

3

Estimação de Canal e Detecção em OFDM com Enlace Aberto

Nesse capítulo consideramos a estimação de canal e detecção de sinais OFDM com enlace aberto, ou seja, sem a possibilidade de troca de informações entre os usuários fraco e forte (ver ilustração na Fig. 3.1). Como já citado, a estimação do canal é parte integral de sistemas OFDM coerentes. Dada a observação do comportamento do canal fornecida pelos pilotos, o receptor deve fazer o melhor possível para estimar o canal por completo e sem erros, para a seguir detectar os símbolos de informação. A estimação de canal em sistemas OFDM de enlace aberto e coerentes é assunto já bastante estudado na literatura (Neg98, Mor01, Li98, Cim85, Bee95, San96, Ozd07, Edf98, Col02).

Esse capítulo tem como objetivo responder às seguintes perguntas:

1. Qual o melhor ou os melhores perfis de pilotos para a estimação de canal?
2. Dado o melhor perfil de pilotos, qual o melhor estimador possível do canal?
3. Qual é o impacto do erro de estimação na probabilidade de erro do sistema?

Analisaremos o processo de estimação para responder ao primeiro ponto. Dado um determinado número de pilotos, existem certas ordenações que produzem melhores estimativas do que outras. Queremos determinar qual a melhor ou as melhores. A fim de responder à segunda pergunta, a Seção 3.1 apresentará as técnicas ML, MMSE, e a combinação delas com um filtro de Wiener. Os estimadores ML e MMSE têm por objetivo explorar a correlação em frequência entre os sub-canais OFDM. Como cada tom OFDM é resultado da transformada de Fourier de um mesmo canal no tempo, \mathbf{h}_n , em frequências espaçadas de $2\pi/K$, é de se esperar que a resposta em frequência do canal seja relativamente suave, ou seja, que tons adjacentes tenham resposta em frequência correlacionadas. O filtro de Wiener será aplicado, por sua vez, para explorar a correlação temporal do canal. Para o canal rádio, os vetores de resposta ao impulso \mathbf{h}_n e \mathbf{h}_{n-1} são diferentes mas correlacionados – e é esse o

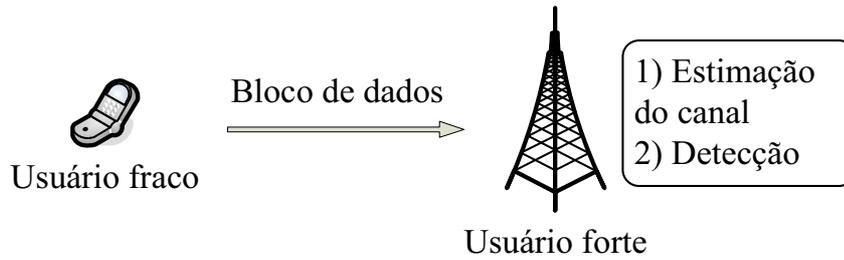


Figura 3.1: Modelo de comunicações com enlace aberto.

fato explorado pelo filtro de Wiener. A Seção 3.2 analisa a recepção do sinal OFDM. Com conclusões tiradas dessa análise teremos condição de responder à terceira pergunta na Seção 3.3. Encerrando esse capítulo, apresentamos uma série de experimentos demonstrando alguns aspectos interessantes dos assuntos discutidos.

3.1

Estimação do canal

De início, considere um sistema OFDM de K sub-canais e K_p símbolos-piloto. Consideraremos, sem perda de generalidade, que uma modulação PSK de energia de símbolo $E_s = 1$ é usada em cada sub-canal. A constelação é formada por símbolos $x_i \in \mathcal{X}$, $i = 1, \dots, |\mathcal{X}|$, com cada símbolo codificando $\log_2(|\mathcal{X}|)$ bits. O sinal na recepção levando em conta o modelo idealizado discutido no Capítulo 2, no instante n , é dado por (2-24), que repetimos aqui para facilitar a leitura.

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_n &= \mathbf{x}_n \text{diag} \{ \mathbf{q}_n \} + \mathbf{z}_n = \text{diag} \{ \mathbf{x}_n \} \mathbf{q}_n + \mathbf{z}_n \\ &= \mathbf{X}_n \mathbf{F}_L \mathbf{h}_n + \mathbf{z}_n, \end{aligned}$$

onde \mathbf{r}_n , \mathbf{x}_n , \mathbf{q}_n e \mathbf{z}_n , são vetores $(K \times 1)$, representando, respectivamente, o bloco recebido, o bloco enviado, a resposta do canal discreto na frequência e o vetor de ruído gaussiano, branco e complexo com matriz autocorrelação $\sigma \mathbf{I}_K$; \mathbf{X}_n é a matriz com os símbolos em sua diagonal; e \mathbf{F}_L é a matriz de DFT com as L primeiras colunasⁱ de \mathbf{F} , portanto de tamanho $(K \times L)$, em que $\mathbf{F}[k, l] = \exp\{-j2\pi kl/K\}$, $k = 0, \dots, K - 1$ e $l = 0, \dots, L - 1$.

A estimação do canal depende de quantos símbolos-pilotos são usados e de sua disposição no bloco. Dado K_p e um posicionamento para os pilotos, temos símbolos conhecidos na recepção dos tons que contém pilotos. Pode-se então amostrar o canal na frequência para a seguir interpolar esse resultado

ⁱNa verdade, com as L_h primeiras colunas, de acordo com a notação apresentada no Capítulo 2. A partir desse ponto deixamos o sub-escrito, por simplicidade. Não haverá ambiguidade.

para a estimação completa do canal. O vetor binário \mathbf{p}_n indicará a posição dos pilotos com 1's em um vetor de tamanho $(K \times 1)$ para a transmissão do n -ésimo bloco. Considere como exemplo um caso simples, o de um sistema OFDM de $K = 16$ e $K_p = 4$. Caso queiramos que os pilotos estejam uniformemente distribuídos, uma opção é alocar os pilotos nas portadoras 2, 6, 10 e 14, o que resultaria em

$$\mathbf{p}_n = \left[0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \right]^T. \quad (3-1)$$

É a disposição de zeros e 1's neste vetor que queremos determinar de forma ótima para responder à primeira pergunta da lista que abre este capítulo. Define-se $\mathbf{p} \in \mathcal{P}$, onde \mathcal{P} é o conjunto de todos os vetores binários de tamanho K com K_p 1's. É fácil ver que $|\mathcal{P}| = \binom{K}{K_p} = \frac{K!}{K_p!(K-K_p)!}$. Para o exemplo citado, são 1820 opções para \mathbf{p} .

Para escolher os tons que contém piloto na recepção, usaremos uma matriz de seleção \mathbf{S}_n , de tamanho $(K_p \times K)$. Essa matriz selecionará as posições de um vetor correspondentes aos canais-pilotos. Para o mesmo exemplo anterior,

$$\mathbf{S}_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3-2)$$

A matriz \mathbf{S}_n tem as seguintes características:

1. $\mathbf{S}_n \mathbf{S}_n^H = \mathbf{I}_{K_p}$;
2. $\mathbf{S}_n^H \mathbf{S}_n = \mathbf{D}_n \triangleq \text{diag} \{ \mathbf{p}_n \}$.

Ambas são facilmente demonstráveis. No item 1, $(\cdot)^H$ é o operador Hermitiano. No item 2, definimos a matriz quadrada $(K \times K)$ com o vetor \mathbf{p}_n na diagonal principal como \mathbf{D}_n . Isso nos será útil posteriormente.

Usando a notação apresentada, a recepção da Eq. (2-24) é pré-multiplicada pela matriz de seleção para separar os tons que carregam pilotos, isto é,

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_r &= \mathbf{S} \text{diag} \{ \mathbf{x} \} \mathbf{F}_L \mathbf{h} + \mathbf{S} \mathbf{z}, \\ \mathbf{r}_p &= \mathbf{S} \text{diag} \{ \mathbf{x} \} \mathbf{F}_L \mathbf{h} + \mathbf{z}_p \end{aligned} \quad (3-3)$$

em que $(\cdot)_p$ são vetores de tamanho $(K_p \times 1)$ referentes aos canais que contém pilotos. Na equação anterior e no desenvolvimento a seguir omitimos o índice temporal n por conveniência. Ele será recuperado no momento oportuno.

O receptor sabe os símbolos enviados no canais-piloto. Multiplicando (3-3) pelo Hermitiano de uma matriz contendo esses símbolos, obtemos

$$\text{diag}\{\mathbf{x}_p\}^{\mathcal{H}} \mathbf{r}_p = \text{diag}\{\mathbf{x}_p\}^{\mathcal{H}} \mathbf{S} \text{diag}\{\mathbf{x}\} \mathbf{F}_L \mathbf{h} + \text{diag}\{\mathbf{x}_p\}^{\mathcal{H}} \mathbf{z}_p \quad (3-4)$$

e

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_p &= \mathbf{S} \text{diag}\{\mathbf{x}\}^{\mathcal{H}} \mathbf{S} \text{diag}\{\mathbf{x}\} \mathbf{F}_L \mathbf{h} + \mathbf{w}_p \\ &= \mathbf{S} \left(\text{diag}\{\mathbf{x}\}^{\mathcal{H}} \text{diag}\{\mathbf{x}\} \right) \mathbf{F}_L \mathbf{h} + \mathbf{w}_p \\ &= \mathbf{S} \mathbf{F}_L \mathbf{h} + \mathbf{w}_p = \mathbf{q}_p + \mathbf{w}_p, \end{aligned} \quad (3-5)$$

em que $\mathbf{w}_p \triangleq \text{diag}\{\mathbf{x}_p\}^{\mathcal{H}} \mathbf{z}_p$ é o ruído de estimação e $\mathbf{y}_p \triangleq \text{diag}\{\mathbf{x}_p\}^{\mathcal{H}} \mathbf{r}_p$ é a observação ruidosa do canal nos pilotos. Na passagem de (3-4) para (3-5), utilizamos o fato de que $\text{diag}\{\mathbf{x}_p\}^{\mathcal{H}} = \mathbf{S} \text{diag}\{\mathbf{x}\}^{\mathcal{H}}$. Em (3-5), usamos $\text{diag}\{\mathbf{x}\}^{\mathcal{H}} \text{diag}\{\mathbf{x}\} = \mathbf{I}_K$. Temos acesso, portanto, a K_p amostras ruidosas da resposta de frequência do canal em (3-5). Queremos agora processar essas amostras para a estimação dos canais que carregam dados (elementos do vetor \mathbf{p}_n iguais a 0), pois é neles que o efeito do canal deve ser revertido para a detecção dos símbolos. Em outras palavras, a partir das observações \mathbf{y}_p , devemos estimar o vetor \mathbf{q} completo. Obviamente, quanto maior a quantidade de pilotos disponíveis, maior será o número de amostras e melhor será a estimação do canal.

3.1.1

Estimador Maximum Likelihood (ML)

Dada a observação \mathbf{y}_p , podemos obter a estimativa *maximum likelihood* (ML) (em português, máxima verossimilhança) do canal. O estimador ML assume que o vetor a ser estimado é determinístico porém desconhecido (Mor01). Por isso, ele não necessita de nenhuma informação prévia sobre as estatísticas dos valores a serem estimados. O seguinte problema deve ser resolvido:

$$\hat{\mathbf{h}}_{\text{ml}} = \arg \min_{\mathbf{h}} \|\mathbf{y}_p - \mathbf{S} \mathbf{F}_L \mathbf{h}\|^2. \quad (3-6)$$

A equação (3-6) é de fácil resolução.

$$\hat{\mathbf{h}}_{\text{ml}} = \mathbf{T}_{\text{ml}} \mathbf{y}_p, \quad (3-7)$$

em que $\mathbf{T}_{\text{ml}} = (\mathbf{S} \mathbf{F}_L)^{\dagger}$, sendo $(\cdot)^{\dagger}$ a representação da pseudo-inversa de uma matriz, ou seja

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{\text{ml}} &= (\mathbf{F}_L^{\mathcal{H}} \mathbf{S}^{\mathcal{H}} \mathbf{S} \mathbf{F}_L)^{-1} \mathbf{F}_L^{\mathcal{H}} \mathbf{S}^{\mathcal{H}} \\ &= \mathbf{U}^{-1} \mathbf{F}_L^{\mathcal{H}} \mathbf{S}^{\mathcal{H}}, \end{aligned} \quad (3-8)$$

onde definimos $\mathbf{U} = (\mathbf{F}_L^{\mathcal{H}} \mathbf{D} \mathbf{F}_L)$. \mathbf{T}_{ml} é a *matriz de filtragem* ML, de tamanho $(L \times K_p)$, responsável por filtrar as amostras obtidas para obter uma melhor

estimação do canal \mathbf{h} .

