

## 2

### Referencial Teórico

Neste capítulo, apresentaremos de forma resumida, a base matemática fundamental para os capítulos seguintes e as principais ferramentas teóricas utilizadas no desenvolvimento de nosso trabalho [21, 22, 23, 24].

#### 2.1

##### Variáveis Aleatórias e Distribuições de Probabilidade

Uma *variável aleatória* unidimensional  $X$  é uma função  $S \mapsto S_X \subset \mathbb{R}$  que associa a cada elemento  $s$  de um espaço amostral  $S$  (conjunto dos resultados possíveis (numéricos ou não) de um experimento aleatório), um número real  $X(s)$ . A variável  $X$  pode ser discreta ( $S_X$  finito ou infinito enumerável) ou contínua ( $S_X$  infinito não-enumerável).

A *distribuição de probabilidade* de uma variável aleatória  $X$  cujo contradomínio é  $S_X = \{x_1, x_2, \dots\}$  (caso discreto) é dada pelo conjunto de pares  $(x_i, p_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , onde  $p_i \equiv P(X = x_i)$ , probabilidade de  $x_i$ , devem satisfazer

- I-  $p_i \geq 0$  (não-negatividade);
- II-  $\sum_{i \geq 1} p_i = 1$  (normalização).

No caso contínuo, a distribuição de probabilidade de uma variável aleatória  $X$  é dada pela função  $f_X$ , chamada *função densidade de probabilidade* (FDP), tal que  $f_X(x)dx$  representa a probabilidade  $P(x \leq X \leq x+dx)$ . Assim, a FDP permite calcular a probabilidade de que  $X$  se encontre dentro de um intervalo real  $[a, b]$ :

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b dx f_X(x). \quad (2.1)$$

A FDP *conjunta* de duas (ou mais) variáveis aleatórias  $X, Y$  (facilmente generalizável para  $N$ ) é  $f_{X,Y}(x, y)$ , tal que  $f_{X,Y}(x, y)dxdy = P(x \leq X \leq x + dx, y \leq Y \leq y + dy)$ . O par  $(X, Y)$  representa também uma variável aleatória bidimensional.

A FDP *marginal*, por exemplo, da variável  $X$  é dada por

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dy f_{X,Y}(x, y), \quad (2.2)$$

enquanto a FDP *condicionada* de  $X$ , dado um certo valor de  $Y = y$ , é

$$f_{X|Y}(x, y) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)}, \quad \text{com } f_Y > 0, \quad (2.3)$$

onde  $f_Y$  é a FDP marginal de  $Y$ .

Uma FDP é caracterizada pelos *momentos*. O momento de ordem  $n$  da variável  $X$  é dado por:

$$\langle X^n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx x^n f_X(x). \quad (2.4)$$

O momento *centrado* de ordem  $n$  da variável  $X$  é:

$$\langle [X - \mu_X]^n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx (x - \mu_X)^n f_X(x), \quad (2.5)$$

onde  $\mu_X \equiv \langle X \rangle$  é a *média* (aritmética) ou *valor esperado*. A *variância* ou *desvio quadrático* é o momento centrado de ordem 2,  $\langle (X - \mu_X)^2 \rangle$ , e o *desvio padrão* a sua raiz quadrada:

$$\sigma_X = \sqrt{\langle (X - \mu_X)^2 \rangle}. \quad (2.6)$$

### 2.1.1 FDPs usuais

É comum utilizar como primeira aproximação ou primeira tentativa de modelagem das distribuições empíricas, uma distribuição gaussiana ou normal

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu_0)^2}{2\sigma^2}}, \quad (2.7)$$

com média  $\mu_0$  e desvio padrão  $\sigma$ .

Esta FDP aparece em diversos fenômenos na natureza, e em particular em processos relacionados à difusão normal ou Browniana. A razão da presença praticamente universal da distribuição gaussiana se deve a ela emergir naturalmente como uma distribuição limite para processos aleatórios, como consequência do Teorema Central do Limite (TCL): a soma de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas cujo segundo momento é finito é normalmente distribuída. Se as variáveis não possuem a mesma distribuição, deve ser satisfeita adicionalmente a condição de Lindeberg [21] para a validade do TCL.

