

## 7

### Conclusões

Esta tese teve como objetivo descrever a dinâmica subjacente das grandezas observáveis financeiras, tais como retorno de preços e volume de ações negociadas, a partir da análise empírica das respectivas séries temporais.

Vários resultados importantes foram obtidos, que não estão restritos à complexidade dos dados financeiros, mas podem fornecer subsídios para diversos sistemas complexos em geral.

#### 7.1

##### Índice do Mercado Brasileiro

Obtivemos uma descrição consistente da evolução das FDPs empíricas dos retornos em uma vasta região de escalas temporais, governadas desde gaussianas até distribuições com estatísticas de caudas gordas. Mediante uma técnica única de análise, o cálculo dos coeficientes de KM, pudemos encontrar as características comuns e distintas que emergem de ambos os regimes.

Especificamente, nossa investigação revelou que os coeficientes de tendência e difusão tem a mesma dependência funcional em  $r$ , e que a dependência em  $\tau$  dos seus parâmetros é a que distingue os regimes.

A forma  $q$ -gaussiana foi recentemente proposta *ad hoc* para descrever histogramas com cauda em lei de potência para retornos de preços de alta-frequência, e até mesmo diários. No nosso caso, essas distribuições surgem naturalmente da equação de evolução obtida do cálculo dos coeficientes de KM em diferentes escalas de tempo.

Também mostramos que os limites para escalas de tempo pequenas e grandes englobam PFs assintoticamente invariantes em forma. Dessas soluções, surgem novas relações conectando as características das PFs (como  $\mu$  e  $\sigma$ ) aos parâmetros de tendência e difusão. Além disso, somado a uma interpretação dos mecanismos relevantes que governam a dinâmica subjacente do mercado, nossas descobertas podem prover idéias úteis para um cenário mais geral no qual a evolução observada é  $q$ -gaussiana.

## 7.2

## Índices de Mercados Mundiais

Analisamos os coeficientes de KM que governam a dinâmica dos preços em escalas temporais macroscópicas para um conjunto representativo de mercados ao redor do mundo. Como resultado geral, encontramos que a equação de evolução para as FDPs dos retornos pode ser representada adequadamente por uma EFP universal, plenamente caracterizada por poucos parâmetros dependentes de  $\tau$ . Nossa investigação também revelou que os coeficientes de tendência e difusão tem a mesma dependência funcional em  $r$  para os diferentes mercados, e que a dependência em  $\tau$  dos seus parâmetros também apresenta características universais nas escalas temporais mensais/semanais estudadas. Parâmetros dotados com informação significativa da dinâmica dos mercados foram analisados para realizar possíveis medidas classificatórias.

Os valores estacionários  $a_1^s$ , descrevendo a intensidade da força restauradora representada por  $D^{(1)}$ , não apresenta diferenças significativas entre os mercados (Fig. 4.6). Este resultado descarta  $a_1^s$  como medida potencial de ranqueamento. Contudo, isso expressa um achado importante: as leis determinísticas que restringem a dinâmica da maioria dos mercados nas escalas mensais/semanais agem com similar intensidade. Portanto, mecanismos de flexibilização são universais tanto qualitativa como quantitativamente, apesar da diversidade de fluxo de informação, bem como a aversão ao risco, de mercado para mercado.

Em contrapartida, nosso estudo demonstrou que, embora qualitativamente semelhantes entre os mercados analisados, ambos os componentes estocásticos aditivo e multiplicativo, traçados a partir de  $D^{(2)}$ , são quantitativamente distintos para cada mercado, fornecendo parâmetros importantes para a distinção entre os mercados.

Em particular, a amplitude da componente aditiva do ruído,  $b_0$ , decai exponencialmente (com escala temporal logarítmica reversa,  $\tau$ ) com expoente  $\gamma$ , que, à semelhança do expoente de Hurst, surge como uma medida classificatória da eficiência do mercado (Fig. 4.10). Além disso,  $A$ , a amplitude característica de  $b_0$  em escalas mensais, apresenta uma grande dispersão de mercado para mercado, permitindo a separação entre mercados maduros e emergentes dentro do plano de parâmetros  $(\gamma, A)$  (Fig. 4.9).

A amplitude da componente multiplicativa das flutuações nas escalas mensais/semanais,  $b_2^s$ , também exibe uma ampla variação relativa. Embora individualmente  $b_2^s$  não permita uma clara ligação com o estágio econômico do mercado, verificou-se que a razão  $b_2^s/A$  fornece uma prova do desvio

dos histogramas empíricos da gaussianidade em escalas temporais diárias (Fig. 4.12).

Os resultados acima são também fundamentados em cálculos analíticos baseados na solução escalada da FDP da EFP assintótica, que relaciona medidas microscópicas a quantidades observáveis macroscópicas, a saber, a variância e o expoente de cauda das FDPs.

Em suma, a presente análise revelou por um lado características universais da dinâmica estocástica dos índices de mercado. Por outro, diferenças entre os mercados através de parâmetros intrínsecos contendo informações importantes sobre a dinâmica do mercado.

### 7.3

#### Volumes Negociados no Mercado Brasileiro

Mostramos que o processo estocástico dado pela ocorrência inhomogênea de eventos poissonianos descreve as principais propriedades estatísticas de uma importante observável de mercado, o volume negociado.

