4
Transmissão em Canais MIMO

Tecnologias que empregam múltiplas antenas para enviar ou receber sinais são cada vez mais populares uma vez que oferecem um aumento significativo na taxa de transmissão de dados e na confiabilidade do sistema, sem aumentar a largura de banda ou potência do sinal transmitido. Isto é conseguido por uma alta eficiência espectral e robustez ao desvanecimento. O aumento na capacidade do enlace reverso é obtido pelo uso de técnicas de múltiplo acesso por divisão espacial (SDMA). Enquanto na unidade móvel, a robustez ao desvanecimento é conseguido com o uso de técnicas de diversidade espacial, tais como codificação espaço-temporal.

Uma das técnicas de codificação espaço-temporal mais usadas é a proposta por Alamouti [38], que na sua versão mais simples utiliza duas antenas na transmissão e uma na recepção. Em [71] o conceito de códigos espaço-temporais foi generalizado e em [72] as condições para a construção de códigos espaço-temporais ortogonais são analisadas. Demonstra-se também que para símbolos complexos, o código de Alamouti é o único código ortogonal existente que possui máximo ganho de diversidade e máxima taxa de transmissão.

Este capítulo faz uma breve introdução aos sistemas de transmissão em canais MIMO e suas propriedades, enfocando principalmente o que diz respeito às técnicas de diversidade. Neste contexto são apresentados os conceitos de ganho de diversidade e ganho de codificação e as condições necessárias para atingir os máximos ganhos em canais não seletivos em freqüência.

4.1
Canal não Seletivo em Freqüência

O sinal recebido em um sistema MIMO com n_T antenas na transmissão e n_R antenas na recepção em um ambiente quase-estático, em geral, pode ser representado na seguinte forma

$$\boldsymbol{y}(i) = \boldsymbol{H}\boldsymbol{x}(i) + \boldsymbol{n}(i) \quad i = 1, \cdots, p \tag{4-1}$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0510507/CA

onde $\boldsymbol{x}(i)$ é o vetor que contém os n_T símbolos transmitidos, $\boldsymbol{y}(i)$ é o vetor que contém os n_R símbolos recebidos, $\boldsymbol{n}(i)$ é o ruído e outras interferências não modeladas na transmissão e $\boldsymbol{H}$ é a matriz de canal de dimensão $n_R \times n_T$ considerada constante ao longo de p intervalos de transmissão. Cada elemento (t, r) de $\boldsymbol{H}$ é uma variável aleatória complexa que representa o ganho do canal entre a antena de transmissão t e a antena de recepção r.

A matriz $\boldsymbol{H}$, de posto $m \leq \min(n_R, n_T)$, pode ser decomposta como $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{V}^H$, onde $\boldsymbol{U}$ e $\boldsymbol{V}$ são matrizes ortogonais de dimensão $n_R \times n_R$ e $n_T \times n_T$, respectivamente, e $\boldsymbol{\Sigma}$ é uma matriz de dimensão $n_R \times n_T$, tal que:

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{D} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix} \tag{4-2}$$

e $\boldsymbol{D}$ é uma matriz diagonal de dimensão m, cujos elementos, $\sigma_1 \geq \sigma_2 \cdots \geq \sigma_m > 0$, são os valores singulares não nulos de $\boldsymbol{H}$ [66]. Assim podemos escrever

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}(i) &= \boldsymbol{U}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{V}^H\boldsymbol{x}(i) + \boldsymbol{n}(i) \\ &= \sum_{l=1}^{m} \sigma_l \boldsymbol{u}_l \boldsymbol{v}_l^H \boldsymbol{x}(i) + \boldsymbol{n}(i) \end{aligned} \tag{4-3}$$

onde $\boldsymbol{u}_l$ e $\boldsymbol{v}_l$ são a l-ésima coluna da matriz $\boldsymbol{U}$ e $\boldsymbol{V}$, respectivamente.

Os valores singulares de $\boldsymbol{H}$ podem ser obtidos de uma matriz da forma:

$$\mathbf{W} = \begin{cases} \boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^H & n_R < n_T \\ \boldsymbol{H}^H\boldsymbol{H} & n_R \geq n_T \end{cases} \tag{4-4}$$

cuja decomposição espectral é $\mathbf{W} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\Sigma}^H\boldsymbol{U}^H$ se $n_R < n_T$ ou $\mathbf{W} = \boldsymbol{V}\boldsymbol{\Sigma}^H\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{V}^H$ se $n_R \geq n_T$, por tanto

$$\mathbf{W} = \begin{cases} \sum_{l=1}^{m} \lambda_l \boldsymbol{u}_l \boldsymbol{u}_l^H & n_R < n_T \\ \sum_{l=1}^{m} \lambda_l \boldsymbol{v}_l \boldsymbol{v}_l^H & n_R \geq n_T \end{cases} \tag{4-5}$$

onde $\lambda_l = \sigma_l^2$, $l = 1, 2, \cdots, m$ são os autovalores de $\mathbf{W}$. Quando se transmite um vetor $\boldsymbol{x}(i)$ pelo canal $\boldsymbol{H}$, são excitados os chamados modos do canal. Cada modo está diretamente relacionado com um dos valores e vetores singulares de $\boldsymbol{H}$, assim, em cada modo, o vetor $\boldsymbol{x}(i)$ é enviado através de um vetor singular $\boldsymbol{u}_l$ ou $\boldsymbol{v}_l$ é recebido com um ganho proporcional ao valor singular σ_l, ou, em forma quadrática, com ganho de potência igual ao autovalor correspondente, λ_l [12].