A estimação em (3-7) requer em (3-8) que a matriz $\mathbf{U} = \mathbf{F}_L^H \mathbf{D} \mathbf{F}_L$ seja inversível. Isso só é possível se essa matriz tiver posto completo, o que por sua vez só é possível se $K_p \geq L$. Ou seja, a condição necessária que deve ser estabelecida para a estimação do canal ser possível é que o número de pilotos deve ser maior ou igual ao comprimento do canal no tempo. Pode ser provado que o estimador ML é despolarizado e que atinge o limitante de Crámer-Rao (Mor01).

A estimação na frequência, a que realmente interessa para a detecção, é facilmente calculada com $\hat{\mathbf{q}}_{\text{ml}} = \mathbf{F}_L \hat{\mathbf{h}}_{\text{ml}}$. Em versão mais estendida, a estimação na frequência é

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{q}}_{\text{ml}} &= \mathbf{F}_L \mathbf{U}^{-1} \mathbf{F}_L^H \mathbf{S}^H \text{diag} \{ \mathbf{x}_p \}^H \mathbf{S} \mathbf{r} \\ &= \underbrace{\mathbf{F}_L \mathbf{T}_{\text{ml}}}_{\text{matriz de interpolação}} \text{diag} \{ \mathbf{x}_p \}^H \mathbf{S} \mathbf{r} \end{aligned} \quad (3-9)$$

ou seja, pode-se interpretar a estimação ML do canal na frequência em três passos: primeiro, utilizamos a matriz \mathbf{S} para selecionar os canais-piloto em meio ao vetor recebido \mathbf{r} ; em seguida, inverte-se a observação com o conhecimento dos símbolos enviados nos pilotos; por último, interpola-se as amostras obtidas para a estimação completa do canal. Isso é feito com o termo indicado com chaves em (3-9), que chamamos de *matriz de interpolação*. Essa matriz, de tamanho $(K \times K_p)$, combina as K_p observações ruidosas do canal na frequência a fim de estimar o canal por completo, isto é, para todos os tons.

Substituindo (3-5) em (3-7) e re-introduzindo índice temporal n , obtemos

$$\hat{\mathbf{h}}_{\text{ml},n} = \mathbf{h}_n + \mathbf{T}_{\text{ml},n} \mathbf{w}_{p,n}, \quad (3-10)$$

onde se vê claramente que o erro de estimação do canal é diretamente dependente da disposição dos pilotos através da matriz $\mathbf{T}_{\text{ml},n}$. Por isso deve haver uma melhor (ou melhores) alocações de pilotos para a estimação do canal. Podemos também re-escrever a Eq. (3-10) na frequência,

$$\hat{\mathbf{q}}_{\text{ml},n} = \mathbf{q}_n + \mathbf{F}_L \mathbf{T}_{\text{ml},n} \mathbf{w}_{p,n}. \quad (3-11)$$

Seguimos calculando uma métrica para quantificar a qualidade desse estimador. O erro médio quadrático (*mean squared error*, ou MSE) de estimação

no tempo é definido por

$$\begin{aligned}
 \text{mse}_{\text{ml},n} &\triangleq \mathcal{E} \left[\|\mathbf{h}_n - \hat{\mathbf{h}}_{\text{ml},n}\|^2 \right] = \mathcal{E} \left[\|\mathbf{T}_{\text{ml},n} \mathbf{w}_{p,n}\|^2 \right] \\
 &= \text{tr} \left\{ \mathcal{E} \left[\mathbf{T}_{\text{ml},n} \mathbf{w}_{p,n} \mathbf{w}_{p,n}^{\mathcal{H}} \mathbf{T}_{\text{ml},n}^{\mathcal{H}} \right] \right\} = \sigma \text{tr} \{ \mathbf{T}_{\text{ml},n} \mathbf{I}_{K_p} \mathbf{T}_{\text{ml},n}^{\mathcal{H}} \} \\
 &= \sigma \text{tr} \{ \mathbf{U}_n^{-1} \mathbf{F}_L^{\mathcal{H}} \mathbf{D}_n \mathbf{F}_L \mathbf{U}_n^{-1, \mathcal{H}} \} \\
 &= \sigma \text{tr} \{ \mathbf{U}_n^{-1} \}, \tag{3-12}
 \end{aligned}$$

em que $\mathcal{E}[\cdot]$ denota o operador valor esperado e $\text{tr}\{\cdot\}$ é o operador traço de uma matriz – usamos ambos de forma intercambiável. Em (3-12), é fácil ver que $\mathbf{U}_n = \mathbf{U}_n^{\mathcal{H}}$. O MSE pode ser escrito de forma equivalente por

$$\begin{aligned}
 \text{mse}_{\text{ml},n} &= \sigma \text{tr} \{ \mathbf{T}_{\text{ml},n} \mathbf{I}_{K_p} \mathbf{T}_{\text{ml},n}^{\mathcal{H}} \} \\
 &= \sigma \|\mathbf{T}_{\text{ml},n}\|_{\mathcal{F}}^2, \tag{3-13}
 \end{aligned}$$

onde $\|\cdot\|_{\mathcal{F}}$ é norma de Frobenius de uma matriz, definida para a a matriz \mathbf{A} por

$$\|\mathbf{A}\|_{\mathcal{F}} = \left(\sum_i \sum_j |a_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{3-14}$$

Aqui usamos o fato que $\text{tr}\{\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathcal{H}}\} = \|\mathbf{A}\|_{\mathcal{F}}^2$.

O erro na frequência é calculado de forma análoga, mas levamos em conta só os canais que carregam dados:

$$\begin{aligned}
 \text{MSE}_{\text{ml},n} &\triangleq \mathcal{E} \left[\|\mathbf{I}_K - \mathbf{D}_n\| (\mathbf{q}_n - \hat{\mathbf{q}}_{\text{ml},n}) \|^2 \right] \\
 &= \mathcal{E} \left[\|\mathbf{I}_K - \mathbf{D}_n\| \mathbf{F}_L \mathbf{T}_{\text{ml},n} \mathbf{w}_{p,n} \|^2 \right] \\
 &= \text{tr} \left\{ \mathcal{E} \left[\mathbf{F}_L \mathbf{T}_{\text{ml},n} \mathbf{w}_{p,n} \mathbf{w}_{p,n}^{\mathcal{H}} \mathbf{T}_{\text{ml},n}^{\mathcal{H}} \mathbf{F}_L^{\mathcal{H}} \right] \right\} - \mathcal{E} \left[\|\mathbf{D}_n \mathbf{F}_L \mathbf{T}_{\text{ml},n} \mathbf{w}_{p,n}\|^2 \right] \\
 &= \sigma \text{tr} \{ \mathbf{F}_L \mathbf{T}_{\text{ml},n} \mathbf{T}_{\text{ml},n}^{\mathcal{H}} \mathbf{F}_L \} - \sigma \sum_{k \in \{\text{pl}\}} \|\mathbf{F}_L\|_{\text{lin } k} \mathbf{T}_{\text{ml},n} \|^2_{\mathcal{F}} \\
 &= \sigma \left(\text{tr} \{ \mathbf{F}_L \mathbf{U}_n^{-1} \mathbf{F}_L \} - L \right). \tag{3-15}
 \end{aligned}$$

Aqui, o operador $[\mathbf{A}]_{\text{lin } k}$ representa o vetor correspondente à k -ésima linha da matriz \mathbf{A} . Em (3-15), selecionamos os canais que contém dados com a pré-multiplicação pela matriz $(\mathbf{I}_K - \mathbf{D}_n)$. Isso resultará em dois termos no cálculo do MSE na frequência, um que depende dos canais de dados e outro referente aos canais-pilotos. Como estamos interessados apenas no erro cometido na estimação dos canais de dados, o segundo termo será descontado. Portanto, o termo referente aos pilotos aparece subtraindo no desenvolvimento acima. A operação acima nada mais faz do que calcular a norma da matriz $\mathbf{F}_L \mathbf{T}_{\text{ml},n}$

(ou, de forma equivalente, o traço de $\mathbf{F}_L \mathbf{U}_n^{-1} \mathbf{F}_L^H$) para a seguir subtrair as normas das linhas dessa matriz referentes ao pilotos (a soma em $k \in \{\text{pl}\}$ significa exatamente isso, onde “pl” é abreviação para pilotos; a expressão é equivalente a $p_n^k = 1$). É fácil mostrar que cada uma dessas linhas tem norma L/K_p , e como há K_p dessas linhas, o resultado é L . Podemos também escrever (3-15) em função do MSE do tempo:

$$\begin{aligned} \text{MSE}_{\text{ml},n} &= \sigma \left(\text{tr} \{ \mathbf{F}_L \mathbf{U}_n^{-1} \mathbf{F}_L^H \} - L \right) = \sigma \left(\text{tr} \{ \mathbf{F}_L^H \mathbf{F}_L \mathbf{U}_n^{-1} \} - L \right) \\ &= \sigma \left(\text{tr} \{ K \mathbf{I}_L \mathbf{U}_n^{-1} \} - L \right) = \sigma \left(K \text{tr} \{ \mathbf{U}_n^{-1} \} - L \right) \\ &= \sigma \left(K \frac{\text{mse}_{\text{ml},n}}{\sigma} - L \right). \end{aligned} \quad (3-16)$$

Estamos agora em condições para responder à primeira das questões propostas no início do capítulo: dos $\binom{K}{K_p}$ possíveis perfis de pilotos, qual deles melhor estima o canal? Em outras palavras, qual o vetor \mathbf{p}_n produz o menor traço de \mathbf{U}_n^{-1} , que por sua vez produz o menor MSE em (3-12) e (3-15)? Dada a equivalência entre (3-12) e (3-13), podemos interpretar a situação da seguinte forma: cada matriz $\mathbf{T}_{\text{ml},n}$ terá um “peso”, dado pela norma de Frobenius, de acordo com a disposição dos pilotos no vetor \mathbf{p}_n , e procuramos aquela (ou aquelas) mais leve(s).

Notamos que

$$\mathbf{U}_n = \mathbf{F}_L^H \mathbf{D}_n \mathbf{F}_L = K_p \begin{bmatrix} 1 & (?) & \dots & (?) \\ (?) & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & (?) \\ (?) & \dots & (?) & 1 \end{bmatrix}_{L \times L}, \quad (3-17)$$

e portanto $\text{tr} \{ \mathbf{U}_n \} = K_p L$ e é independente de \mathbf{p}_n . Sejam os L autovalores de \mathbf{U}_n , dados por $1/\mu_l$, $l = 0, \dots, L-1$. Sabe-se que o traço de uma matriz é igual à soma de seus autovalores, então $\sum_l 1/\mu_l = K_p L$. Sabe-se também que se uma matriz \mathbf{A} tem autovalores $1/\mu_l$, $l = 0, \dots, L-1$, \mathbf{A}^{-1} tem autovalores μ_l . O MSE dado por (3-12) pode ser então escrito como

$$\text{mse}_{\text{ml},n} = \sigma \sum_{l=0}^{L-1} \mu_l, \quad (3-18)$$

onde μ_l , $l = 0, \dots, L-1$ são os autovalores de \mathbf{U}_n^{-1} e são dessa forma função de \mathbf{p}_n .

De posse dessa informação, podemos escrever um problema de minimização com restrição dado por

$$\hat{\mathbf{p}} = \arg \min_{\mathbf{p} \in \mathcal{P}} \sum_{l=0}^{L-1} \mu_l \quad (3-19)$$

tal que $\sum_{l=0}^{L-1} \frac{1}{\mu_l} = K_p L$ e $\mu_l > 0 \forall l$.

Como $\mathbf{U}_n = \mathbf{F}_L^H \mathbf{D}_n \mathbf{F}_L$ é positiva-definida, todos os seus autovalores são positivos – daí a segunda restrição em (3-19). A solução de (3-19) é conseguida quando todos os autovalores são iguais, i.e. $\mu_i = \mu_j \forall i, j$ (Neg98). Isso, por sua vez, é conseguido apenas quando os pilotos estão uniformemente distribuídos. Eis portanto a resposta à pergunta 1. O menor peso possível de $\mathbf{T}_{\text{ml},n}$ (ou o menor traço possível de \mathbf{U}^{-1}) é conseguido com os pilotos uniformemente espaçados em \mathbf{p}_n . Qualquer outra configuração será mais danosa em termos de MSE para a estimação. Existem $\lceil K/K_p \rceil$ diferentes alocações uniformes, todas elas equivalentes em relação ao critério MSE ($\lceil a \rceil$ denota o menor inteiro maior que a).

