

### 3

## Receptor Linear de Mínima Variância

Uma das primeiras técnicas de detecção às cegas em sistemas DS-CDMA em canais não seletivos em frequência foi a proposta por Honig et al. em [54]. Esta técnica utiliza o critério de mínima variância e requer apenas o conhecimento do código de espalhamento e o sincronismo do usuário para a detecção, é capaz de suprimir a interferência multiusuário, interferência co-canal e interferência da banda estreita [28], porém, é sensível a descasamentos entre a sequência de espalhamento original e a sequência de espalhamento efetiva na entrada do receptor, tornando-se inadequada para uso em canais multipercorso.

Para o caso de canais multipercorso, em [55] é proposta uma estrutura similar ao estimador espectral de Capon [34] e é utilizado um enfoque max/min para realizar a estimação às cegas do canal. Este detector apresenta resultados próximos do receptor ótimo de mínimo erro quadrático médio, porém, o desempenho degrada-se consideravelmente na presença de erros na estimativa do canal e na estimativa da matriz de correlação, fazendo com que em aplicações práticas a solução ótima seja dificilmente atingida [30]. Em [37] é proposto um receptor de mínima variância com um conjunto de restrições lineares que pode operar em canais multipercorso com uma complexidade aceitável. Este tipo de receptor é conhecido como receptor de mínima variância com restrições lineares (*linearly constrained minimum variance*, LCMV). Algoritmos adaptativos do tipo gradiente estocástico (SG) e do tipo mínimo quadrados (*recursive least squares*, RSL) foram desenvolvidos em [56] para este receptor.

Em relação à estimação do canal, diversos estudos foram conduzidos, e algoritmos baseados no subespaço do sinal têm sido propostos [57]. Em geral, estes algoritmos precisam da decomposição em autovalores e autovetores de uma matriz. Uma forma de obter os autovalores e autovetores é por meio do uso da decomposição em valores e vetores singulares (*singular value decomposition*, SVD), porém, os algoritmos deste tipo são caracterizados pelo alto custo computacional. É conhecido que a SVD não tem uma estrutura repetitiva que poderia levar a uma implementação adaptativa eficiente o que o faz inadequado

para o processamento em tempo real [58]. Para evitar a alta complexidade computacional da SVD em [59] foi proposto o uso do método inverso das potências para o rastreamento de subespaços em sistemas DS-CDMA.

Neste capítulo a modelagem geral apresentada no Capítulo 2 é utilizada para projetar receptores LCMV para o caso de transmissão CDMA por blocos. Estes sistemas são comparados sob diferentes métricas e cenários de simulação. Também é conduzida uma análise teórica da perturbação na razão sinal-ruído mais interferência (SINR) na presença de erros na estimativa da matriz de correlação do vetor de observação.

Na segunda parte deste capítulo, aborda-se uma implementação adaptativa do tipo gradiente estocástico (SG) e um novo algoritmo de estimação de canal baseado na maximização da variância *a posteriori* da saída do receptor é proposto. A implementação do tipo mínimos quadrados é também abordada na parte final deste capítulo e um novo algoritmo para a estimação do canal também é proposto.

Parte deste trabalho foi apresentado em [44], [45] e [46].

### 3.1

#### Solução Ótima do Receptor de Mínima Variância com Restrições Lineares

Considere-se o vetor de observação  $\mathbf{r}(i)$  na forma de (2-12) com matriz de autocorrelação definida por  $\mathbf{R}_{rr} = \mathbb{E} [\mathbf{r}(i)\mathbf{r}^H(i)]$ . O filtro receptor  $\mathbf{w}_k$  baseado no critério de mínima variância [37] corresponde àquele que minimiza a função custo:

$$J_{MV} = \mathbb{E} [|y(i)|^2] = \mathbf{w}_k^H \mathbf{R}_{rr} \mathbf{w}_k \quad (3-1)$$

sujeito a um conjunto de restrições lineares  $\mathbf{C}_k^H \mathbf{w}_k = \mathbf{g}$ , onde  $y(i) = \mathbf{w}_k^H \mathbf{r}(i)$  é a saída do filtro receptor e  $\mathbf{C}_k$  é definido para cada sistema como no Capítulo 2. A restrição imposta evita a solução trivial  $\mathbf{w}_k = \mathbf{0}$  e ancora o sinal desejado. O vetor  $\mathbf{g}$  deve ser ajustado de acordo com algum critério de otimalidade.

Utilizando o método dos multiplicadores de Lagrange observa-se que a solução ao problema com restrições acima descrito satisfaz a seguinte igualdade:

$$\nabla_{\mathbf{w}_k} J_{MV} = -\boldsymbol{\lambda}^H \nabla_{\mathbf{w}_k} (\mathbf{C}_k^H \mathbf{w}_k - \mathbf{g}), \quad (3-2)$$

onde  $\nabla_{\mathbf{w}_k} J_{MV}$  representa o gradiente de  $J_{MV}$  em relação a  $\mathbf{w}_k$ , e  $\boldsymbol{\lambda}$  é o vetor que contém os multiplicadores de Lagrange.