É conhecido na literatura técnica que o desempenho dos sistemas MIMO depende da distribuição dos autovalores da matriz $\mathbf{W}$ [73, 12]. Porém, a distribuição dos autovalores de $\mathbf{W}$ só é conhecida ou pode ser expressa de forma matematicamente tratável em alguns casos especiais.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0510507/CA

Em situações práticas é comum assumir que o canal de propagação é um canal com desvanecimento Rayleigh ou Rician, assim os elementos da matriz $\boldsymbol{H}$ são modelados como variáveis aleatórias complexas gaussianas e a matriz $\mathbf{W}$ representa um caso particular de matrizes aleatórias, conhecidas como matrizes de Wishart [73], e a função densidade de probabilidade conjunta dos autovalores pode ser escrita através de funções hyper-geométricas [74].

Nas seguintes seções são apresentados resultados numéricos para a função densidade de probabilidade dos autovalores da matriz $\mathbf{W}$ e destes resultados são inferidas algumas propriedades básicas dos sistemas MIMO. Um tratamento matemático formal pode ser encontrado por exemplo em [75,76,77] para capacidade do canal MIMO e [78] para probabilidade de erro de bit.

4.1.1 Propriedades Fundamentais de um Sistema MIMO

Um canal SISO é um caso especial de canal MIMO onde o número de antenas na transmissão e na recepção é igual a um, isto é, pode ser representado como:

$$\boldsymbol{y}(i) = h\boldsymbol{x}(i) + \boldsymbol{n}(i) \quad i = 1, \cdots, p \tag{4-6}$$

onde h é modelado como um canal com desvanecimento Rayleigh, isto é, h é uma variável aleatória complexa com função densidade de probabilidade gaussiana de média zero. O vetor $\boldsymbol{x}(i)$ em (4-6) é transmitido com ganho de potência $\lambda_1 = |h|^2$, e sendo que h é uma variável aleatória gaussiana, λ_1 segue uma distribuição exponencial. O histograma de λ_1 está ilustrado na Fig. 4.1. Observe-se que a freqüência relativa da ocorrência de valores próximos de zero é muito alta, fazendo com que a probabilidade de não se conseguir recuperar o símbolo seja também alta, isto é, a taxa de erro devido ao desvanecimento é pronunciada.

Na Fig. 4.2 está representado o histograma dos autovalores λ_l de $\mathbf{W}$ para um sistema MIMO de dimensão 4×4. Cada elemento $H(t, r)$ é modelado com um canal SISO com desvanecimento Rayleigh. Nesta figura pode ser observado que os autovalores λ_2, λ_3 e λ_4 da matriz $\mathbf{W}$ resultante assumem valores pequenos ou próximos de zero com menor freqüência que no caso anterior, isto é, os modos do canal relacionados a estes autovalores são mais robustos ao desvanecimento.

Desta observação podemos escrever a primeira propriedade fundamental de um sistema MIMO:

Propriedade 4.1. *Um canal MIMO cria modos de propagação que são mais*

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0510507/CA

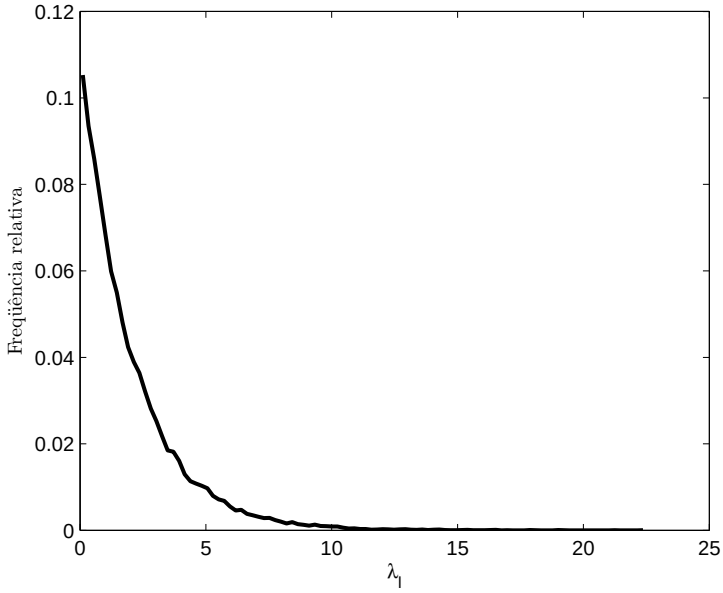

Figura 4.1: Histograma do autovalor da matriz **W** para um sistema SISO.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0510507/CA