Resolvendo (3-19) para autovalores iguais, obtemos

$$\mu_l = \frac{1}{K_p}, \quad l = 0, \dots, L-1,$$

e

$$\text{mse}_{\text{ml},n} = \sigma \sum_{l=0}^{L-1} \frac{1}{K_p} = \sigma \frac{L}{K_p}, \quad (3-20)$$

que é o menor valor possível do MSE no domínio do tempo para o estimador ML. Ilustramos em (3-20) a noção intuitiva de que um maior número de pilotos implica em uma melhor estimação do canal – o MSE é inversamente proporcional a K_p . Na frequência, obtemos

$$\text{MSE}_{\text{ml},n} = \sigma \left(\frac{KL}{K_p} - L \right). \quad (3-21)$$

E qual o pior \mathbf{p}_n possível? É aquele que mais se distancia da alocação uniforme, isto é, aquele em que os pilotos estão localizados em canais adjacentes – para o exemplo com $K = 16$ e $K_p = 4$, uma das opções é $\mathbf{p}_n = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$. Existem K maneiras de se alocar os pilotos em canais adjacentes. O preço a se pagar em MSE pela utilização de qualquer \mathbf{p}_n que contenha pilotos adjacentes é bem alto: se $L = 2$, o MSE no tempo resultante em (3-12) é igual a $\sigma \times 2,79$. Se $L = 4$, o máximo permitido para 4 pilotos, o MSE temporal é aproximadamente $\sigma \times 270$. Para o caso ótimo, com pilotos distribuídos uniformemente, teríamos $\sigma \times 0,5$ e σ , respectivamente.

Um fato interessante que se depreende de (3-12) (ou de sua forma equivalente, (3-18)) é que, caso $\sigma \rightarrow 0$, o MSE tende a zero independentemente

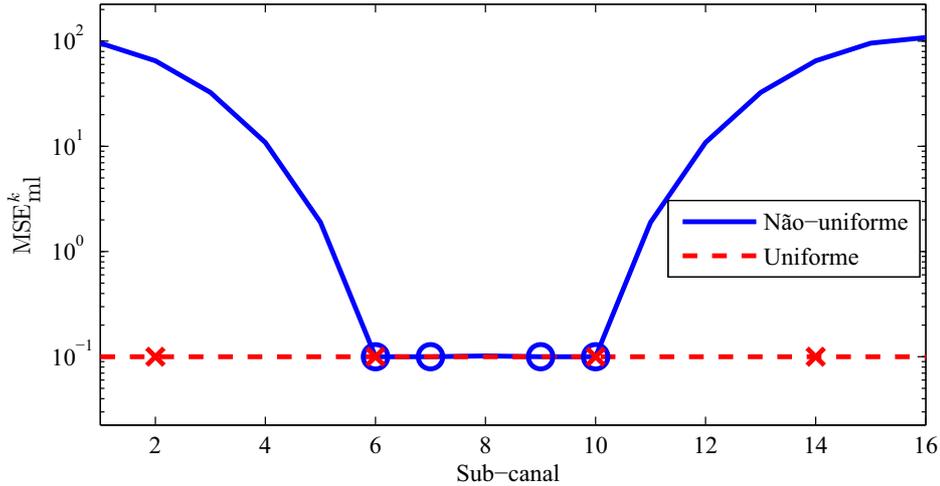


Figura 3.2: MSE por tom para $E_s/\sigma = 10$ dB – ‘o’ e ‘x’ representam a posição dos pilotos para as alocações não-uniforme e uniforme, respectivamente.

da posição dos pilotos. Mesmo o pior \mathbf{p}_n possível estimará o canal com perfeição na ausência de ruído. A única condição que deve ser satisfeita é a inversibilidade de \mathbf{U} , cuja condição necessária, como já dito, é $K_p \geq L$

Observar também como para o caso de pilotos não-uniformes, o valor do MSE depende da frequência. Definimos o MSE por tom como o erro médio cometido na estimação de um determinado tom k , ou seja,

$$\begin{aligned} \text{MSE}_{\text{ml},n}^k &\triangleq \mathcal{E} \left[\left\| q_n^k - \hat{q}_{\text{ml},n}^k \right\|^2 \right] \\ &= \sigma \mathbf{f}^k \mathbf{U}^{-1} (\mathbf{f}^k)^{\mathcal{H}}, \quad k = 0, \dots, K-1, \end{aligned} \quad (3-22)$$

onde $\mathbf{f}^k = [\mathbf{F}_L]_{\text{lin } k}$, ou seja, \mathbf{f}^k é a k -ésima linha da matriz de DFT. Para pilotos uniformes, todas as colunas de \mathbf{T} têm o mesmo peso e conseqüentemente todos os sub-canais são estimados com a mesma qualidade média. Pilotos não-uniformes adicionam um viés à estimação. Isso pode ser facilmente compreendido. Considere o exemplo já citado neste capítulo com $\mathbf{p}_n = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$. Para esse sistema, existe um canal de dados (o 8º canal) cercado por 4 pilotos. É de se esperar que a estimação de canal nesse tom seja bastante boa, pois a correlação em frequência entre as amostras nos pilotos e o comportamento do tom 8 deve ser grande, dada a proximidade. Porém, a estimação no 1º e 16º sub-canais devem ser bem ruins, pois esses canais não contêm nenhum piloto próximo.

A situação é ilustrada para o sistema do exemplo com $L = 4$ e $E_s/\sigma = 10$ dB na Fig. 3.2. Para fins de comparação, mostramos também o MSE conseguido com pilotos uniformemente distribuídos. A partir da análise da figura, tem-se uma idéia de quão grande é a variação do MSE para pilotos não-uniformes: o

sub-canal 16 é pessimamente estimado (MSE maior que 100), enquanto que o sub-canal 8 possui excelente qualidade. Essa seletividade em frequência será explorada no Capítulo 4 quando tratarmos de alocação dinâmica de pilotos.

3.1.2

Estimador Minimum Mean Squared Error (MMSE)

A estimativa *Minimum Mean Squared Error* (MMSE) (em português, mínimo erro médio quadrático) é em geral melhor do que a ML, pois considera que as estatísticas do vetor a ser estimado são conhecidas (Mor01). Quer-se, portanto, estimar o valor de determinada realização da VA. O MMSE paga o preço da melhor qualidade com um acréscimo da informação necessária para a estimação. Para o sistema em estudo,

$$\mathbf{T}_{\text{mmse}} = \arg \min_{\mathbf{T}} \mathcal{E} \left[\|\mathbf{h}_n - \mathbf{T}\mathbf{y}_p\|^2 \right], \quad (3-23)$$

cujas soluções é facilmente achada como

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{\text{mmse}} &= \left(\mathbf{F}_L^H \mathbf{D} \mathbf{F}_L + \sigma \text{diag} \{ \boldsymbol{\gamma} \}^{-1} \right)^{-1} \mathbf{F}_L^H \mathbf{S}^H \\ &= \mathbf{V}^{-1} \mathbf{F}_L^H \mathbf{S}^H, \end{aligned} \quad (3-24)$$

onde $\mathbf{V} = \mathbf{F}_L^H \mathbf{D}_n \mathbf{F}_L + \sigma \text{diag} \{ \boldsymbol{\gamma} \}^{-1}$. A matriz \mathbf{T}_{mmse} é a matriz de filtragem para o caso MMSE. O canal é estimado como

$$\hat{\mathbf{h}}_{\text{mmse}} = \mathbf{T}_{\text{mmse}} \mathbf{y}_p. \quad (3-25)$$

A matriz de interpolação é $\mathbf{F}_L \mathbf{T}_{\text{mmse}}$.

Em (3-24), o vetor $\boldsymbol{\gamma}$ e a potência do ruído correspondem à informação a mais que o MMSE conta em relação ao ML. Nota-se que o estimador MMSE coincide com o estimador *máximo a posteriori* (MAP) para esse caso. Percebe-se também que o estimador MMSE converge para o ML quando a SNR é alta (σ pequeno).

A análise sobre qual disposição de pilotos é a melhor para a estimação do canal é claramente válida para o MMSE também. A conclusão de que só é possível estimar o canal caso $K_p \geq L$, porém, não é mais válida. Nesse caso, exige-se a inversibilidade (agora usamos o índice de tempo n) de $\mathbf{V}_n = \mathbf{F}_L^H \mathbf{D}_n \mathbf{F}_L + \sigma (\text{diag} \{ \boldsymbol{\gamma} \})^{-1}$, que pode existir mesmo se essa condição não for obedecida. Entretanto, sempre respeitaremos a condição do ML, mesmo

para o MMSE. O equivalente de (3-10) é mais complicado para o MMSE.

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathbf{h}}_{\text{mmse},n} &= \mathbf{T}_{\text{mmse},n} \mathbf{y}_p = \mathbf{V}_n^{-1} \mathbf{F}_L^H \mathbf{D}_n \mathbf{F}_L \mathbf{h}_n + \mathbf{T}_{\text{mmse},n} \mathbf{w}_{p,n} \\
 &= \mathbf{V}_n^{-1} \mathbf{F}_L^H \mathbf{D}_n \mathbf{F}_L \mathbf{h}_n + \mathbf{T}_{\text{mmse},n} \mathbf{w}_{p,n} + \\
 &\quad + \mathbf{V}_n^{-1} \sigma \text{diag} \{ \boldsymbol{\gamma} \}^{-1} \mathbf{h}_n - \mathbf{V}_n^{-1} \sigma \text{diag} \{ \boldsymbol{\gamma} \}^{-1} \mathbf{h}_n \\
 &= \mathbf{V}_n^{-1} (\mathbf{F}_L^H \mathbf{D}_n \mathbf{F}_L + \sigma \text{diag} \{ \boldsymbol{\gamma} \}^{-1}) \mathbf{h}_n + \mathbf{T}_{\text{mmse},n} \mathbf{w}_{p,n} \\
 &\quad - \mathbf{V}_n^{-1} \sigma \text{diag} \{ \boldsymbol{\gamma} \}^{-1} \mathbf{h}_n \\
 &= \mathbf{h}_n + \mathbf{V}_n^{-1} (\mathbf{F}_L^H \mathbf{S}_n^H \mathbf{w}_{p,n} - \sigma \text{diag} \{ \boldsymbol{\gamma} \}^{-1} \mathbf{h}_n). \tag{3-26}
 \end{aligned}$$

Aqui usamos o artifício de somar e subtrair $(\mathbf{V}_n^{-1} \sigma \text{diag} \{ \boldsymbol{\gamma} \}^{-1} \mathbf{h}_n)$ à soma acima para chegar ao resultado final. As Equações (3-11), (3-12) e (3-22) são também mais complicadas para o estimador MMSE, e são dadas respectivamente por

$$\mathbf{q}_{\text{mmse},n} = \mathbf{q}_n + \mathbf{F}_L \mathbf{V}_n^{-1} (\mathbf{F}_L^H \mathbf{S}_n^H \mathbf{w}_{p,n} - \sigma \text{diag} \{ \boldsymbol{\gamma} \}^{-1} \mathbf{h}_n); \tag{3-27}$$

$$\text{mse}_{\text{mmse},n} = \sigma \text{tr} \{ \mathbf{V}_n^{-1} \}; \tag{3-28}$$

$$\text{MSE}_{\text{mmse},n}^k = \sigma \mathbf{f}^k \mathbf{V}_n^{-1} (\mathbf{f}^k)^H. \tag{3-29}$$

A Eq. (3-27) é decorrência direta de (3-26). As Eqs. (3-28) e (3-29) são justificadas no Apêndice C.1.

Para pilotos uniformemente espaçados, obtemos um resultado em função do estimador ML, onde

$$\text{mse}_{\text{mmse},n} = \Phi \times \text{mse}_{\text{ml},n}, \tag{3-30}$$

em que

$$\Phi = \frac{1}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \frac{1}{1 + \sigma / (\gamma[l] K_p)} \tag{3-31}$$

é sempre menor que 1 (Mor01). Ainda para o caso de pilotos uniformemente distribuídos, na frequência, o MSE do MMSE se comporta da mesma forma que o ML, mas é também multiplicado pela constante Φ .

3.1.3

Estimador com Filtro de Wiener

Os estimadores ML e MMSE descritos nas seções passadas utilizam a correlação *em frequência* entre as sub-portadoras, ou seja, a correlação entre os valores da resposta de frequência do canal. Como visto, esses processos interpolam K_p observações do comportamento da resposta de frequência do canal a fim de estimá-lo por completo. Essa interpolação é feita através das respectivas matrizes $\mathbf{F}_L \mathbf{T}$, com \mathbf{T} dado por (3-8) para o caso ML e por (3-24) para o MMSE. Ambos levam em conta apenas observações em um instante n

para calcular a estimativa no mesmo instante.