Sendo distribuição limite por agregação de variáveis aleatórias minimamente bem comportadas, a gaussiana é estável. Diz-se que uma família de variáveis independentes e identicamente distribuídas possui distribuição estável se a soma delas possuir a mesma distribuição das variáveis individualmente.

Uma outra distribuição usual para variáveis aleatórias definidas positivas é a distribuição Gama ou erlangiana [25]

$$f(x) = \frac{x^{\beta-1} e^{-x/\theta}}{\theta^\beta \Gamma(\beta)}, \quad (2.8)$$

sendo  $\beta, \theta > 0$  e onde  $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$  é a função Gama.

Esta FDP decai exponencialmente e inclui como casos particulares a FDP exponencial (se  $\beta = 1$ ) e a  $\chi$ -quadrado (se  $\beta = n/2$ , com  $n$  inteiro e  $\theta = 2$ ).

Embora a parte central de uma distribuição geralmente é a região de maior probabilidade de ocorrência, é nas suas caudas que obtemos informações relativas aos valores extremos. Assim, em qualquer modelagem de distribuição de retornos de preços ou outras variáveis financeiras é fundamental a análise das caudas das FDPs, pois permite estimar lucros e prejuízos relevantes para o mercado financeiro.

Em geral, a frequência de ocorrência de valores extremos nas séries financeiras apresenta desvios do comportamento exponencial, sendo ordens de grandeza maiores do que os previstos pelas FDPs usuais, como ilustrado na Fig. 1.4. Diz-se que esses histogramas empíricos possuem caudas gordas ou pesadas. A seguir, vamos analisar as propriedades de algumas distribuições que foram utilizadas na modelagem de variáveis financeiras nesta tese.

### 2.1.2

#### FDPs generalizadas

Em problemas tradicionais da mecânica estatística de equilíbrio a energia e a entropia são quantidades extensivas. Para que estes resultados sejam válidos é necessário que diferentes regiões do sistema sejam independentes. Existem sistemas com interação de longo alcance, no entanto, para os quais não é possível assumir esta independência como, por exemplo, estrelas interagindo sob a influência da interação gravitacional. Da mesma forma, sistemas complexos cujo estado fundamental é altamente degenerado ou que possuem memória microscópica de longo alcance apresentam tempo de relaxação ao equilíbrio muito longo e não podem ser na prática descritos pela mecânica estatística de Boltzmann-Gibbs. Recentemente, foi proposto por Tsallis [10] um formalismo para a análise desses sistemas baseado em estatísticas não-extensivas. Deste formalismo, emergem naturalmente FDPs em que a função exponencial é generalizada segundo

$$\exp_q(x) = [1 + (1 - q)x]^{\frac{1}{1-q}}, \quad (2.9)$$

onde  $q \in \mathbb{R}$ .

Esta função, conhecida como  $q$ -exponencial, permite generalizar várias FDPs usuais, tal como a gaussiana, segundo a expressão

$$G_q(x) = \mathcal{N}_q \exp_q(-\beta(x - \mu_0)^2) = \mathcal{N}_q [1 - \beta(1 - q)(x - \mu_0)^2]^{\frac{1}{1-q}}, \quad (2.10)$$

onde  $\beta > 0$  é um parâmetro de escala e  $\mathcal{N}_q$  é a constante de normalização, que para  $1 < q < 3$  é dada por:

$$\mathcal{N}_q = \sqrt{\left(\frac{\beta(q-1)}{\pi}\right)} \frac{\Gamma\left[\frac{1}{(q-1)}\right]}{\Gamma\left[\frac{(3-q)}{2(q-1)}\right]}. \quad (2.11)$$

