

## 3

### Análise do Índice Acionário Brasileiro

#### 3.1

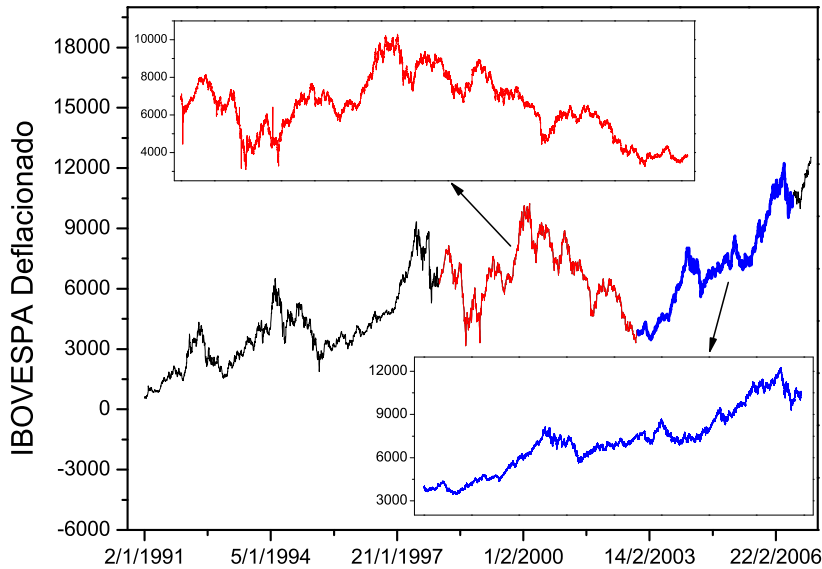
##### Introdução

No Brasil, a primeira Bolsa de Valores foi fundada em 1890 com o nome de Bolsa Livre. Essa instituição pioneira passou por diversas reestruturações ao longo da história, modificando algumas vezes seu nome. Em 1967 passa a chamar-se Bolsa de Valores de São Paulo, ou simplesmente BOVESPA. Nela se negociam títulos emitidos por empresas privadas ou estatais no Brasil. Em 2007, passa a chamar-se BOVESPA Holding S.A. e, por fim, em 2008, há uma integração com a Bolsa de Mercadorias & Futuros, BM&F S.A., transformando-a na atual Bolsa de Valores, Mercadorias e Futuros, BM&FBOVESPA S.A., atualmente a terceira maior Bolsa mundial em valor de mercado, a US\$ 23,34 bilhões (nos preços de 2 de maio), atrás apenas da alemã Deutsche Börse (US\$ 31,41 bilhões) e da americana CME (Chicago Mercantile Exchange), com valor de US\$ 25,98 bilhões.

O Índice BOVESPA, ou IBOVESPA, é o índice que acompanha a evolução média das cotações das ações brasileiras. Sua composição é basicamente formulada da mesma forma que a maioria dos índices mundiais. É um valor atual, em moeda corrente, de uma carteira teórica de ações. Para que sua representatividade se mantenha ao longo do tempo, é feita uma reavaliação periódica, alterando-se a composição e peso da carteira. Considerando-se seu rigor metodológico e o fato de que a BM&FBOVESPA S.A. concentra mais de 90% do total de negócios do país, e é responsável por 100% das ações transacionadas no mercado brasileiro, trata-se do mais importante indicador do desempenho médio das cotações do mercado de ações brasileiro disponível, permitindo tanto avaliações de curtíssimo prazo, como observações de expressivas séries de tempo.

Para a análise do IBOVESPA, selecionamos três conjuntos de dados: 3960 preços de fechamento, no período entre 02 de janeiro de 1991 e 28 de dezembro de 2006, 37984 valores do índice gravados a cada 15 minutos entre 21 de janeiro de 1998 e 31 de março de 2003 e 794310 valores do índice catalogados

a cada 30 segundos entre 01 de novembro de 2002 e 19 de julho de 2006. Todas as séries estão deflacionadas pelo índice diário do IGP-DI. O tempo foi contado em dias de pregão, descartando finais de semana, feriados e períodos sem atividade. Apresentamos abaixo na Fig. 3.1 as séries de preço diária e intradiárias utilizadas nesta tese.



**Figura 3.1:** Representação das séries diária e intradiárias do IBOVESPA analisadas. Série intradiária de 15 minutos compreende período entre 21/01/98 e 31/03/03 (em vermelho) e série intradiária de 30 segundos relativa ao período entre 01/11/02 e 19/07/06 (em azul). Todas as séries estão deflacionadas pelo índice diário do IGP-DI.

### 3.2 Análise de Kramers-Moyal

Neste capítulo da tese, vamos investigar a evolução "temporal" das FDPs dos incrementos logarítmicos de preço ou retornos  $r$ , definidos na Eq. (1.2).

Consideramos, como equação de evolução geral para as FDPs dos retornos, a expansão de KM, válida para processos de Markov, apresentada na Eq. (2.32).

Em analogia com o tratamento de fenômenos turbulentos [20], sobre modelos de eventos que ocorrem em escalas hierárquicas, definimos, como escala temporal, uma escala logarítmica reversa, dada por

$$\tau = \log_2(\Delta t_0/\Delta t), \quad (3.1)$$

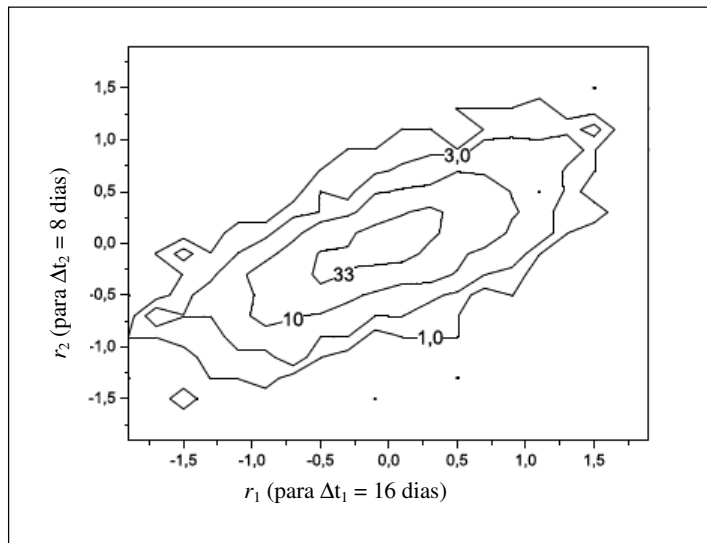
onde  $\Delta t_0$  é uma escala arbitrária, definida aqui como 32 dias de negociação (ver também Apêndice A.2.2).