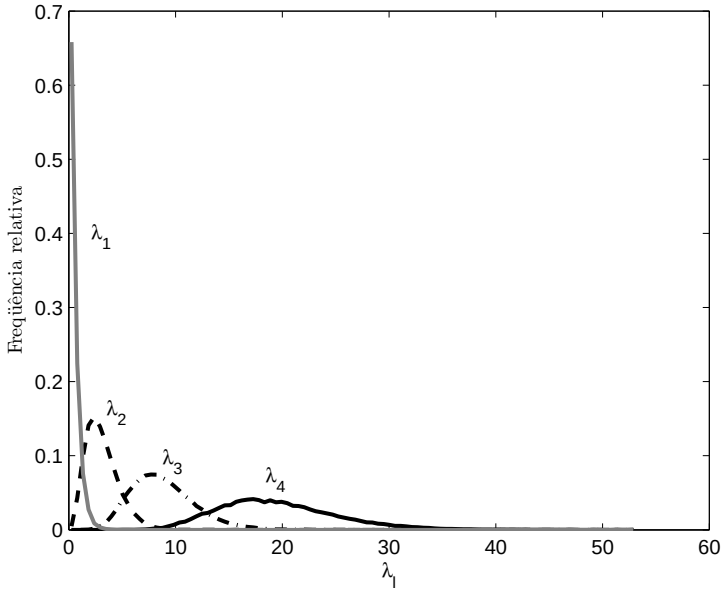

Figura 4.2: Histograma dos autovalores da matriz **W** para um sistema MIMO 4×4.

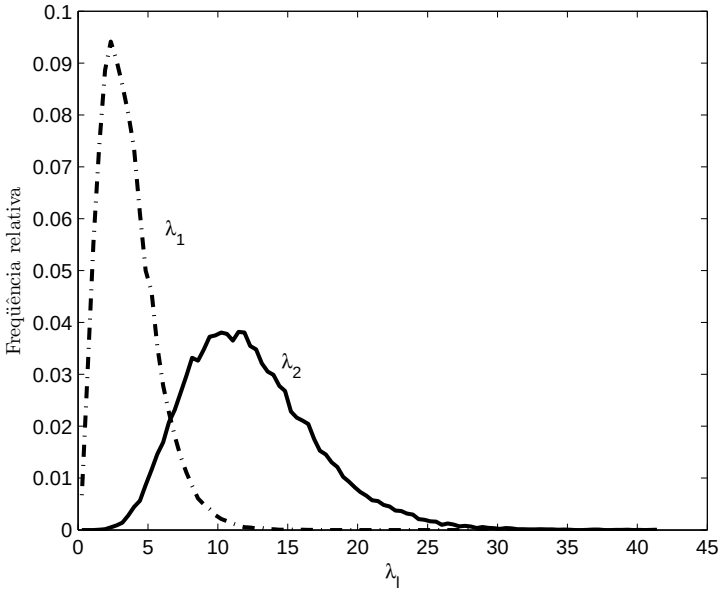

Figura 4.3: Histograma dos autovalores da matriz do canal para um sistema MIMO 4×2.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0510507/CA

robustas contra desvanecimento do que cada canal SISO que forma parte do canal MIMO.

Na Fig. 4.3 está ilustrado o histograma dos autovalores λ_l de um canal MIMO de dimensão 4×2 onde cada elemento $H(t, r)$ é modelado com um canal SISO com desvanecimento Rayleigh. Pode ser observado que a freqüência com que os autovalores assumem valores próximos de zero é menor que no caso anterior. Isto é, o canal 4×2 é mais robusto ao desvanecimento do que o canal 4×4. Porém, no canal 4×4 temos 4 modos de transmissão enquanto que no canal 4×2 temos 2 modos, isto é, espera-se que a taxa de transmissão no primeiro canal seja superior à taxa de transmissão no segundo canal.

Assim pode ser enunciada a segunda propriedade fundamental dos sistemas MIMO:

Propriedade 4.2. *Um canal MIMO torna possível aumentar a taxa de transmissão quando comparado a um canal SISO, devido à propagação em vários modos do canal, porém, existe um compromisso fundamental entre taxa de transmissão e robustez ao desvanecimento.*

4.1.2 Ganho de Diversidade

Nesta seção será derivada uma expressão geral para a probabilidade de erro média e, através desta, dois parâmetros fundamentais nos sistemas de

múltiplas antenas, o ganho de diversidade e o ganho de codificação serão introduzidos.

Um sistema MIMO em geral pode ser representado como:

$$\boldsymbol{y}(i) = \boldsymbol{H}\boldsymbol{x}(i) + \boldsymbol{n}(i) \quad i = 1, \cdots, p \tag{4-7}$$

onde supõe-se que a matriz $\boldsymbol{H}$, de dimensão $q \times n$, é constante ao longo de p blocos consecutivos (canal com desvanecimento lento), $\boldsymbol{x}(i)$ é o vetor coluna de saída do transmissor e tem dimensão n, $\boldsymbol{y}(i)$ é o vetor observado na entrada do receptor e tem dimensão q, $\boldsymbol{n}(i)$ é ruído aditivo gaussiano branco com média zero e matriz de covariância $\sigma_{\boldsymbol{n}}^2\boldsymbol{I}$. Para generalizar a derivação as dimensões n, q e p não são, por enquanto, relacionadas a significados físicos.