Resolvendo (3-2) e aplicando as restrições do problema original, finalmente obtém-se a solução do problema com restrições:

$$\mathbf{w}_k = \mathbf{R}_{rr}^{-1} \mathbf{C}_k (\mathbf{C}_k^H \mathbf{R}_{rr}^{-1} \mathbf{C}_k)^{-1} \mathbf{g}. \quad (3-3)$$

Substituindo (3-3) em (3-1), a mínima variância do estimador, para um

dado vetor  $\mathbf{g}$  é dada por

$$J_{MV}(\mathbf{w}_k) = \mathbf{w}_k^H \mathbf{R}_{rr} \mathbf{w}_k = \mathbf{g}^H (\mathbf{C}_k^H \mathbf{R}_{rr}^{-1} \mathbf{C}_k)^{-1} \mathbf{g}. \quad (3-4)$$

Seguindo um enfoque max/min, que maximiza a potência do sinal de saída do receptor após suprimir (minimizar) a interferência, o vetor  $\mathbf{g}$  é escolhido como aquele que maximiza (3-4):

$$\begin{aligned} \mathbf{g} &= \arg \max_{\|\mathbf{g}\|=1} J_{MV}(\mathbf{w}_k) \\ &= \arg \max_{\|\xi\|=1} \xi^H (\mathbf{C}_k^H \mathbf{R}_{rr}^{-1} \mathbf{C}_k)^{-1} \xi \end{aligned} \quad (3-5)$$

onde a solução  $\mathbf{g}$  é o autovetor correspondente ao maior autovalor de  $(\mathbf{C}_k^H \mathbf{R}_{rr}^{-1} \mathbf{C}_k)^{-1}$  ou equivalentemente, ao menor autovalor de  $(\mathbf{C}_k^H \mathbf{R}_{rr}^{-1} \mathbf{C}_k)$ . Note-se que em (3-5), seguindo [55], foi adicionada a restrição  $\|\mathbf{g}\| = 1$ .

Note-se que como  $\mathbf{g}$  é um autovetor de  $(\mathbf{C}_k^H \mathbf{R}_{rr}^{-1} \mathbf{C}_k)^{-1}$ , o filtro receptor de mínima variância dado por (3-3) pode ser expresso por:

$$\mathbf{w}_k = \alpha \mathbf{R}_{rr}^{-1} \mathbf{C}_k \mathbf{g}. \quad (3-6)$$

onde  $\alpha$  é o maior autovalor de  $(\mathbf{C}_k^H \mathbf{R}_{rr}^{-1} \mathbf{C}_k)^{-1}$ .

É interessante observar que em [59] um método para estimar o canal em sistemas DS-CDMA foi proposto, sendo então demonstrado que o vetor  $\mathbf{g}$  obtido de (3-5) é, na realidade, uma estimativa da resposta ao impulso do canal, isto é  $\mathbf{g} = \hat{\mathbf{h}}$ . O método proposto em [59] também é baseado na decomposição de autovalores e autovetores de  $(\mathbf{C}_k^H \mathbf{R}_{rr}^{-m} \mathbf{C}_k)$ . A estimativa em (3-5) corresponde assim a um caso particular, quando  $m = 1$ .

### 3.1.1

#### Análise de Perturbação

O cálculo do receptor de mínima variância, (3-3), supõe perfeito conhecimento da matriz de correlação do sinal de observação. Em situações reais o receptor utiliza apenas estimativas desta matriz. No intervalo de sinalização  $i$ , uma estimativa típica  $\hat{\mathbf{R}}_{rr}(i)$  é obtida, por exemplo, utilizando a média de  $P$  observações ( $P$  símbolos transmitidos):

$$\hat{\mathbf{R}}_{rr}(i) = \frac{1}{P} \sum_{j=0}^{P-1} \mathbf{r}(i-j) \mathbf{r}^H(i-j) \quad (3-7)$$

Supondo que um grande número de amostras é processado, isto é,  $P$  é suficientemente grande,  $\hat{\mathbf{R}}_{rr}^{-1}(i)$  pode ser aproximado, utilizando uma expansão

de Taylor de primeira ordem, como:

$$\widehat{\mathbf{R}}_{rr}^{-1}(i) \cong (\mathbf{R}_{rr} + \Delta_{\mathbf{R}_{rr}}(i))^{-1} = \mathbf{R}_{rr}^{-1} - \mathbf{R}_{rr}^{-1} \Delta_{\mathbf{R}_{rr}}(i) \mathbf{R}_{rr}^{-1}$$

onde  $\Delta_{\mathbf{R}_{rr}}$  é o erro de estimação de  $\mathbf{R}_{rr}$ .

Definindo-se  $\mathbf{A} = (\mathbf{C}_k^H \mathbf{R}_{rr}^{-1} \mathbf{C}_k)$ , a perturbação em  $\widehat{\mathbf{A}}(i)$  dada pelo uso de  $\widehat{\mathbf{R}}_{rr}(i)$  é:

$$\Delta_{\mathbf{A}}(i) = -\mathbf{C}_k^H \mathbf{R}_{rr}^{-1} \Delta_{\mathbf{R}_{rr}}(i) \mathbf{R}_{rr}^{-1} \mathbf{C}_k$$

As perturbações devidas ao uso da estimativa de matriz de correlação afetam os cálculos dos autovalores e autovetores de  $(\mathbf{C}_k^H \mathbf{R}_{rr}^{-1} \mathbf{C}_k)$ . Usando os resultados de [60], pode ser mostrado que:

$$\Delta_{\mathbf{g}}(i) = -(\mathbf{A} - \alpha \mathbf{I}_L)^\dagger (\Delta_{\mathbf{A}}(i) \mathbf{g} + \Delta_{\alpha} \mathbf{I}_L) \approx -(\mathbf{A} - \alpha \mathbf{I})^\dagger \Delta_{\mathbf{A}}(i) \mathbf{g} \quad (3-8)$$

onde  $\alpha$  indica o maior autovalor de  $\mathbf{A}^{-1}$  e  $(\cdot)^\dagger$  representa a pseudo-inversa Moore-Penrose de uma matriz. Como a variação da magnitude de  $\mathbf{g}$  não modifica o desempenho do receptor <sup>1</sup> [56], em (3-8) foi assumido que  $\alpha \approx \hat{\alpha}$ , isto é,  $\Delta_{\alpha} \approx 0$ .