Nessa seção, queremos explorar a correlação *temporal* da variação do canal. A estimativa no momento n levará em conta não apenas a observação em n , mas também $M-1$ observações passadas. Esses valores serão processados por um filtro $\boldsymbol{\lambda}$, de tamanho $(M \times 1)$, e aí sim obteremos a estimação do canal atual. Em linguagem matemática,

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{h}}_n &= \mathbb{Y}_n \boldsymbol{\lambda} \\ &= \sum_{i=0}^{M-1} \lambda[i] (\mathbf{T}\mathbf{y}_p)_{n-i}\end{aligned}\quad (3-32)$$

onde

$$\mathbb{Y}_n \triangleq \begin{bmatrix} | & | & \dots & | \\ (\mathbf{T}\mathbf{y}_p)_n & (\mathbf{T}\mathbf{y}_p)_{n-1} & \dots & (\mathbf{T}\mathbf{y}_p)_{n-M+1} \\ | & | & & | \end{bmatrix}\quad (3-33)$$

é a matriz de observação (ML ou MMSE), de tamanho $(L \times M)$, que contém em suas colunas as M últimas observações do canal. Na frequência, obtemos

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{q}}_n &= \mathbf{F}_L \mathbb{Y} \boldsymbol{\lambda} \\ &= \mathbf{F}_L \sum_{i=0}^{M-1} \lambda[i] (\mathbf{T}\mathbf{y}_p)_{n-i}.\end{aligned}\quad (3-34)$$

Os cálculos a seguir dos coeficientes do filtro levam em conta o estimador ML, e serão portanto representados por $\boldsymbol{\lambda}_{\text{ml}}$. Para o MMSE, os cálculos são um pouco mais complicados e mostraremos os resultados a seguir. Vale lembrar que quando σ é pequeno, ML e MMSE tendem a convergir para a mesma coisa. Na Seção 3.4, veremos que essa convergência só não é obtida para canais muito ruidosos.

Os coeficientes $\boldsymbol{\lambda}_{\text{ml}}$ são calculados com a bem conhecida solução de Wiener. Para calculá-la, iremos utilizar o diagrama de blocos da Fig. 3.3. A figura representa o esquema da filtragem a ser feita. As matrizes envolvidas são \mathbb{Y}_n , \mathbb{H}_n e \mathbb{W}_n . Para o ML, as duas últimas são definidas por

$$\mathbb{H}_n \triangleq \begin{bmatrix} | & | & \dots & | \\ \mathbf{h}_n & \mathbf{h}_{n-1} & \dots & \mathbf{h}_{n-M+1} \\ | & | & & | \end{bmatrix}\quad (3-35)$$

e

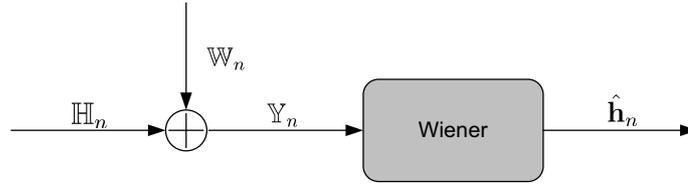


Figura 3.3: Diagrama de blocos para a filtragem de Wiener.

$$\mathbb{W}_n \triangleq \begin{bmatrix} | & | & & | \\ (\mathbf{T}_{ml}\mathbf{w}_p)_n & (\mathbf{T}_{ml}\mathbf{w}_p)_{n-1} & \dots & (\mathbf{T}_{ml}\mathbf{w}_p)_{n-M+1} \\ | & | & & | \end{bmatrix}. \quad (3-36)$$

Ou seja, \mathbb{H}_n é uma matriz contendo em suas colunas os valores verdadeiros do canal dos instantes n até $n - M + 1$ e \mathbb{W}_n representa em suas colunas o ruído referente ao mesmo intervalo. Assim como \mathbb{Y}_n , cada uma delas tem M colunas, ou seja, M instantes são considerados para a estimação do canal atual. Como demonstrado na Fig. 3.3, $\mathbb{Y}_n = \mathbb{H}_n + \mathbb{W}_n$.

O problema a ser resolvido é

$$\boldsymbol{\lambda}_{ml} = \arg \min_{\boldsymbol{\lambda}} \mathcal{E} \left[\|\mathbf{h}_n - \mathbb{Y}\boldsymbol{\lambda}\|^2 \right]. \quad (3-37)$$

Sabe-se da solução de Wiener que os coeficientes ótimos do filtro obedecem a

$$\mathcal{R}_{\mathbb{Y}\mathbb{Y}}\boldsymbol{\lambda}_{ml} = \mathcal{R}_{\mathbf{h}_n\mathbb{Y}} \Rightarrow \boldsymbol{\lambda}_{ml} = \mathcal{R}_{\mathbb{Y}\mathbb{Y}}^{-1}\mathcal{R}_{\mathbf{h}_n\mathbb{Y}}, \quad (3-38)$$

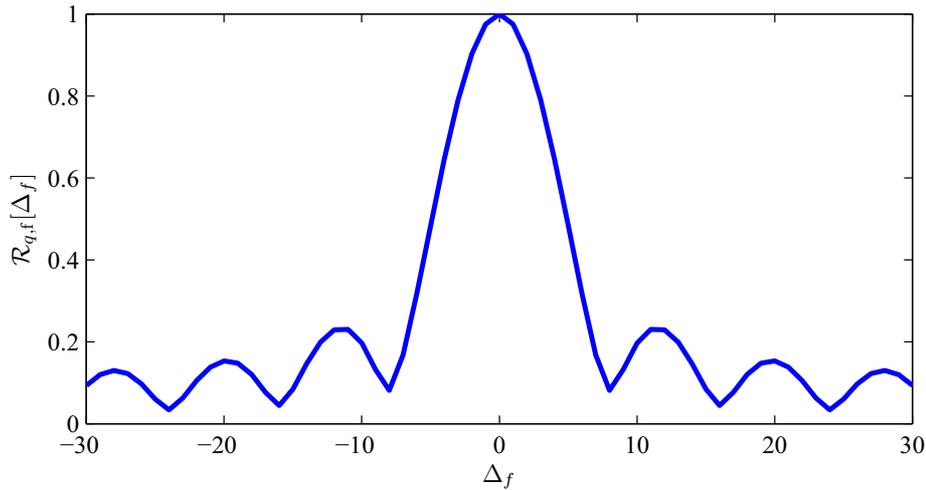
em que,

$$\mathcal{R}_{\mathbb{Y}\mathbb{Y}} = \mathcal{E} \left[\mathbb{Y}_n^H \mathbb{Y}_n \right] \quad (3-39)$$

e

$$\mathcal{R}_{\mathbf{h}_n\mathbb{Y}} = \mathcal{E} \left[\mathbf{h}_n^H \mathbb{Y}_n \right]. \quad (3-40)$$

Idealmente, disporíamos de um *banco de filtros* – um filtro diferente para cada um dos taps, já que de acordo com (2-26) cada um deles tem potências ligeiramente diferentes. O preço a pagar por isso seria um aumento considerável de complexidade, especialmente em canais de comprimento elevado (L grande). Na solução ideal, seríamos obrigados a, entre outras coisas, inverter L matrizes quadradas de tamanho M em (3-38). Adotaremos, pois, uma solução não-ideal mas de boa qualidade. Os coeficiente calculados levarão em conta todos os taps ao mesmo tempo. Portanto o filtro resultante é um filtro “médio”, e deve ser bom (não ótimo) para a filtragem de todos os taps. Pode ser mostrado que a abordagem descrita em (3-38) é equivalente a filtrar um tap “médio”, cuja potência é igual à média das potências dos taps, ou seja, $\bar{\gamma} = \sum_l \gamma[l]/L$. De ambas as formas, a Eq. (3-38) será resolvida apenas 1 vez, e o filtro resultante $\boldsymbol{\lambda}_{ml}$ será usado para a filtragem de todos os taps. Usaremos o mesmo esquema para o MMSE. Veremos que mesmo assim melhorará muito a qualidade da


 Figura 3.4: Correlação espacial entre sub-canais para $K = 64$ e $L = 8$.

estimação do canal, mesmo em canais com variação temporal mais significativa.

Nesse ponto uma observação é válida: poderíamos calcular um filtro de Wiener 2-D, ou seja, que explorasse conjuntamente as correlações no tempo e na frequência, mas isso não é necessário. Não existe correlação cruzada entre tempo e frequência na recepção dos símbolos OFDM. Definimos a correlação cruzada tempo \times frequência como

$$\begin{aligned}
 \mathcal{R}_{q,t \times f}[\Delta_t, \Delta_f] &= \mathcal{E} \left[(q_n^k)^{\mathcal{H}} q_{n-\Delta_t}^{k-\Delta_f} \right] \\
 &= \mathcal{E} \left[\mathbf{f}^k \mathbf{h}_n (\mathbf{h}_{n-\Delta_t})^{\mathcal{H}} (\mathbf{f}^{k-\Delta_f})^{\mathcal{H}} \right] \\
 &= \mathbf{f}^k \mathcal{E} \left[\mathbf{h}_n (\mathbf{h}_{n-\Delta_t})^{\mathcal{H}} \right] (\mathbf{f}^{k-\Delta_f})^{\mathcal{H}} \\
 &= \mathcal{R}_{q,t}[\Delta_t] \mathbf{f}^k \text{diag} \{ \boldsymbol{\gamma} \} (\mathbf{f}^{k-\Delta_f})^{\mathcal{H}} \\
 &= \mathcal{R}_{q,t}[\Delta_t] \mathcal{R}_{q,f}[\Delta_f],
 \end{aligned} \tag{3-41}$$

onde Δ_t e Δ_f são inteiros e $\mathcal{R}_{q,t}[\Delta_t]$ representa a correlação temporal dos sub-canais (que será calculada em breve) e

$$\mathcal{R}_{q,f}[\Delta_f] = \mathbf{f}^k \text{diag} \{ \boldsymbol{\gamma} \} (\mathbf{f}^{k-\Delta_f})^{\mathcal{H}} \tag{3-42}$$

denota a correlação em frequência entre os sub-canais. Esta última é mostrada na Fig. 3.4 para um sistema OFDM com $K = 64$ e $L = 8$. Portanto, o modelo que propomos é uma quebra do filtro de duas dimensões em dois filtros independentes em cascata, o primeiro utilizando a correlação em frequência (ML ou MMSE) e outro explorando a correlação temporal do canal (que usa os coeficientes de Wiener, a ser calculado a seguir). O melhor estimador possível é aquele ótimo em ambos os estágios. Essa quebra não resulta em perda de

qualidade. A descorrelação tempo \times frequência nos é muito útil pois, caso o filtro 2-D não pudesse ser dividido em duas etapas, a quantidade de cálculos seria muito maior. Respondemos, assim, à segunda das perguntas do começo do capítulo: o melhor estimador linear possível é aquele que combina a estimação MMSE na frequência mais a filtragem de Wiener no tempo (os coeficientes de Wiener para o caso MMSE são calculados a seguir). Lembramos que uma simplificação foi feita: calculamos um filtro de Wiener *médio*, não um banco de filtros. Essa aproximação não implica em perdas perceptíveis, mas a rigor deveria ser levada em conta caso queiramos identificar o estimador ótimo. Na prática, porém, esse fato é pouco percebido. Reiteramos também que, para SNR's altas, não há diferença significativa entre ML e MMSE. Portanto, um adendo à resposta acima seria que, para SNR's altas, a estimação ML na frequência seguida de um filtro de Wiener tende a igualar o desempenho do MMSE mais filtro de Wiener. Veremos na Seção 3.4 que essa convergência é bem rápida.

Focaremos agora na solução de (3-39) e (3-40). Consideramos a seguir que o perfil de pilotos é uniforme e constante para todos os blocos transmitidos, ou seja $\mathbf{p}_i = \mathbf{p}_j$ e portanto $\mathbf{T}_{ml,i} = \mathbf{T}_{ml,j} \forall i, j$. Começaremos com (3-39), que, combinada com (3-10), resulta em

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R}_{\mathbf{Y}\mathbf{Y}} &= \mathcal{E} \left[(\mathbb{H} + \mathbb{W})^{\mathcal{H}} (\mathbb{H} + \mathbb{W}) \right] \\
 &= \mathcal{E} \left[\mathbb{H}^{\mathcal{H}} \mathbb{H} \right] + \mathcal{E} \left[\mathbb{W}^{\mathcal{H}} \mathbb{W} \right] \\
 &= \mathbf{R}_{hh,t} + \begin{bmatrix} \text{tr} \{ \sigma \mathbf{T}_{ml,n} \mathbf{T}_{ml,n}^{\mathcal{H}} \} & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \text{tr} \{ \sigma \mathbf{T}_{ml,n-M+1} \mathbf{T}_{ml,n-M+1}^{\mathcal{H}} \} \end{bmatrix} \\
 &= \mathbf{R}_{hh,t} + \sigma \text{tr} \{ \mathbf{U}^{-1} \} \mathbf{I}_M.
 \end{aligned} \tag{3-43}$$

Aqui $\mathbf{R}_{hh,t}$ é dada por (2-30) mas com tamanho M ao invés de Q e potência normalizada para a unidade.

Caso a posição dos pilotos fosse variante no tempo, não poderíamos retirar o termo $\text{tr} \{ \mathbf{U}^{-1} \}$ da diagonal da matriz à direita em (3-43). Observar que, nesse caso, o filtro $\boldsymbol{\lambda}_{ml}$ resultante seria variante no tempo.

A solução de 3-40 é bem mais fácil,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R}_{\mathbf{h}_n \mathbf{Y}} &= \mathcal{E} \left[\mathbf{h}^{\mathcal{H}} (\mathbb{H} + \mathbb{W}) \right] \\
 &= [\mathbf{R}_{hh,t}]_{\text{col } 1},
 \end{aligned} \tag{3-44}$$

em que $[\cdot]_{\text{col } i}$ denota a i -ésima coluna de uma matriz.