Esta FDP, conhecida como  $q$ -gaussiana, possui como limite do parâmetro  $q \rightarrow 1$  a gaussiana usual. Assintoticamente, a  $q$ -gaussiana tem comportamento em lei de potência para  $q > 1$ . Com efeito, de (2.10), com  $\beta^{-1/2}|x| \gg 1$ :

$$G_q(x) \approx 1/|x|^{\frac{2}{(q-1)}}. \quad (2.12)$$

O parâmetro  $\beta$  controla a largura, e conseqüentemente, pelo vínculo de normalização, a altura da FDP em  $x = 0$ . A variância é finita somente para  $q < 5/3$ . Neste caso é dada por:

$$\sigma^2 = \langle (x - \mu_0)^2 \rangle = \int (x - \mu_0)^2 G_q(x) dx = \frac{1}{\beta(5 - 3q)} \quad (2.13)$$

e o parâmetro de escala  $\beta$  é inversamente proporcional à variância. De acordo com a Eq. (2.13), podemos reescrever a Eq. (2.10) como:

$$G_q(x) = \mathcal{N}_q \left[ 1 + \frac{(q-1)}{(5-3q)} \frac{(x - \mu_0)^2}{\sigma^2} \right]^{\frac{1}{(1-q)}}. \quad (2.14)$$

A distribuição Gama, dada pela Eq. (2.8), também pode ser generalizada de forma a descrever distribuições com caudas pesadas, através de

$$\Gamma_q(x) = \mathcal{N}_q x^{\beta-1} \left[ 1 + (q-1) \frac{x}{\theta} \right]^{\frac{1}{(1-q)}}, \quad (2.15)$$

onde

$$\mathcal{N}_q = \left( \frac{q-1}{\theta} \right)^\beta \frac{\Gamma\left[\frac{1}{(q-1)}\right]}{\Gamma[\beta] \Gamma\left[\frac{1}{q-1} - \beta\right]}. \quad (2.16)$$

Esta distribuição, conhecida como  $q$ -Gama, no limite  $q \rightarrow 1$  tende à distribuição Gama usual e para  $q > 1$  possui cauda em lei de potência.

## 2.2

### Processos Estocásticos

Uma função aleatória  $\mathcal{P}_X(t)$  é uma aplicação que atribui a cada valor do índice  $t \in \mathbb{T}$  uma variável aleatória  $X_t$ . Um processo estocástico (PE) é uma função aleatória do tempo [24]. O processo pode ser de tempo discreto

ou contínuo dependendo da natureza do conjunto  $\mathbb{T}$ . Atribuindo-se um valor particular  $x(t)$  à variável aleatória  $X_t$  (que alternativamente denotaremos  $X(t)$ ), para cada  $t$ , temos uma realização do processo, uma função ordinária do tempo. Um PE  $\mathcal{P}_X(t)$  também pode ser visto como o conjunto ou *ensemble* de todas as suas realizações  $\{x(t), t \in \mathbb{T}\}$ <sup>1</sup>.

### 2.2.1

#### Classes de processos estocásticos

As características que permitem distinguir entre PEs são a natureza do espaço de estados (espaço amostral de cada  $X(t)$ , com  $t \in \mathbb{T}$ ), a natureza do conjunto de índices  $\mathbb{T}$  e as relações de dependência entre as variáveis aleatórias  $X(t)$ , que se derivam das distribuições conjuntas.

Conhecendo a hierarquia infinita de FDPs conjuntas correspondentes a  $n$  valores arbitrários da variável temporal  $f_n(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n) \equiv f_n(X(t_1) = x_1, \dots; X(t_n) = x_n)$ , com  $n = 1, 2, \dots$ , o PE (seja discreto ou contínuo) fica completamente definido [23]. As FDPs  $f_j$  da hierarquia com  $1 \leq j < n$  são obtidas por integração de  $f_n$ . Dadas estas funções podemos calcular valores médios. Por exemplo, a função de autocorrelação de dois tempos é dada por

$$\langle X(t_1)X(t_2) \rangle = \int \int dx_1 dx_2 x_1 x_2 f_2(x_1, t_1; x_2, t_2). \quad (2.17)$$

Se as  $f_j$  não mudam ao substituir  $t_i$  por  $t_i + \tau$  (com  $\tau$  arbitrário), então trata-se de um *processo estacionário*, ou seja, não são afetadas por um deslocamento no tempo:

$$f_n(x_1, t_1 + \Delta t; \dots; t_n + \Delta t) = f_n(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n), \quad (2.18)$$

para todo  $n, \tau$  e  $t_1, \dots, t_n$ . Em particular os momentos resultam ser estacionários no tempo. O PE é dito estacionário em sentido amplo, se possui segundos momentos finitos e se a covariância<sup>2</sup>  $\text{cov}(X(t_i), X(t_i + \tau))$  depende somente de  $\tau, \forall t_i \in \mathbb{T}$ .

