

Referências Bibliográficas

- [1] L. Borland. Option pricing formulas based on a non-gaussian stock price model. *Phys. Rev. Lett.*, 89:098701, 2002. 1, 3.4
- [2] S. Ghashghaie, W. Breymann, J. Peinke, and P. Talkner. Turbulent cascades in foreign exchange markets. *Nature*, (381):767, 1996. 1, 1.3
- [3] A. Krawiecki, J.A. Holyst, and D. Helbing. Volatility clustering and scaling for financial time series due to attractor bubbling. *Phys. Rev. Lett.*, (89):158701, 2002. 1
- [4] D.L. Cassidy. *Trading on Volume: The Key to Identifying and Profiting from Stock Price Reversals*. McGraw-Hill, New York, 2002. 1.1
- [5] L. Bachelier. Theorie de la especulation. *Ann.Sci. Ecole Norm. Sup.*, (17):21, 1900. 1.2
- [6] E. Fama. Efficient capital markets: A review of theory and empirical work. *Journal of Finance*, 25:383, 1970. 1.2
- [7] B. Mandelbrot. The variation of certain speculative prices. *J. Business*, (36):394–419, 1963. 1.2
- [8] J.L. McCauley and G.H. Gunaratne. *Physica A*, (329):178, 2003. 1.2
- [9] A.C. Silva, R.E. Prange, and V.M. Yakovenko. *Physica A*, (344):227, 2004. 1.2
- [10] C. Tsallis. Possible generalization of boltzmann-gibbs statistics. *J. Stat. Phys.*, (52):4791, 1988. 1.2, 2.1.2, 2.3
- [11] C. Tsallis. *Non-Extensive Entropy-Interdisciplinary Applications*. Oxford University Press, Oxford, 2004. 1.2
- [12] C. Tsallis, C. Anteneodo, L. Borland, and R. Osorio. Nonextensive statistical mechanics and economics. *Physica A*, (324):89, 2003. 1.2, 1.2, 3.4, 5.2, 5.3, 7.3

- [13] P. Gopikrishnan, V. Plerou, X. Gabaix, and H.E. Stanley. Statistical properties of share volume traded in financial markets. *Phys. Rev. E*, (62):R4493, 2000. 1.2
- [14] X. Gabaix, P. Gopikrishnan, V. Plerou, and H.E. Stanley. Institutional investors and stock market volatility. *Quarterly Journal of Economics*, (121):461, 2006. 1.2
- [15] R. Osorio, L. Borland, and C. Tsalli. *Nonextensive Entropy - Interdisciplinary Applications*. Oxford University Press, New York, 2004. 1.2, 5.2, 5.3, 7.3
- [16] S.M.D. Queirós. On the emergence of a generalised gamma distribution. application to traded volume in financial markets. *Europhysics Letters*, (71):339, 2005. 1.2, 5.2, 7.3
- [17] J. de Souza, L.G. Moyano, and S.M.D. Queirós. On statistical properties of traded volume in financial markets. *Eur. Phys. J. B.*, (50):165, 2006. 1.2, 7.3
- [18] S.M.D. Queirós and L.G. Moyano. Yet on statistical properties of traded volume: Correlation and mutual information at different value magnitudes. *Physica A*, (383):10, 2007. 1.2, 7.3
- [19] S.M.D. Queirós, L.G. Moyano, J. de Souza, and C. Tsallis. A nonextensive approach to the dynamics of financial observables. *Eur. Phys. J. B.*, (55):161, 2007. 1.2
- [20] Friedrich R., Peinke J., and Renner C. How to quantify deterministic and random influences on the statistics of the foreign exchange market. *Phys. Rev. Lett.*, 84:5224, 2000. 1.3, 2.2.4, 3.2, 3.2, 3.2, 3.3, 3.5, 4.4
- [21] W. Feller. *An introduction to probability theory and its applications*. Wiley, New York, 1968. 2, 2.1.1, 2.2.6, 5.3
- [22] C. Anteneodo. *Processos Estocásticos*. V Escola do CBPF, 2004. 2
- [23] N.G.V. Kampen. *Stochastic processes in physics and chemistry*. Amsterdam, New York: North-Holland, 1981. 2, 2.2.1, 1, 2.2.1
- [24] H. Risken. *The Fokker-Planck Equation: Methods of Solution and Applications*. Springer-Verlag, Berlin, 1984. 2, 2.2, 2.2.1, 2.2.4, 2.2.4, 2.2.5, 3.2, 3.4, 6.1

- [25] R.B. Cooper. *Introduction to queuing theory*. Elsevier North Holland, Inc., New York, 1981. 2.1.1, 7.3
- [26] C. Renner, Peinke J., and R. Friedrich. Evidence of markov properties of high frequency exchange rate data. *Physica A*, 298:499, 2001. 2.2.4, 3.5, 4.4
- [27] F. Farahpour, Z. Eskandari, A. Bahraminasab, G.R. Jafari, F. Ghasemi, M. Sahimi, and M.R.R. Tabar. A langevin equation for the rates of currency exchange based on the markov analysis. *Physica A*, (385):601, 2007. 2.2.4, 3.5
- [28] F. Ghasemi, M. Sahimi, J. Peinke, R. Friedrich, G.R. Jafari, and M.R.R. Tabar. Markov analysis and kramers-moyal expansion of nonstationary stochastic processes with application to the fluctuations in the oil price. *Phys. Rev. E*, (75):060102, 2007. 2.2.4, 3.5, 4.3
- [29] A.A.G. Cortines, R. Riera, and C. Anteneodo. From short to fat tails in financial markets: a unified description. *Eur. Phys. J. B*, (60):385, 2007. 2.2.4, 3.5, 4.4
- [30] G. Wilk and Z. Wlodarczyk. Interpretation of the nonextensivity parameter q in some applications of tsallis statistics and levy distributions. *Phys. Rev. Lett.*, (84):2770, 2000. 2.3, 2.3, 5.3, 7.3
- [31] C. Beck and E.G.D. Cohen. *Physica A*, (322):267, 2003. 2.3, 7.3
- [32] C. Tsallis and A.M.C. Souza. Constructing a statistical mechanics for beck-cohen superstatistics. *Phys. Rev. E*, (67):026106, 2003. 2.3
- [33] J.B. McDonald and R.J. Butler. Some generalized mixture distributions with an application to unemployment duration. *Review of Economics and Statistics*, (69):232, 1987. 2.3
- [34] B.A. Maguire, E.S. Pearson, and A.H.A. Wynn. Evidence of increment of efficiency of the mexican stock market through the analysis of its variations. *Biometrika*, (39):168, 1952. 2.3
- [35] K. Ivanova, M. Ausloos, and H. Takayasu. Deterministic and stochastic influences on japan and us stock and foreign exchange markets: A fokker-planck approach. *cond-mat*, (0301268), 2003. 3.2, 3.5, 4.4
- [36] M. Karth and J. Peinke. *Complexity*. John Wiley & Sons Inc., New York, 2002. 3.2

- [37] W.H. Press, B.P. Flannery, S.A. Teukolsky, and W.T. Vetterling. *Numeric Recipes. The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, Cambridge, 1986. 3.4, 5.3
- [38] A. Schenzle and H. Brand. Multiplicative stochastic-processes in statistical physics. *Phys. Rev. A*, (20):1628, 1979. 3.4
- [39] C. Anteneodo and C. Tsallis. Multiplicative noise: a mechanism leading to nonextensive statistical mechanics. *J. Math. Phys.*, (44):5194, 2003. 3.4, 4.5
- [40] C. Anteneodo and R. Riera. Additive-multiplicative stochastic models of financial mean-reverting processes. *Phys. Rev. E*, (72):026106, 2005. 3.4, 4.5, 7.3
- [41] V. Plerou, P. Gopikrishnan, L.A.N. Amaral, M. Meyer, and H.E. Stanley. Scaling of the distribution of price fluctuations of individual companies. *Phys. Rev. E*, (60):6519, 1999. 3.4
- [42] R. Huisman, K.G. Koedijk, C.J.M. Kool, and F. Palm. Tail-index estimates in small samples. *Journal of Business and Economic Statistics*, (19):208, 2001. 3.4
- [43] N. Kozuki and N. Fuchikami. Dynamical model of financial markets: fluctuating 'temperature' causes intermittent behavior of price changes. *Physica A*, (329):222, 2003. 3.4
- [44] M. Ausloos and K. Ivanova. Dynamical model and nonextensive statistical mechanics of a market index on large time windows. *Phys. Rev. E*, (68):046122, 2003. 3.4, 3.5, 4.4
- [45] A.P. Nawroth and J. Peinke. Small scale behavior of financial data. *Eur. Phys. J. B*, (50):147, 2006. 3.4
- [46] H.F. Coronel-Brizio, A.R. Hernandez-Montoya, and R. Huerta-Quintanilla. Evidence of increment of efficiency of the mexican stock market through the analysis of its variations. *Physica A*, (380):391, 2007. 4.1
- [47] N.B. Ferreira, R. Menezes, and D.A. Mendes. Asymmetric conditional volatility in international stock markets. *Physica A*, (382):73, 2007. 4.1
- [48] J.H. Park, S.K. Nam, and K.S. Eom. Market efficiency in kosdaq: A volatility comparison between main boards and new markets using a

