1.8046327E-02	2.0591353E-05	-2.2836453E-08	2.4520330E-11	-2.5316317E-14
0.679999	-1.7046675E-02	1.8395498E-05	-1.9319664E-08	1.9577635E-11	-1.9316580E-14
0.699999	-1.6127706E-02	1.6484366E-05	-1.6418049E-08	1.5882795E-11	-1.4849520E-14
0.719999	-1.5280992E-02	1.4914798E-05	-1.4011661E-08	1.2390305E-11	-1.1473626E-14
0.739999	-1.4499068E-02	1.3350933E-05	-1.2006140E-08	1.0516102E-11	-8.9303971E-15
0.759999	-1.3775490E-02	1.0926312E-05	-1.0327007E-08	8.6216364E-12	-6.9902851E-15
0.779999	-1.3104573E-02	1.0926544E-05	-8.9149809E-09	7.1017081E-12	-5.5025463E-15
0.799999	-1.2481354E-02	9.9204062E-06	-7.7226545E-09	5.8759820E-12	-4.3548166E-15
0.819999	-1.1901394E-02	9.0271642E-06	-6.7118694E-09	4.8826520E-12	-3.4642572E-15
0.839999	-1.1360765E-02	8.2319330E-06	-5.8517931E-09	4.0737431E-12	-2.7693910E-15
0.859999	-1.0856010E-02	7.5221033E-06	-5.1170979E-09	3.4121386E-12	-2.22433314E-15
0.879999	-1.0384031E-02	6.8695222E-06	-4.4875961E-09	2.86868379E-12	-1.7946557E-15
0.899999	-9.9420398E-03	6.3172411E-06	-3.9463828E-09	2.4204441E-12	-1.4542747E-15
0.919999	-9.5275268E-03	5.8050318E-06	-3.4795713E-09	2.0492427E-12	-1.1833554E-15
0.939999	-9.1383159E-03	5.3435397E-06	-3.0757570E-09	1.7407057E-12	-9.6677461E-16
0.959999	-8.7723657E-03	4.9268619E-06	-2.7254217E-09	1.48333161E-12	-7.9298213E-16
0.979999	-8.4278509E-03	4.5498709E-06	-2.4206295E-09	1.26783357E-12	-6.5268039E-16
0.999999	-8.1031471E-03	4.2081538E-06	-2.1547566E-09	1.0868511E-12	-5.3919957E-16