Uma possível classificação dos processos estocásticos é a seguinte [24]:

#### Processos puramente aleatórios:

A FDP condicional  $f_{1|n-1}$ , com  $n > 1$ , independe dos valores em instantes anteriores, ou seja

$$f_{1|n-1}(x_n, t_n | x_1, t_1; \dots; x_{n-1}, t_{n-1}) = f_1(x_n, t_n). \quad (2.19)$$

<sup>1</sup>Veja também a interessante descrição alternativa de van Kampen [23].

<sup>2</sup>Se  $X$  e  $Y$  são duas variáveis aleatórias contínuas, a covariância é dada por  $\int (x - \mu_X)(y - \mu_Y) dx dy$ .

Um exemplo deste tipo de processo é dado pela sequência de resultados ao jogar muitas vezes um dado. Nesse caso particular as variáveis  $X_t$  são identicamente distribuídas além de serem independentes.

### Processos markovianos:

A FDP condicional  $f_{1|n-1}$ , com  $n > 1$ , depende somente do valor no instante anterior, ou seja, se o valor presente é conhecido exatamente, o conhecimento futuro não é alterado por informação adicional sobre o passado. Mais formalmente, para qualquer conjunto de tempos sucessivos  $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ :

$$f_{1|n-1}(x_n, t_n | x_1, t_1; \dots; x_{n-1}, t_{n-1}) = f_{1|1}(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}). \quad (2.20)$$

Um exemplo de processo markoviano é dado pelo caminhante aleatório. A probabilidade de transição da posição  $i'$  ao tempo  $t$  para a posição  $i$  ao tempo  $t + 1$  é

$$P(i, t + 1 | i', t) = p\delta_{i-1, i'} + (1 - p)\delta_{i+1, i'}, \quad (2.21)$$

que depende somente da informação ao tempo imediatamente anterior.

### Processos mais gerais:

Uma possível generalização dos PEs descritos acima corresponde ao caso em que as FDPs condicionais dependem de dois ou mais tempos.

Seja, por exemplo, um caminhante que apresenta tendência a persistir ou mudar de direção: ele continua na mesma direção com probabilidade  $p$  e muda de direção com probabilidade  $q = 1 - p$ . Neste caso a variável  $X_t$  que descreve a posição do caminhante ao tempo  $t$  não é mais markoviana, já que a probabilidade condicional depende não somente de  $X_{t-1}$  mas também de  $X_{t-2}$ .

Porém, isto pode ser remediado introduzindo uma variável de duas componentes  $(X_t, X_{t-1})$  [23]. Esta nova variável resulta ser markoviana. Com efeito, sua probabilidade de transição é dada por

$$P(i_1, i_2, t + 1 | i'_1, i'_2, t) = \delta_{i_2 i'_1} [p\delta_{i_1 - i_2, i'_1 - i'_2} + (1 - p)\delta_{i_1, i'_2}]. \quad (2.22)$$

Como consequência geral, nota-se que um processo pode ser markoviano ou não dependendo das variáveis utilizadas para descrevê-lo. Se a memória da caminhada envolvesse mais tempos, seriam necessárias mais variáveis para poder tratar o processo como markoviano. Porém, se a memória se estende sobre *todos* os passos anteriores, esse procedimento não pode ser aplicado e

o processo é irremediavelmente não-markoviano. Um exemplo é o dos “self-avoiding random walks” ou polímeros infinitos com volume excluído.

Dentre os diversos tipos de processos estocásticos, aprofundaremos nas propriedades dos processos markovianos.