A utilização da escala logarítmica nos permite avançar mais rapidamente no tempo  $t$ . Notem que quanto maior a escala de tempo  $\Delta t$ , menor a escala hierárquica  $\tau$ . A escala reversa surge do pressuposto de que a informação flui através de cascatas de energia a partir de escalas de tempo mais longas em direção a escalas mais finas. [20]

Os retornos medidos foram dados, por conveniência, em unidades de desvio padrão  $\sigma_{32}$  da respectiva série de dados em uma escala temporal (arbitrária) de  $\Delta t_0 = 32$  dias.

De acordo com a Eq. (2.3), as FDPs condicionais, dadas por  $P(r_2, \tau_2 | r_1, \tau_1) = P(r_2, \tau_2; r_1, \tau_1) / P(r_1, \tau_1)$  com  $\tau_2 > \tau_1$ , foram obtidas das séries reais construindo os histogramas para a probabilidade conjunta  $P(r_2, \tau_2; r_1, \tau_1)$ , computando os pares de retornos  $r_i$  que incidem no mesmo instante inicial.

A forma típica da FDP conjunta do IBOVESPA é apresentada na Fig. 3.2 bidimensionalmente para retornos diários e na Fig. 3.3, tridimensionalmente para retornos intradiários. A FDP conjunta descreve a dependência estatística dos incrementos em escalas temporais próximas.

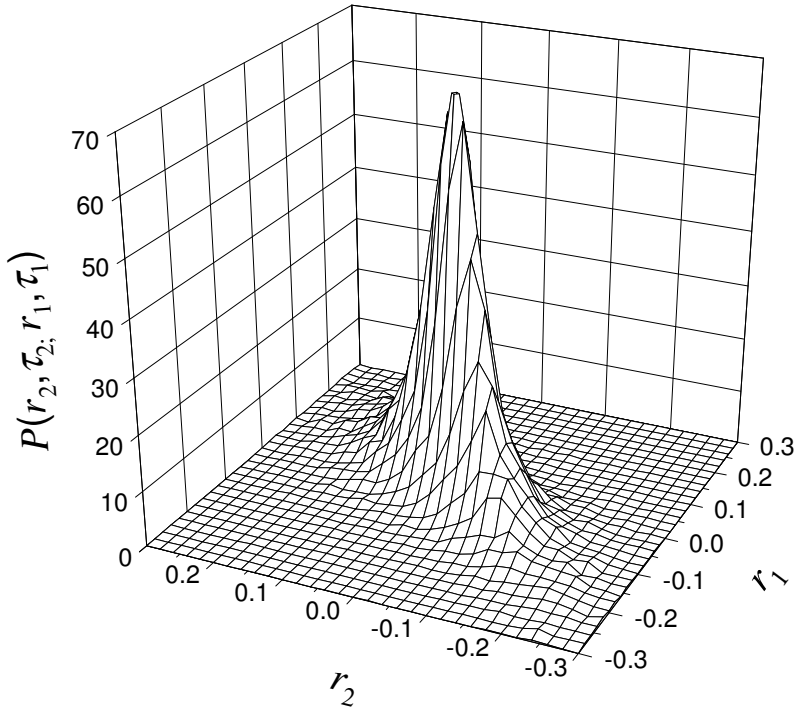


**Figura 3.2:** Curvas de nível típicas da FDP conjunta para retornos obtida a partir de dados diários do IBOVESPA para  $\Delta t_1 = 16$  dias e  $\Delta t_2 = 8$  dias. Níveis das curvas correspondem a  $\log_{10} = -1,5; -2,0; -2,5; -3,0; -3,5$  do centro até a borda.

As propriedades markovianas do processo estocástico podem ser investigadas mediante a análise das probabilidades condicionais. Para tal, calculamos a equação de CK, a partir da Eq. (2.25):

$$P(r_2, \tau_2 | r_1, \tau_1) = \int dr' P(r_2, \tau_2 | r', \tau') P(r', \tau' | r_1, \tau_1), \quad (3.2)$$

onde  $\tau_2 > \tau' > \tau_1$ . A validade dessa equação foi examinada para diferentes tripletos  $(\tau_2, \tau', \tau_1)$ . Como um exemplo ilustrativo, na Fig. 3.4, comparamos