No receptor coleta-se p vetores coluna, $\boldsymbol{y}(i)$, um após outro, formando a matriz $q \times p$:

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{H}\boldsymbol{X} + \mathbf{N} \tag{4-8}$$

onde $\boldsymbol{Y}$ e $\mathbf{N}$ são matrizes de dimensão $q \times p$ e $\boldsymbol{X}$ de dimensão $n \times p$. O índice temporal, i, foi omitido para simplificar a nomenclatura.

Assumindo detecção por máxima verossimilhança (*maximum likelihood*, ML), a probabilidade de erro ao se decidir pelo vetor $\widehat{\boldsymbol{X}}$ quando transmitimos $\boldsymbol{X}$ (*pairwise error probability*, PEP) condicionada ao canal $\boldsymbol{H}$, em presença de ruído aditivo gaussiano branco corresponde à probabilidade de ocorrência do seguinte evento:

$$\|\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{H}\boldsymbol{X}\|_F^2 \geq \|\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{H}\widehat{\boldsymbol{X}}\|_F^2 \tag{4-9}$$

onde $\|\cdot\|_F$ representa a norma de Frobenius. Substituindo (4-8) em (4-9) e reordenando, temos:

$$2\Re\left\{\mathrm{tr}\left[\mathbf{N}^H\boldsymbol{H}(\widehat{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{X})\right]\right\} \geq \|\boldsymbol{H}(\widehat{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{X})\|_F^2 = d_{\boldsymbol{H}}^2(\boldsymbol{X}, \widehat{\boldsymbol{X}}) \tag{4-10}$$

onde tr[·] representa o traço de uma matriz, $\Re\{\cdot\}$ representa a parte real de um número complexo e $d_{\boldsymbol{H}}^2(\boldsymbol{X}, \widehat{\boldsymbol{X}})$ definimos como a distância entre duas matrizes condicionada a $\boldsymbol{H}$.

O termo da esquerda em (4-10) é uma variável aleatória gaussiana real de média zero e variância $2\sigma_n^2 d_{\boldsymbol{H}}^2(\boldsymbol{X}, \widehat{\boldsymbol{X}})$, então a PEP condicionada ao canal $\boldsymbol{H}$, é:

$$\mathsf{PEP}(\boldsymbol{X}, \widehat{\boldsymbol{X}}|\boldsymbol{H}) = Q\left(\sqrt{\frac{1}{2\sigma_n^2} d_{\boldsymbol{H}}^2(\boldsymbol{X}, \widehat{\boldsymbol{X}})}\right) \tag{4-11}$$

onde a função $Q(x)$ é definida por

$$Q(x) = \int_x^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-x^2/2\right) dx \tag{4-12}$$

Utilizado o limite de Chernoff [79], $Q(x) \leq \exp(-x^2/2)$, podemos escrever o limite superior para a probabilidade de erro em (4-11) como

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0510507/CA

$$\mathsf{PEP}(\boldsymbol{X},\widehat{\boldsymbol{X}}|\boldsymbol{H}) \leq \frac{1}{2}\exp\Big(-d^2_{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{X},\widehat{\boldsymbol{X}})/4\sigma_n^2\Big) \tag{4-13}$$

Introduzindo $\boldsymbol{\Xi} = \boldsymbol{X} - \widehat{\boldsymbol{X}}$ e utilizando a igualdade

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{AXB}) = \mathrm{vec}(\boldsymbol{A}^H)^H(\boldsymbol{I}_n \otimes \boldsymbol{X})\mathrm{vec}(\boldsymbol{B}) \tag{4-14}$$

onde vec[·] é o operador que empilha as colunas de uma matriz para formar um vetor e $\otimes$ é o produto de Kronecker, temos:

$$\begin{aligned} d^2_{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{X},\widehat{\boldsymbol{X}}) &= \mathrm{tr}\left(\boldsymbol{\Xi}^H\boldsymbol{H}^H\boldsymbol{H}\boldsymbol{\Xi}\right) = \mathrm{tr}\left(\boldsymbol{H}\boldsymbol{\Xi}\boldsymbol{\Xi}^H\boldsymbol{H}^H\right) \\ &= \mathrm{vec}(\boldsymbol{H}^H)^H(\boldsymbol{I}_q \otimes \boldsymbol{\Xi}\boldsymbol{\Xi}^H)\mathrm{vec}(\boldsymbol{H}^H) \end{aligned} \tag{4-15}$$

Substituindo (4-15) em (4-13) e tomando-se o valor esperado com respeito a $\boldsymbol{H}$ obtém-se:

$$\overline{\mathsf{PEP}}(\boldsymbol{X},\widehat{\boldsymbol{X}}) \leq \frac{1}{\det\left(\boldsymbol{I}_{qn} + \frac{\sigma_h^2}{4\sigma_n^2}(\boldsymbol{I}_q \otimes \boldsymbol{\Xi}\boldsymbol{\Xi}^H)\right)} \tag{4-16}$$