### 2.2.2

#### Processos markovianos

Um processo de Markov é um processo estocástico que não possui memória de “tempos” anteriores. Isto corresponde a casos experimentais em que a “janela” de tempo entre medidas  $\Delta t$  excede o tempo de correlação  $\Delta t_C \ll \Delta t$  do processo. Assim, a probabilidade condicional deste processo perde a memória das situações anteriores à última medida, verificando a Eq. (2.20). Apenas o conhecimento sobre o ponto  $(x_{n-1}, t_{n-1})$  é necessário para sabermos o que acontece em  $(x_n, t_n)$ .

A sua hierarquia de FDPs  $f_n$  fica totalmente caracterizada pelas densidades  $f_{1|1}$  e  $f_1$ . Por exemplo, para  $t_1 < t_2 < t_3$ :

$$\begin{aligned} f_3(x_1, t_1; x_2, t_2; x_3, t_3) &= f_2(x_1, t_1; x_2, t_2) f_{1|1}(x_3, t_3 | x_2, t_2; x_1, t_1) \\ &= f_1(x_1, t_1) f_{1|1}(x_2, t_2 | x_1, t_1) f_{1|1}(x_3, t_3 | x_2, t_2). \end{aligned} \quad (2.23)$$

Podemos proceder da mesma maneira para todas as FDPs  $f_n$  dessa hierarquia. Assim podemos expressar  $f_n$  por um produto de probabilidades condicionais e por  $f_1$ . Se soubermos as formas de  $f_{1|1}(x_2, t_2 | x_1, t_1)$  e  $f_1(x_1, t_1)$ , podemos calcular todas as quantidades de interesse para o processo. Devido a essas relações, as probabilidades condicionais também são conhecidas como *probabilidades de transição*.

No processo markoviano só há memória do valor da variável aleatória para o último tempo, onde medimos  $x$ . O intervalo de tempo  $t_2 - t_1$  da FDP condicional  $f(x_2, t_2 | x_1, t_1)$  de um processo de Markov é arbitrário. Se a diferença é grande, a dependência de  $f$  em  $x_1$  será pequena (ou seja, a memória do valor da variável aleatória é quase inexistente). Se a diferença de tempo é infinitesimal (porém maior que o tempo de correlação), a probabilidade condicional terá idealmente valor exato em  $x_1$ , ou seja,  $\lim_{t_2 \rightarrow t_1} f(x_2, t_2 | x_1, t_1) = \delta(x_1 - x_2)$ .

#### Equação de Chapman-Kolmogorov

Integrando a Eq. (2.23) em  $x_2$  (para  $t_1 \leq t_2 \leq t_3$ ) obtemos:

$$f_2(x_1, t_1; x_3, t_3) = f_1(x_1, t_1) \int dx_2 f_{1|1}(x_3, t_3 | x_2, t_2) f_{1|1}(x_2, t_2 | x_1, t_1), \quad (2.24)$$

logo

$$f_{1|1}(x_3, t_3|x_1, t_1) = \int dx_2 f_{1|1}(x_3, t_3|x_2, t_2) f_{1|1}(x_2, t_2|x_1, t_1). \quad (2.25)$$

A Eq. (2.25) é chamada de *equação de Chapman-Kolmogorov* (CK). Ela é uma identidade que deve ser obedecida por todo processo de Markov. É essencial que  $t_1 \leq t_2 \leq t_3$ . Ou seja, a integração é feita sobre um estado intermediário  $x_2$ . A FDP  $f_1$  também deve satisfazer

$$f_1(x_2, t_2) = \int dx_1 f_{1|1}(x_2, t_2|x_1, t_1) f_1(x_1, t_1). \quad (2.26)$$

A Eq. (2.25) pode ser interpretada como a probabilidade de transição de  $x_1$  no instante de tempo  $t_1$  para  $x_3$  no instante  $t_3$  é a mesma que a probabilidade de transição de  $x_1$  em  $t_1$  para  $x_2$  em  $t_2$  multiplicado pela probabilidade de transição de  $x_2$  em  $t_2$  para  $x_3$  em  $t_3$  para todos os possíveis valores de  $x_2$ . Para um processo markoviano estacionário, a probabilidade  $f_{1|1}(x_2, t_2|x_1, t_1)$  depende apenas do intervalo  $\Delta t = t_2 - t_1$ . No que segue, simplificaremos a notação por  $f_1(x, t) \equiv f(x, t)$ .