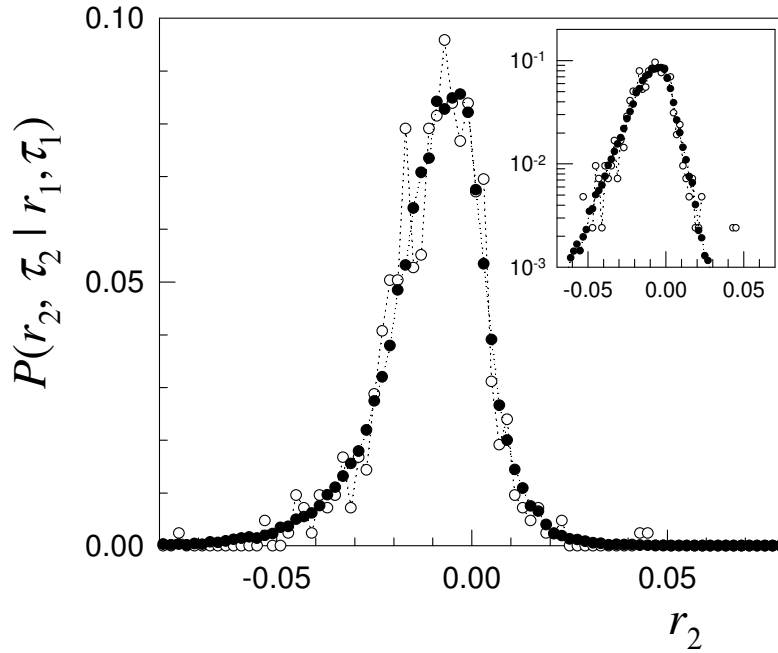
**Figura 3.3:** Distribuição conjunta típica para retornos obtida para  $\tau_2 = 6,88$  ( $\Delta t_2 = 120$  min) e  $\tau_1 = 6,18$  ( $\Delta t_1 = 195$  min).

as FDPs condicionais integradas e as obtidas diretamente (o lado direito e o esquerdo da Eq. (3.2), respectivamente). A boa concordância entre as FDPs condicionais calculadas diretamente e as integradas sustenta a markovianidade, validando dessa forma a nossa abordagem.

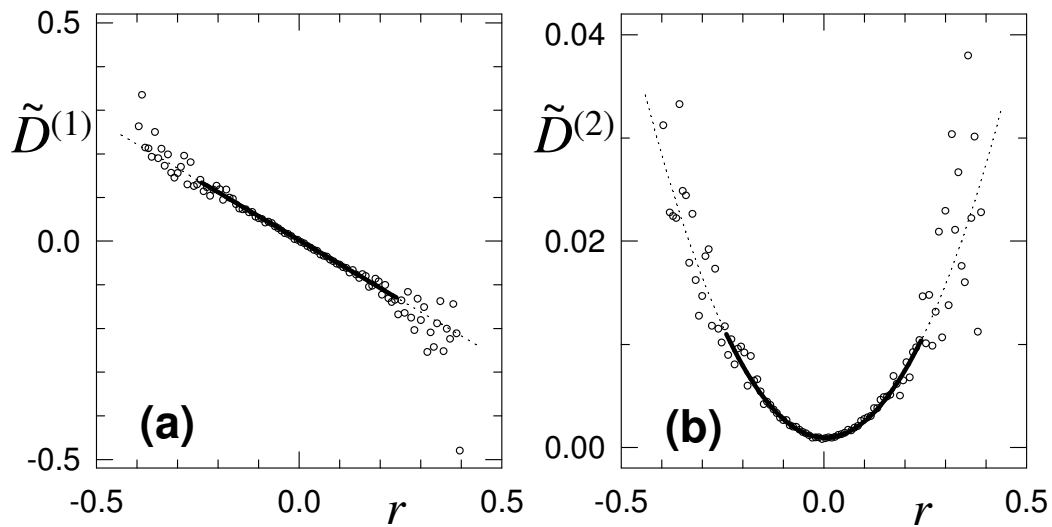
Os primeiros coeficientes  $\tilde{D}^{(k)}$  foram computados, para  $\tau = \frac{\tau_1 + \tau_2}{2}$ , com  $\Delta\tau = \tau_2 - \tau_1$ , diretamente a partir dos dados, utilizando suas definições estatísticas, dadas pela Eq. (2.35). Para cada par de valores  $(\tau, \Delta\tau)$ , encontramos que  $\tilde{D}^{(1)}$  e  $\tilde{D}^{(2)}$  como função de  $r$ , seguem, em muito boa aproximação, leis lineares e quadráticas, respectivamente, como ilustrado na Fig. 3.5. A saber,

$$\begin{aligned} \tilde{D}^{(1)} &= -\tilde{a}_1 r + \tilde{a}_0, \\ \tilde{D}^{(2)} &= \tilde{b}_2 [r]^2 + \tilde{b}_1 r + \tilde{b}_0. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Mediante ajustes linear e quadrático para  $\tilde{D}^{(1)}$  e  $\tilde{D}^{(2)}$ , respectivamente, obtivemos os parâmetros  $\{\tilde{a}_i, \tilde{b}_j\}$  para cada par  $(\tau, \Delta\tau)$ . Os valores limites  $\{a_i, b_j\}$  para  $\Delta\tau \rightarrow 0$  determinam a dependência em  $r$  dos coeficientes de tendência  $D^{(1)}$  e de difusão  $D^{(2)}$ . Comportamentos similares para  $D^{(1)}$  e  $D^{(2)}$  foram observados para incrementos logarítmicos e lineares de índices de preço e para taxas de câmbio envolvendo mercados nos E.U.A., Alemanha e



**Figura 3.4:** Corte de  $P(r_2, \tau_2 | r_1, \tau_1)$  em  $r_1 = 3\sigma_{\tau_2}$  obtido para  $\tau_2 = 11,75$  ( $\Delta t_2 = 4$  min),  $\tau' = 10,75$  ( $\Delta t' = 8$  min) e  $\tau_1 = 9,75$  ( $\Delta t_1 = 16$  min). Os símbolos cheios correspondem à FDP condicional calculada diretamente e os símbolos abertos à FDP integrada. Gráfico inserido: representação log-linear dos mesmos dados.