Se expressarmos a estimativa do filtro receptor em (3-6) como  $\widehat{\mathbf{w}}_k(i)$ , a perturbação  $\Delta_{\mathbf{w}_k}(i) = \widehat{\mathbf{w}}_k(i) - \mathbf{w}_k$  no filtro receptor é:

$$\begin{aligned} \Delta_{\mathbf{w}_k}(i) &= \alpha \widehat{\mathbf{R}}_{rr}^{-1} \mathbf{C}_k \hat{\mathbf{g}} - \alpha \mathbf{R}_{rr}^{-1} \mathbf{C}_k \mathbf{g} \\ &\approx \alpha \mathbf{R}_{rr}^{-1} \mathbf{C}_k \hat{\mathbf{g}}(i) - \alpha \mathbf{R}_{rr}^{-1} \Delta_{\mathbf{R}_{rr}}(i) \mathbf{R}_{rr}^{-1} \mathbf{C}_k [\mathbf{g}(i) + \Delta_{\mathbf{g}}] - \alpha \mathbf{R}_{rr}^{-1} \mathbf{C}_k \mathbf{g} \\ &\approx \alpha \mathbf{R}_{rr}^{-1} \mathbf{C}_k \Delta_{\mathbf{g}}(i) - \mathbf{R}_{rr}^{-1} \Delta_{\mathbf{R}_{rr}}(i) \mathbf{w}_k \end{aligned} \quad (3-9)$$

onde na última aproximação foi assumido que  $\mathbf{R}_{rr}^{-1} \Delta_{\mathbf{R}_{rr}}(i) \mathbf{R}_{rr}^{-1} \mathbf{C}_k \Delta_{\mathbf{g}} \approx 0$ .

Substituindo  $\Delta_{\mathbf{g}}(i)$  e  $\Delta_{\mathbf{A}}(i)$  em (3-9) resulta que a perturbação do filtro receptor ótimo para o usuário  $k$  devido a erros na estimativa de matriz de correlação,  $\mathbf{R}_{rr}$ , pode ser aproximada por:

$$\Delta_{\mathbf{w}_k}(i) \approx \mathbf{A}_k \Delta_{\mathbf{R}_{rr}}(i) \mathbf{w}_k \quad (3-10)$$

onde  $\mathbf{A}_k = \left[ \alpha \mathbf{R}_{rr}^{-1} \mathbf{C}_k (\mathbf{A} - \alpha \mathbf{I}_L)^\dagger \mathbf{C}_k^H - \mathbf{I}_M \right] \mathbf{R}_{rr}^{-1}$ .

Os efeitos de  $\Delta_{\mathbf{w}_k}(i)$  no desempenho serão avaliados por meio da razão sinal-ruído mais interferência, definida como:

$$\widehat{\text{SINR}}_k(i) = \frac{\mathbb{E} [|\widehat{\mathbf{w}}_k^H(i) \mathbf{p}_k|^2]}{\mathbb{E} [\widehat{\mathbf{w}}_k^H(i) \mathbf{R}_I \widehat{\mathbf{w}}_k(i)]} \quad (3-11)$$

onde  $\mathbf{p}_k = \mathbf{C}_k \mathbf{h}$  é a seqüência de espalhamento efetiva do usuário  $k$  e  $\mathbf{R}_I = \mathbf{R}_{rr} - \mathbf{p}_k \mathbf{p}_k^H$  é a matriz de covariância devido a outras interferências

<sup>1</sup>Observe-se que para o cálculo de  $\mathbf{g}$  em (3-5) foi adicionada a restrição  $\|\mathbf{g}\| = \gamma$ , onde  $\gamma = 1$  apenas por conveniência.

e o ruído aditivo.

Em termos de  $\Delta_{\mathbf{w}_k}(i)$ , (3-11) é escrita como:

$$\widehat{\text{SINR}}_k(i) = \frac{|\mathbf{w}_k^H \mathbf{p}_k|^2 + \mathbb{E} [\Delta_{\mathbf{w}_k}(i)^H \mathbf{p}_k \mathbf{p}_k^H \Delta_{\mathbf{w}_k}(i)]}{\mathbf{w}_k^H \mathbf{R}_I \mathbf{w}_k + \mathbb{E} [\Delta_{\mathbf{w}_k}(i)^H \mathbf{R}_I \Delta_{\mathbf{w}_k}(i)]} \quad (3-12)$$

Por ser não tendencioso o estimador da matriz de autocorrelação em (3-7), isto é,  $\mathbb{E} [\Delta_{\mathbf{R}_{rr}}(i)] = \mathbf{0}$ , pode ser demonstrado que o produto cruzado  $2\Re \{ \mathbb{E} [\mathbf{w}_k^H \mathbf{p}_k \mathbf{p}_k^H \Delta_{\mathbf{w}_k}(i)] \}$  do numerador em (3-12) é igual a zero, pois:

$$\begin{aligned} 2\Re \{ \mathbb{E} [\mathbf{w}_k^H \mathbf{p}_k \mathbf{p}_k^H \Delta_{\mathbf{w}_k}(i)] \} &= 2\Re \{ \mathbb{E} [\mathbf{w}_k^H \mathbf{p}_k \mathbf{p}_k^H \mathbf{A}_k \Delta_{\mathbf{R}_{rr}}(i) \mathbf{w}_k] \} \\ &= 2\Re \{ \mathbf{w}_k^H \mathbf{p}_k \mathbf{p}_k^H \mathbf{A}_k \mathbb{E} [\Delta_{\mathbf{R}_{rr}}(i)] \mathbf{w}_k \} = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

O mesmo pode ser demonstrado para o termo  $2\Re \{ \mathbb{E} [\mathbf{w}_k^H \mathbf{R}_I \Delta_{\mathbf{w}_k}(i)] \}$  do denominador em (3-12).