onde det(·) representa o determinante de uma matriz, I_{qn} representa uma matriz identidade de tamanho $qn \times qn$ e supõe-se que vec$(\boldsymbol{H}^H)$ é um vetor de média zero e matriz covariância $\sigma_h^2\boldsymbol{I}_{qn}$. Esta suposição é fisicamente justificável, pois indica que não existe linha de visada na transmissão e que cada canal, de variância σ_h^2, é espacialmente descorrelatado dos demais. Na obtenção de (4-16) foi utilizado o seguinte resultado geral: Se $\boldsymbol{z}$ é um vetor aleatório gaussiano de média $\boldsymbol{\mu}$ e matriz covariância $\boldsymbol{\Sigma}$ e $\boldsymbol{A}$ é uma matriz hermitiana positiva semidefinida, então [12]:

$$\mathsf{E}_{\boldsymbol{z}}\left[\exp\left(-\boldsymbol{z}^H\boldsymbol{A}\boldsymbol{z}\right)\right] = \frac{\exp\left(-\boldsymbol{\mu}^H\boldsymbol{A}(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{\mu}\right)}{\det\left(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{A}\right)}. \tag{4-17}$$

A expressão em (4-16) pode ser simplificada para obter

$$\begin{aligned} \overline{\mathsf{PEP}}(\boldsymbol{X},\widehat{\boldsymbol{X}}) &\leq \frac{1}{\det^q\left(\boldsymbol{I}_n + \frac{\sigma_h^2}{4\sigma_n^2}\boldsymbol{\Xi}\boldsymbol{\Xi}^H\right)} \\ &\leq \frac{1}{\prod_{i=1}^r(1+\frac{\sigma_h^2\sigma_s^2}{4\sigma_n^2}\alpha_i)^q} \end{aligned} \tag{4-18}$$

onde α_i, $i = 1, \cdots, r$ são os autovalores não nulos de $\boldsymbol{\Xi}\boldsymbol{\Xi}^H/\sigma_s^2$, r é o posto de $\boldsymbol{\Xi}\boldsymbol{\Xi}^H$ e σ_s^2 é a variância dos símbolos transmitidos.

Em cenários com alta razão sinal-ruído, considerando apenas o termo dominante, (4-18) pode ser expressa por:

$$\overline{\mathsf{PEP}}(\boldsymbol{X},\widehat{\boldsymbol{X}}) \leq \frac{1}{\left[\left(\prod_{i=1}^r \alpha_i\right)^{1/r}\gamma\right]^{rq}} \tag{4-19}$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0510507/CA

onde $\gamma = \frac{\sigma_h^2 \sigma_s^2}{4\sigma_n^2}$. Fazendo

$$g_d(\boldsymbol{X}, \widehat{\boldsymbol{X}}) = rq \tag{4-20}$$

$$g_c(\boldsymbol{X}, \widehat{\boldsymbol{X}}) = \left[\prod_{i=1}^{r} \alpha_i\right]^{1/r} \tag{4-21}$$

então (4-19) pode ser reescrito como [72]

$$\overline{\mathsf{PEP}}(\boldsymbol{X}, \widehat{\boldsymbol{X}}) \leq \frac{1}{\left[g_c(\boldsymbol{X}, \widehat{\boldsymbol{X}})\gamma\right]^{g_d(\boldsymbol{X}, \widehat{\boldsymbol{X}})}} \tag{4-22}$$

Com este resultado, um limitante superior para a probabilidade de erro média, pode ser calculado. Se assumimos que todas as matrizes $\boldsymbol{X}$ são equiprováveis dentro do alfabeto $\mathcal{X}$ de cardinalidade $|\mathcal{X}|$, a probabilidade de erro média é, utilizando o limitante da união,

$$P_{av} = \frac{1}{|\mathcal{X}|} \sum_{\boldsymbol{X} \in \mathcal{X}} \sum_{\substack{\widehat{\boldsymbol{X}} \in \mathcal{X} \\ \widehat{\boldsymbol{X}} \neq \boldsymbol{X}}} \overline{\mathsf{PEP}}(\boldsymbol{X}, \widehat{\boldsymbol{X}}), \tag{4-23}$$

Em cenários com alta razão sinal ruído, os termos dominantes no somatório (4-23) são aqueles com decaimento mais lento, isto é, aqueles com o menor valor de $g_d(\boldsymbol{X}, \widehat{\boldsymbol{X}})$. Portanto, se introduzimos as variáveis

$$G_d = \min_{\boldsymbol{X} \neq \widehat{\boldsymbol{X}}} g_d(\boldsymbol{X}, \widehat{\boldsymbol{X}}) \tag{4-24}$$

$$G_c = \min_{\boldsymbol{X} \neq \widehat{\boldsymbol{X}}} g_c(\boldsymbol{X}, \widehat{\boldsymbol{X}}) \quad \textit{quando} \quad g_d(\boldsymbol{X}, \widehat{\boldsymbol{X}}) = G_d \tag{4-25}$$

e denotando G_n o número de pares $(\boldsymbol{X}, \widehat{\boldsymbol{X}})$ tal que $g_c = G_c$ e $g_d = G_d$, finalmente podemos escrever [12]

$$P_{av} = \frac{G_n}{|\mathcal{X}|} \frac{1}{[G_c \gamma]^{G_d}} \tag{4-26}$$

onde G_c é chamado de ganho de codificação e G_d é chamado de ganho de diversidade.