1.099998	-6.7292601E-03	2.9084458E-06	-1.2422032E-09	5.2392953E-13	-2.1799563E-16
1.199998	-5.5761093E-03	2.0728839E-06	-7.4937345E-10	2.6804654E-13	-9.4795057E-17
1.299997	-4.8513003E-03	1.5163223E-06	-4.6981929E-10	1.4425169E-13	-4.3865481E-17
1.399997	-4.1934475E-03	1.1342463E-06	-3.0446823E-10	8.1088185E-14	-2.1417950E-17
1.499996	-3.6604656E-03	8.6504872E-07	-2.0307062E-10	4.7344195E-14	-1.0958745E-17
1.599996	-3.2226997E-03	6.7103291E-07	-1.3890039E-10	2.8578174E-14	-5.8423332E-18
1.699995	-2.8598059E-03	5.2839141E-07	-9.7150576E-11	1.7766347E-14	-3.2309427E-18
1.799994	-2.5530830E-03	4.2165402E-07	-6.9311334E-11	1.1338688E-14	-1.8457228E-18
1.899994	-2.2977893E-03	3.4051618E-07	-5.0736429E-11	7.4083075E-15	-1.0856340E-18
1.999993	-2.0719953E-03	2.7796193E-07	-3.7146286E-11	4.9447954E-15	-6.5550288E-19
2.099992	-1.8808148E-03	2.2911502E-07	-2.7812821E-11	3.5647312E-15	-4.0548042E-19
2.199992	-1.7148759E-03	1.9052857E-07	-2.1100982E-11	2.3293338E-15	-2.5629664E-19
2.299992	-1.5699277E-03	1.5972444E-07	-1.6202928E-11	1.6388139E-15	-1.6525435E-19
2.399991	-1.4425786E-03	1.3489455E-07	-1.2580020E-11	1.1790007E-15	-1.0851421E-19
2.499990	-1.3300958E-03	1.1470246E-07	-9.869684E-12	8.4653390E-16	-7.2453296E-20
2.599990	-1.2302535E-03	9.8148064E-08	-7.8121225E-12	6.2035648E-16	-4.9147447E-20
2.699989	-1.1412348E-03	8.4471765E-08	-6.2390953E-12	4.5982835E-16	-3.3815848E-20
2.799989	-1.0615243E-03	7.3094895E-08	-5.0232110E-12	3.4451202E-16	-2.3539102E-20
2.899988	-9.8937396E-04	6.3563962E-08	-4.0747943E-12	2.6070742E-16	-1.6643590E-20
2.999988	-9.2523033E-04	5.5544255E-08	-3.3287054E-12	1.9913731E-16	-1.1892169E-20
3.099987	-8.6671207E-04	4.8745311E-08	-2.7371196E-12	1.5344034E-16	-8.5874725E-21
3.199986	-8.1356708E-04	4.2955477E-08	-2.2645445E-12	1.1919335E-16	-6.2645362E-21
3.299985	-7.6516205E-04	3.7999593E-08	-1.8344318E-12	9.3315688E-17	-4.6141782E-21
3.399985	-7.2094705E-04	3.3737727E-08	-1.5766676E-12	7.3582289E-17	-3.4293228E-21
3.499985	-6.8045408E-04	3.0056619E-08	-1.3259472E-12	5.8418989E-17	-2.5705058E-21
3.599984	-6.4332766E-04	2.6863852E-08	-1.1205047E-12	4.6680032E-17	-1.9423041E-21
3.699984	-6.0906168E-04	2.4093775E-08	-9.5123935E-13	3.7528036E-17	-1.4783317E-21
3.799983	-5.7750475E-04	2.1654031E-08	-8.1105565E-13	3.0345088E-17	-1.1340925E-21
3.899982	-5.4833572E-04	1.9522922E-08	-6.9437706E-13	2.4671515E-17	-8.7557448E-22
3.999982	-5.2132085E-04	1.7647544E-08	-5.9681295E-13	2.0163381E-17	-6.8054790E-22
4.099981	-4.9625373E-04	1.5991936E-08	-5.1486755E-13	1.6560791E-17	-5.3217804E-22
4.199980	-4.7294382E-04	1.4525988E-08	-4.4574804E-13	1.3668117E-17	-4.1861914E-22
4.299980	-4.5124954E-04	1.3224117E-08	-3.8721110E-13	1.1328136E-17	-3.3112811E-22
4.399979	-4.3100771E-04	1.2064810E-08	-3.3744545E-13	9.4304579E-18	-2.6333323E-22
4.499978	-4.1209767E-04	1.1029769E-08	-2.9498225E-13	7.8829138E-18	-2.1049288E-22
4.599978	-3.9440463E-04	1.0103342E-08	-2.5862190E-13	6.6151817E-18	-1.6909013E-22
4.699978	-3.7782639E-04	9.2721280E-09	-2.2738257E-13	5.5721798E-18	-1.3645224E-22
4.799977	-3.6227144E-04	8.5246441E-09	-2.0045727E-13	4.7105322E-18	-1.1051630E-22
4.899977	-3.4765713E-04	7.8509572E-09	-1.7717733E-13	3.9958663E-18	-9.0053582E-23
4.999976	-3.3390918E-04	7.2425053E-09	-1.5699128E-13	3.4008571E-18	-7.3624982E-23
5.099976	-3.2096077E-04	6.6918560E-09	-1.3943707E-13	2.9035653E-18	-5.0429623E-23
5.199975	-3.0875090E-04	6.1925434E-09	-1.2413009E-13	2.4867465E-18	-4.9738760E-23
5.299974	-2.9722438E-04	5.7399329E-09	-1.1074767E-13	2.1359523E-18	-4.1172557E-23
5.399974	-2.8633093E-04	5.3260333E-09	-9.9018016E-14	1.8398538E-18	-3.4451902E-23
5.499973	-2.7602562E-04	4.9497046E-09	-8.8712186E-14	1.5891331E-18	-2.8451802E-23
5.599973	-2.6626675E-04	4.6059832E-09	-7.9636039E-14	1.3761837E-18	-2.3759906E-23
5.699972	-2.5701593E-04	4.2915751E-09	-7.1624672E-14	1.1948053E-18	-1.9921426E-23
5.799972	-2.4823914E-04	4.0035388E-09	-6.4537785E-14	1.0398736E-18	-1.6747214E-23
5.899971	-2.3990398E-04	3.7392556E-09	-5.8255430E-14	9.0717642E-19	-1.4120446E-23
5.999970	-2.3198171E-04	3.4964276E-09	-5.2675048E-14	7.9322392E-19	-1.1939735E-23

Tabela B.2 - Valores de $T_n(f)$, para $n=1,2,3,4$ e 5 e para Frequências entre 0 e 6 Hz

diminuíram com o aumento de n e no pior caso ($n=1$) esta faixa resultou inferior a 5.2 Hz. Portanto é razoável supor-se que as faixas de frequências significativas das funções $\tilde{F}_n(\omega)$ ($n \geq 1$) são dessa ordem de grandeza. Tais funções concentram-se, portanto, em uma faixa de frequências muito baixas.