- permanent and transitory component model. *Asia-Pacific Journal of Financial Studies*, (36):533, 2007. 4.1
- [49] S. Edwards and R. Susmel. Interest-rate volatility in emerging markets. *Review of Economics and Statistics*, (85):328, 2003. 4.1
- [50] T. Di Matteo, T. Astel, and M.M. Dacorogna. Scaling behaviors in differently developed markets. *Physica A*, (324):183, 2003. 4.1, 4.5
- [51] T. Di Matteo, T. Astel, and M.M. Dacorogna. Long-term memories of developed and emerging markets: Using the scaling analysis to characterize their stage of development. *J. Banking and Finance*, (29):827, 2005. 4.1, 4.5
- [52] D.O. Cajueiro and B.M. Tabak. The hurst exponent over time: testing the assertion that emerging markets are becoming more efficient. *Physica A*, (336):521, 2004. 4.1, 4.5
- [53] D.O. Cajueiro and B.M. Tabak. Ranking efficiency for emerging markets. *Chaos Solutions and Fractals*, (22):349, 2004. 4.1, 4.5
- [54] L. Zunino, B.M. Tabak, D.G. Pérez, M. Garavaglia, and O.A. Rosso. Inefficiency in latin-american market indices. *Eur. Phys. J. B*, (60):111, 2007. 4.1, 4.5
- [55] B.L. Lan and Y.O. Tan. Statistical properties of stock market indices of different economies. *Physica A*, (375):605, 2007. 4.1
- [56] T. Qiu, B. Zheng, and F. Ren et al. Statistical properties of german dax and chinese indices. *Physica A*, (378):387, 2007. 4.1
- [57] R. Davidson and J.G. MacKinnon. *Estimation and Inference in Econometrics*. Oxford University Press, New York, 1993. 4.3, A.1.4
- [58] R.L. Costa and G.L. Vasconcelos. Long-range correlations and nonstationarity in the brazilian stock market. *Physica A*, (329):231, 2003. 4.5
- [59] H. Takayasu, A.H. Sato, and M. Takayasu. Stable infinite variance fluctuations in randomly amplified langevin systems. *Phys. Rev. Lett.*, (79):966, 1997. 4.5
- [60] D. Sornette. Multiplicative processes and power laws. *Phys. Rev. E*, (57):4811, 1998. 4.5

- [61] A.A.G. Cortines, C. Anteneodo, and R. Riera. Stock index dynamics worldwide: a comparative analysis. *Eur. Phys. J. B*, (65):289, 2008. 4.7
- [62] A.A.G. Cortines, R. Riera, and C. Anteneodo. Measurable inhomogeneities in stock trading volume flow. *Europhysics Letters*, (83):30003, 2008. 5.4
- [63] P.E. Kloeden and E. Platen. *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*. Springer-Verlag, Berlin, 1992. 6.2, 6.3, 6.3, A.1.3, A.1.3
- [64] P. Sura and J. Barsugli. A note on estimating drift and diffusion parameters from timeseries. *Physics Letters A*, (305):304, 2002. 6.3, 6.3
- [65] C. Anteneodo and R. Riera. Arbitrary-order corrections for finite-time drift and diffusion coefficients. *Physical Review E*, (80):031103, 2009. 6.3, 6.4, A.1.3
- [66] C. Anteneodo, R. Riera, and A.A.G. Cortines. *em preparação*, 2009. 6.4
- [67] B. Littlewood and J.L. Verall. Bayesian reliability growth model for computer software. *Applied Statistics*, (22):332, 1973. 7.3
- [68] R.W. Katz, G.S. Brush, and M.B. Parlange. Statistics of extremes: Modeling ecological disturbances. *Ecology*, (86):1124, 2005. 7.3
- [69] R.S. Mendes, L.C. Malacarne, and C. Anteneodo. Statistics of football dynamics. *Eur. Phys. J. B*, (57):357, 2007. 7.3
- [70] C. Beck. Statistics of three-dimensional lagrangian turbulence. *Phys. Rev. Lett.*, (98):064502, 2007. 7.3
- [71] A.M. Reynolds, N. Mordant, A.M. Crawford, and E. Bodenschatz. On the distribution of lagrangian accelerations in turbulent flows. *New J. Phys.*, (7):58, 2005. 7.3
- [72] L.L. Chen and C. Beck. A superstatistical model of metastasis and cancer survival. *Physica A*, (387):3162, 2008. 7.3
- [73] W. Enders. *Applied econometric time series*. Wiley, New York, 1995. A.1.4

A Apêndices

A.1 Considerações Teóricas Complementares

A.1.1 Sobre a solução invariante da EFP

Vamos buscar soluções invariantes para a EFP (3.11), de acordo com o obtido empiricamente para escalas τ longas e curtas, assumindo comportamento de $b_0(\tau)$ dado pela Eq. (3.10). Para tal, consideramos soluções da forma:

$$P(r, \tau) \equiv \frac{1}{\sigma(\tau)} p\left(\frac{r}{\sigma(\tau)}\right). \quad (\text{A.1})$$

Fazendo $x = r/\sigma(\tau)$, podemos definir a função τ -invariante:

$$p(x) \equiv \sigma(\tau) P(\sigma(\tau)x, \tau). \quad (\text{A.2})$$

Substituindo a Eq. (A.1) na Eq. (3.11), obtemos:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} P(r, \tau)|_{r=cte} = \frac{\sigma'(\tau)}{\sigma^2(\tau)} [1 + x d_x] p(x). \quad (\text{A.3})$$

As derivadas em r da EFP (3.11), podem ser reescritas como

$$-\partial_r(D^{(1)}(r, \tau)P(r, \tau)) = \frac{a_1}{\sigma(\tau)} [1 + x d_x] p(x), \quad (\text{A.4})$$

e

$$\partial_r^2(D^{(2)}(r, \tau)P(r, \tau)) = \frac{2b_2}{\sigma(\tau)} [1 + 2x d_x] p(x) + \frac{1}{\sigma(\tau)} \left[\frac{b_0(\tau)}{\sigma^2(\tau)} + 2b_2 x^2 \right] d_x^2 p(x). \quad (\text{A.5})$$

Das Eqs. (A.3), (A.4) e (A.5), obtém-se que:

$$\left[\frac{b_0(\tau)}{\sigma^2(\tau)} + b_2 x^2 \right] d_x^2 p(x) + \left[a_1 + 4b_2 + \frac{\sigma'(\tau)}{\sigma(\tau)} \right] x d_x p(x) + \left[a_1 + 2b_2 + \frac{\sigma'(\tau)}{\sigma(\tau)} \right] p(x) = 0. \quad (\text{A.6})$$

De acordo com a Eq. (A.2), considerando o *ansatz* q -gaussiano (3.12), obtém-se a forma τ -invariante:

$$p(x) \equiv C_q \frac{1}{[\mathcal{A} + b_2 x^2]^\theta}, \quad (\text{A.7})$$

onde $\theta = \frac{\mu+1}{2}$, C_q é uma constante de normalização e $\mathcal{A} = b_0(\tau)/\sigma^2(\tau)$ é independente de τ .