De (4-26) pode se observar que o parâmetro mais importante é o ganho de diversidade, pois é o fator exponencial da razão sinal-ruído e determina a inclinação da curva de probabilidade de erro na escala logarítmica em ambos os eixos. Enquanto o ganho de codificação é o fator multiplicativo da razão sinal-ruído, cuja variação se reflete em um deslocamento da curva da probabilidade de erro.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0510507/CA

Canal SIMO

A transmissão em um canal SIMO emprega uma antena na transmissão e n_R antenas na recepção. Este é um caso particular de (4-8) onde $q = n_R$ e $n = 1$. Se considerarmos um bloco transmitido, isto é, $p = 1$, então $\mathbf{\Xi\Xi}^H$ é apenas um escalar e tem posto $r = 1$. Então, de (4-20) e (4-24) observa-se que o ganho de diversidade é $G_d = n_R$, resultado atingido se os canais são independentes. Assim, outro principio dos sistemas MIMO é expresso por [12]:

Propriedade 4.3. *O ganho de diversidade em um sistema com múltiplas antenas na recepção é igual ao número de canais independentes formados entre cada antena na transmissão e recepção (canais SISO que compõem o canal MIMO).*

Neste sistema, se transmitirmos o símbolo s, então em cada antena da recepção, k, teremos $y_k = h_k s + n_k$, onde h_k é o canal nesse enlace, para $k = 1, 2, \cdots, n_R$. Utilizando um receptor tipo MRC (maximal ratio combining) que combina todas as amostras multiplicadas por h_k^*, temos a seguinte expressão [12]:

$$z = \sum_{k=1}^{n_R} |h_k|^2 s + \sum_{k=1}^{n_R} h_k^* n_k \tag{4-27}$$

que é equivalente a transmitir o símbolo s através de um canal SISO com desvanecimento plano cujo único coeficiente é igual a $\sum_{k=1}^{n_R} |h_k|^2$.

Na Fig. 4.4 pode ser observado o desempenho de um sistema de transmissão QAM em canal SIMO com MRC para diferentes números de antenas na recepção, incluindo o caso SISO onde $n_R = 1$.

A probabilidade de erro neste sistema pode ser escrita como [12]:

$$P_e = 2\left(1 - \frac{1}{M}\right)\left(\frac{1-\mu}{2}\right)^{n_R} \sum_{k=0}^{n_R-1} \begin{pmatrix} n_R - 1 + k \\ k \end{pmatrix} \left(\frac{1+\mu}{2}\right)^k \tag{4-28}$$

onde $\bar{\gamma} = \frac{3\sigma_s^2\sigma_h^2}{(M^2-1)\sigma_n^2}$, $\mu = \sqrt{\frac{\bar{\gamma}}{1+\bar{\gamma}}}$ e $M = 4$.

Canal MISO

A transmissão em um canal MISO emprega n_T antenas de transmissão e uma antena de recepção, ou seja é um caso particular de (4-8), onde $q = 1$ e $n = n_T$.

Primeiro consideramos a transmissão de um bloco no tempo, isto é, $p = 1$. Neste caso, $\mathbf{\Xi\Xi}^H$ é de posto $r = 1$. Concluí-se que, sem importar o número de antenas na transmissão, o ganho de diversidade é $G_d = 1$ [12]. Isto permite enunciar a seguinte propriedade [12]:

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0510507/CA

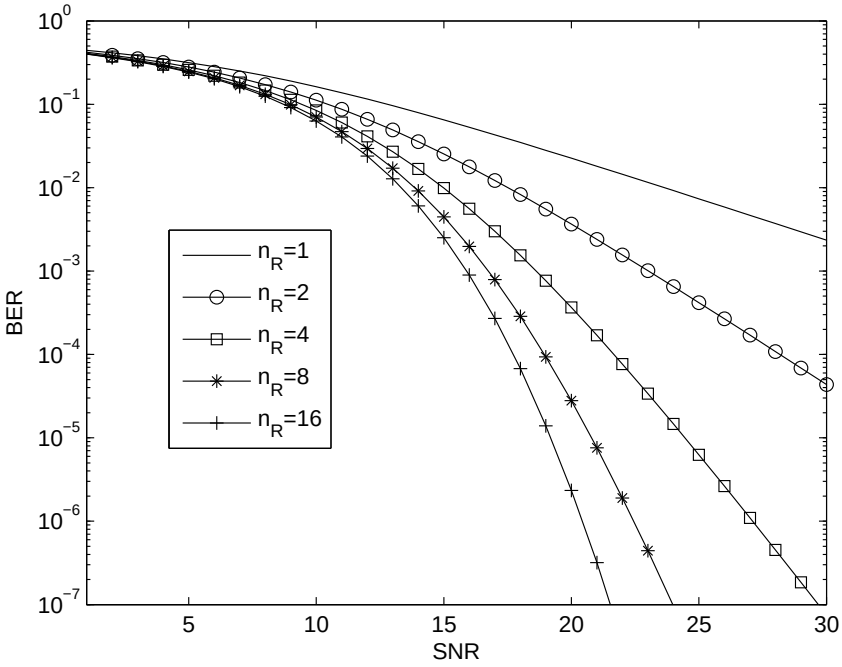

Figura 4.4: BER vs E_b/N_0. Sistema SIMO com diferente número de antenas no receptor.