B.4 - Determinação da Função $G(\omega)$

A função $G(\omega)$ definida em (4.33) representa a transformada de Fourier de $g(\tau)$ onde

$$g(\tau) \triangleq \frac{1}{P[x_k(t) \neq 0]} \cdot P[C_0(t, t+\tau)] = 2 P[C_0(t, t+\tau)] \quad (B.44)$$

Da definição do evento $C_n(t, t+\tau)$, expressa em (4.25) com $n=0$, resulta

$$g(\tau) = 2 \left\{ P[\text{estado 0 ser ocupado 0 vezes em } (t, t+\tau] \mid x_k(t)=1] \cdot P[x_k(t)=1] + \right. \\ \left. + P[\text{estado 0 ser ocupado 0 vezes em } (t, t+\tau] \mid x_k(t)=2] \cdot P[x_k(t)=2] \right\} \quad (B.45)$$

Através da definição de $\omega_{ij}(n|\tau)$ dada no início da seção B.3 e dos valores para $P[x_k(t)=1]$ e $P[x_k(t)=2]$ fornecidos na seção B.1, (B.45) pode ser escrita como

$$g(\tau) = 2 [0,4 \cdot \omega_{10}(0|\tau) + 0,1 \cdot \omega_{20}(0|\tau)] \quad \text{para } \tau \geq 0 \quad (B.46)$$

Utilizando-se (B.36b), que fornece a transformada exponencial de $w_{10}(0|\tau)$ e de forma análoga a transformada de $w_{20}(0|\tau)$, resulta para a transformada exponencial de $g(\tau)$

$$g^e(s) = 2 \left[0,4 \cdot \frac{1}{s} (1 - f_{10}^e(s)) + 0,1 \cdot \frac{1}{s} (1 - f_{20}^e(s)) \right] \quad (\text{B.47})$$

A substituição de (B.32) e (B.33) em (B.47) conduz a

$$g^e(s) = \frac{s + \lambda_1 \lambda_2 - 0,8 p_{10} \lambda_1}{s^2 + (\lambda_1 + \lambda_2) s + p_{10} \lambda_1 \lambda_2} \quad (\text{B.48})$$

É fácil mostrar que $g(\tau)$ é função par de τ , portanto

$$G(\omega) = 2 \operatorname{Re} \left\{ \int_0^\infty g(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \right\} = 2 \operatorname{Re} \left. g^e(s) \right|_{s=j\omega} \quad (\text{B.49})$$

Na tabela B.3 estão listados os valores de $G(f)$, obtidos através de (B.49) e (B.48), para uma faixa compreendendo frequências entre 0 e 6 Hz.

Os resultados mostram que esta função possui máximo em $f=0$ e decai, sem oscilar, rapidamente para 0, de tal forma que em $f=6,0$ Hz o valor de $G(f)$ já está praticamente 50 dB abaixo de seu valor em $f=0$. A função $G(f)$ encontra-se portanto concentrada em uma faixa de frequências muito baixas (inferiores a 6 Hz).