Assim, os coeficientes do filtro ótimo não variante no tempo são calcula-

dos com a substituição de (3-44) e (3-43) em (3-38). Para o filtro de Wiener usado em conjunto com o ML, o MSE temporal resultante é calculado por

$$\begin{aligned} \text{mse}_{\text{ml}+\text{w},n} &= \mathcal{E} \left[\left\| \mathbf{h}_n - \hat{\mathbf{h}}_n \right\|^2 \right] \\ &= \mathcal{E} \left[\left\| \mathbf{h}_n - \sum_{i=0}^{M-1} \lambda_{\text{ml}}[i] \mathbf{h}_{n-i} - \sum_{i=0}^{M-1} \lambda_{\text{ml}}[i] \mathbf{T}_{\text{ml},n-i} \mathbf{w}_p \right\|^2 \right] \\ &= (\boldsymbol{\lambda}'_{\text{ml}})^T \mathcal{R}_{hh,t} \boldsymbol{\lambda}'_{\text{ml}} + \sigma \sum_{i=0}^{M-1} \lambda_{\text{ml}}[i]^2 \text{tr} \{ \mathbf{U}_{n-i}^{-1} \}, \end{aligned} \quad (3-45)$$

onde

$$\boldsymbol{\lambda}'_{\text{ml}} = \left[(\lambda_{\text{ml}}[0] - 1) \quad \lambda_{\text{ml}}[1] \quad \dots \quad \lambda_{\text{ml}}[M-1] \right]^T. \quad (3-46)$$

Na frequência, obtemos (só canais que carregam dados são considerados)

$$\text{MSE}_{\text{ml}+\text{w},n} = (K - K_p) (\boldsymbol{\lambda}'_{\text{ml}})^T \mathcal{R}_{qq,t} \boldsymbol{\lambda}'_{\text{ml}} + \sigma \sum_{i=0}^{M-1} \lambda_{\text{ml}}[i]^2 (\text{tr} \{ \mathbf{F}_L^H \mathbf{U}_{n-i}^{-1} \mathbf{F}_L \} - L). \quad (3-47)$$

Veremos uma interpretação mais cuidadosa dos dois termos em (3-47) na Seção 3.2.

Será importante calcular o MSE na frequência por sub-canal. É fácil ver que

$$\text{MSE}_{\text{ml}+\text{w},n}^k = (\boldsymbol{\lambda}'_{\text{ml}})^T \mathcal{R}_{qq,t} \boldsymbol{\lambda}'_{\text{ml}} + \sigma \sum_{i=0}^{M-1} \lambda_{\text{ml}}[i]^2 \mathbf{f}^k \mathbf{U}_{n-i}^{-1} (\mathbf{f}^k)^H. \quad (3-48)$$

Vale lembrar que, para o caso de pilotos uniformemente espaçados, o MSE por tom é igual para todos os tons, i.e. $\text{MSE}_n^k = \text{MSE}_n / (K - K_p)$. Para o caso de pilotos não-uniformes, isso não pode ser dito (ver Seção 3.1.1).

Filtro de Wiener em conjunto com o MMSE

Veremos agora rapidamente o cálculo dos coeficientes de Wiener quando se usa o MMSE. Os coeficientes serão diferentes, pois, enquanto que a matriz \mathbb{H}_n e \mathbb{Y}_n mantém a mesma forma, a matriz de ruído \mathbb{W} é bem particular. Considerando (3-26), definimos

$$\mathbb{W}_n \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{V}_n^{-1} (\mathbf{F}_L^H \mathbf{S}_n^H \mathbf{w}_{p,n} - \sigma \text{diag} \{ \boldsymbol{\gamma} \}^{-1} \mathbf{h}_n) & | & & | \\ & | & \dots & | & (\dots)_{n-M+1} \\ & | & & | & \end{bmatrix}. \quad (3-49)$$

Mostramos rapidamente os resultados. O desenvolvimento pode ser encontrado no Apêndice C.2. As matrizes equivalentes a (3-43) e (3-44) são dadas respec-

tivamente por

$$\mathbf{R}_{\mathbf{Y}\mathbf{Y}} = \mathbf{R}_{hh,t} \times \left(1 - 2\sigma \text{tr}\{\mathbf{V}^{-1}\} + \sigma^2 \text{tr}\{\mathbf{V}^{-1} \text{diag}\{\gamma\}^{-1} \mathbf{V}^{-1}\} \right) + \sigma \text{tr}\{\mathbf{V}^{-1} \mathbf{U} \mathbf{V}^{-1}\} \mathbf{I}_M \quad (3-50)$$

e

$$\mathbf{R}_{\mathbf{h}_n \mathbf{Y}} = [\mathbf{R}_{hh,t}]_{\text{col } 1} \times (1 - \sigma \text{tr}\{\mathbf{V}_n^{-1}\}). \quad (3-51)$$

Lembramos que $\mathbf{V}_n = (\mathbf{F}_L^H \mathbf{D}_n \mathbf{F}_L + \sigma \text{diag}\{\gamma\}^{-1})$. Os equivalentes MMSE de (3-45) e (3-48) são dados respectivamente por (ver Apêndice C.3 para a justificativa)

$$\text{mse}_{\text{mmse}+w,n} = (\boldsymbol{\lambda}'_{\text{mmse}})^T \mathbf{R}_{hh,t} \boldsymbol{\lambda}'_{\text{mmse}} + \sigma \sum_{i=0}^{M-1} \lambda_{\text{mmse}}[i]^2 \text{tr}\{\mathbf{V}_{n-i}^{-1}\} + \sigma \text{tr}\{\mathbf{V}_n^{-1}\} (\boldsymbol{\lambda}'_{\text{mmse}})^T \mathbf{R}_{hh,t} \boldsymbol{\lambda}_{\text{mmse}}, \quad (3-52)$$

e

$$\text{MSE}_{\text{mmse}+w,n}^k = (\boldsymbol{\lambda}'_{\text{mmse}})^T \mathbf{R}_{qq,t} \boldsymbol{\lambda}'_{\text{mmse}} + \sigma \sum_{i=0}^{M-1} \lambda_{\text{mmse}}[i]^2 \mathbf{f}^k \mathbf{V}_{n-i}^{-1} (\mathbf{f}^k)^H + \sigma \mathbf{f}^k \mathbf{V}_n^{-1} (\mathbf{f}^k)^H (\boldsymbol{\lambda}'_{\text{mmse}})^T \mathbf{R}_{qq,t} \boldsymbol{\lambda}_{\text{mmse}}. \quad (3-53)$$

3.1.4

Opções ao filtro de Wiener

O filtro de Wiener requer conhecimento preciso da função autocorrelação do canal e da potência do ruído, o que nem sempre é possível. Algumas alternativas a esse método foram propostas na literatura, como por exemplo os filtros cosseno levantado, sinc janelado e FFT (ver (Bad04) e referências). Esses métodos almejam aproximar a qualidade do filtro de Wiener com custo computacional e logístico menor possível. Obviamente, essa robustez tem o preço de uma piora do desempenho em relação ao filtro de Wiener. Na verdade, este último é útil como uma figura de mérito a ser atingida por soluções sub-ótimas porém mais práticas. A título de exemplo, citamos como uma das alternativas viáveis o filtro sinc estudado em (Bad04). Essa proposta não necessita conhecer a função autocorrelação do canal, e sim apenas uma estimativa do desvio Doppler f_m e da potência do ruído, σ . A função autocorrelação do canal é então aproximada por

$$\mathcal{R}_{h,t}[n] = \text{sinc}(2\pi f_m |n|) \quad (3-54)$$

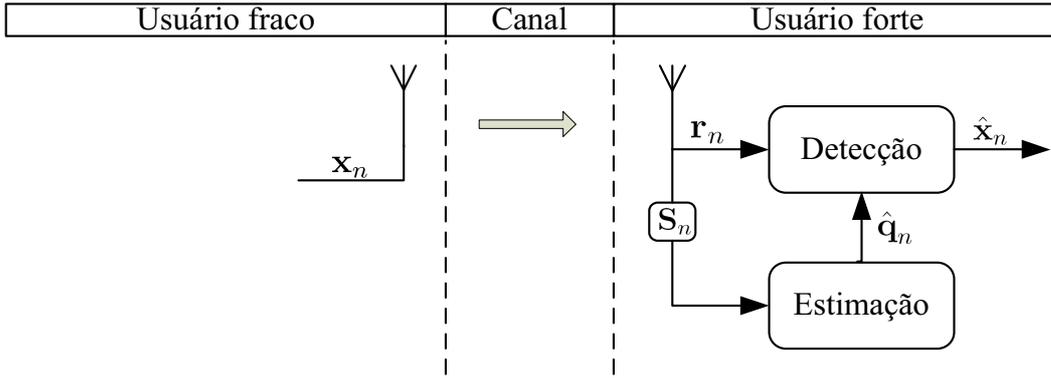


Figura 3.5: Diagrama de bloco para recepção em enlace aberto.

e os coeficientes do filtro resultante são obtidos com a substituição de (3-54) em (3-43) e (3-44) e em seguida em (3-38). O filtro sinc coincide com o filtro ótimo se o espectro do canal for plano. Esse filtro também é conhecido por ser a melhor opção possível caso se disponha apenas de informações sobre o desvio Doppler do canal e a potência do ruído. As Eqs. (3-45) e (3-47) também valem para o filtro sinc.

Apesar de a busca por alternativas mais viáveis ao filtro de Wiener ser um assunto academicamente interessante, ela não será considerada neste trabalho a não ser nessa seção. Assumiremos daqui em diante conhecimento perfeito tanto da função autocorrelação do canal como da relação E_s/σ . A partir daí sempre usaremos os coeficientes ótimos para as filtragens de interesse.

3.2 Recepção

Temos agora condições de identificar a parcela do sinal de interesse e as perturbações na recepção dos símbolos OFDM. Veremos que há 3 tipos diferentes de ruído, e nessa seção analisamo-os com a devida atenção.

Considere a recepção de um símbolo OFDM, instante n , tom k . A decisão do símbolo de dados é feita por um comparador de mínima distância, isto é,

$$\hat{x}_n^k = \arg \min_{\tilde{x} \in \mathcal{X}} |r_n^k - \hat{q}_n^k \tilde{x}|^2. \quad (3-55)$$

Aqui $|\cdot|$ representa o operador módulo de um número. O detector deve calcular (3-55) para cada hipótese \tilde{x} , ou seja, para cada ponto da constelação PSK, e decidir pelo símbolo que minimiza a norma. A Fig. 3.5 mostra o diagrama de blocos para o cenário.

A seguir analisamos a recepção, distinguindo a parcela do sinal desejado das perturbações. Usaremos o estimador ML mais filtro de Wiener para a análise da recepção, e por isso ignoramos o sub-escrito “ml” até quase o fim

dessa seção. A análise pode ser estendida para o caso MMSE, e na seção seguinte mostraremos esses resultados. Qualquer estimador mais simples pode ser representado com uma escolha adequada dos coeficientes λ . Por exemplo, a estimação ML simples da Seção 3.1.1, em que apenas a observação do momento atual é levada em conta para a estimação, pode ser facilmente conseguida fazendo $\lambda[0] = 1$ e $\lambda[n] = 0 \forall n > 0$ e calculando \mathbf{T} por (3-8). Consideramos inicialmente $M = 3$, um filtro pequeno, e logo generalizamos para qualquer M .