Substituindo  $\Delta_{\mathbf{w}_k}(i)$  em (3-12), obtém-se os valores esperados como função de  $\Delta_{\mathbf{R}_{rr}}(i)$ :

$$\mathbb{E} [\Delta_{\mathbf{w}_k}(i)^H \mathbf{p}_k \mathbf{p}_k^H \Delta_{\mathbf{w}_k}(i)] = \mathbf{w}_k^H \mathbb{E} [\Delta_{\mathbf{R}_{rr}}(i) \mathbf{A}_k^H \mathbf{p}_k \mathbf{p}_k^H \mathbf{A}_k \Delta_{\mathbf{R}_{rr}}(i)] \mathbf{w}_k \quad (3-13)$$

$$\mathbb{E} [\Delta_{\mathbf{w}_k}(i)^H \mathbf{R}_I \Delta_{\mathbf{w}_k}(i)] = \mathbf{w}_k^H \mathbb{E} [\Delta_{\mathbf{R}_{rr}}(i) \mathbf{A}_k^H \mathbf{R}_I \mathbf{A}_k \Delta_{\mathbf{R}_{rr}}(i)] \mathbf{w}_k. \quad (3-14)$$

A validade das expressões em (3-12), (3-13) e (3-14) e o comportamento dos sistemas estudados foi avaliado por meio de simulações.

### 3.1.2

#### Simulações e Resultados

As simulações foram realizadas em um sistema BPSK síncrono, utilizando seqüências Gold [61] de tamanho  $N = 31$ . Foi utilizado um cenário com um severo efeito “perto-longe” (*near-far ratio*, NFR), onde cada usuário interferente tem uma potência 20 dB acima do usuário desejado, isto é  $NFR = 20$  dB.

No primeiro experimento o objetivo foi determinar a taxa de erro de bit (BER) versus  $E_b/N_0$  para o receptor LCMV ( $E_b$  é a energia de bit para o usuário desejado). A matriz de correlação foi estimada segundo (3-7) e a estimativa do canal foi obtida de (3-5) utilizando a decomposição em valores e vetores singulares (SVD). Neste cenário foi utilizado um sistema com  $K = 12$  usuários. O canal utilizado foi modelado como um filtro FIR de 4 coeficientes onde cada coeficiente do canal foi gerado como uma variável aleatória complexa gaussiana de média zero. O canal foi posteriormente normalizado de tal forma a ter  $\|\mathbf{h}\|^2 = 1$ . Para cada rodada do experimento uma realização diferente deste canal foi utilizada e 1000 símbolos foram transmitidos. O tamanho do

intervalo de guarda foi escolhido como igual à ordem do canal,  $L_g = 3$ . Os resultados são a média de 1000 rodadas e estão apresentados na Fig. 3.1. Pode ser observado que os esquemas multiportadora têm melhor desempenho que os sistemas de portadora única. Da mesma forma, os sistemas com preenchimento de zeros têm melhor desempenho que os sistemas com prefixo cíclico, pois nos sistemas com preenchimento de zeros, a recuperação de símbolo é garantida, sem importar o número de zeros existentes no espectro do canal.

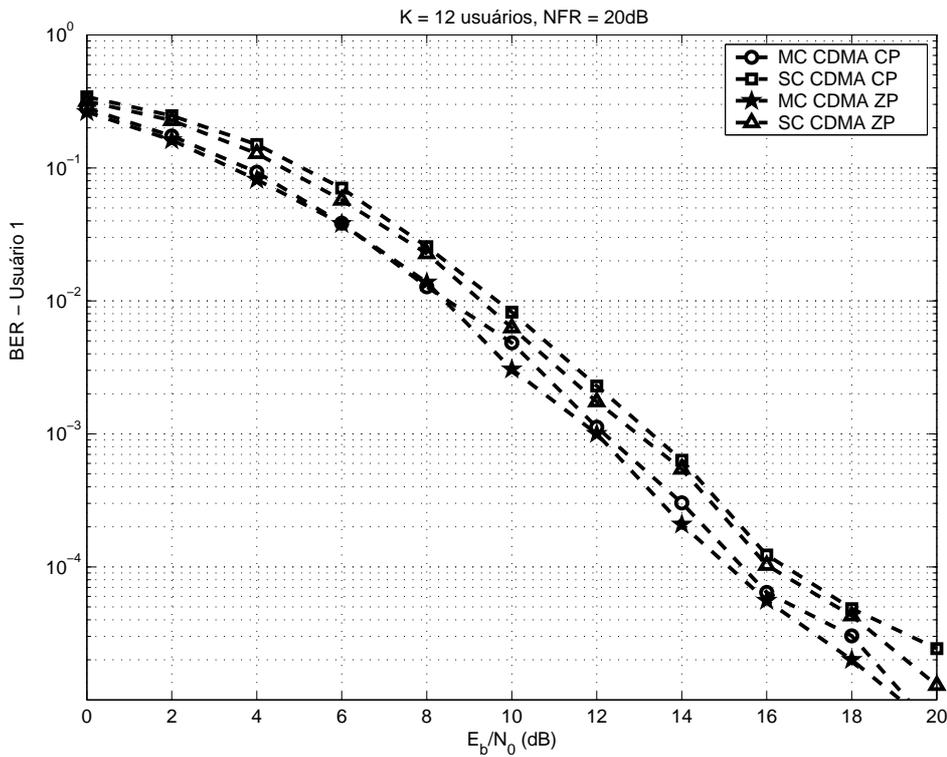


Figura 3.1: BER vs.  $E_b/N_0$  (dB) do receptor de mínima variância para sistemas CDMA por blocos em canais SISO invariantes no tempo.