Propriedade 4.4. *Um sistema MISO transmitindo símbolos codificados no domínio do espaço mas não no domínio do tempo, não apresenta ganho de diversidade.*

No entanto, se também utilizamos codificação no domínio do tempo, transmitindo P blocos de informação, temos: $q = 1$, $n = n_T$, e $p = P$, então se $P \geq n_T$ o máximo valor do posto que $\mathbf{\Xi\Xi}^H$ pode assumir é $r = n_T$. Então o máximo ganho de processamento neste sistema é $G_d = n_T$. Isto indica que:

Propriedade 4.5. *Um sistema MISO pode ter máximo ganho de diversidade $G_d = n_T$, sempre que os símbolos transmitidos sejam codificados no domínio espaço-temporal, por no mínimo n_T blocos.*

Canal MIMO

A transmissão em um canal MIMO emprega n_T antenas na transmissão e n_R antenas na recepção, a informação é transmitida em $p = P \geq n_T$ blocos. Neste caso, o máximo posto de $\mathbf{\Xi\Xi}^H$ é $r = n_T$ e o máximo ganho de diversidade é $G_d = n_R n_T$.

Observa-se que para ter este ganho de diversidade é preciso que $P \geq n_T$, quer dizer, é preciso utilizar códigos espaço-temporais.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0510507/CA

4.1.3 Codificação Espaço-Temporal

Código de Alamouti

Na sua forma mais simples, o código de Alamouti [38] utiliza duas antenas na transmissão e uma antena na recepção. A transmissão se realiza em dois intervalos de tempo, e a cada intervalo de tempo dois símbolos são transmitidos, $s(2i)$ e $s(2i+1)$. Durante o primeiro intervalo é transmitido $s(2i)$ na primeira antena, TX_0, e $s(2i+1)$ na segunda antena, TX_1. No seguinte intervalo de tempo é transmitido $-s^*(2i+1)$ na primeira antena e $s^*(2i)$ na segunda antena.

Assumindo canais não seletivos em freqüência, temos que os sinais recebidos nos dois instantes de tempo são:

$$\begin{aligned} r(2i) &= h_0 s(2i) + h_1 s(2i+1) + n(2i) \\ r(2i+1) &= -h_0 s^*(2i+1) + h_1 s^*(2i) + n(2i+1) \end{aligned} \tag{4-29}$$

onde h_i, $i = 0, 1$ é o canal entre a antena TX_i e o receptor e $n(t)$ é o ruído no instante de tempo t.

Estes sinais são combinados no receptor da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \bar{s}(2i) &= h_0^* r(2i) + h_1 r^*(2i+1) \\ &= (|h_0|^2 + |h_1|^2) s(2i) + h_0^* n(2i) + h_1 n^*(2i+1) \\ \bar{s}(2i+1) &= h_1^* r(2i) - h_0 r^*(2i+1) \\ &= (|h_0|^2 + |h_1|^2) s(2i+1) - h_0 n^*(2i+1) + h_1^* n(2i) \end{aligned} \tag{4-30}$$

Pode-se observar que a transmissão de cada um dos símbolos através de um canal MISO é equivalente à transmissão de cada símbolo através de um canal SIMO com duas antenas na recepção (veja (4-27)) e portanto o ganho de diversidade é $G_d = 2$.

Na Fig. 4.5 estão comparados em termos de taxa de erro de bit (*bit error rate*, BER) três sistemas BPSK: sem codificação espacial (canal SISO), MRC em canal SIMO de duas antenas na recepção e o terceiro é um sistema MISO utilizando o código espaço-temporal de Alamouti para uma antena na recepção.

Pode-se observar um ganho de 3 dB no caso do canal SIMO quando comparado ao caso MISO, isto é devido ao fato da potência de transmissão em cada antena no canal MISO, ser dividida por dois para manter constante o total da potência transmitida.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0510507/CA

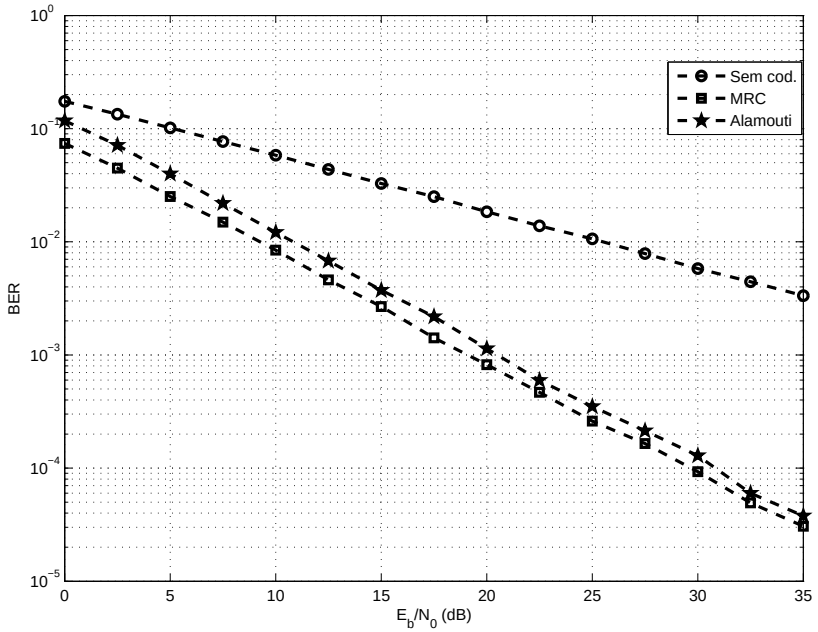

Figura 4.5: Desempenho em termos BER de um sistema BPSK para canal SISO, um canal SIMO e um canal MISO.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0510507/CA