### 2.2.3

#### Expansão de Kramers-Moyal

Da definição de probabilidades condicionais podemos verificar que a densidade de probabilidade  $f(x, t + \Delta t)$  em um instante  $t + \Delta t$  e a densidade de probabilidade  $f(x, t)$  em um instante  $t$  estão conectadas (para  $\Delta t \geq 0$ ) segundo

$$f(x, t + \Delta t) = \int f(x, t + \Delta t|x', t) f(x', t) dx'. \quad (2.27)$$

Para obter o diferencial  $\partial f(x, t)/\partial t$ , precisamos conhecer as probabilidades de transição  $f(x, t + \Delta t|x', t)$  para  $\Delta t$  pequeno. Por outro lado, assumimos que conhecemos todos os momentos  $M_k$ , (para  $k \geq 1$ ):

$$M_k(x', t, \Delta t) = \langle [X(t + \Delta t) - X(t)]^k \rangle_{X(t)=x'} = \int (x - x')^k f(x, t + \Delta t|x', t) dx. \quad (2.28)$$

Existem diversas formas de obter uma expansão geral para a probabilidade de transição. Um dos métodos mais diretos é utilizar a expansão de Taylor para a FDP e para a probabilidade de transição. Definindo  $\Delta x = x - x'$ , podemos expandir o integrando da Eq. (2.27) em séries de Taylor:

$$\begin{aligned} f(x, t + \Delta t|x', t) f(x', t) &= f(x - \Delta x + \Delta x, t + \Delta t|x - \Delta x, t) f(x - \Delta x, t) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} (\Delta x)^k \frac{\partial^k}{\partial x^k} f(x + \Delta x, t + \Delta t|x, t) f(x, t). \end{aligned} \quad (2.29)$$

Inserindo a Eq. (2.29) na Eq. (2.27) e integrando em relação a  $\Delta x$ ,



obtemos diretamente:

$$f(x, t + \Delta t) = f(x, t) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{\partial}{\partial x}\right)^k \frac{M_k(x, t, \Delta t)}{k!} f(x + \Delta x, t + \Delta t | x, t) f(x, t). \quad (2.30)$$

Assumindo que os momentos  $M_k$  podem ser expandidos em séries de Taylor em relação a  $\Delta t$  ( $k \geq 1$ ),

$$\frac{M_k(x, t, \Delta t)}{k!} = D^{(k)}(x, t) \Delta t + \mathcal{O}(\Delta t^2) \quad (2.31)$$

e levando em conta apenas os termos lineares em  $\Delta t$ , temos:

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{\partial}{\partial x}\right)^k D^{(k)}(x, t) f(x, t). \quad (2.32)$$

A Eq. (2.32) é conhecida como Expansão de Kramers-Moyal.

Para processos markovianos,  $D^{(k)}$  não depende dos valores de  $X(t')$  em instantes de tempo anteriores. Dessa forma, a Eq. (2.32) pode ser entendida como uma equação diferencial de primeira ordem e a densidade de probabilidade  $f(x, t)$  pode ser totalmente determinada por integração com distribuição inicial  $f(x, t_0)$  ( $t > t_0$ ) e com condições de contorno adequadas.

A probabilidade de transição  $f(x, t | x', t')$  é a FDP  $f(x, t)$  para a condição inicial especial  $f(x, t') = \delta(x - x')$ . Assim, a probabilidade condicional também deve seguir a Eq. (2.32).