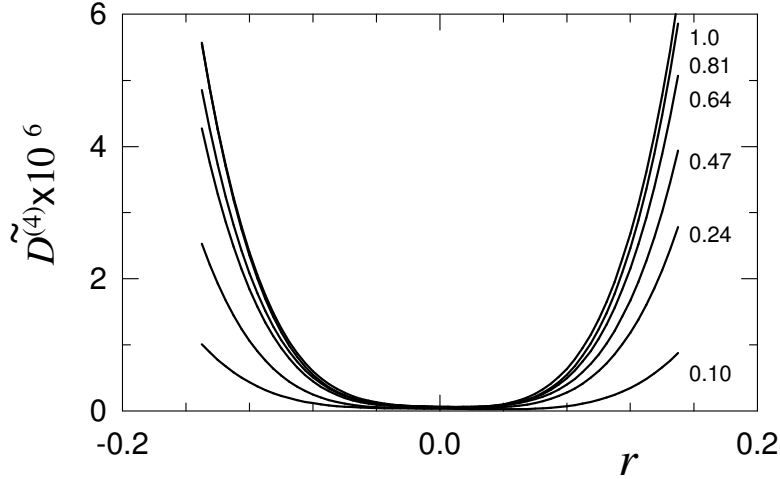


**Figura 3.5:** Coeficientes  $\tilde{D}^{(1)}$  (a) e  $\tilde{D}^{(2)}$  (b) em função de  $r$ , calculados em  $\Delta t_2 = 109$  min e  $\Delta t_1 = 125$  min (logo  $\tau = 6,9$  e  $\Delta\tau = 0,2$ ). As linhas cheias correspondem aos intervalos utilizados nos ajustes.

Japão [20, 35, 36].

Obtivemos também os coeficientes de quarta ordem  $\tilde{D}^{(4)}$  em função de  $r$ , e realizamos um ajuste polinomial de quarta ordem, para cada par  $(\tau, \Delta\tau)$ . Observamos que ao diminuir  $\Delta\tau$ , com  $\tau$  fixo, as curvas de  $\tilde{D}^{(4)}(\Delta x, \tau, \Delta\tau)$  se

achatam, como apresentado na Fig. 3.6. Supondo o limite  $D^{(4)}(\Delta x, \tau)$  em (2.34) desprezivelmente pequeno, de acordo com o teorema de Pawula [24], a expansão de KM (2.32) pode ser truncada após a segunda ordem, reduzindo-a dessa forma a uma EFP.



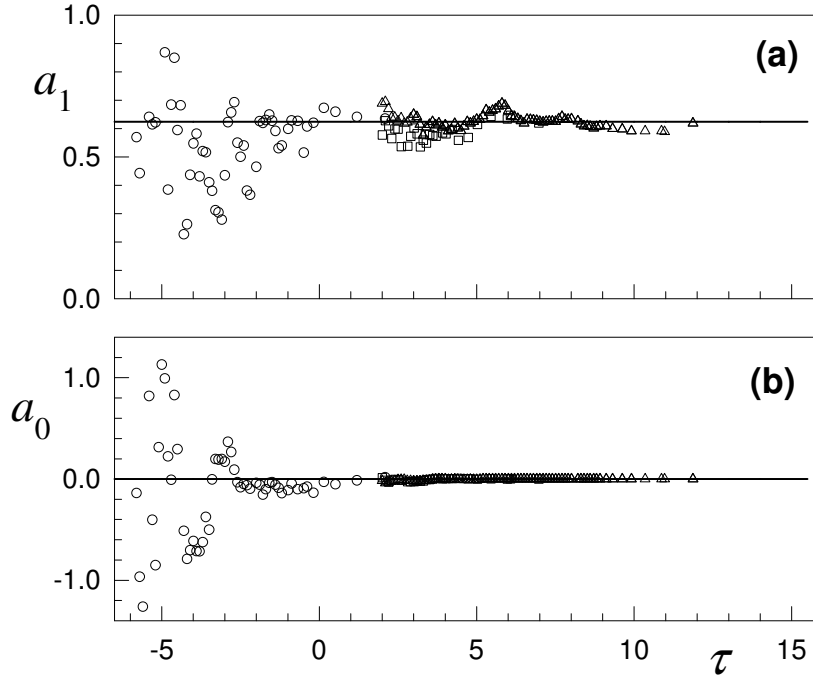
**Figura 3.6:** Coeficiente  $\tilde{D}^{(4)}$  em função de  $r$ , calculado em  $\tau = 8,35$  e diferentes valores de  $\Delta\tau$ , indicados na figura. Linhas sólidas correspondem a ajustes polinomiais de quarta ordem nos dados.

É importante mencionar que as escalas de tempo das amostras impõem limites naturais ao valor mínimo de  $\Delta\tau$  acessível empiricamente. Por exemplo, a escala diária dos dados impõe o limite de 1 dia para a variação entre as escalas  $\Delta t_1$  e  $\Delta t_2$  consideradas na Eq.(2.34). Assim,  $\Delta\tau = 0,1$ , ( $\Delta t_1/\Delta t_2 \simeq 1,07$ ) só pode ser atingido para  $\tau \leq 1,09$  ( $\Delta t \geq 15$  dias), enquanto  $\Delta\tau = 0,2$  ( $\Delta t_1/\Delta t_2 \simeq 1,15$ ) só é acessível quando  $\tau \leq 2$  ( $\Delta t \geq 8$  dias).

Levando-se em conta estas restrições, observa-se que dentro das flutuações estatísticas, o comportamento limite dos parâmetros pode ser estimado considerando os resultados obtidos para  $\Delta\tau = 0,2$  como aqueles que definem  $\{a_i, b_j\}$  para cada  $\tau$ . A dependência em  $\tau$  de  $\tilde{a}_i$  e  $\tilde{b}_i$  é exemplificada no Apêndice A.2.1, para diferentes valores de  $\Delta\tau$ .