No segundo experimento foi avaliado a razão sinal-ruído mais interferência para o receptor de mínima variância no sistema MC CDMA ZP. Os resultados semi-analíticos (3-13) e (3-14) foram comparados com os resultados obtidos da simulação. O sistema simulado tem  $K = 8$  usuários e o usuário desejado tem uma potência correspondente a  $E_b/N_0 = 15$  dB. O canal utilizado foi modelado como um filtro FIR de 4 coeficientes onde cada coeficiente do canal foi gerado como uma variável aleatória complexa gaussiana de média zero, o canal foi posteriormente normalizado de tal forma a ter  $\|\mathbf{h}\|^2 = 1$ . Para cada rodada do experimento uma realização diferente deste canal foi utilizada e 1000 símbolos foram transmitidos. O tamanho do intervalo de guarda foi escolhido como igual à ordem do canal,  $L_g = 3$ . Os resultados são a média de 1000 rodadas. Os resultados desta simulação estão apresentados na Fig. 3.2 em função do número de amostras observadas ( $P$ )

usadas para estimar a matriz de autocorrelação  $\mathbf{R}_{rr}$ . Está também indicado na Fig. 3.2 o valor de SINR obtido supondo estimação perfeita da matriz de autocorrelação  $\mathbf{R}_{rr}$ , este valor está indicado com o nome *Estimação Perfeita*. Assim como nos sistemas DS-CDMA [62], observa-se que quando  $P \rightarrow \infty$ , o resultado semi-analítico se aproxima do nível SINR de *Estimação Perfeita*. O mesmo comportamento foi observado com os outros sistemas CDMA por blocos.

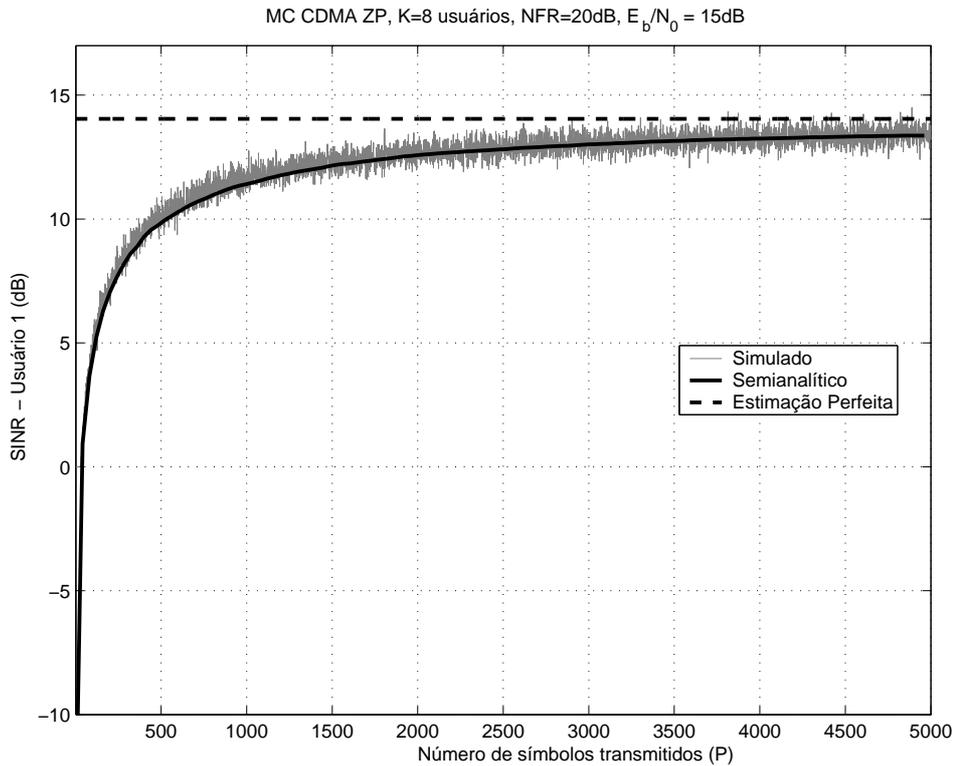


Figura 3.2: SINR vs. número de símbolos transmitidos do receptor de mínima variância para um sistema MC CDMA ZP em canais SISO invariantes no tempo.

Como os resultados simulados apresentaram boa concordância com os analíticos, na Fig. 3.3, o SINR obtido de (3-12) em função de  $E_b/N_0$  é apresentado para todos os sistemas. Os resultados foram obtidos nas mesmas condições de canal do primeiro experimento (Fig. 3.1). Diferentes casos foram considerados: *Estimação Perfeita*, estimação utilizando 1000 amostras e estimação utilizando 5000 amostras. Pode ser notado que quando  $E_b/N_0$  aumenta, a degradação também aumenta devido ao número finito de amostras utilizado na estimação.

O último experimento, apresentado na Fig. 3.4, ilustra o comportamento da BER com diferentes estimativas da ordem do canal. Aqui, o procedimento de estimação do canal usa o tamanho do intervalo de guarda  $L_g$  como sendo a ordem do canal. Nesta simulação o canal é fixo com ordem 3 e coeficientes  $\mathbf{h} =$

$[0, 5957 + j0, 0101 \quad -0, 3273 - j0, 3472; 0, 2910 - j0, 0533; 0, 1285 - j0, 5599]^T$ . Os resultados representam a média de 1000 rodadas com 1000 símbolos transmitidos a cada rodada. Pode ser observado que o receptor para os casos multiportadora é menos sensível à sobre-estimação da ordem do canal do que nos casos de portadora única.