## 2.2.4

### Equação de Fokker-Planck

Se a expansão de KM pode ser truncada após o segundo termo, a equação resultante é chamada de Equação de Fokker-Planck (EFP). Ela se escreve de forma geral:

$$\frac{\partial}{\partial t} f(x, t) = -\frac{\partial}{\partial x} [D^{(1)} f(x, t)] + \frac{\partial^2}{\partial x^2} [D^{(2)} f(x, t)]. \quad (2.33)$$

Neste formalismo  $D^{(2)} > 0$  é chamado de coeficiente de difusão local e  $D^{(1)}$  é um campo de força externo, conhecido como coeficiente de tendência. Esses coeficientes podem ou não depender do tempo. Matematicamente a Eq. (2.33) é um equação diferencial parcial de segunda ordem linear parabólica. Na literatura matemática, a Eq. (2.33) também é conhecida como *Equação de Kolmogorov*.

Um importante teorema relacionado à EFP é o teorema de Pawula [24]. De acordo com este teorema, se qualquer coeficiente  $D^{(2s)} = 0$  para  $s \geq 2$ , todos os coeficientes  $D^{(n)}$  com  $n \geq 3$  devem ser zero, reduzindo naturalmente uma expansão de KM a uma equação EFP.

Os coeficientes de KM,  $D^{(k)}(x, t)$  são definidos, a partir da Eq. (2.31) como:

$$D^{(k)}(x, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \tilde{D}^{(k)}(x, t, \Delta t), \quad (2.34)$$

com

$$\tilde{D}^{(k)}(x, t, \Delta t) = \frac{M^{(k)}(x, t, \Delta t)}{k! \Delta t}, \quad (2.35)$$

sendo  $M^{(k)}$  os momentos das FDPs, obtidos pela Eq. (2.28).

A EFP proporciona uma poderosa ferramenta para lidar com os problemas levantados até aqui e tem sido utilizada em muitos campos diferentes em ciências naturais, incluindo os de estado sólido e física de plasma, ótica quântica, reação cinética química e nuclear, biologia molecular e dinâmica populacional [24].

Esta abordagem também tem sido aplicada para muitas observáveis econômicas tais como taxas de câmbio [20, 26, 27] e preço de petróleo [28], reproduzindo com sucesso, e a evolução completa dos histogramas empíricos de retorno ao longo de diversas escalas temporais [20, 26, 29].

Quando a EFP não admite solução analítica, ela pode ser integrada numericamente. Uma forma de realizar essa integração numérica é utilizar variáveis discretas  $l$ , que podem ser definidas como  $x_i = r l_i$ , com tempos discretizados  $t_i = l_i \Delta t$ . Dessa forma, se os diferenciais forem aproximados por diferenças consistentes, resolver a EFP se reduz a iterações de uma equação de diferenças. Essas diferenças devem ser estáveis a ponto da probabilidade dos erros não crescerem.

### 2.2.5

#### Equação de Itô-Langevin

Muitos processos estocásticos podem ser representados mediante equações diferenciais estocásticas, do tipo

$$\dot{x} = D^{(1)} + \sqrt{2D^{(2)}}\eta(t), \quad (2.36)$$

onde  $\eta$  é um ruído branco, com  $\langle \eta(t) \rangle = 0$  e  $\langle \eta(t)\eta(t') \rangle = \Gamma\delta(t - t')$ .

Esta equação, que tem a forma de uma equação de Langevin generalizada, tem sido utilizada há muitos anos para descrever problemas relacionados a movimentos Brownianos. Ela leva em consideração, além da contribuição determinística para a evolução da variável  $x$ , uma outra, que representa as forças flutuantes ou aleatórias.

É fácil mostrar que a EFP associada à equação estocástica (2.36), com a convenção de Itô (que será adotada nesta tese), é a Eq. (2.33) [24].

## 2.2.6

## Processos de Poisson

Um tipo de processo estocástico muito frequente em processos físicos e que também será considerado nesta tese é o processo de Poisson. Seja um processo  $\mathcal{P}_X(t)$  de tempo contínuo em que a variável aleatória  $X_t$  conta o número de vezes que ocorre um dado "evento" durante o intervalo  $[0, t)$  e  $p_n(t) = P(X_t = n)$ , com  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Um processo de Poisson é caracterizado pelas seguintes propriedades:

- as variáveis que representam o número de ocorrências em intervalos disjuntos são variáveis aleatórias independentes;
- se  $Y_t$  representa o número de ocorrências durante  $[t_o, t_o + t)$ , então para qualquer  $t_o > 0$ ,  $X_t$  e  $Y_t$  tem a mesma FDP;
- $p_1(\Delta t) \simeq \lambda \Delta t$ , onde  $\lambda$  é uma constante positiva, se  $\Delta t > 0$  for suficientemente pequeno;
- $\sum_{k \geq 2} p_k(\Delta t) \simeq 0$ , ou seja, a probabilidade de duas ou mais ocorrências durante um intervalo suficientemente pequeno é desprezível;
- $X_0 = 0$ , ou seja,  $p_0(0) = 1$ .