Substituindo a Eq. (A.7) na Eq. (A.6), e agrupando os termos equivalentes:

$$\frac{4\theta(\theta+1)b_2x^2 - [a_1 + 4b_2 + \frac{\sigma'(\tau)}{\sigma(\tau)}]2b_2\theta x^2}{[\mathcal{A} + b_2x^2]^{1+\theta}} + \frac{a_1 + 2b_2 + \frac{\sigma'(\tau)}{\sigma(\tau)} - 2b_2\theta}{[\mathcal{A} + b_2x^2]^\theta} = 0. \quad (\text{A.8})$$

Igualando a zero os coeficientes do polinômio, temos para os dois termos da Eq. (A.8):

$$a_1 + 2b_2 + \frac{\sigma'(\tau)}{\sigma(\tau)} = 2b_2\theta. \quad (\text{A.9})$$

Logo,

$$\theta = \frac{a_1 + 2b_2 + \frac{\sigma'(\tau)}{\sigma(\tau)}}{2b_2}. \quad (\text{A.10})$$

A partir da Eq. (3.12), encontramos:

$$\mu = 1 + \frac{a_1 + \frac{\sigma'(\tau)}{\sigma(\tau)}}{b_2}. \quad (\text{A.11})$$

Considerando a Eq. (3.10) para $b_0(\tau)$:

$$\frac{b'_0(\tau)}{b_0(\tau)} = -\gamma \ln 2 \equiv -B. \quad (\text{A.12})$$

Do fato que $b_0(\tau) \propto \sigma^2(\tau)$:

$$\frac{\sigma'(\tau)}{\sigma(\tau)} = \frac{1}{2} \frac{b'_0(\tau)}{b_0(\tau)} = -\frac{B}{2}. \quad (\text{A.13})$$

Logo, usando a Eq. (A.11)

$$\mu = 1 + \frac{a_1 - B/2}{b_2}, \quad (\text{A.14})$$

que equivale à Eq. (3.13).

Vamos agora proceder à dedução da Eq. (3.14). A Eq. (3.12) pode ser reescrita como:

$$P(r, \tau) \sim (1 + \frac{b_2}{b_0(\tau)}r^2)^{-(\mu+1)/2}. \quad (\text{A.15})$$

Relacionando os expoentes das Eqs. (A.15) e (2.10), temos:

$$\begin{aligned} \frac{1+\mu}{2} &= \frac{1}{q-1}, \\ q &= \frac{3+\mu}{1+\mu}. \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Assim, podemos estabelecer a relação:

$$\frac{q-1}{5-3q} = \frac{1}{\mu-2}. \quad (\text{A.17})$$

Comparando-se a Eq. (A.15) com a expressão da q -gaussiana dada pela Eq. (2.14), e utilizando a Eq. (A.17), obtém-se:

$$\frac{1}{(\mu-2)\sigma^2(\tau)} = \frac{b_2}{b_0(\tau)}. \quad (\text{A.18})$$

Usando a Eq. (A.14):

$$\sigma^2(\tau) = \frac{b_0(\tau)}{a_1 - B/2 - b_2}, \quad (\text{A.19})$$

que equivale à Eq. (3.14).

Assim, obtivemos a Eq. (3.12) como a solução invariante da EFP (3.11) com os vínculos dados pelas Eqs. (3.13) e (3.14).

A.1.2

Influência do reescalonamento no cálculo dos coeficientes de KM

Considere um retorno r , que desejamos reescalonar por um fator σ . Para o valor reescalonado $r' = r/\sigma$, temos, da definição do coeficiente de KM de primeira ordem (2.34) e (2.35):

$$D^{(1)'}(r') = \frac{1}{\sigma} D^{(1)}(r). \quad (\text{A.20})$$

Considerando a dependência linear em r , $D^{(1)}(r) = a_1 r + a_0$, tem-se que:

$$D^{(1)'}(r') = \frac{a_1 r + a_0}{\sigma} = a_1 \frac{r}{\sigma} + \frac{a_0}{\sigma} = a_1' r' + a_0'.$$

Assim, o coeficiente reescalonado $D^{(1)'}(r')$ será dado pelos parâmetros $a_1' = a_1$ e $a_0' = a_0/\sigma$.

Para o coeficiente de difusão $D^{(2)}$,

$$D^{(2)'}(r') = \frac{1}{\sigma^2} D^{(2)}(r). \quad (\text{A.21})$$

Considerando comportamento parabólico em r , $D^{(2)}(r) = b_2 r^2 + b_1 r + b_0$, tem-se que:

$$\begin{aligned} D^{(2)'}(r') &= \frac{b_2 r^2 + b_1 r + b_0}{\sigma^2} \\ &= b_2 \frac{r^2}{\sigma^2} + \frac{b_1}{\sigma} \frac{r}{\sigma} + \frac{b_0}{\sigma^2} = b_2' r'^2 + b_1' r' + b_0' \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

Logo, o coeficiente reescalonado $D^{(2)'}(r')$ terá seus parâmetros modificados por $b'_2 = b_2$, $b'_1 = b_1/\sigma$ e $b'_0 = b_0/\sigma^2$.

A.1.3

Expansão de Itô-Taylor para coeficientes de KM[61]

Apresentaremos nesta seção, algumas etapas do cálculo da expansão de Itô-Taylor até a segunda ordem, para as correções em τ -finito dos coeficientes de KM dadas pelas Eqs. (6.3) e (6.4), onde $\tau \equiv \Delta t$.

Consideramos nesta seção, por simplicidade de notação, $D^{(1)}(x(t), t) \equiv A(t)$ e $\sqrt{2D^{(2)}(x(t), t)} \equiv B(t)$.

A partir da Eq. (2.36), temos:

$$dx(t) = A(t)dt + B(t)dW, \quad (\text{A.23})$$

ou ainda, na forma integral

$$\Delta x(t) = x(t + \tau) - x(t) = \int_t^{t+\tau} A(t')dt' + \int_t^{t+\tau} B(t')dW(t'). \quad (\text{A.24})$$

Chamaremos as integrais da Eq. (A.24), respectivamente de I e II:

$$I = \int_t^{t+\tau} A(t')dt',$$

$$II = \int_t^{t+\tau} B(t')dW(t').$$

Na Eq. (A.24) acima, vemos que é necessário conhecermos valores das funções A e B para valores intermediários de tempo t' .

Para tal, vamos derivar Fórmula de Itô [63] que fornece uma expressão para variações infinitesimais de funções arbitrárias F da variável estocástica X_t , $F(X_t, t)$, considerando até a 1ª ordem em dt :

$$dF = \partial_t F(X_t, t)dt + \partial_{X_t} F(X_t, t)dX_t + \frac{1}{2} \partial_{X_t X_t}^2 F(X_t, t)(dX_t)^2. \quad (\text{A.25})$$

Substituindo (A.23) em (A.25):

$$dF = \partial_t F dt + \partial_{X_t} F [A(t)dt + B(t)dW] + \frac{1}{2} \partial_{X_t X_t}^2 F [A^2(t)(dt)^2 + A(t)B(t)dt dW + B^2(t)(dW)^2]. \quad (\text{A.26})$$

Usando que $\langle (dW)^2 \rangle = dt$ e retraindo apenas termos até a ordem dt :

$$dF = \left[\partial_t F + A(t) \partial_{X_t} F + \frac{1}{2} B^2(t) \partial_{X_t X_t}^2 F \right] dt + B(t) \partial_{X_t} F dW, \quad (\text{A.27})$$

que reproduz a Eq. (6.6).

Reescrevendo a Eq. (A.27):

$$dF = L_0 F dt + L_1 F dW, \quad (\text{A.28})$$

com os operadores L_0 e L_1 definidos por:

$$\begin{aligned} L_0 &\equiv \partial_t F dt + A(t) \partial_{X_t} + \frac{1}{2} B^2(t) \partial_{X_t X_t}^2, \\ L_1 &\equiv B(t) \partial_{X_t}. \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

A fórmula de Itô apresentada na Eq. (A.27), na forma integral, se escreve como:

$$F(X_{t'}, t') = F(X_t, t) + \int_t^{t'} dF(t'') dt''. \quad (\text{A.30})$$

Considerando a Eq. (A.30) para $F(X_{t'}, t') \equiv A(t')$ na expressão I da Eq. (A.24):

$$\begin{aligned} I &= \int_t^{t+\tau} A(t') dt' = \int_t^{t+\tau} dt' A(t) + \int_t^{t+\tau} dt' \int_t^{t'} L_0 A(t'') dt'' + \\ &+ \int_t^{t+\tau} dt' \int_t^{t'} L_1 A(t'') dW(t''). \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

Utilizando as definições dos operadores L_0 e L_1 dados pela Eq. (A.24) (com $\partial A / \partial t = 0$),

$$\begin{aligned} I &= \int_t^{t+\tau} dt' A(t) + \int_t^{t+\tau} dt' \int_t^{t'} A(t'') \partial_{X_{t''}} A(t'') dt'' \\ &+ \int_t^{t+\tau} dt' \int_t^{t'} \frac{1}{2} B^2(t'') \partial_{X_{t''} X_{t''}}^2 A(t'') dt'' \\ &+ \int_t^{t+\tau} dt' \int_t^{t'} B(t'') \partial_{X_{t''}} A(t'') dW(t''). \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

Analogamente, utilizando a Eq. (A.30) para $F(X_{t'}, t') \equiv B(t')$ na expressão II da Eq. (A.24):

$$\begin{aligned}
 II = & \int_t^{t+\tau} B(t') dW(t'') = \int_t^{t+\tau} dW(t') B(t) + \int_t^{t+\tau} dW(t') \int_t^{t'} L_0 B(t'') dt'' + \\
 & + \int_t^{t+\tau} dW(t') \int_t^{t'} L_1 B(t'') dW(t''). \quad (A.33)
 \end{aligned}$$

Utilizando as definições dos operadores L_0 e L_1 dados pela Eq. (A.24) (com $\partial B / \partial t = 0$),

$$\begin{aligned}
 II = & \int_t^{t+\tau} dW(t') B(t) + \int_t^{t+\tau} dW(t') \int_t^{t'} A(t'') \partial_{X_{t''}} B(t'') dt'' \\
 & + \int_t^{t+\tau} dW(t') \int_t^{t'} \frac{1}{2} B^2(t'') \partial_{X_{t''} X_{t''}}^2 B(t'') dt'' \\
 & + \int_t^{t+\tau} dW(t') \int_t^{t'} B(t'') \partial_{X_{t''}} B(t'') dW(t''). \quad (A.34)
 \end{aligned}$$

Novamente, os valores de A e B em instantes intermediários t'' podem ser expandidos usando iterativamente a Fórmula de Itô (A.30), obtendo-se correções de ordem superior.