### 3.3 Dependência temporal dos parâmetros

A dependência dos parâmetros limites  $\{a_i, b_j\}$  de acordo com a escala  $\tau$  é apresentada nas Figs. 3.7-3.8. Apresentamos essa dependência nas Eqs. (3.4)-(3.8):



**Figura 3.7:** Dependência dos parâmetros  $a_1$  e  $a_0$  do coeficiente de tendência  $D^{(1)}(r, \tau)$  com a escala temporal  $\tau$ . A análise foi realizada com dados de séries diárias (círculos), de 15 minutos (quadrados) e de 30 segundos (triângulos).

$$\begin{aligned} a_0 &= 0, \\ a_1 &= -0,642, \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$b_1 = 0,5 \left( 1 - (1 + \exp(-\tau + 3,5/0,2))^{-1} (1 + \exp(\tau + 2,5/1,7))^{-1} - 1 \right), \quad (3.5)$$

$$b_2 = 0,1364 \left( 1 - (1 + \exp(\tau + 2,5/0,49))^{-1} \right), \quad (3.6)$$

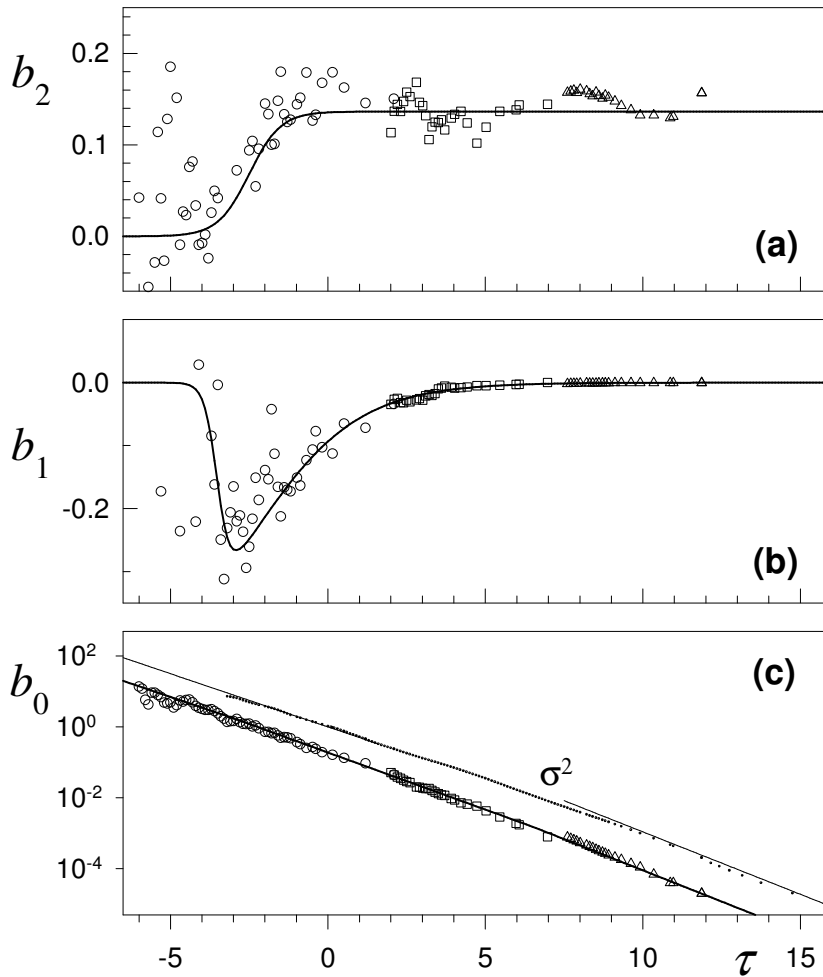
$$b_0 = 0,2/2^\tau, \quad (3.7)$$

$$b_0 = 0,3/2^{1,17\tau}. \quad (3.8)$$

Eq. (3.7) foi usada para  $\tau < 6,6$  e Eq. (3.8) para  $\tau \geq 6,6$ .

Os parâmetros de ajuste  $a_0$  e  $a_1$  permanecem aproximadamente constantes ao longo das escalas diária e intradiárias. As flutuações observadas nas figuras para  $\tau$  pequeno são devidas à menor significância estatística dos resultados.

O parâmetro de difusão  $b_2$  aumenta com  $\tau$  desde próximo de zero, em escalas mensais, até um valor limite, no regime de alta frequência,