Estas hipóteses permitem deduzir uma expressão para  $p_n(t)$  chegando-se a  $p_n(t) = e^{-\lambda t} (\lambda t)^n / n!$  [21].

Para um processo de Poisson a distribuição de intervalos de tempo  $T$  entre chegadas é a exponencial

$$f_T(t) = \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau}, \quad (2.37)$$

onde  $\tau = 1/\lambda$ .

Consideremos agora eventos cuja ocorrência depende da realização de várias etapas (um número  $\beta$  de etapas) independentes e ocultas, cada uma resultante de um processo de Poisson. Então a distribuição de intervalos de tempo entre os eventos observáveis será a distribuição da soma de variáveis exponenciais. Por convolução temos

$$f_T(t) = \frac{1}{\tau \Gamma(\beta)} (t/\tau)^{\beta-1} e^{-t/\tau} \equiv \Gamma_{\beta, \tau}(t). \quad (2.38)$$

definida para  $t \geq 0$ . No caso particular  $\beta = 1$ , recupera-se a FDP exponencial.

### 2.3

#### Misturas Estatísticas

Analisando as interações de hádrons em cascatas de raios cósmicos [30], Wilk e Wlodarczyk observaram desvios da distribuição de momentos transversos em relação à distribuição exponencial esperada. Eles explicaram os desvios mediante possíveis flutuações da seção transversa  $\sigma$  e ainda determinaram que a grandeza

$$\omega = \frac{\langle \sigma^2 \rangle - \langle \sigma \rangle^2}{\langle \sigma \rangle^2}, \quad (2.39)$$

permitia medir o grau de afastamento da lei exponencial.

Eles obtiveram a lei empírica, supondo que a FDP observada podia ser derivada como

$$f(x) \propto \int_0^\infty d\sigma e^{-\sigma x} g(\sigma), \quad (2.40)$$

onde  $\sigma$  é o parâmetro flutuante com FDP  $g(\sigma)$ . Ou seja, a lei exponencial  $e^{-\sigma x}$  pode ser vista como uma FDP condicionada dado o valor de  $\sigma$  ( $f(x|\sigma) \propto e^{-\sigma x}$ ), de tal forma que

$$f(x) = \int_0^\infty d\sigma f(x|\sigma) g(\sigma). \quad (2.41)$$

Este tipo de composição de probabilidades é conhecida como *mistura estatística*.

A partir do trabalho de Wilk e Wlodarczyk [30], Cohen e Beck [31] consideraram sistemas de não-equilíbrio com dinâmica complexa em estados estacionários com grandes flutuações de quantidades intensivas (e.g. temperatura, potencial químico). Dependendo das propriedades estatísticas das flutuações, eles reproduziram uma descrição de mecânica estatística efetiva. Esta proposta generaliza a apresentada por Tsallis [10, 32], onde, em particular, o parâmetro entrópico  $q$  surge como  $q = 1 + \omega$ .

Desta perspectiva, a FDP estacionária de certos sistemas fora do equilíbrio surge do fator de Boltzmann efetivo

$$B(E) = \int_0^\infty d\beta f(\beta) e^{-\beta E}, \quad (2.42)$$

onde  $f(\beta)$  é a distribuição da temperatura inversa  $\beta$ . Por isso esta abordagem é denominada *superestatística*, já que  $B(E)$  representa a estatística da estatística  $e^{-\beta E}$ .

Cabe notar que muito antes desta interpretação de mecânica estatística, misturas estatísticas eram consideradas nas ciências econômicas e afins [33, 34].