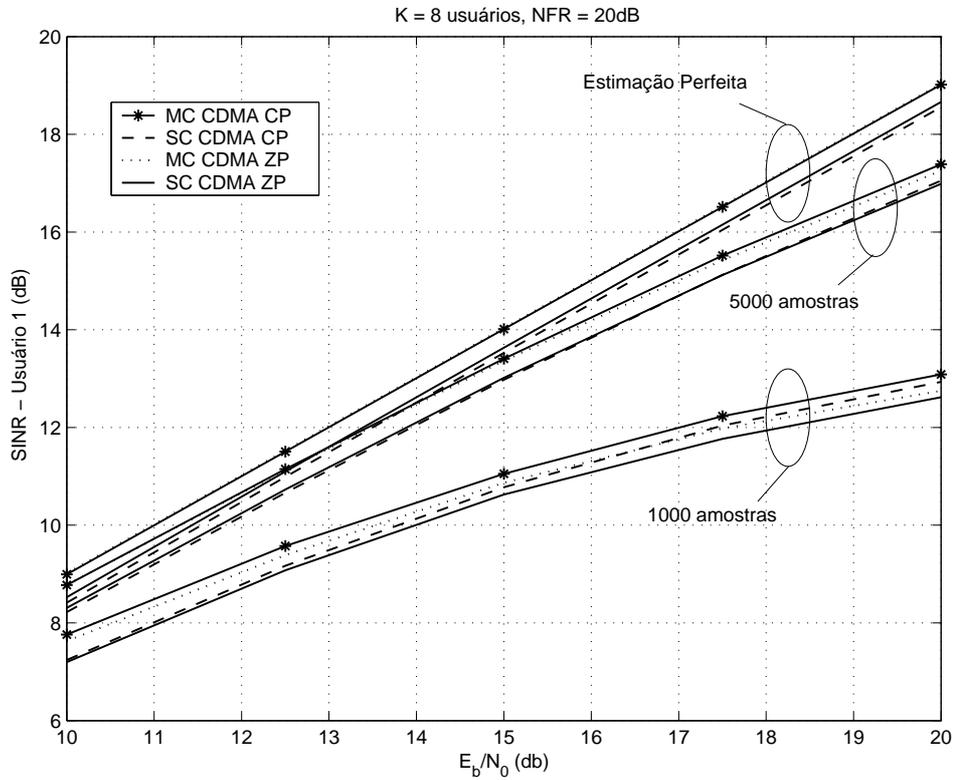


Figura 3.3: SINR vs.  $E_b/N_0$  (dB) do receptor de mínima variância para sistemas CDMA de transmissão por blocos em canais SISO invariantes no tempo em função do número de amostras utilizadas para estimar a matriz de correlação.

### 3.2

#### Implementação Adaptativa do Tipo Gradiente Estocástico

Em [56] são apresentadas varias implementações adaptativas do tipo gradiente estocástico (SG) e do tipo mínimos quadrados (*recursive least squares*, RSL) para o receptor LCMV no sistema DS-CDMA. Em geral, a implementação RLS tem uma velocidade de convergência e desempenho melhor que as implementações do tipo SG, mas o custo computacional é alto, o que em muitos casos faz proibitiva sua implementação. Por outro lado, os algoritmos tipo SG têm um custo computacional reduzido mas com taxa de convergência menor.

A solução em [56] pode ser facilmente estendida para os sistemas de transmissão CDMA por blocos em portadora única e em multiportadora

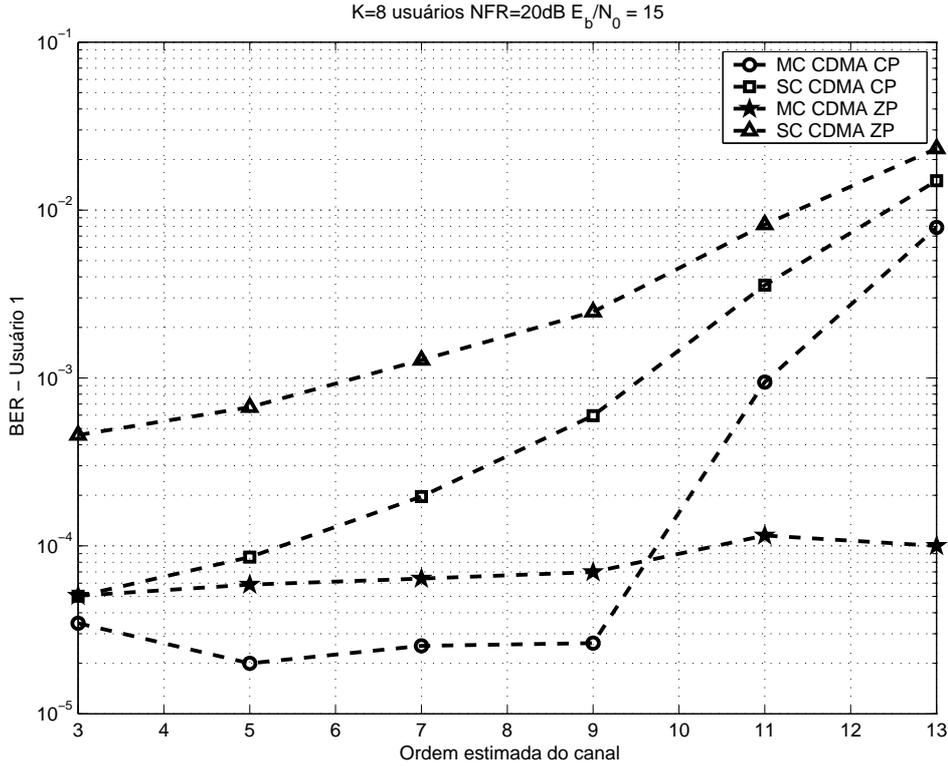


Figura 3.4: BER vs. ordem estimada do canal no receptor de mínima variância para sistemas CDMA de transmissão por blocos em canais SISO invariantes no tempo.