A FDP resultante é a  $q$ -Gama, estando em muito bom acordo com os histogramas empíricos para os volumes mais significantes. Valores teóricos dos parâmetros foram obtidos das Eqs. (5.3), ao desenharmos o número de estágios efetivos  $\beta$  do ajuste da  $q$ -Gama aos histogramas de volume, enquanto  $\alpha$  e  $\kappa$  vem do ajuste Gama do histograma das taxas locais. Valores teóricos e empíricos dos parâmetros estão em excelente acordo (ver Fig. 5.2), denotando a consistência da nossa abordagem. Sendo uma medida de granularidade,  $\beta$  afeta a forma das FDPs apenas para valores pequenos. Entretanto, a cauda é determinada apenas por  $\alpha$ , cuja finitude reflete o grau de inhomogeneidade do ritmo da atividade do mercado.

Podemos notar que a FDP Gama é observada em muitos fenômenos envolvendo múltiplas tarefas ou estágios [25]. A modificação de seu decaimento exponencial para uma lei de potência pode ser conseguida ao se considerar um processo de Poisson combinado, com taxa variável, que é aleatória por si só (traçada de uma distribuição Gama). Isso constitui uma classe especial de processos de Poisson não homogêneos na qual a taxa não é uma função suave do tempo, mas envolve estocasticidade (como nos processos de Cox), refletindo uma fonte adicional de flutuações aleatórias [25]. Modelos similares em que o parâmetro de taxa da FDP Gama flutua com uma lei de probabilidade Gama tem sido propostos anteriormente em diversos contextos para explicar a presença de caudas pesadas. Exemplos podem ser encontrados em falhas em programas de computador [67], distúrbios ecológicos [68], toques na bola durante uma partida de futebol [69], turbulência [70, 71] e fisiologia [72].

Esta diversidade mostra a universalidade do comportamento da dupla Gama estocástica.

Isso provavelmente ocorre devido ao caráter especial da família Gama de FDPs, que é fechada sob convolução. A aparição frequente de FDPs  $q$ -Gama, surgindo como uma FDP misturada, se encaixa dentro do cenário da abordagem introduzida por Wilk e Wlodarczyk [30] e depois generalizada por Beck e Cohen na chamada *superestatística* [31], segundo comentado no Capítulo 2.

O comportamento Gama-Gama tem sido discutido anteriormente também em conexão com a estatística dos volumes [16, 17, 18]. Nele, a estatística Gama condicional deriva de uma equação dinâmica estocástica cuja FDP estacionária associada é a distribuição Gama. Contudo, ela foi proposta *ad hoc*, enquanto outras equações estocásticas igualmente plausíveis compartilham a mesma propriedade [40]. Ainda mais, ficou dúvida se o parâmetro de flutuação intrínseco da Gama foi o volume negociado local médio ou seu inverso. Nosso resultado fornece suporte empírico a última conjectura contra a primeira.

Em resumo, investigamos um banco de dados real dos volumes negociados em uma escala temporal mesoscópica onde a natureza granular das transações e propriedades de agregação estão presentes. Além de fornecer novas interpretações para a estatística observável dos volumes, o presente estudo provê uma demonstração consistente com dados reais sobre como as FDPs com caudas em lei de potência emergem de efeitos de flutuação observáveis, em acordo com a visão superestatística. Nosso resultado, obtido para as escalas temporais da ordem de uma hora, também são consistentes com aquelas observadas para horizontes temporais de minutos [12, 15]. Contudo, uma investigação seguindo as idéias apresentadas aqui, analisando o papel de correlações na escala de ultra alta frequência, torna-se ainda necessária.

## 7.4

### Conclusões Gerais

A dinâmica complexa dos dados financeiros requer o desenvolvimento de métodos de análise avançados e generalizados. Assim, os resultados alcançados são de interesse teórico e prático que podem ir além do problema particular analisado.

No caso de retornos de preços, buscamos obter equações para a evolução temporal das FDPs através da estimativa dos coeficientes de KM. Inicialmente examinamos com mais detalhes as séries temporais diárias e intradiárias do IBOVESPA, um dos grandes mercados emergentes mundiais. Neste cenário,

abordamos uma vasta hierarquia de escalas de tempo, variando de meses a minutos. Obtivemos uma descrição unificada que engloba desde o regime gaussiano até o  $q$ -gaussiano. Estendemos essa análise para realizar um estudo comparativo entre diversos mercados mundiais. Identificamos padrões universais assim como também diferenças quantitativas que permitiram classificar os diversos mercados.

No caso dos volumes de negociação, medimos diretamente o nível de atividade do mercado obtendo sua FDP. Mostramos que a forma da distribuição para pequenos volumes é governada pelo grau de granularidade do processo de negociação, enquanto o expoente que controla a cauda da distribuição é uma medida da inomogeneidade da atividade do mercado. Este resultado provê evidências de como distribuições de probabilidade com cauda em lei de potência, tão comuns nos sistemas complexos podem surgir como consequência das flutuações de um parâmetro intrínseco.

Em suma, este estudo forneceu uma demonstração consistente com dados reais sobre como as FDPs com leis de potência observadas nesse contexto podem emergir através de mecanismos diversos, como processos estocásticos com flutuações aditivo-multiplicativas, ou como resultado de misturas estatísticas.

## 7.5

### Perspectivas futuras

Como possíveis avanços propomos:

- Analisar detalhadamente a dependência em  $\tau$  dos parâmetros dos coeficientes de KM que aparentemente apresentam oscilações log-periódicas em  $\Delta t$ .
- Obter e interpretar os coeficientes de KM para as séries de volumes negociados.
- Investigar o papel das correlações na escala intradiária sobre os processos estocásticos resultantes de misturas estatísticas.
- Estender os cálculos estocásticos para correção dos coeficientes de KM de ordem superior ao segundo por efeitos de  $\Delta\tau$  finito.