Truncando a expansão em (A.32) e (A.34), as operações no instante t'' são tomadas no instante inicial t. Assim,

$$\begin{aligned}
 I = & A(t) \int_t^{t+\tau} dt' + A(t) \partial_{X_t} A(t) \int_t^{t+\tau} dt' \int_t^{t'} dt'' + \frac{1}{2} B^2(t) \partial_{X_t X_t}^2 A(t) \times \\
 & \times \int_t^{t+\tau} dt' \int_t^{t'} dt'' + B(t) \partial_{X_t} A(t) \int_t^{t+\tau} dt' \int_t^{t'} dW(t''), \quad (A.35)
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 II = & B(t) \int_t^{t+\tau} dW(t') + A(t) \partial_{X_t} B(t) \int_t^{t+\tau} dW(t') \int_t^{t'} dt'' + \frac{1}{2} B^2(t) \partial_{X_t X_t}^2 B(t) \times \\
 & \times \int_t^{t+\tau} dW(t') \int_t^{t'} dt'' + B(t) \partial_{X_t} B(t) \int_t^{t+\tau} dW(t') \int_t^{t'} dW(t''). \quad (A.36)
 \end{aligned}$$

Para o cálculo do valor médio $\langle x(t + \tau) - x(t) \rangle$ em (6.3) e (6.4), utilizamos em (A.35) os valores médios das seguintes integrais estocásticas [63]:

$$I_0 = \int_t^{t+\tau} dt' = \tau \quad (\text{A.37})$$

$$I_{0,0} = \int_t^{t+\tau} dt' \int_t^{t'} dt'' = \frac{\tau^2}{2} \quad (\text{A.38})$$

$$I_{0,1} = \left\langle \int_t^{t+\tau} dt' \int_t^{t'} dW(t'') \right\rangle = 0. \quad (\text{A.39})$$

Analogamente, em (A.36):

$$I_1 = \left\langle \int_t^{t+\tau} dW(t') \right\rangle = 0 \quad (\text{A.40})$$

$$I_{1,0} = \left\langle \int_t^{t+\tau} dW(t') \int_t^{t'} dt'' \right\rangle = 0 \quad (\text{A.41})$$

$$I_{1,1} = \left\langle \int_t^{t+\tau} dW(t') \int_t^{t'} dW(t'') \right\rangle = \tau. \quad (\text{A.42})$$

Finalmente, agregando as integrais I e II, obtemos o valor médio de (A.24):

$$\begin{aligned} \langle x(t+\tau) - x(t) \rangle &= AI_0 + AA'I_{0,0} + BA'I_{1,0} + \frac{1}{2}B^2A''I_{0,0} + BI_1 + AB'I_{0,1} \\ &\quad + BB'I_{1,1} + \frac{1}{2}B^2B''I_{0,1} + \text{termos de ordem mais alta} \\ &= AI_0 + BI_1 + (AA' + \frac{1}{2}B^2A'')I_{0,0} + (AB' + \frac{1}{2}B^2B'')I_{0,1} \\ &\quad + BA'I_{1,0} + BB'I_{1,1} + \text{termos de ordem mais alta} \quad (\text{A.43}) \end{aligned}$$

Utilizando os valores médios das integrais estocásticas (A.37) a (A.42), obtém-se que:

$$\langle x(t+\tau) - x(t) \rangle = A\tau + (AA' + \frac{1}{2}BA'')\frac{\tau^2}{2}. \quad (\text{A.44})$$

Logo:

$$D^{(1)}(x, t) = \frac{1}{\tau} \langle x(t+\tau) - x(t) \rangle = A + (AA' + \frac{1}{2}BA'')\frac{\tau}{2}. \quad (\text{A.45})$$

A substituição das definições de A e B reproduz a Eq. (6.8). Demonstração análoga nos leva à Eq. (6.9).

Para considerar aproximações de ordens maiores, devemos seguir os mesmos procedimentos apresentados nesta seção, contudo, aparecem nos cálculos, integrais de mais altas ordens. Embora seja possível resolvê-las

manualmente, o grande número de termos nas equações de ordens maiores do que três, sugere a utilização de programas específicos para o tratamento algébrico de equações, como o Maple©, distribuído pela Maplesoft. Ele pode ser utilizado, por exemplo, para a generalização das expressões para coeficientes de KM de terceira ou quarta ordem. Mais informações podem ser obtidas em [65].

A.1.4

Testes estatísticos de estacionariedade

Realizamos dois testes *estatísticos* para verificar a estacionariedade das séries financeiras analisadas. Utilizamos para esse fim, o programa Eviews©. Os testes adotados foram:

- (i) Augmented Dickey-Fuller (ADF);
- (ii) Philips-Perron (PP).

Os testes são baseados em uma regressão estatística da série analisada. Para ilustrá-lo, consideremos a equação estocástica:

$$Y_t = \alpha + \rho Y_{t-1} + u_t, \quad (\text{A.46})$$

onde u_t é um ruído branco. Se $|\rho| > 1$, a série é explosiva. Subtraindo Y_{t-1} nos dois membros da Eq. (A.46), temos

$$\Delta Y_t = \alpha + \delta Y_{t-1} + u_t, \quad (\text{A.47})$$

com $\delta = \rho - 1$. O teste considera $\delta = 0$ a hipótese nula. A hipótese alternativa é $\delta < 0$. É realizado um teste do tipo t , generalizado por Dickey-Fuller, no parâmetro δ estimado. Se $t >$ valor crítico do teste, então não há rejeição da hipótese nula, ou seja, existe uma raiz unitária (série não-estacionária). Se $t <$ valor crítico do teste, há rejeição da hipótese nula, ou seja, não existe raiz unitária (série estacionária). Assim, o teste gera valores críticos para p-valor de 1%, 5% e 10%, nas quais a hipótese nula é rejeitada.

A diferença entre os testes está no tratamento de séries com correlações de mais altas ordens. O teste ADF adiciona termos γ na equação de diferenças:

$$\Delta Y_t = \alpha + \beta T + \delta Y_{t-1} + \gamma_1 \Delta Y_{t-1} + \gamma_2 \Delta Y_{t-2} + \dots + \gamma_{p-1} \Delta Y_{t-p-1} + u_t. \quad (\text{A.48})$$

Por outro lado, o teste PP faz uma correção não-paramétrica ao teste- t no coeficiente δ para levar em conta a correlação em u_t . O programa Eviews usa o estimador de correlação de Newey-West ω , que é aplicado ao teste t do PP.

Em ambos os testes, as séries de retorno para os mercados analisados e a série de volumes para o IBOVESPA foram classificadas como bastante estacionárias, ou seja o valor de t foi bem menor do que os valores de referência. Para verificar a consistência desses testes, os aplicamos também nas séries de preços, e os resultados, como esperado, classificaram estas séries como não-estacionárias.

Apresentamos alguns resultados dos testes ADF na tabela A.1.4. $CV(*)$ representa os valores críticos para a rejeição da hipótese de raiz nula. Valores menores que $CV(*)$ classificam a série como estacionária. O prefixo D significa série de incrementos de preços para 1 dia e Dlog significa retorno logarítmico para 1 dia.

Tabela A.1: Teste ADF para séries de preços, incrementos e retornos logarítmicos para os índices Merval, IBOVESPA e AOX e série de volumes para o BOVESPA, respectivamente.