Combinando (3-55) com (2-24) e (3-34), obtemos (focamos apenas o interior do módulo em (3-55), que definimos por Ω)

$$\begin{aligned}\Omega &\triangleq r_n^k - \hat{q}_n^k \tilde{x} \\ &= q_n^k x_n^k + z_n^k - \left[\lambda[0] \mathbf{f}^k(\mathbf{T}\mathbf{y}_p)_n + \lambda[1] \mathbf{f}^k(\mathbf{T}\mathbf{y}_p)_{n-1} + \lambda[2] \mathbf{f}^k(\mathbf{T}\mathbf{y}_p)_{n-2} \right] \tilde{x},\end{aligned}\quad (3-56)$$

sendo \mathbf{f}^k a k -ésima linha da matriz \mathbf{F}_L , ou seja, $\mathbf{f}^k = [\mathbf{F}_L]_{\text{lin } k}$. Aplicando a Eq. (3-11) em (3-56), conseguimos

$$\begin{aligned}\Omega &= q_n^k x_n^k + z_n^k - \left[\lambda[0] q_n^k + \lambda[1] q_{n-1}^k + \lambda[2] q_{n-2}^k \right. \\ &\quad \left. + \lambda[0] \mathbf{f}^k(\mathbf{T}\mathbf{w}_p)_n + \lambda[1] \mathbf{f}^k(\mathbf{T}\mathbf{w}_p)_{n-1} + \lambda[2] \mathbf{f}^k(\mathbf{T}\mathbf{w}_p)_{n-2} \right] \tilde{x}.\end{aligned}\quad (3-57)$$

A seguir, adicionamos e subtraímos o canal atual, q_n^k , no termo entre colchetes. Obtemos

$$\begin{aligned}\Omega &= q_n^k x_n^k + z_n^k - \left[(\lambda[0] - 1) q_n^k + \lambda[1] q_{n-1}^k + \lambda[2] q_{n-2}^k + q_n^k \right. \\ &\quad \left. + \lambda[0] \mathbf{f}^k(\mathbf{T}\mathbf{w}_p)_n + \lambda[1] \mathbf{f}^k(\mathbf{T}\mathbf{w}_p)_{n-1} + \lambda[2] \mathbf{f}^k(\mathbf{T}\mathbf{w}_p)_{n-2} \right] \tilde{x},\end{aligned}\quad (3-58)$$

e então

$$\begin{aligned}\Omega &= q_n^k (x_n^k - \tilde{x}) + z_n^k - \left[(\lambda[0] - 1) q_n^k + \lambda[1] q_{n-1}^k + \lambda[2] q_{n-2}^k \right. \\ &\quad \left. + \lambda[0] \mathbf{f}^k(\mathbf{T}\mathbf{w}_p)_n + \lambda[1] \mathbf{f}^k(\mathbf{T}\mathbf{w}_p)_{n-1} + \lambda[2] \mathbf{f}^k(\mathbf{T}\mathbf{w}_p)_{n-2} \right] \tilde{x}.\end{aligned}\quad (3-59)$$

Generalizando para qualquer M , conseguimos

$$\Omega = \underbrace{q_n^k (x_n^k - \tilde{x})}_{\text{signal de interesse}} + \underbrace{z_n^k}_{\text{ruído de detecção}} - \underbrace{\tilde{x} \sum_{i=0}^{M-1} \lambda'[i] q_{n-i}^k}_{\text{ruído de distorção}} - \underbrace{\tilde{x} \sum_{i=0}^{M-1} \lambda[i] \mathbf{f}^k (\mathbf{T} \mathbf{w}_p)_{n-i}}_{\text{ruído de interpolação}}, \quad (3-60)$$

em que $\lambda'[i]$ são elementos do vetor definido por (3-46).

Na Eq. (3-60) identificamos o termo de interesse no cálculo da norma e as três fontes de ruído que devem ser levadas em conta para a recepção desse sistema. O sinal de interesse vem multiplicado pelo canal q_n^k . Para *algum* \tilde{x} , isto é, para algum ponto da constelação, a subtração $(x_n^k - \tilde{x})$ será igual a zero. Isso independe de todas as outras perturbações e de q_n^k , mas obviamente não garante a detecção perfeita dos símbolos, pois as perturbações devem ser levadas em conta.

A primeira fonte de ruído é z_n^k , referente ao *ruído de detecção* inerente ao processo de comunicação – e sobre o qual não temos controle; a segunda é o termo identificados como *ruído de distorção do filtro* (RD) em (3-60). Esse termo corresponde à distorção introduzida pelo filtro de Wiener na sequência de valores $\{q_n^k\}$ sendo estimada. Observe que caso não haja filtro, ou seja, caso $\lambda[0] = 1$ e $\lambda[i] = 0 \forall i > 0$, essa perturbação não existe. Observa-se que o RD não depende da potência do ruído de detecção nem do perfil de pilotos; o terceiro fator é uma consequência do fato de que os pilotos fornecem apenas amostras ruidosas do comportamento do canal em determinados tons. Esse ruído provém da interpolação dessas amostras ruidosas para a estimação completa do canal de comunicação, e será portanto chamado de *ruído de interpolação* (RI). Percebe-se pela análise de (3-60) que, caso um filtro λ seja usado, o ruído de interpolação depende não só da alocação de pilotos no bloco atual, mas da de blocos passados também.

Outro fato a notar é que os três ruídos são estatisticamente independentes, gaussianos complexos e de média zero. O ruído de detecção é definido como tal. O RD também o é, pois é uma combinação linear de q_n^k 's, que são VA's conjuntamente gaussianas e complexas de média zero, uma vez que são resultado de uma transformação linear aplicada na sequência de vetores conjuntamente gaussianos $\{\mathbf{h}_n\}$. O mesmo raciocínio vale para o RI. Isso nos será muito útil posteriormente.

Nos próximos parágrafos analisaremos a potência do ruído de distorção e do ruído de interpolação mais atentamente.

Primeiro o RD. Podemos escrevê-lo como

$$\tilde{x} \sum_{i=0}^{M-1} \lambda'[i] q_{n-i}^k = \tilde{x} \begin{bmatrix} q_n^k & q_{n-1}^k & \cdots & q_{n-M+1}^k \end{bmatrix} \boldsymbol{\lambda}', \quad (3-61)$$

onde o vetor $\left[q_n^k \ q_{n-1}^k \ \dots \ q_{n-M+1}^k \right]^T$ contém as M últimas amostras da evolução temporal do sub-canal k . Definimos a potência do RD para o bloco n e sub-canal k como

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{dist},n}^k &\triangleq \mathcal{E} \left[\left\| \tilde{x} \left[q_n^k \ q_{n-1}^k \ \dots \ q_{n-M+1}^k \right] \boldsymbol{\lambda}' \right\|^2 \right] \\ &= \mathcal{E} \left[(\boldsymbol{\lambda}')^T \left[q_n^k \ q_{n-1}^k \ \dots \ q_{n-M+1}^k \right]^{\mathcal{H}} \left[q_n^k \ q_{n-1}^k \ \dots \ q_{n-M+1}^k \right] \boldsymbol{\lambda}' \right] \\ &= (\boldsymbol{\lambda}')^T \mathbf{R}_{qq,t} \boldsymbol{\lambda}', \end{aligned} \quad (3-62)$$

onde $\mathbf{R}_{qq,t}$ é a matriz autocorrelação da sequência de $\{q_n^k\}$'s. O ruído total de filtragem na recepção do bloco n é o somatório das potências das perturbações dos tons que carregam dados, ou seja,

$$\sigma_{\text{dist},n} \triangleq (K - K_p) (\boldsymbol{\lambda}')^T \mathbf{R}_{qq,t} \boldsymbol{\lambda}'. \quad (3-63)$$

O cálculo do RD necessita, portanto, do conhecimento da matriz autocorrelação dos sub-canais na frequência. Calculamos a função autocorrelação $\mathcal{R}_{q,t}[n]$ da sequência $\{q_n^k\}$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{q,t}[n] &= \mathcal{E} [q_i^k (q_{i-n}^k)^*] = \mathcal{E} \left[\mathbf{f}^k \mathbf{h}_i \mathbf{h}_{i-n}^{\mathcal{H}} (\mathbf{f}^k)^{\mathcal{H}} \right] \\ &= \mathbf{f}^k \mathcal{R}_{h,t}[n] \text{diag} \{ \boldsymbol{\gamma} \} (\mathbf{f}^k)^{\mathcal{H}} \\ &= \mathcal{R}_{h,t}[n] \sum_{l=0}^{L-1} \gamma[l] = \mathcal{R}_{h,t}[n]. \end{aligned} \quad (3-64)$$

Aqui $(\cdot)^*$ representa o conjugado de um número. Em (3-64) utilizamos $\sum_l \gamma[l] = 1$, isto é, a normalização das potências dos taps do canal, já discutida na Seção 2.4. Concluimos assim que a função autocorrelação da sequência de valores de qualquer sub-canal da frequência é igual à autocorrelação de qualquer dos taps do canal no tempo normalizado para potência unitária. Depreende-se também que a autocorrelação temporal dos canais na frequência é igual para todos os sub-canais, ou seja, independe de k . Daí conclui-se que a potência do ruído de distorção é a mesma para todos os sub-canais – é não-seletiva em frequência. A matriz autocorrelação é organizada a partir da função autocorrelação da mesma forma que (2-30), o que resulta em

$$\mathbf{R}_{qq,t} = \mathbf{R}_{hh,t}. \quad (3-65)$$

Analisamos agora o ruído de interpolação. Consideramos a possibilidade

de a posição dos pilotos ser variante no tempo. Define-se

$$\begin{aligned} v^k &\triangleq \left[\sum_{i=0}^{M-1} \lambda[i] \mathbf{f}^k (\mathbf{T} \mathbf{w}_p)_{n-i} \right] \tilde{x}; \\ \mathbf{v} &\triangleq \{v^k\} \quad \forall k \in \{d\}; \\ \sigma_{\text{inter},n} &\triangleq \text{tr} \{ \mathcal{E} [\mathbf{v} \mathbf{v}^H] \}, \end{aligned} \quad (3-66)$$

em que $\sigma_{\text{inter},n}$ é a potência total do ruído de interpolação para os canais que carregam dados na recepção para o bloco n – por isso $k \in \{d\}$, onde $\{d\}$ representa o conjunto de índices dos sub-canais que contém dados. A solução de (3-66) é

$$\sigma_{\text{inter},n} = \sigma \sum_{i=0}^{M-1} \lambda[i]^2 (\text{tr} \{ \mathbf{F}_L \mathbf{U}_{n-i}^{-1} \mathbf{F}_L^H \} - L), \quad (3-67)$$

que por sua vez pode ser facilmente decomposta para o cálculo da potência do ruído de interpolação para um determinado tom k como

$$\sigma_{\text{inter},n}^k = \sigma \sum_{i=0}^{M-1} \lambda[i]^2 \mathbf{f}^k \mathbf{U}_{n-i}^{-1} (\mathbf{f}^k)^H. \quad (3-68)$$

Agora voltamos com o sub-escrito “ml”. Podemos agora re-definir o erro médio quadrático de estimação na frequência descrito em (3-47) em função de (3-63) e (3-67).

$$\begin{aligned} \text{MSE}_{\text{ml}+w,n} &= \sigma_{\text{dist},n} + \sigma_{\text{inter},n} \\ &= (K - K_p) (\boldsymbol{\lambda}'_{\text{ml}})^T \mathcal{R}_{qq,t} \boldsymbol{\lambda}'_{\text{ml}} + \sigma \sum_{i=0}^{M-1} \lambda_{\text{ml}}[i]^2 (\text{tr} \{ \mathbf{F}_L \mathbf{U}_{n-i}^{-1} \mathbf{F}_L^H \} - L) \\ &= (K - K_p) (\boldsymbol{\lambda}'_{\text{ml}})^T \mathcal{R}_{qq,t} \boldsymbol{\lambda}'_{\text{ml}} + \sum_{i=0}^{M-1} \lambda_{\text{ml}}[i]^2 \text{MSE}_{\text{ml},n-i}. \end{aligned} \quad (3-69)$$

Aqui usamos a definição em (3-15).

3.3

Probabilidade de erro

Essa seção tem por objetivo responder à última das perguntas que abriram esse capítulo: qual o impacto do erro de estimação na probabilidade de erro do sistema? Já vimos que são 3 as fontes de ruído na recepção, e estamos agora em condições para analisar o impacto dessas perturbações na probabilidade de erro de transmissão.

Identificadas essas 3 fontes de perturbação para a recepção dos símbolos OFDM, definimos a potência *total* de ruído na recepção para o bloco n , tom

Tabela 3.1: Ruído total por tom para os diferentes estimadores

Estimadores	$\sigma_{\text{tot},n}^k$
ML simples	$\sigma + \sigma \text{tr}\{\mathbf{U}_n^{-1}\}$
MMSE simples	$\sigma + \sigma \text{tr}\{\mathbf{V}_n^{-1}\}$
ML e Wiener	$\sigma + (\boldsymbol{\lambda}'_{\text{ml}})^T \mathbf{R}_{qq,t} \boldsymbol{\lambda}'_{\text{ml}} + \sigma \sum_{i=0}^{M-1} \lambda_{\text{ml}}[i]^2 \mathbf{f}^k \mathbf{U}_{n-i}^{-1} (\mathbf{f}^k)^{\mathcal{H}}$
MMSE e Wiener	$\sigma + (\boldsymbol{\lambda}'_{\text{mmse}})^T \mathbf{R}_{qq,t} \boldsymbol{\lambda}'_{\text{mmse}} + \sigma \sum_{i=0}^{M-1} \lambda_{\text{mmse}}[i]^2 \mathbf{f}^k \mathbf{V}_{n-i}^{-1} (\mathbf{f}^k)^{\mathcal{H}} +$ $-\sigma (\boldsymbol{\lambda}'_{\text{mmse}})^T \mathbf{R}_{qq,t} \boldsymbol{\lambda}'_{\text{mmse}} \mathbf{f}^k \mathbf{V}_n^{-1} (\mathbf{f}^k)^{\mathcal{H}}$

k , como

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{tot},n}^k &= \sigma + \sigma_{\text{dist},n}^k + \sigma_{\text{inter},n}^k \\ &= \sigma + \text{MSE}_n^k, \end{aligned} \quad (3-70)$$

ou seja, como a soma das parcelas do ruído de detecção, do ruído de distorção do filtro e do ruído de interpolação (a soma das duas últimas é o MSE na frequência). A Eq. (3-70) é a mais geral possível, pois acomoda todas as escolhas de estimadores. A Tabela 3.1 lista as potência dos ruído para as diferentes escolhas possíveis. Consideramos pilotos uniformemente espaçados e constantes no tempo, o que tem como consequência $\mathbf{T}_i = \mathbf{T}_j \forall i, j$ e $\mathbf{f}^k \mathbf{U}_{n-i}^{-1} (\mathbf{f}^k)^{\mathcal{H}} = \mathbf{f}^p \mathbf{U}_{n-i}^{-1} (\mathbf{f}^p)^{\mathcal{H}} \forall k, p$ para o ML e $\mathbf{f}^k \mathbf{V}_n (\mathbf{f}^k)^{\mathcal{H}} = \mathbf{f}^p \mathbf{V}_n (\mathbf{f}^p)^{\mathcal{H}} \forall k, p$ para o MMSE – em outras palavras $\text{tr}\{\mathbf{U}_n\}^{-1}$ ou $\text{tr}\{\mathbf{V}_n\}^{-1}$ são constantes no tempo e o MSE não é seletivo em frequência.