como segue. O problema com restrições em (3-1) pode ser expresso como um problema sem restrições por meio de uma função custo lagrangeana descrita por [56]:

$$\mathcal{L}_{MV} = \mathbf{w}_k^H \mathbf{R}_{rr} \mathbf{w}_k + \boldsymbol{\lambda}^H (\mathbf{C}_k^H \mathbf{w}_k - \mathbf{g}) + (\mathbf{C}_k^H \mathbf{w}_k - \mathbf{g})^H \boldsymbol{\lambda} \quad (3-15)$$

onde  $\boldsymbol{\lambda}$  é um vetor de multiplicadores de Lagrange.

Uma solução de tipo gradiente estocástico pode ser obtida calculando-se os termos do gradiente da função custo lagrangeana com relação a  $\mathbf{w}_k$  e com relação a  $\mathbf{g}$ , as recursões para a estimação cega dos parâmetros do receptor,  $\mathbf{w}_k$ , e do canal,  $\mathbf{g}$ , são:

$$\mathbf{w}_k(i+1) = \mathbf{w}_k(i) - \mu_w \nabla_{\mathbf{w}_k} \mathcal{L}_{MV} \quad (3-16)$$

$$\mathbf{g}(i+1) = \mathbf{g}(i) + \mu_g \nabla_{\mathbf{g}} \mathcal{L}_{MV} \quad (3-17)$$

Resolvendo os multiplicadores de Lagrange utilizando a restrição em  $\mathbf{w}_k$  como  $\mathbf{C}_k^H \mathbf{w}_k(i+1) = \mathbf{g}(i)$ , e aproximando  $\mathbf{R}_{rr}$  por seu valor instantâneo  $\hat{\mathbf{R}}_{rr}(i) = \mathbf{r}(i)\mathbf{r}^H(i)$ , as recursões para (3-16) e (3-17) resultam em:

$$\mathbf{w}_k(i+1) = \mathbf{P}_k [\mathbf{w}_k(i) - \mu_w y^*(i) \mathbf{r}(i)] + \mathbf{B}_k \mathbf{g}(i) \quad (3-18)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(i+1) &= \mathbf{g}(i) + \frac{\mu_{\mathbf{g}}}{\mu_{\mathbf{w}}} \left( \mathbf{I} - \frac{\mathbf{g}(i)\mathbf{g}^H(i)}{\mathbf{g}^H(i)\mathbf{g}(i)} \right) (\mathbf{C}_k^H \mathbf{C}_k)^{-1} \times \\ &\quad \times [\mu_{\mathbf{w}} \mathbf{C}_k^H \mathbf{y}^*(i) \mathbf{r}(i) + \mathbf{g}(i) - \mathbf{C}_k^H \mathbf{w}_k(i)] \quad (3-19) \\ \mathbf{g}(i+1) &= \frac{\mathbf{g}(i+1)}{\|\mathbf{g}(i+1)\|} \end{aligned}$$

onde  $\mathbf{P}_k = \mathbf{I} - \mathbf{C}_k(\mathbf{C}_k^H \mathbf{C}_k)^{-1} \mathbf{C}_k^H$ ,  $\mathbf{B}_k = \mathbf{C}_k(\mathbf{C}_k^H \mathbf{C}_k)^{-1}$  e  $y(i) = \mathbf{w}_k^H(i) \mathbf{r}(i)$  é a saída do filtro de detecção. Note-se que a normalização em  $\mathbf{g}(i+1)$  é realizada em cada iteração para garantir a restrição  $\|\mathbf{g}(i+1)\| = 1$ , da mesma forma que em (3-5).

Para obter a versão normalizada deste algoritmo, minimiza-se o erro *a posteriori*,  $\tilde{e}(i) = |\mathbf{w}_k^H(i+1) \mathbf{r}(i)|^2$ , com relação a  $\mu_{\mathbf{w}}$ , obtendo-se assim o passo normalizado  $\mu_{\mathbf{w}}(i) = \frac{\mu_0}{\mathbf{r}^H(i) \mathbf{P}_k \mathbf{r}(i)}$  onde  $\mu_0$  é o passo fixo inicial. Note-se que nesta versão normalizada a equação de atualização do vetor de coeficientes do canal, (3-19), usa  $\mu_{\mathbf{w}} = \mu_0$  como passo. Este algoritmo está resumido na Tab. 3.1.

Tabela 3.1: Implementação adaptativa do tipo gradiente estocástico para receptores de mínima variância nos sistemas CDMA por blocos.

<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Escolher os passos apropriados, <math>\mu_{\mathbf{w}}</math> and <math>\mu_{\mathbf{g}}</math>.</li> <li>2. Inicializar <math>\mathbf{w}_k(0)</math> e <math>\mathbf{g}(0)</math>.</li> <li>3. Computar <math>\mathbf{P}_k = \mathbf{I} - \mathbf{C}_k(\mathbf{C}_k^H \mathbf{C}_k)^{-1} \mathbf{C}_k^H</math></li> <li>4. Computar <math>\mathbf{B}_k = \mathbf{C}_k(\mathbf{C}_k^H \mathbf{C}_k)^{-1}</math></li> <li>5. Para <math>i = 0, \dots, n</math> <ol style="list-style-type: none"> <li>a) <math>y(i) = \mathbf{w}_k^H(i) \mathbf{r}(i)</math></li> <li>b) se passo normalizado, então atualizar o passo segundo <math>\mu_{\mathbf{w}}(i) = \frac{\mu_0}{\mathbf{r}^H(i) \mathbf{P}_k \mathbf{r}(i)}</math></li> <li>c) Atualizar o receptor de acordo com (3-18)</li> <li>d) Atualizar a estimativa do canal de acordo com (3-19)</li> <li>e) <math>\hat{s}_k(i) = \text{disc} \{y(i)\}</math>, onde <math>\text{disc} \{x\}</math> é o símbolo da constelação mais próximo de <math>x</math>.</li> </ol> </li> </ol>
--