Variável	ADF Test	1%CV(*)	5%CV(*)	10%CV(*)	Estacionária
Merval	-1,06	-3,97	-3,41	-3,13	NÃO
DMerval	-23,2	-3,97	-3,41	-3,13	SIM
DlogMerval	-22,0	-3,97	-3,41	-3,13	SIM
BOVESPA	0,58	-3,97	-3,41	-3,13	NÃO
DBOVESPA	-27,8	-3,97	-3,41	-3,13	SIM
DlogBOVESPA	-28,3	-3,97	-3,41	-3,13	SIM
AOX	-1,95	-3,97	-3,41	-3,13	NÃO
DAOX	-16,5	-3,97	-3,41	-3,13	SIM
DlogAOX	-16,5	-3,97	-3,41	-3,13	SIM
Volume	-39,64	-3,43	-2,86	-2,56	SIM

Os testes PP apresentados na tabela A.1.4 apontaram resultados ainda melhores em relação à presença de estacionaridade nas séries de retorno do que os testes ADF:

Em suma, os testes estatísticos ADF e PP classificam, como deveriam, todas as séries de preço como séries não-estacionárias. As séries de retornos para 1 dia ($\tau = 5$) por outro lado, são todas classificadas como bastante estacionárias, fato que valida nossas aproximações para o cálculo dos coeficientes de KM.

Uma análise mais extensa sobre os testes pode ser encontrada em [57, 73].

Tabela A.2: Teste PP para séries de preços, incrementos e retornos logarítmicos para os índices Merval, BOVESPA e AOX e série de volumes para o BOVESPA, respectivamente.

Variável	PP Test	1%CV(*)	5%CV(*)	10%CV(*)	Estacionária
Merval	-1,01	-3,97	-3,41	-3,13	NÃO
DMerval	-49,0	-3,97	-3,41	-3,13	SIM
DlogMerval	-47,8	-3,97	-3,41	-3,13	SIM
BOVESPA	0,64	-3,97	-3,41	-3,13	NÃO
DBOVESPA	-55,5	-3,97	-3,41	-3,13	SIM
DlogBOVESPA	-53,8	-3,97	-3,41	-3,13	SIM
AOX	-2,30	-3,97	-3,41	-3,13	NÃO
DAOX	-40,6	-3,97	-3,41	-3,13	SIM
DlogAOX	-40,8	-3,97	-3,41	-3,13	SIM
Volume	-81,1	-3,43	-2,86	-2,56	SIM

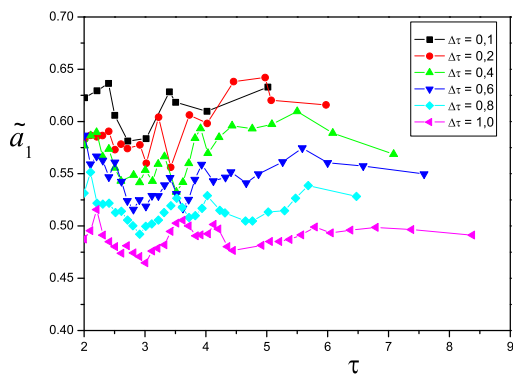
A.2

Análises Complementares sobre o IBOVESPA

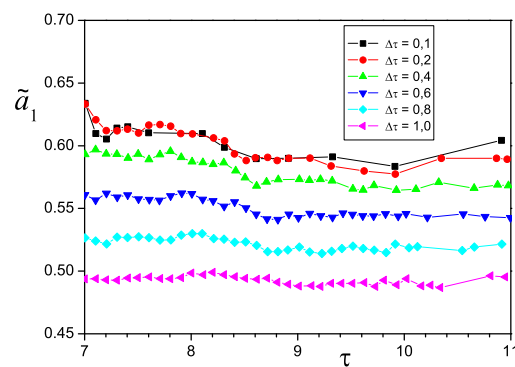
A.2.1

Limite para escalas curtas

Apresentamos nessa seção, o comportamento dos coeficientes $\{a_i, b_j\}$ ao realizarmos o limite $\Delta\tau \rightarrow 0$. As dependências em τ dos parâmetros $\tilde{a}_1$ e $\tilde{b}_0$ são utilizadas como exemplos e exibidas nas Figs. A.1 e A.2, para diferentes valores de $\Delta\tau$.



A.1(a):



A.1(b):

Figura A.1: Parâmetro $\tilde{a}_1$ calculado para diversos $\Delta\tau$ a partir das séries de 15 minutos (a) e de 30 segundos (b) apresentadas nesta tese para o IBOVESPA.

Levando-se em conta as restrições de acessibilidade empírica do limite de $\Delta\tau \rightarrow 0$, apresentados na seção (3.2), nota-se a partir das Figs. A.1 e A.2, que dentro das flutuações estatísticas, o comportamento limite dos parâmetros podem ser estimados a partir dos resultados para $\Delta\tau = 0,2$. Assim, nesta

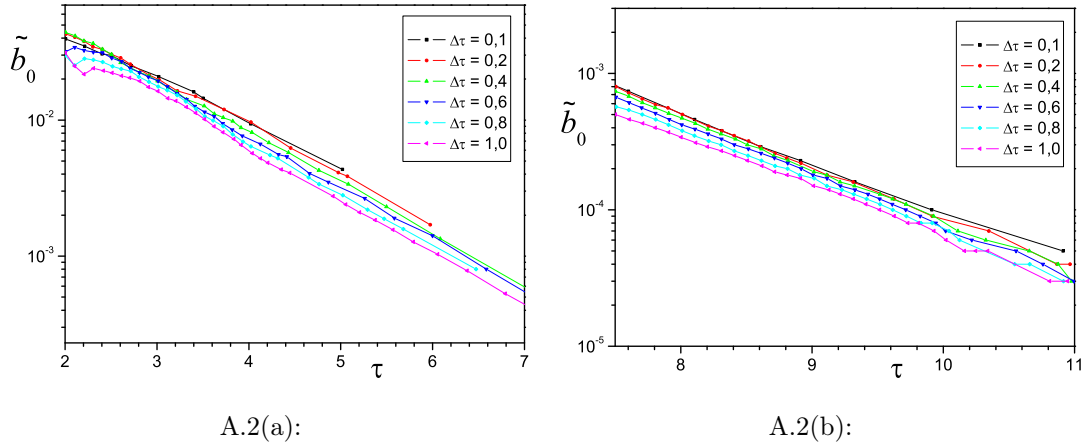


Figura A.2: Parâmetro $\tilde{b}_0$ calculado para diversos $\Delta\tau$ a partir das séries de 15 minutos (a) e de 30 segundos (b) apresentadas nesta tese para o IBOVESPA.

tese, nossa análise foi feita considerando os resultados obtidos para $\Delta\tau = 0,2$ como aqueles que definem $\{a_i, b_j\}$ em todos os mercados e escalas temporais utilizadas.

A.2.2

Informações sobre as séries de dados utilizadas

Ao analisar o IBOVESPA ao longo de diversas escalas de tempo, utilizamos três séries de dados, diária, e intradiárias, com ticks de 15 minutos e 30 segundos. Elas foram apresentadas no Capítulo 3. Como escala temporal definimos uma escala logarítmica reversa apresentada na Eq. (3.1).

Para realizar a evolução temporal das FDPs de retorno em direção a menores escalas de tempo, da ordem de minutos, precisamos definir a quantidade média de minutos por 32 dias presentes nas séries intradiárias. Assim, precisamos fazer uma relação entre os retornos construídos a partir das três séries, utilizando a escala τ dada pela Eq. (3.1).

Primeiramente, os dados intradiários foram verificados quanto à origem das fontes, i.e., se os valores apresentavam correspondência ao final do dia com os dos dados diários. As séries intradiárias também foram todas deflacionadas pelo IGP-DI diário, ou seja, aplicamos para todos os dados de alta frequência de cada dia, o mesmo índice deflator relativo aquela data.

A série de preços de fechamento intradiário não possui o mesmo número de ticks em cada dia e logo, em cada ano. Assim, calculamos a média de ticks intradiários para cada período estudado. Dessa forma, foi possível construir com uma melhor aproximação as FDPs de retorno para as escalas diárias a partir das escalas intradiárias.

Apresentamos na tabela A.3, o número médio de horas por dia de pregão na BOVESPA utilizando a série de dados de 15 minutos para o período entre 01/1998 e 06/2003.

Ano	dias	marcadores	média de ticks	média de horas
1998	247	7057	28,57	7h 9min
1999	246	7521	30,57	7h 39min
2000	248	7189	28,99	7h 15min
2001	244	7315	29,98	7h 30min
2002	247	7151	28,95	7h 14min
2003	61	1751	28,7	7h 11min
Total	1293	37984	29,38	7h 21min

Tabela A.3: Número médio de horas/dia de pregão da série de preços catalogadas a cada 15 minutos para o período entre 01/1998 e 06/2003 no IBOVESPA.