A partir de (3-60), é fácil ver que a potência do sinal de interesse, caso utilizemos $E_s = 1$, é igual a $|q_n^k|^2$. Definindo a potência de bit por $E_b \log_2(|\mathcal{X}|) = E_s$, podemos escrever a SNR por bit na recepção, bloco n , tom k , como

$$\text{SNR}_n^k = \frac{E_b |q_n^k|^2}{\sigma_{\text{tot},n}^k}, \quad (3-71)$$

e a probabilidade de erro de bit (*Bit Error Rate*, ou BER) para BPSK ou QPSK para a recepção do k -ésimo tom do n -ésimo dado q_n^k como

$$P_n^k(\epsilon | |q_n^k|) = \mathcal{Q}\left(\sqrt{\text{SNR}_n^k}\right), \quad (3-72)$$

onde

$$\mathcal{Q}(a) = \int_a^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt. \quad (3-73)$$

Há uma detalhe em (3-72), que agora iremos apenas citar. O uso da função $\mathcal{Q}(\cdot)$ supõe um ruído total gaussiano de média zero, o que, como já comentado, é exatamente o caso; e estatisticamente independente com a parcela do sinal de interesse. Esse último ponto não é respeitado. Existe correlação entre o RD

e o sinal, ou seja,

$$\mathcal{E} \left[(q_n^k)^* \sum_{i=0}^{M-1} \lambda'[i] q_{n-i}^k \right] \neq 0. \quad (3-74)$$

Vale dizer que o coeficiente de correlação calculado em (3-74) só existe quando há filtro e é mesmo assim geralmente pequeno. Convém lembrar que, como os q_n^k 's e o RD são VA's conjuntamente gaussianas, a decorrelação entre elas garante independência estatística. Nessa seção queremos apenas dar uma idéia intuitiva de como se procede para o cálculo da BER e conseqüentemente apenas mencionaremos esse problema. No Capítulo 4 estaremos interessados em calcular probabilidades de erro com mais precisão e retornaremos a esse ponto.

Seja a VA dada por $\kappa \triangleq |q_n^k|$. Seguimos daí para a definição da BER total, apenas em função de E_b/σ , como

$$P(\epsilon) = \int_0^{+\infty} P_n^k(\epsilon | \kappa) p(\kappa) d\kappa, \quad (3-75)$$

onde $p(\kappa)$ é uma função densidade de probabilidade (fdp) Rayleigh, i.e.

$$p(\kappa) = \frac{\kappa}{\tilde{\sigma}} \exp\left(\frac{-\kappa^2}{2\tilde{\sigma}}\right) u(\kappa). \quad (3-76)$$

Aqui $u(t)$ representa a função degrau unitário na variável t . Já que q_n^k é uma VA complexa gaussiana com $\mathcal{E}[|q_n^k|^2] = 1$ (ver (3-64)), κ terá parâmetro $\tilde{\sigma} = 1/2$. Percebe-se de (3-75) que a probabilidade de erro resultante do sistema é a área de uma função que corresponde ao produto de duas funções distintas, uma igual a $\mathcal{Q}\left(\sqrt{\text{SNR}_n^k}\right)$ e uma fdp de Rayleigh. A qualidade da estimação do canal influirá em $\sigma_{\text{tot},n}^k$ em (3-71), não tendo nenhum efeito sobre a fdp. Chegamos assim à resposta para a terceira questão proposta: melhores estimadores do canal diminuem $\sigma_{\text{tot},n}^k$ e fazem com que a descida da função $\mathcal{Q}(\cdot)$ seja mais rápida – em outras palavras, o módulo da derivada de $\mathcal{Q}(\cdot)$ para $\kappa > 0$ tende a ser maior. Quanto mais rápida a descida, menor será a área a ser integrada. Idealmente, $\mathcal{Q}(\cdot)$ seria tão íngreme que se aproximaria de uma função impulso, mas isso só é conseguido na ausência completa de ruído. A Fig. 3.6 ilustra a situação. São duas as opções para a diminuição de $\sigma_{\text{tot},n}^k$ que temos disponíveis em sistemas com enlace aberto. Primeiro, devemos usar pilotos sempre uniformemente distribuídos. Vimos na Seção 3.1.1 que essa escolha resultará na menor norma possível da matriz \mathbf{T} , o que por sua vez leva ao menor MSE possível. Segundo, temos a possibilidade de usar estimadores de canal mais sofisticados, que têm o efeito de reduzir $\sigma_{\text{tot},n}^k$ ainda mais. O uso de estimadores como o MMSE ou do filtro de Wiener resulta em estimadores mais confiáveis. É bom lembrar que o preço a ser pago por essas estimações

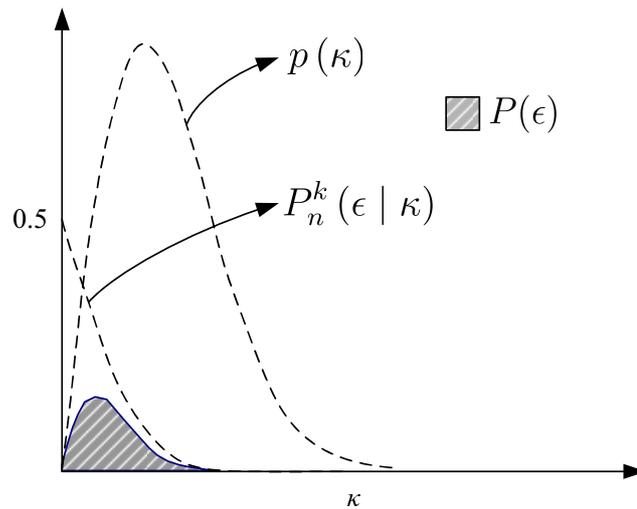


Figura 3.6: Probabilidade de erro para enlace aberto.

mais precisas são complexidade computacional aumentada e maior quantidade de informação sobre as estatísticas do canal e da potência do ruído.

A solução de (3-75) é ((Pro00), pg. 818),

$$P(\epsilon) = \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{\Gamma}{1 + \Gamma}} \right), \quad (3-77)$$

onde $\Gamma = \frac{E_b \tilde{\sigma}}{\sigma_{\text{tot},n}^k}$ é a SNR média recebida por bit.

3.4

Experimentos

Essa seção tem por objetivo demonstrar através de experimentos alguns dos conceitos mais interessantes desse capítulo. Todos os sistemas OFDM foram simulados em Matlab. O canal foi gerado com o modelo AR já apresentado na Seção 2.4.

Experimento 1

Primeiramente analisaremos um sistema OFDM com 64 sub-canais e 16 pilotos. Em cada sub-canal é utilizada uma modulação QPSK. Os pilotos são dispostos sempre uniformemente espaçados, conforme foi aprendido na Seção 3.1.1. O filtro de Wiener, quando usado, possui 50 taps, calculados de forma ótima como descrito na Seção 3.1.3. O canal é formado por 8 taps seguindo o perfil de potência decrescente em (2-26). Os taps são independentes entre si e têm autocorrelação dada por (2-27) com $f_m = 5 \times 10^{-3}$. A Tabela 3.2 resume os principais parâmetros para o experimento.

As Figs. 3.7 e 3.8 mostram o MSE e a BER para cada E_b/σ simulados para a transmissão de 40.000 blocos. Usamos os estimadores ML simples,

Tabela 3.2: Parâmetros para a simulação

Comprimento do canal no tempo	L	8
Número de sub-canais	K	64
Número de pilotos	K_p	16
Espalhamento Doppler	f_m	5×10^{-3}
Tamanho do filtro	M	50
Blocos transmitidos	N	40.000

MMSE simples, ML mais filtro de Wiener e MMSE mais filtro de Wiener. Analisando o gráfico de MSE, o que mais chama a atenção é melhora considerável com a utilização do filtro de Wiener, tanto para o ML quanto para o MMSE. Economiza-se cerca de 8 dB com a utilização do filtro. Observa-se que os estimadores ML e MMSE só diferem para baixas E_b/σ . Como previmos, quando $\sigma \rightarrow 0$, a diferença entre os dois tende a desaparecer. Isso é observado tanto para os seu uso simples quanto para o seu uso combinado com o filtro de Wiener.

O efeito do uso do filtro não é tão pronunciado para a BER, como mostra a Fig. 3.8. Ilustramos, assim, o efeito do MSE na probabilidade de erro do sistema, já demonstrada matematicamente em (3-77). Ganha-se cerca de 1-2 dB com o uso do filtro de Wiener. Não se percebe diferenças entre os estimadores ML e MMSE tanto para o seu uso simples quanto para o seu uso combinado com o filtro de Wiener. Como vimos, quanto melhor a estimação de canal, mais rápida será a descida da função $\mathcal{Q}(\cdot)$. Percebemos que melhores estimações têm efeito limitado na probabilidade de erro final do sistema.

Experimento 2

Agora vamos analisar o efeito do número de taps do filtro de Wiener no MSE e na BER resultantes do sistema. Dessa vez essas variáveis são calculadas teoricamente por (3-45) e (3-77), respectivamente – só há diferença significativa entre o cálculo teórico e o simulado para E_b/σ muito baixos, o que não será o caso nessa seção. Como vimos que os estimadores ML mais Wiener e MMSE mais Wiener têm desempenho praticamente igual para a maior parte dos casos, optamos pelo primeiro para esse experimento pelo fato de ser mais simples de calculá-lo. O resto dos parâmetros da simulação são os mesmos mostrados na Tabela 3.2, exceto pelas três últimas linhas. O comportamento do tamanho do filtro, sua relação com o desvio Doppler e o efeito no desempenho do sistema é justamente o que queremos ilustrar agora.

A Fig. 3.9 mostra os resultados em MSE e BER para um canal com $f_m = 5 \times 10^{-2}$ quando se varia o tamanho do filtro de Wiener – variamos M com

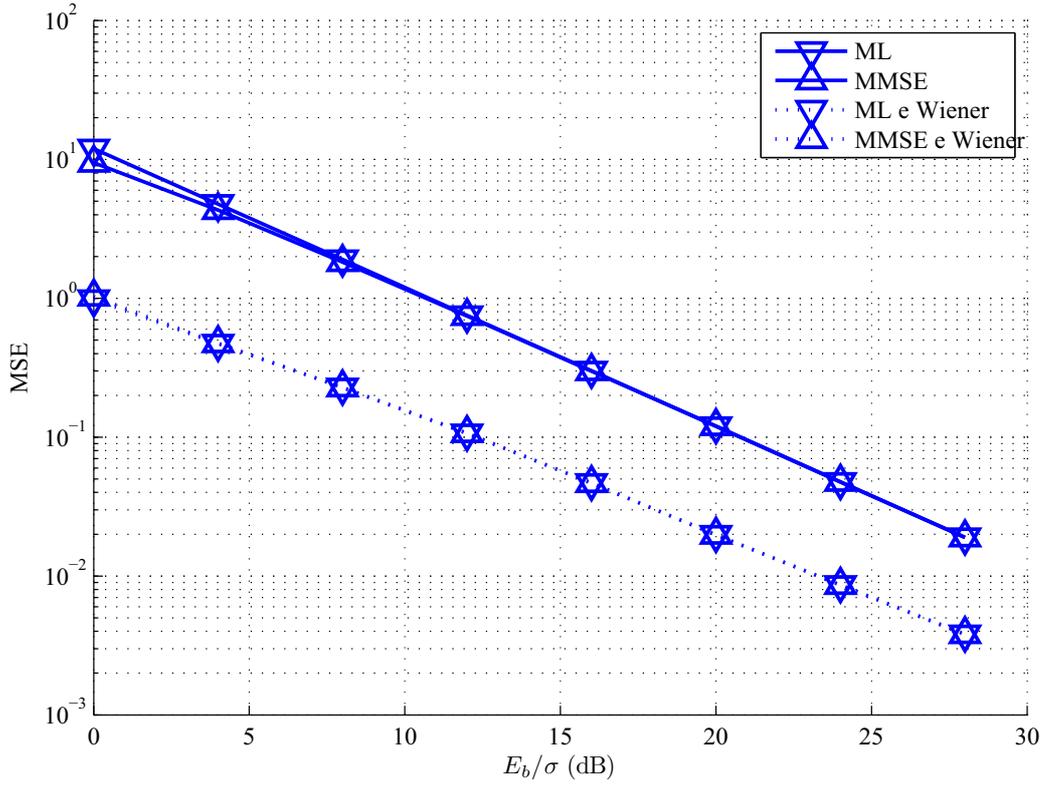


Figura 3.7: MSE para pilotos uniformes e diferentes estimadores.