Códigos Ortogonais

O esquema geral com codificação espaço-temporal pode ser observado na Fig. 4.6. Neste sistema, um conjunto de símbolos $\boldsymbol{s}(Pi) = (s(Pi), \cdots, s(Pi + P - 1))$ é codificado no espaço-tempo por meio de uma matriz $\boldsymbol{X}(Pi)$, que mapeia os símbolos transmitidos, tipicamente complexos, em uma matriz de símbolos de dimensão $n_T \times P$, onde P é o tamanho do bloco de símbolos a serem transmitidos, e n_T é o número de antenas no transmissor. Se o código é ortogonal, $P = nT$.

As diferentes linhas de $\boldsymbol{X}(Pi)$ representam as diferentes antenas na transmissão e as colunas representam os diferentes instantes de tempo na transmissão. Por exemplo, o código de alamouti, onde $P = n_T = 2$ tem como matriz de codificação

$$\boldsymbol{X}(2i) = \begin{pmatrix} s(2i) & -s^*(2i+1) \\ s(2i+1) & s^*(2i) \end{pmatrix} \tag{4-31}$$

Seja uma matriz $\boldsymbol{H}(Pi)$, de dimensão $n_R \times n_T$, a matriz do canal, onde n_R é o número de antenas no receptor. As P amostras colectadas em cada uma das n_R antenas na recepção são agrupadas para formar a matriz $\boldsymbol{Y}(Pi)$ de dimensão $n_R \times P$, tal que:

$$\boldsymbol{Y}(Pi) = \boldsymbol{H}(Pi)\boldsymbol{X}(Pi) + \boldsymbol{V}(Pi) \tag{4-32}$$

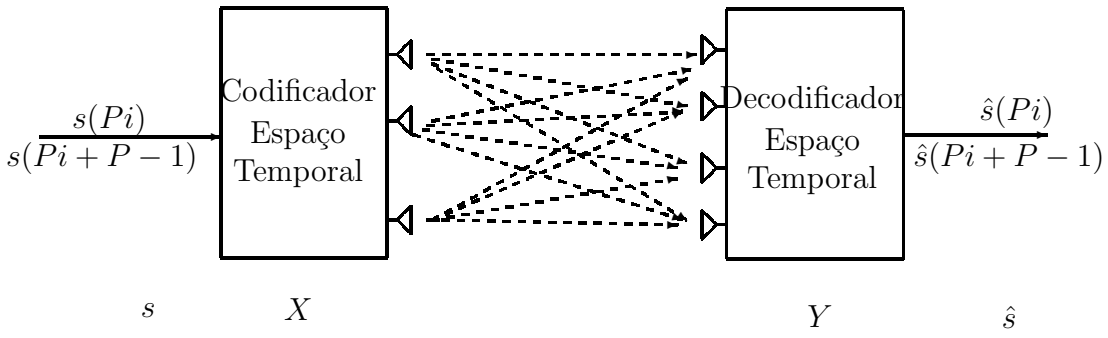

Figura 4.6: Estrutura geral de um sistema de codificação espaço-temporal.

onde $\boldsymbol{V}(Pi)$ é a matriz do ruído aditivo gaussiano branco.

Diz-se que uma estratégia de codificação linear é ortogonal se:

$$\boldsymbol{X}(Pi)\boldsymbol{X}^H(Pi) = \sum_{k=0}^{P-1} |s(Pi+k)|^2 \boldsymbol{I} = \|\boldsymbol{s}(Pi)\|^2 \boldsymbol{I} \qquad (4\text{-}33)$$

Os código ortogonais possuem características interessantes citadas a seguir [12]:

- A decodificação por máxima verossimilhança pode ser aplicada símbolo a símbolo;
- Este tipo de codificação maximiza a razão sinal ruído ou, equivalentemente, minimiza o erro quadrático médio em cada símbolo decodificado;
- tem máximo ganho de diversidade.

Em contrapartida, a construção de tais códigos não é trivial. Em [72] é demonstrado que para constelações de símbolos complexas, o código de Alamouti é o único código ortogonal existente, enquanto que para constelações de símbolos reais, existem códigos ortogonais para 2, 4 e 8 antenas na transmissão.

4.2 Comentários

Este capítulo fez uma breve introdução aos sistemas MIMO, abordando a transmissão em canais não seletivos em freqüência. O caso de transmissão CDMA por blocos não está contemplado de forma explícita nesta modelagem.

Nos seguintes capítulos estas técnicas serão estendidas e ampliadas para o caso de sistemas CDMA por blocos em canais seletivos em freqüência. O ganho de diversidade neste tipo de canais será obtido e as condições para atingir o máximo ganho de diversidade em sistemas CDMA por blocos serão apresentadas.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0510507/CA