Verificamos na tabela A.3 que em média, não há grande diferença entre as horas médias de pregão por dia entre os anos estudados. Além disso, a série de dados de 15 minutos total possui 1293 dias e 37984 ticks. Dessa forma temos 7,34h /dia ou 29,38 ticks /dia. Para calcular os retornos reescalados, consideramos 32 dias de negócio possuindo em média 14101 minutos.

Analogamente, para a série de dados de 30 segundos, temos na tabela A.4, o número médio de minutos por dia de pregão para o período entre 01 de novembro de 2002 e 19 de julho de 2006. De acordo com esses valores, podemos perceber que a média de minutos por dia de negociação também não varia muito significativamente no período analisado. Considerando o total de ticks por dia, calculamos os retornos reescalados a partir da série de preços de 30 segundos, consideramos 32 dias de negócio possuindo em média 13799 minutos para toda a série.

Ano	dias	marcadores	média minutos/dia
2002	39	33865	434,17
2003	248	215224	433,92
2004	249	215340	432,41
2005	249	212539	426,78
2006	136	117342	431,40
Total	921	794310	431,22

Tabela A.4: Número médio de min/dia de pregão da série de preços catalogados a cada 30 segundos para o período entre 01/11/02 e 19/07/06 do IBOVESPA.

A partir da definição do número médio de minutos para 32 dias de pregão, de cada amostra de dados intradiários, construímos a tabela A.5 utilizando a Eq. (3.1). Assim, as escalas em vermelho na tabela A.5 foram construídas com $\Delta t_0 = 14101$ minutos. Analogamente, os dados em azul, com $\Delta t_0 = 13799$

minutos. Esses valores de τ são os utilizados nas FDPs teóricas e empíricas da Fig. 3.9.

Δt	τ
128 dias	-2
64 dias	-1
32 dias	0
16 dias	1
8 dias	2
4 dias	3
2 dias	4
1 dia	5
225 minutos	5,97
105 minutos	7,07
60 minutos	7,88
30 minutos	8,88
13 minutos	10,05
8 minutos	10,75
4 minutos	11,75
2 minutos	12,75
1 minutos	13,75
30 segundos	14,75

Tabela A.5: Valores de τ segundo a Eq. (3.1) utilizados nas FDPs teóricas e empíricas apresentadas na Fig. 3.9 (de baixo para cima). As cores representam as séries de dados utilizadas para a construção do histograma empírico: preto - diária, vermelho - 15 minutos, azul - 30 segundos.

A.2.3

Comparação dos resultados para retornos logarítmicos e incrementos

Investigamos a robustez dos parâmetros de KM segundo a utilização de incrementos de preços ou retornos logarítmicos. Para tal, além dos resultados para retornos logarítmicos apresentados no Capítulo 3 para o IBOVESPA, também calculamos os incrementos, definidos pela Eq. (1.1). Nesta seção, a época utilizada foi de um período pós-Real, de 4 de julho de 1994 até 28 de junho de 2007, totalizando 3214 dados em 13 anos. Os coeficientes de KM foram calculados em uma região de $\sigma = 1,75$ e com $\Delta\tau = 0,2$. Apresentamos os resultados na Fig.A.3.

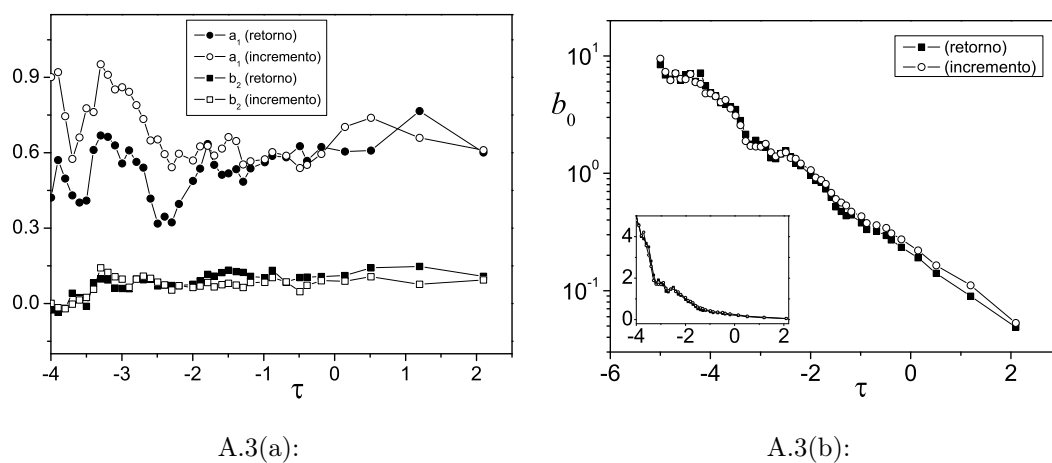
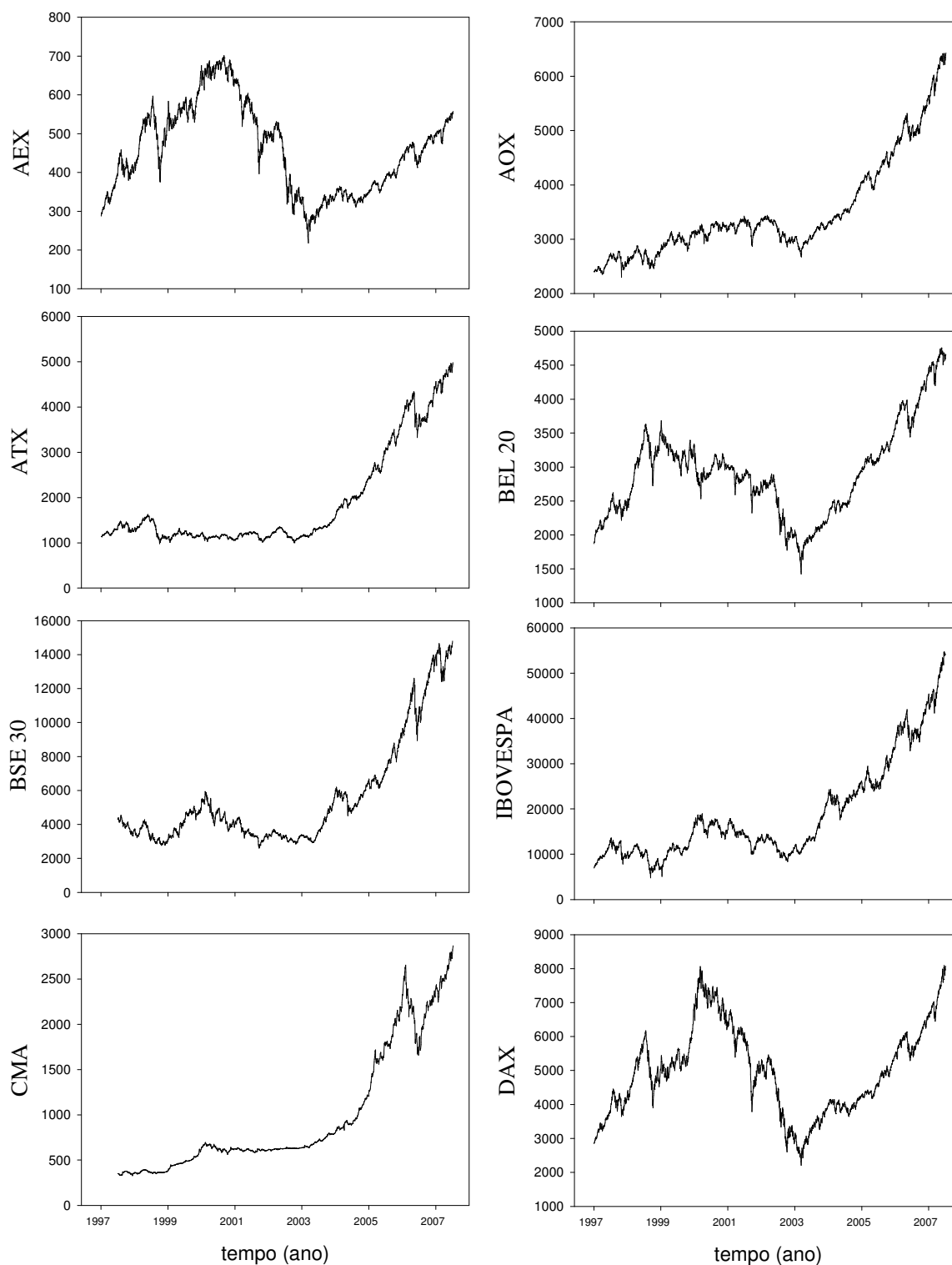