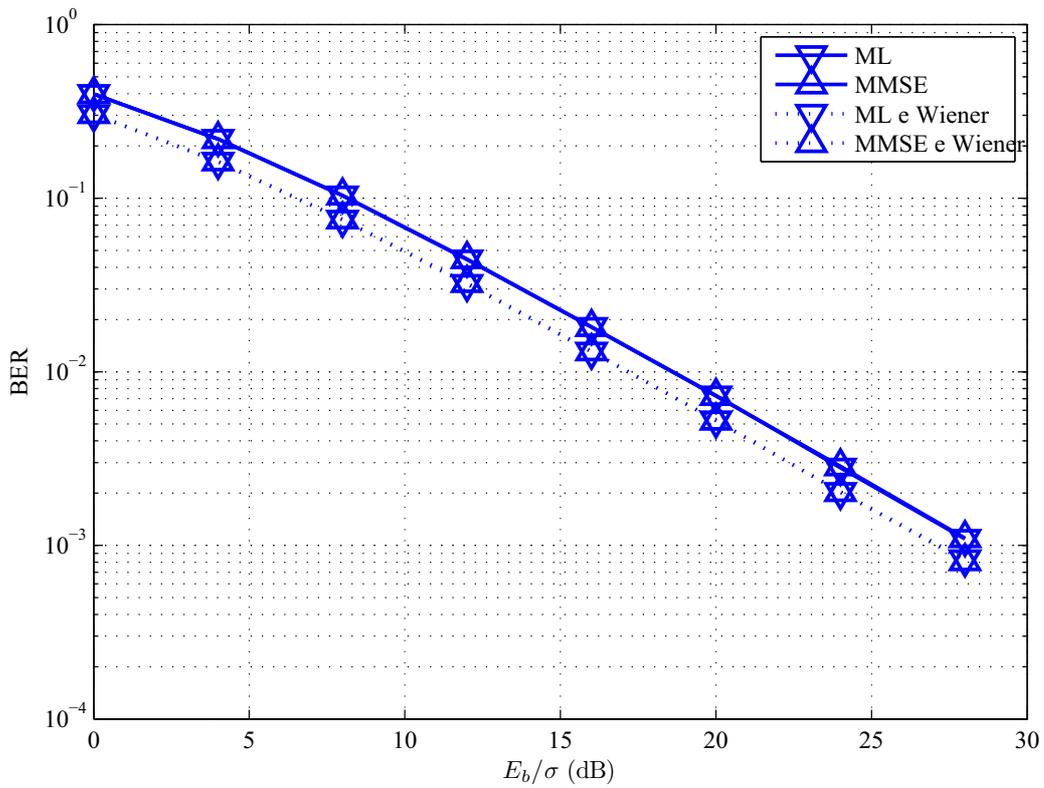


Figura 3.8: BER para pilotos uniformes e diferentes estimadores.

acréscimos de 20 taps por vez. É de se esperar, obviamente, que quanto maior o tamanho do filtro, melhor o desempenho. Porém, essa melhora é bastante limitada. Há de se considerar que esse canal pode ser classificado como de variação alta, o que limita a eficácia do filtro de Wiener. Existe diferença significativa tanto em MSE quanto em BER apenas entre $M = 1$ (estimador ML simples) e $M = 20$. Os pontos restantes não mostram melhora perceptível.

Resultados diferentes são vistos para $f_m = 5 \times 10^{-3}$, mostrados na Fig. 3.10. Nesse caso, o aumento do tamanho do filtro tem conseqüências positivas para o MSE em todos os valores de M testados. Mesmo para os últimos acréscimos percebe-se melhoria, principalmente para E_b/σ maiores. O mesmo não pode ser dito para a BER. Para esse fator, existe diferença significativa apenas entre $M = 1$ e $M = 20$.

Como era de se esperar, o efeito do aumento do tamanho do filtro tem impacto ainda mais significativo para um canal de menor variação. O último caso é o de um canal com $f_m = 5 \times 10^{-6}$, considerado de variação lenta. Os resultados são plotados na Fig. 3.11. O efeito na BER é mais uma vez limitado. Isso ocorre porque o ruído de detecção fica dominante a partir de certo ponto. Lembrar que o cálculo de $P(\epsilon)$ em (3-77) leva em conta $\sigma_{\text{tot},n}^k = \sigma + \text{MSE}_n^k$ (ver (3-70)). Após o filtro ter tamanho suficientemente grande, ocorre $\sigma \gg \text{MSE}_n^k$ e melhoras na estimação não têm impacto na BER final.

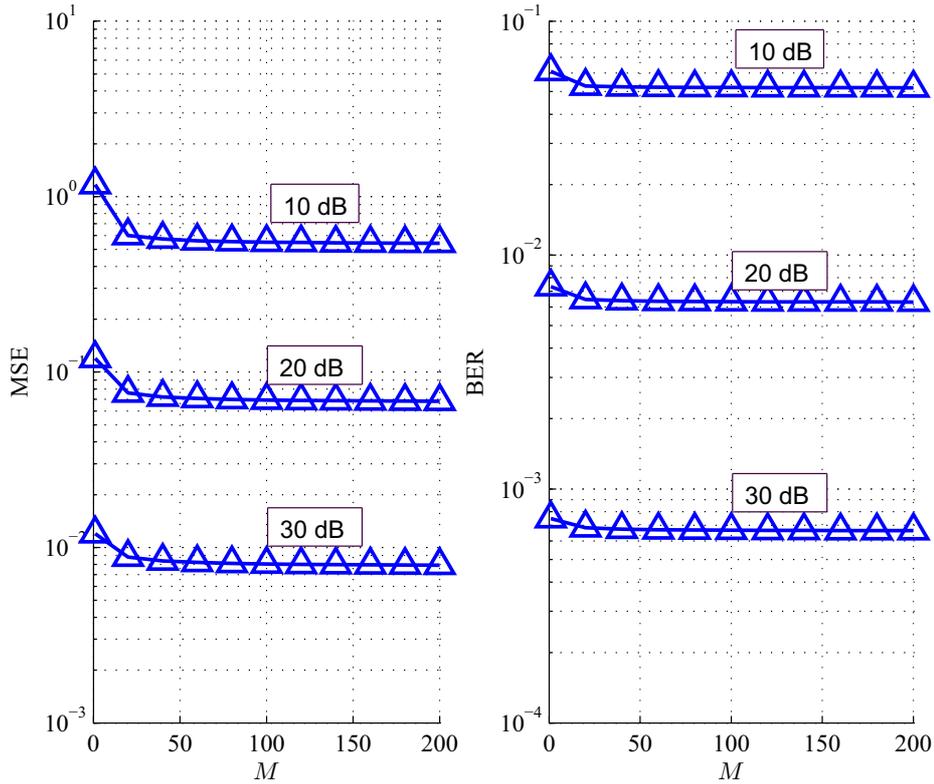


Figura 3.9: BER e MSE para $f_m = 5 \times 10^{-2}$, estimador ML com filtro de Wiener para três E_b/σ distintas.

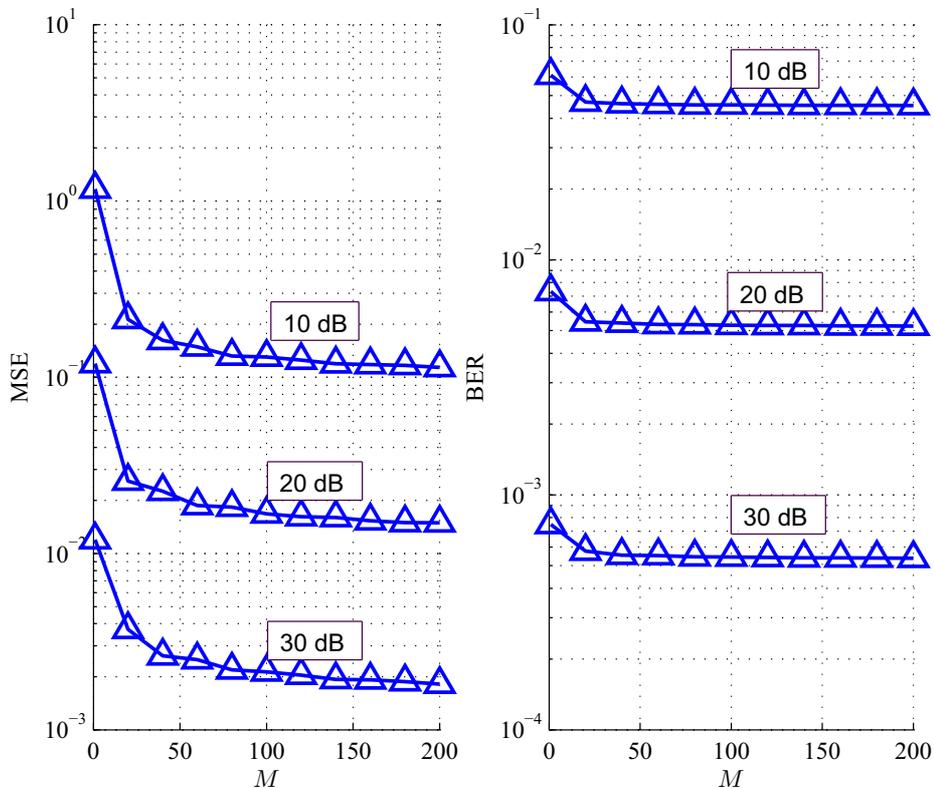


Figura 3.10: BER e MSE para $f_m = 5 \times 10^{-3}$, estimador ML com filtro de Wiener para três E_b/σ distintas.

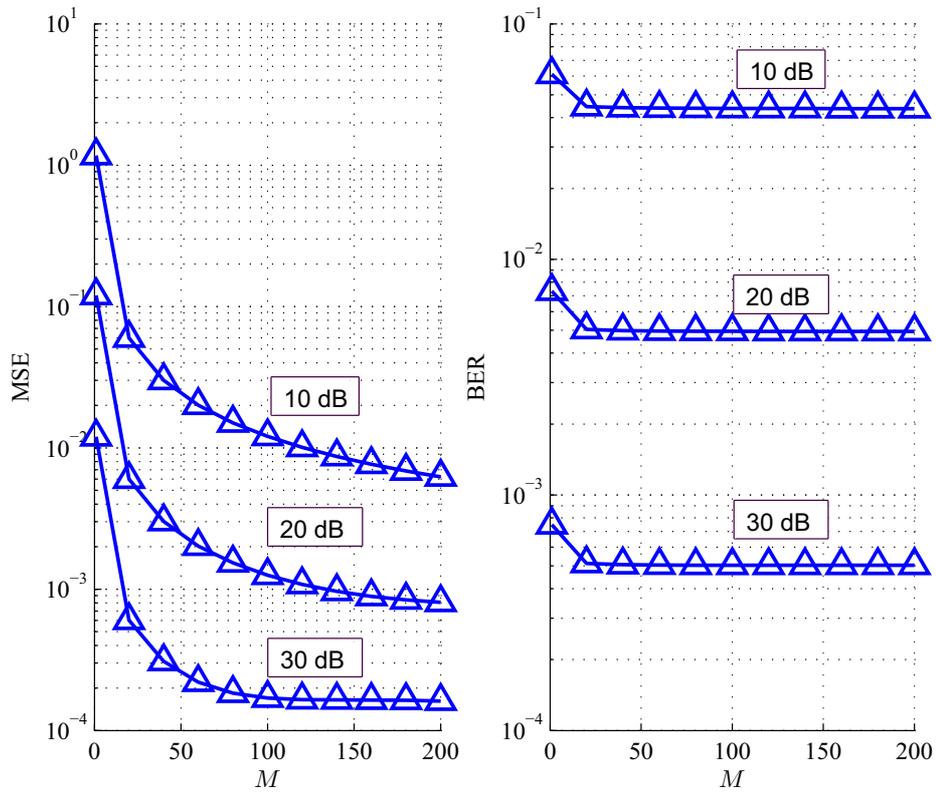


Figura 3.11: BER e MSE para $f_m = 5 \times 10^{-6}$, estimador ML com filtro de Wiener para três E_b/σ distintas.