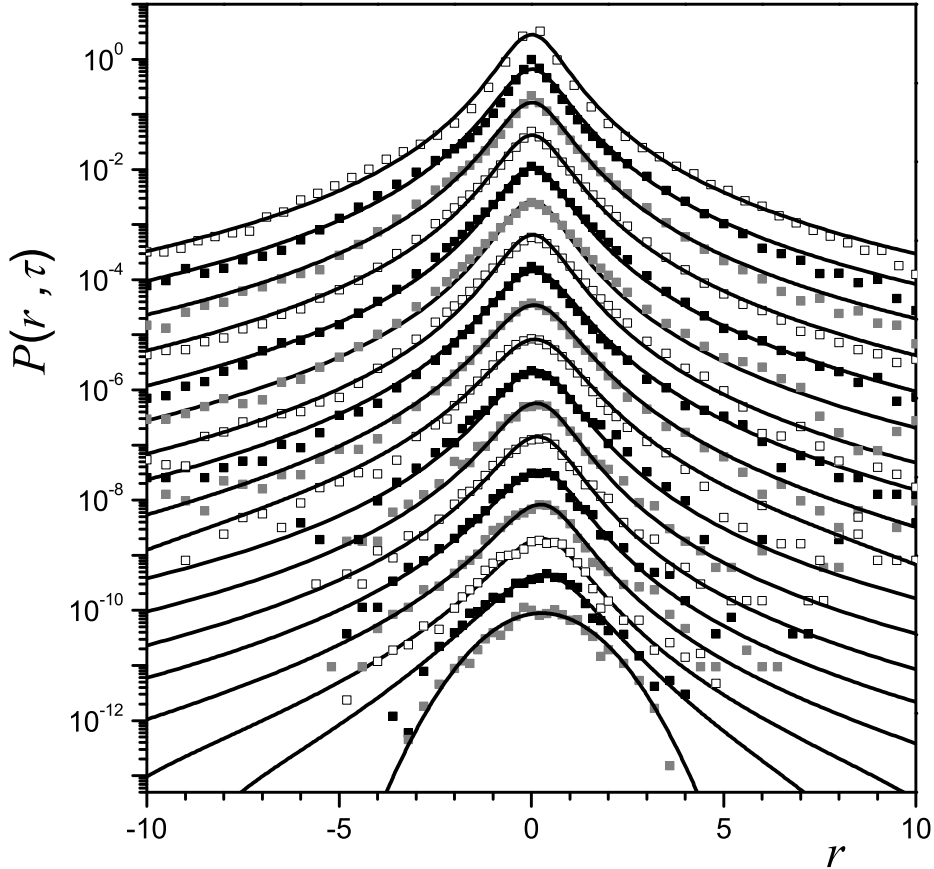


**Figura 3.8:** Dependência dos parâmetros  $b_2, b_1$  e  $b_0$  do coeficiente de difusão  $D^{(2)}(r, \tau)$  com a escala temporal  $\tau$ . Símbolos como na Fig. 3.7. Em (c), incluímos para comparação  $\sigma^2(\tau) = \sigma_\tau^2 / \sigma_{32}^2$  (símbolos pequenos) junto com seu comportamento assintótico (linhas finas) para escalas de tempo longas e curtas como previsto pela Eq. (3.14), com  $\gamma = 1$  e  $1,17$ , respectivamente.

sinalizando uma transição na dinâmica subjacente dos retornos. Por outro lado, o parâmetro  $b_1$  apresenta valores não nulos apenas em escalas semanal/mensal, indicando desvios de simetria das FDPs.

Entretanto, o parâmetro de difusão  $b_0$  apresenta um decaimento exponencial persistente à medida que  $\tau$  aumenta, caracterizado por  $b_0(\tau) \approx 2^{-\gamma\tau}$ . Comportamento semelhante de  $b_0$  foi relatado para taxas de câmbio [20], embora, para um menor alcance de escalas temporais. É importante ressaltar que, apesar do decaimento exponencial de  $b_0$ , ele não pode ser genericamente negligenciado para grandes escalas em  $\tau$  pois ele representa a amplitude da componente aditiva do ruído, que proporciona estabilidade ao processo estocástico para pequenos  $r$ . De fato, a variância  $\sigma_\tau^2$  também segue um decaimento exponencial do tipo  $2^{-\gamma\tau}$ , como mostrado na Fig. 3.8(c), definindo assim o nível de referência para  $b_0$ . Dois regimes associados a decaimentos um





**Figura 3.9:** FDPs dos retornos normalizados. Comparação entre as soluções numéricas da EFP (3.9) (linhas cheias) e os dados empíricos (símbolos). As escalas temporais correspondem de  $\tau = -2$  a  $\tau \approx 15$ . As FDPs estão deslocadas verticalmente, para melhor visualização. A condição inicial foi um ajuste gaussiano aos dados para  $\tau = -2$  ( $\Delta t=128$  dias). As escalas  $\tau$  apresentadas são informadas na tabela A.5 (apêndice).

pouco diferentes são observados para as duas quantidades (ver Fig. 3.8(c)), sugerindo que  $b_0(\tau)$  esteja relacionado à  $\sigma_\tau^2$ . No limite de  $\tau$  pequeno ambas as quantidades são caracterizadas por  $\gamma = 1$ , o que corresponde ao regime difusivo normal, enquanto que em escalas de alta frequência,  $\gamma > 1$ , correspondente a um regime superdifusivo. Para  $\tau > 11$ , a impossibilidade de obtenção de resultados para  $\Delta\tau$  suficientemente pequenos impedem a estimativa dos parâmetros, segundo a Eq. (2.34).

### 3.4 Evolução temporal

A partir da EFP (2.33), mapeando  $x \rightarrow r$  e  $t \rightarrow \tau$ , a equação de evolução resultante se escreve explicitamente

$$\partial_\tau P = \partial_r(a_1 P) + \partial_r^2((b_0 + b_1 r + b_2 r^2)P), \quad (3.9)$$

onde a dependência em  $\tau$  dos parâmetros foi suavizada através dos *ansätze* representados nas Figs. 3.7-3.8. A Eq. (3.9) foi integrada numericamente por meio de um esquema FTCS (do inglês *Forward-Time Centred-Space*) [37].

Um ajuste gaussiano no histograma empírico em  $\Delta t=128$  dias ( $\tau = -2$ ) foi utilizado como condição inicial. A evolução foi conduzida em direção à escala de 30 segundos, a mais alta resolução temporal dos nossos dados. Para  $\tau > 11$ , o prosseguimento da evolução da EFP, foi realizado pela extrapolação da dependência em  $\tau$  dos coeficientes a partir dos *ansätze* utilizados. Na Fig. 3.9, mostramos as FDPs de retornos normalizados (reescalados por  $\sigma_\tau$ ) gerados pela EFP, juntamente com os dados empíricos. Sua adequação é notavelmente boa em toda a região de dados, validando fortemente a nossa estimativa dos coeficientes de KM.

Dentro da dinâmica de Langevin,  $D^{(1)}$  e  $D^{(2)}$  estão relacionados com as forças deterministas e aleatórias, respectivamente [24]. Apesar do amplo leque de escalas de tempo analisadas, a intensidade da força harmônica restauradora, dada por  $D^{(1)}(r, \tau) \simeq -a_1(\tau)r$ , manteve-se praticamente constante para  $\tau > -2$ . Isto significa que os mecanismos de relaxação dos mercados, regidos entre outros fatores, por limite de capital e aversão ao risco, são semelhantes em diversas escalas temporais.