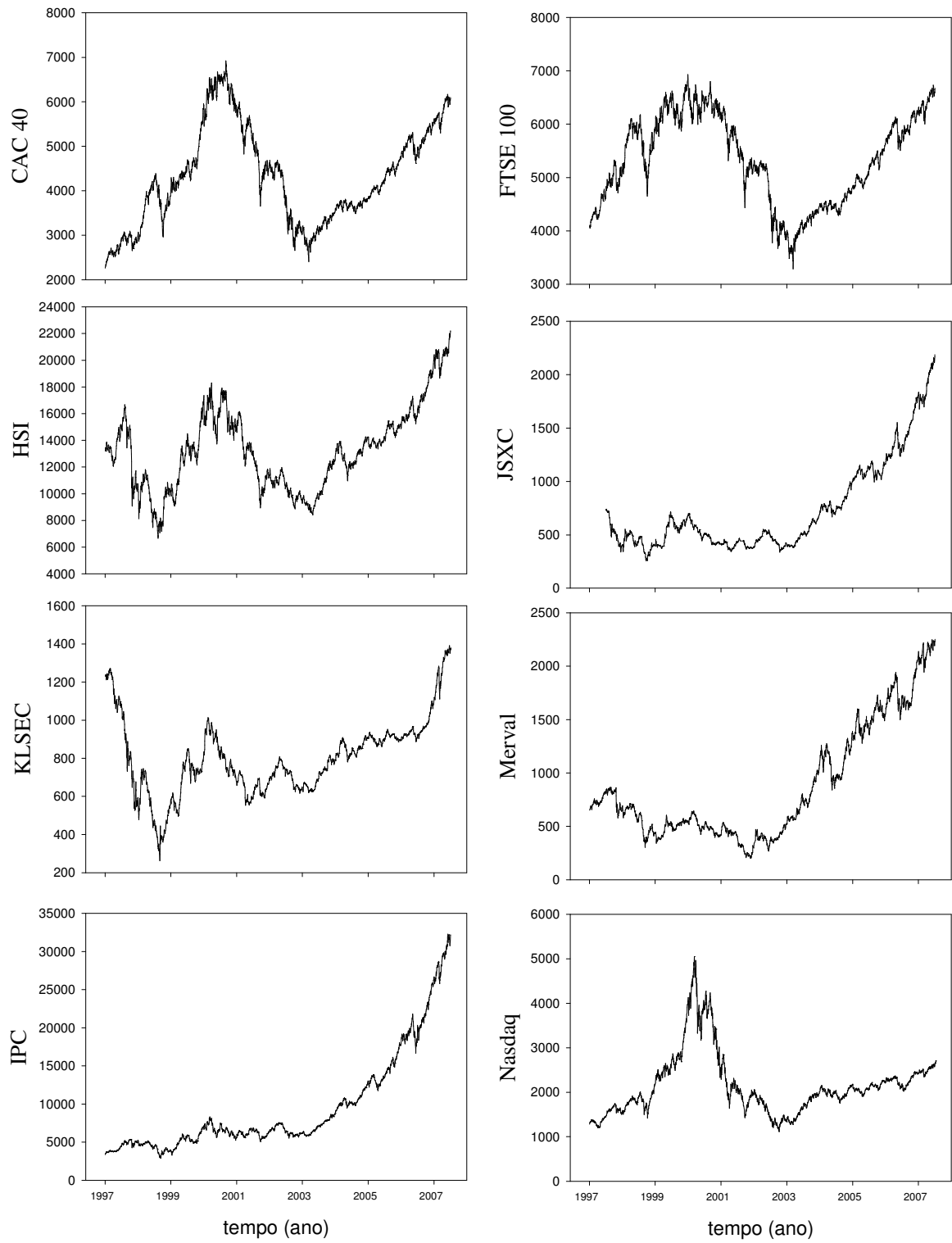
Figura A.3: Coeficientes a_1 e b_2 (a) e b_0 (b) calculados a partir de séries de retornos e incrementos diários. Eles foram calculados em uma região de $\sigma = 1,75$ e com $\Delta\tau = 0,2$.

Podemos verificar que os coeficientes calculados não mudam significativamente entre as séries de retorno e incrementos. Comparando os coeficientes calculados a partir das séries de incremento e de retorno, verificamos que o coeficiente a_1 possui nível maior para escalas menores em τ , onde a maior magnitude dos incrementos influencia mais fortemente os parâmetros. Essa diferença diminui com o aumento das escalas τ . O termo b_2 possui nível apenas ligeiramente diferente entre retornos e incrementos. Podemos perceber também que o coeficiente b_0 possui mesma inclinação para escalas $\tau < 2$.

A.3

Séries Temporais dos Índices dos Mercados Mundiais





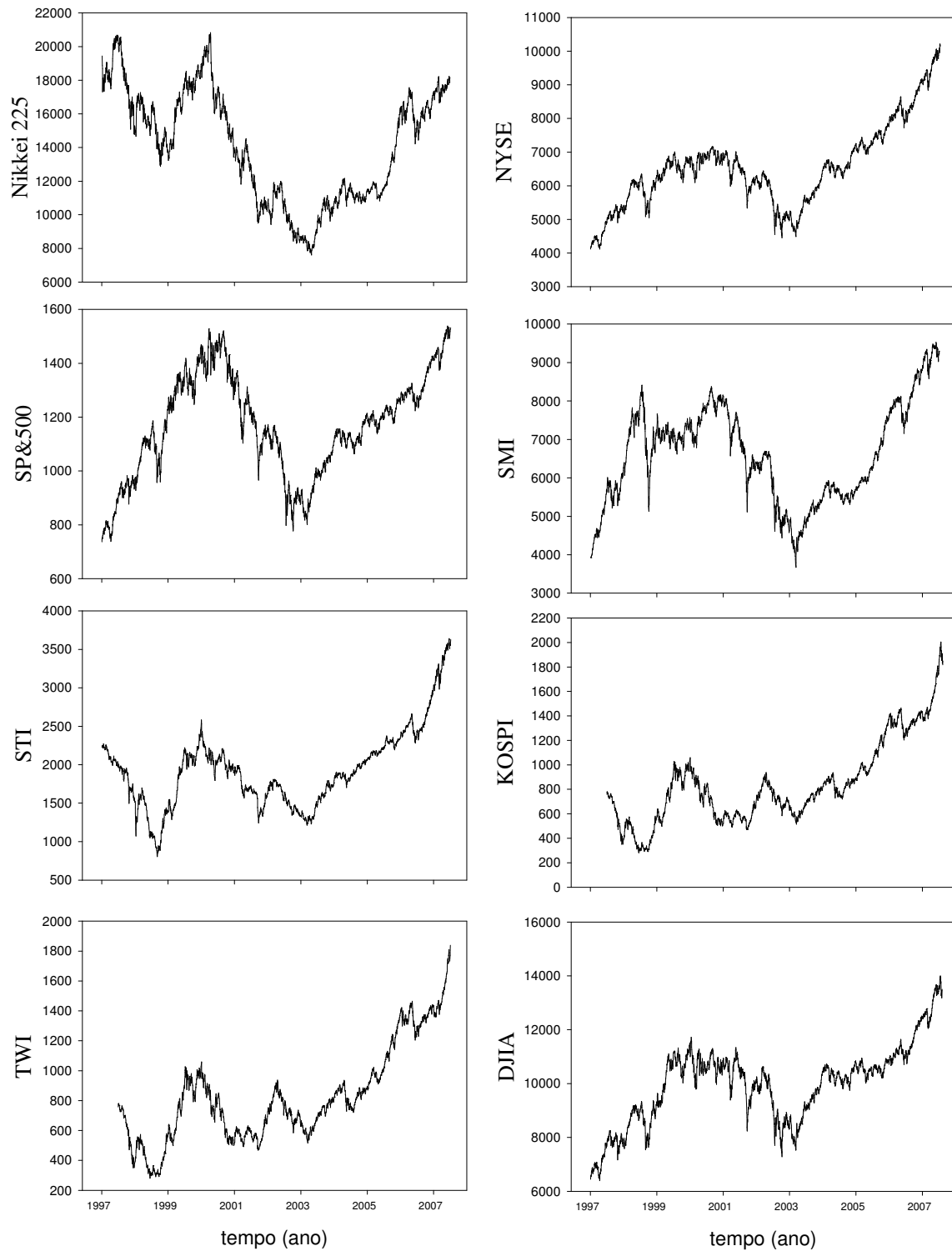


Figura A.4: Séries de preço dos índices mundiais apresentados.