f(Hz)	G(f)	f(Hz)	G(f)
0.00000	1.5072452E+01	0.99999	0.00999927E-03
0.00000	7.9474297E+00	1.09999	0.0143919E-03
0.04000	3.2494395E+00	1.19999	4.6550079E-03
0.05000	1.0040004E+00	1.29997	0.95000490E-03
0.08000	9.0441162E-01	1.39999	3.4071542E-03
0.10000	6.4166228E-01	1.49999	2.9092252E-03
0.12000	4.4440949E-01	1.59999	4.0094337E-03
0.14000	3.2916438E-01	1.69999	2.0117598E-03
0.16000	2.5540007E-01	1.79994	2.0622439E-03
0.18000	2.0101094E-01	1.89999	1.3510409E-03
0.20000	1.5330088E-01	1.99999	1.0700917E-03
0.22000	1.1359130E-01	2.09999	1.0154009E-03
0.24000	1.1334211E-01	2.19992	1.3309074E-03
0.26000	9.7201228E-02	2.29992	1.2030021E-03
0.28000	8.3426678E-02	2.39991	1.1004554E-03
0.30000	7.3117246E-02	2.49990	1.0093176E-03
0.32000	6.4401936E-02	2.59990	9.0000574E-04
0.34000	5.7101704E-02	2.69999	8.1700070E-04
0.36000	5.0976627E-02	2.79999	6.5209475E-04
0.38000	4.5787044E-02	2.89998	7.043247E-04
0.40000	4.1351728E-02	2.99998	7.4232501E-04
0.42000	3.7531234E-02	3.09998	6.9500093E-04
0.44000	3.4216940E-02	3.19996	6.5290043E-04
0.46000	3.123142E-02	3.29996	6.1594006E-04
0.48000	2.8781593E-02	3.39993	5.7836719E-04
0.50000	2.6537329E-02	3.49993	5.4573594E-04
0.52000	2.4545714E-02	3.59993	5.1500036E-04
0.54000	2.2770131E-02	3.69993	4.8839999E-04
0.56000	2.1180003E-02	3.79993	4.6303775E-04
0.58000	1.9751780E-02	3.89992	4.3900125E-04
0.60000	1.8402814E-02	3.99992	4.1739981E-04
0.62000	1.7206016E-02	4.09991	3.9773717E-04
0.64000	1.6200417E-02	4.19991	3.7900411E-04
0.66000	1.5271209E-02	4.29990	3.6163162E-04
0.68000	1.4339064E-02	4.39990	3.4538307E-04
0.70000	1.3532237E-02	4.49997	3.3020554E-04
0.72000	1.2840097E-02	4.59997	3.1600660E-04
0.74000	1.2155617E-02	4.69997	3.0270452E-04
0.76000	1.1529262E-02	4.79997	2.9022479E-04
0.78000	1.0944653E-02	4.89997	2.7850131E-04
0.80000	1.0400676E-02	4.99997	2.6747358E-04
0.82000	9.9007730E-03	5.09997	2.5708630E-04
0.84000	9.4394022E-03	5.19997	2.4729088E-04
0.86000	9.0110075E-03	5.29997	2.3805432E-04
0.88000	8.6072033E-03	5.39997	2.2932008E-04
0.90000	8.2000062E-03	5.49997	2.2105774E-04
0.92000	7.8770071E-03	5.59997	2.1323407E-04
0.94000	7.562349E-03	5.69997	2.0581556E-04
0.96000	7.2553549E-03	5.79997	1.9873315E-04
0.98000	6.9442317E-03	5.89997	1.9210245E-04
0.99999		5.99997	1.8575290E-04

Tabela B.3 - Valores de G(f), para Frequências entre 0 e 6 Hz

REFERÊNCIAS

- [1] - P.M. BOUDREAU, and N.G. DAVIES, "Modulation and Speech Processing for Single-Channel-Per-Carrier Satellites and Communications", 1971 IEEE International Conference and Communications Record, pp. 19-9/19-15.
- [2] - J.C. FUENZALIDA, O. SHIMBO, W.L. COOK, "Time-Domain Analysis of Intermodulation Effects Caused by Nonlinear Amplifiers", COMSAT Technical Review, vol 3, nº 1, Spring 1973, pp 89-143.
- [3] - R.J. WESTCOTT, "Investigation of Multiple FM/FDM Carriers Through a Satellite TWT Operating Near to Saturation", Proceedings of the IEE, vol. 114, nº 6, June 1967, pp 726-750.
- [4] - E. YOUSSEFZADEH, "Satellite and Ground Station Intermodulation in Single Channel Per Carrier Systems", Communication Satellite Planning Center, Technical Report nº 7, June 1976, Stanford University.
- [5] - B.A. PONTANO, J.C. FUENZALIDA, N.K.M. CHITRE, "Interference into Angle-Modulated Systems Carrying Multichannel Telephony Signals", IEEE Trans. Commun., vol. COM-21, June 1973, pp. 714-727.
- [6] - H.L. VAN TREES, "Detection, Estimation and Modulation Theory- Part III", John Wiley & Sons, 1971, pp. 565-604.
- [7] - S.J. CAMPANELLA, H.G. SUYDERHOUD, M. WACHS, "Frequency Modulation and Variable Slope Delta Modulation in SCPC Satellite Transmission", Proceedings of the IEEE, vol. 65, nº 3, March 1977, pp 419-434.

[8] - CCITT Recommendation G.227

[9] - R.A. HOWARD, "Dynamic Probabilistic Systems - volume II",
John Wiley & Sons, 1971.

[10] - S.J. CAMPANELLA, "Digital Speech Interpolation", COMSAT
Technical Review, vol. 6, n° 1, Spring 1976, pp 127-158.

Tese apresentada aos Professores

José Paulo de Almeida e Albuquerque
José Paulo de Almeida e Albuquerque

Orientador

José Roberto Boisson de Marca
José Roberto Boisson de Marca

Akira Togashi
Akira Togashi

Visto e permitida a impressão

Rio de Janeiro, 3/07/78

Responsável
Coordenador dos Programas de Pós-Graduação
e Pesquisa do Centro Técnico Científico