O coeficiente de difusão no entanto, apresenta características diferenciadas de acordo com a escala temporal. Para a maioria das escalas temporais,  $D^{(2)}(r, \tau) \simeq b_0(\tau) + b_2(\tau) r^2$  é dominado pelo termo independente e pelo termo quadrático, associados respectivamente, às componentes aditiva e multiplicativa do ruído. Devido ao caráter acumulativo das flutuações, a componente aditiva  $b_0$  aumenta com  $\Delta t$ . Entretanto, a mudança de  $b_2$  para um patamar mais elevado para pequenos intervalos  $\Delta t$  indica um grande efeito multiplicativo nessa região temporal. Isto significa que o comportamento endógeno do mercado, que cria espontaneamente a amplificação dos mecanismos de resposta a flutuações de preços, apresenta diferentes níveis para as escalas micro e macroscópicas. A presença de ruído multiplicativo é um conhecido mecanismo gerador de FDPs estacionárias com caudas gordas [38, 39, 40]. Verificou-se que para um grande conjunto de parâmetros de controle, caudas em lei de potência prevalecem, cujo expoente depende da razão  $a_1/b_2$ , sendo independente de  $b_0$ .

À luz desses últimos resultados, os platôs observados para  $a_1$  e  $b_2$  nas Figs. 3.7 e 3.8 sugerem que a FDP seja invariante com relação à  $\tau$  em ambos os limites assintóticos. De fato, a EFP (3.9) admite soluções  $\tau$ -invariantes como será discutido a seguir.

De acordo com nossos resultados empíricos, para escalas de tempo longas

e curtas, assumindo valores estacionários para  $a_1$  e  $b_2$  e uma lei exponencial para  $b_0$ , temos:

$$b_0(\tau) = A2^{-\gamma\tau}, \quad (3.10)$$

e negligenciando  $b_1$ , a Eq. (3.9) é reescrita como:

$$\partial_\tau P = \partial_r(a_1 P) + \partial_r^2((b_0(\tau) + b_2 r^2)P). \quad (3.11)$$

A solução invariante da EFP (3.11) é (ver Apêndice A.1.1):

$$P(r, \tau) \sim 1/(b_0(\tau) + b_2 r^2)^{(\mu+1)/2}, \text{ com} \quad (3.12)$$

$$\mu = 1 + (a_1 - B/2)/b_2, \quad (3.13)$$

onde  $B \equiv -b'_0/b_0 \equiv \gamma \ln 2$  não depende do tempo.

Comparando-se com a Eq. (2.10), a solução (3.12) é uma  $q$ -gaussiana com  $q = 1 + 2/(\mu + 1)$  (ver Apêndice A.1.1). No caso particular  $b_2 \rightarrow 0$ , as soluções se reduzem à forma gaussiana ( $q=1$ ).

A variância reescalada  $\sigma^2(\tau) \equiv \sigma_\tau^2/\sigma_{32}^2$  das soluções invariantes é (ver no Apêndice A.1.1):

$$\sigma^2(\tau) = b_0(\tau)/(a_1 - B/2 - b_2). \quad (3.14)$$

No limite de grandes escalas de tempo  $\Delta t$ , o coeficiente de difusão é dominado pelo termo estacionário independente,  $b_0$ , que obedece a Eq. (3.10), com  $A \equiv b_0(0)$ . A substituição dos valores numéricos de  $b_0(0)$  e  $a_1$ , na Eq. (3.14) retorna, em muito boa aproximação<sup>1</sup>,  $\sigma^2(\tau) = 2^{-\tau}$  (difusão normal na escala linear de tempo) de acordo com os resultados numéricos (mostrados na Fig. 3.8(c)). Como consequência, nesse limite, a equação de evolução recupera a gaussianidade, governada por um equilíbrio entre a força harmônica determinística e o ruído aditivo dependente do tempo.

No limite oposto para grandes  $\tau$ ,  $b_2$  possui um valor estacionário não nulo, enquanto  $b_0(\tau)$  evolui de acordo com a Eq. (3.10), com  $\gamma > 1$ . Nesse caso, a Eq. (3.14) também prevê um comportamento assintótico para  $\sigma^2(\tau)$  em acordo com os valores empíricos, conforme mostrado na Fig. 3.8(c). Como a evolução dos demais parâmetros, com exceção de  $b_0$ , é lenta, também investigamos se as FDPs poderiam ser efetivamente descritas pelo *ansatz* (3.12) em um regime temporal estendido.

Os resultados dos ajustes (por mínimos quadrados) estão em boa concordância com às FDPs empíricas, para praticamente todos as escalas  $\tau$ ,

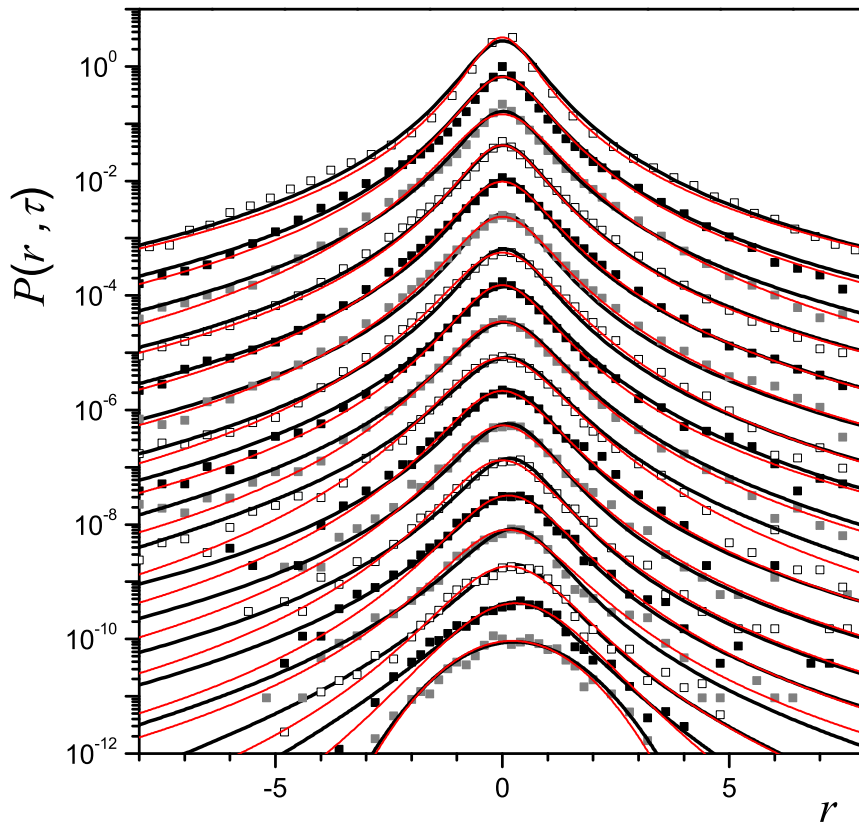
<sup>1</sup>Veja que  $\sigma^2(0) = 1$  por construção.