A.4

Análise Estatística da Quantidade de Transações

Também investigamos a série dos lotes de ações ou número de transações, realizadas por período. Chamaremos esta quantidade simplesmente de *quantidade de transações* (Q_T). A série analisada foi do período de 2006, sendo composto de 3600 períodos de 30 minutos. Estes dados foram obtidos diretamente da BOVESPA. Apresentamos esta série na Fig. A.5, comparando-a com a série de volumes negociados para o mesmo período. Também obtivemos a partir da série de 30 minutos, novas séries em escalas maiores, agregando os dados.

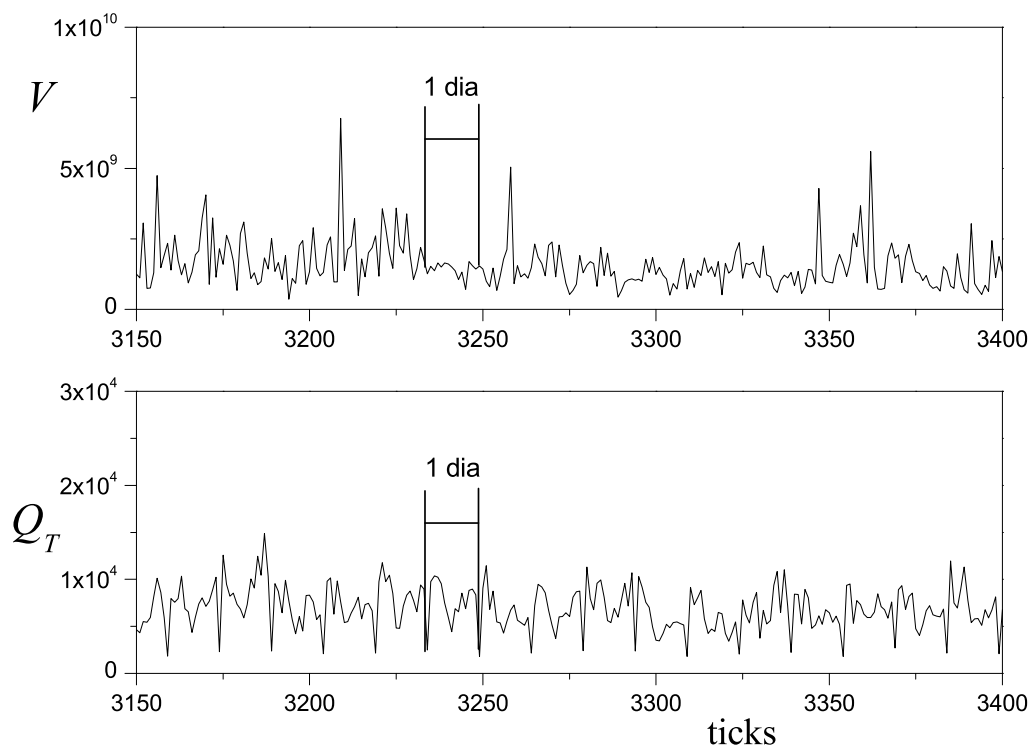


Figura A.5: Series temporais de volume e de quantidade de transações em um trecho (para melhor visualização do intervalo relativo a 1 dia) no ano de 2006 para a escala de 30 minutos.

Podemos constatar que a série de volumes é a mais volátil. A série de transações possui um ciclo diário (que compreende 15 períodos de 30 minutos) mais notável.

Ao contrário da FDP dos volumes vista no Capítulo 5, observamos que nas diferentes escalas de agregação adotadas, a FDP da quantidade de transações segue o comportamento de uma distribuição Gama (ou uma distribuição q -Gama com q próximo de 1). Podemos verificar este ajuste na Fig. A.6. Se acumularmos esta grandeza em função do número de períodos

de transação (tempo), obtemos um gráfico com uma inclinação praticamente única, como podemos comprovar na Fig. A.7. O valor dessa inclinação é de $1,7 \cdot 10^{-4}$, que multiplicada pelo valor acumulado máximo $2,14 \cdot 10^7$ nos fornece o número total de dados de forma coerente.

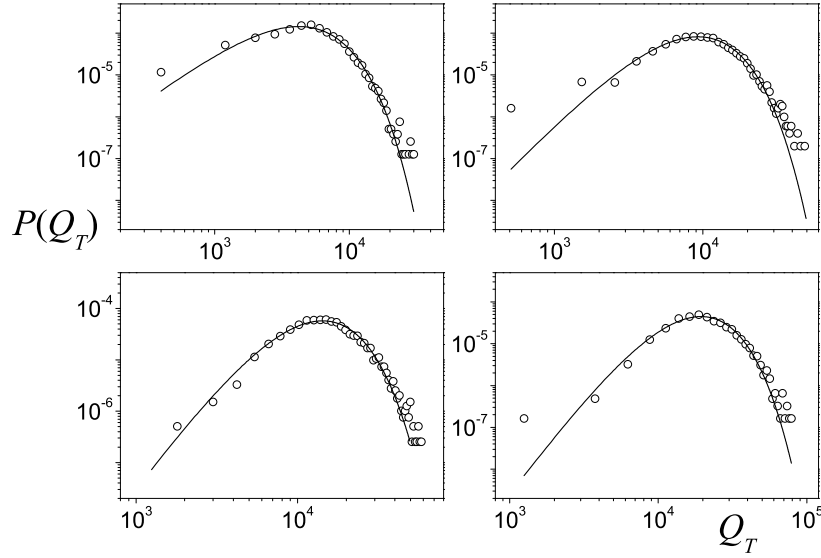


Figura A.6: Ajustes da função Gama obtidos para as FDPs da quantidade de transações para diferentes escalas para a BOVESPA no ano de 2006: 30min(a), 60min(b), 90min(c), 120min(d). A FDP Gama ajustada foi calculada com peso estatístico e para todo o intervalo de dados.

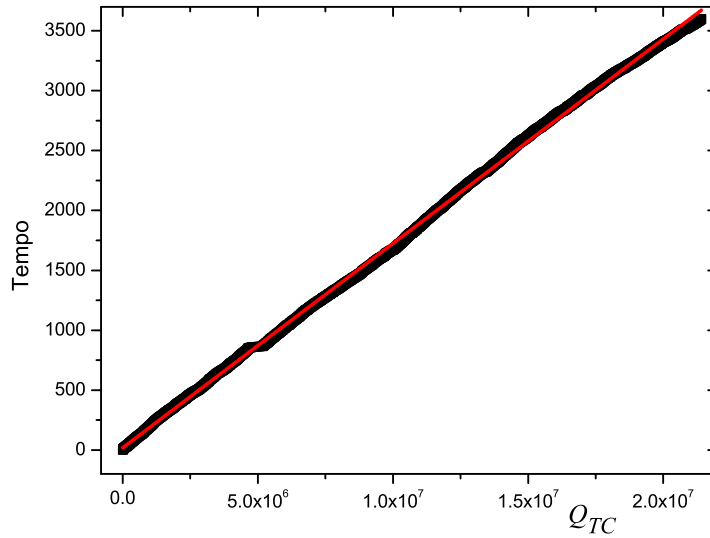


Figura A.7: Número de ticks de 30 minutos em função da quantidade de transações acumulada Q_{TC} na BOVESPA durante o ano de 2006.

Os parâmetros α e κ obtidos das distribuições Gama ajustadas para a distribuição da quantidade de transações para diversas escalas são apresentados na tabela A.6.

Escala	α	κ	10^{-4} média	$10^{-4}\sigma$
30min	7,39	802	0,59	0,32
60min	9,08	1269	1,18	0,58
90min	11,71	1467	1,77	0,80
120min	13,57	1694	2,37	1,01
150min	17,68	1622	2,96	1,21
180min	19,78	1752	3,55	1,39
210min	21,70	1858	4,14	1,60
240min	22,90	2000	4,73	1,75

Tabela A.6: Parâmetros das FDPs Gamas ajustadas para as distribuições de Q_T em diversas escalas.

Aparentemente há dois regimes diferentes, para escalas maiores e menores de 120 minutos. Contudo, essa diferença de regimes pode estar acontecendo devido a dificuldades no ajuste das distribuições ou pobreza de dados para escalas maiores.

A.5**Lista de abreviaturas**

- ADF - Augmented Dickey-Fuller
- BOVESPA - Bolsa de Valores de São Paulo
- CK - Chapman-Kolmogorov
- EFP - Equação de Fokker Planck
- EL - Equação de Langevin
- FDP - Função de densidade de probabilidade
- IBOVESPA - Índice de Bolsa de Valores de São Paulo
- IGP-DI - Índice geral de preços - disponibilidade interna
- KM - Kramers-Moyal
- PE - Processo estocástico
- PP - Philips-Perron