como podemos verificar na Fig. 3.10. Para  $\tau \approx 0$ , os valores não nulos de  $b_1$ , impõem uma correção à forma  $q$ -gaussiana, devido à presença de assimetria.

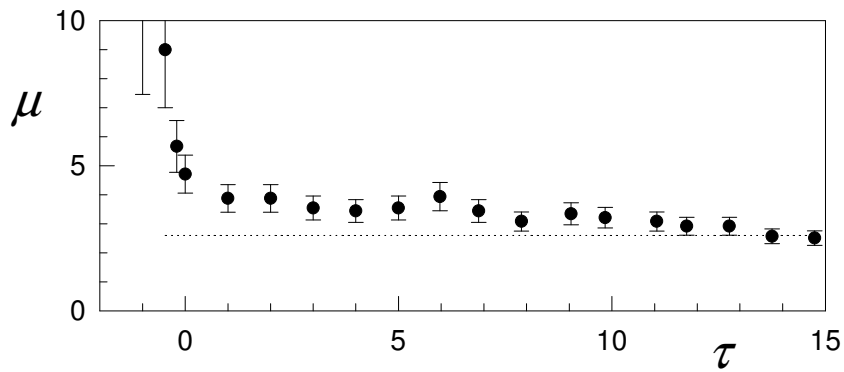
Os valores de  $\mu$  resultantes dos ajustes para as  $q$ -gaussianas são apresentados na Fig. 3.11, juntamente com os valores assintóticos obtidos a partir da Eq. (3.13). Para pequenos valores de  $\tau$ , os valores crescentes dos  $\mu$  efetivos apontam para a latência do regime gaussiano. Para grandes valores de  $\tau$ , os expoentes de cauda empíricos tendem para um valor estacionário em bom acordo com os valores teóricos.

Caudas em lei de potência são frequentemente citadas na literatura para descrever ativos financeiros em regimes de alta frequência [1, 41, 42]. O *ansatz* da forma  $q$ -gaussiana já havia sido proposto para dados de alta-frequência [1, 12, 43] e para retornos logarítmicos diários [44], através de uma abordagem fenomenológica. No entanto, em nossa análise, elas surgem naturalmente da equação de evolução obtida empiricamente através do cálculo dos coeficientes de KM ao longo das escalas temporais.

Lembremos que os resultados da evolução das FDPs para  $\tau > 11$  ( $\Delta t < 4$  minutos), mostrados na Fig. 3.9, foram gerados pela extrapolação da



**Figura 3.10:** FDPs empíricas dos retornos normalizados (símbolos), soluções numéricas da EFP (3.9) (linhas pretas) e ajustes  $q$ -gaussianos aos dados empíricos (linhas vermelhas).



**Figura 3.11:** Dependência do expoente  $\mu$  em relação às escalas temporais  $\tau$ . Símbolos correspondem ao ajuste da Eq. (3.12) aos histogramas empíricos, linhas pontilhadas representam os valores assintóticos dados pela Eq. (3.13).

dependência em  $\tau$  dos coeficientes obtidos, que no entanto, forneceram uma boa previsão dos histogramas empíricos até  $\tau = 14,75$  ( $\Delta t = 30$  segundos). Se por um lado, isso sugere a confiabilidade dos parâmetros estimados, por outro, evidencia a previsibilidade das estatísticas intradiárias, devido à existência de efeitos de memória na dinâmica dos retornos de preços no regime de alta frequência. Vale a pena mencionar que o desvio observado do histograma empírico para as menores escalas de tempo analisadas (30 segundos) exprime o início de um regime não-markoviano [45].

### 3.5

#### Considerações finais

Do conhecimento dos coeficientes de KM, é possível acessar quantitativamente as leis determinísticas e estocásticas que governam a dinâmica dos preços de mercado.

Esta abordagem tem sido aplicada para muitas grandezas econômicas tais como índices de mercado [35, 44], taxas de câmbio [20, 26, 27] e preço de petróleo [28], reproduzindo com sucesso a evolução completa dos histogramas empíricos de retorno ao longo de diversas escalas temporais [20, 26].

Nosso estudo revela padrões universais na dependência funcional dos coeficientes de KM, que podem ser descritos por um pequeno número de parâmetros microscópicos.

Neste capítulo do trabalho, também apresentamos soluções assintóticas consistentes para a equação de evolução temporal que emerge a partir da análise empírica. Dessas soluções surgem novas relações matemáticas conectando características das FDPs, tais como o expoente das caudas, aos parâmetros dos coeficientes de KM.

Os resultados revelam um caminho dinâmico que conduz de estatísticas gaussianas a caudas em lei de potência, oferecendo perspectivas de descrição de outros sistemas complexos onde transições semelhantes são observadas.

O conteúdo deste capítulo pode também ser encontrado na Ref. [29].