### 3.2.1

#### Estimativa de Canal Obtida por Meio de Maximização da Variância A Posteriori da Saída do Receptor

A proposta apresentada a seguir difere da idéia original (não publicada), que surgiu da análise da implementação adaptativa do tipo gradiente estocástico do receptor LCMV utilizando a transformada de Householder [63]. Após o desenvolvimento, foi observado que a obtenção da estimativa do canal prescinde da dita implementação. A proposta original esta incluída no Apêndice A.

Para obter a estimativa do canal, considere como função custo a variância *a posteriori* da saída do receptor,  $\tilde{J}(i) = |\mathbf{w}_k^H(i+1)\mathbf{r}(i)|^2$ , onde  $\mathbf{w}_k(i+1)$  é atualizado como em (3-18). Seguindo mesmo procedimento min/max, a equação de atualização dos coeficientes do canal pode ser obtida maximizando a função custo,  $\tilde{J}(i)$ , com relação a  $\mathbf{g}$ .

Desta forma, o algoritmo gradiente estocástico para a atualização dos parâmetros do vetor  $\mathbf{g}$  é:

$$\mathbf{g}(i+1) = \mathbf{g}(i) + \frac{1}{2}\mu_g \nabla_{\mathbf{g}} \tilde{J}(i) \quad (3-20)$$

onde  $\nabla_{\mathbf{g}} \tilde{J}(i)$  é o gradiente de  $\tilde{J}(i)$  em relação a  $\mathbf{g}$ , e pode ser obtido pela regra da cadeia como:

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{g}} \tilde{J}(i) &= \nabla_{\mathbf{g}} |\mathbf{w}_k^H(i+1)\mathbf{r}(i)|^2 \\ &= 2 (\mathbf{w}_k^H(i+1)\mathbf{r}(i))^H \nabla_{\mathbf{g}} \{ \mathbf{w}_k^H(i+1)\mathbf{r}(i) \} \\ &= 2\tilde{y}^*(i)\mathbf{B}_k^H \mathbf{r}(i) \end{aligned} \quad (3-21)$$

onde  $\tilde{y}(i) = \mathbf{w}_k^H(i+1)\mathbf{r}(i)$  é a saída *a posteriori* do filtro receptor. Note-se que  $\mathbf{w}_k^H(i+1)$  depende apenas de amostras e estimativas passadas do filtro receptor e do canal, sendo assim possível a determinação de  $\tilde{y}(i)$ .

Substituindo (3-21) em (3-20) temos

$$\mathbf{g}(i+1) = \mathbf{g}(i) + \mu_g \tilde{y}^*(i)\mathbf{B}_k^H \mathbf{r}(i) \quad (3-22)$$

Finalmente, para satisfazer a restrição  $\|\mathbf{g}\| = 1$ , fazemos  $\mathbf{g}(i+1) = \frac{\mathbf{g}(i+1)}{\|\mathbf{g}(i+1)\|}$ .

Para evitar o cálculo de  $\tilde{y}(i)$  em (3-22), é possível aproximá-lo pelo valor *a priori*, isto é, a atualização do vetor do canal pode ser aproximada por:

$$\mathbf{g}(i+1) = \mathbf{g}(i) + \mu_g y^*(i)\mathbf{B}_k^H \mathbf{r}(i) \quad (3-23)$$

### 3.2.2

#### Complexidade Computacional

Em termos de complexidade computacional a atualização dos parâmetros do receptor em (3-18) com passo normalizado requer de  $2Q^2 + Q(L+1) - 2$  somas e  $2Q^2 + Q(L+3) + 1$  multiplicações, onde  $Q$  é o tamanho do vetor observação,  $Q = N$  para os casos CP e  $Q = M$  para os casos ZP.

Já a estimação do vetor  $\mathbf{g}(i)$  usando (3-19) requer de  $2L^2 + L(Q+2) + 2Q - 3$  somas e  $3L^2 + L(Q+4) + 2Q + 1$  multiplicações. O estimador de canal em (3-23), requer  $L(Q+1) - 1$  somas e  $L(Q+3) + 1$  multiplicações para a estimação do canal. Em todos os casos supõe-se que  $\mathbf{P}_k$  e  $\mathbf{B}_k$  são computadas na fase de inicialização do algoritmo.

A Tab. 3.2 resume a complexidade computacional para cada equação de atualização e na Fig. 3.5 o número de somas e multiplicações para diferentes valores de  $Q$  e  $L$  está representado graficamente, onde CMV indica a estimativa do canal fornecida por (3-19) e POS indica a estimativa do canal fornecida por (3-23).

Tabela 3.2: Complexidade computacional das equações de atualização da implementação gradiente estocástico para receptores de mínima variância.

equação	somas	multiplicações
(3-18) (com passo normalizado)	$2Q^2 + Q(L + 1) - 2$	$2Q^2 + Q(L + 3) + 1$
(3-19)	$2L^2 + L(Q + 2) + 2Q - 3$	$3L^2 + L(Q + 4) + 2Q + 1$
(3-23)	$L(Q + 1) - 1$	$L(Q + 3) + 1$

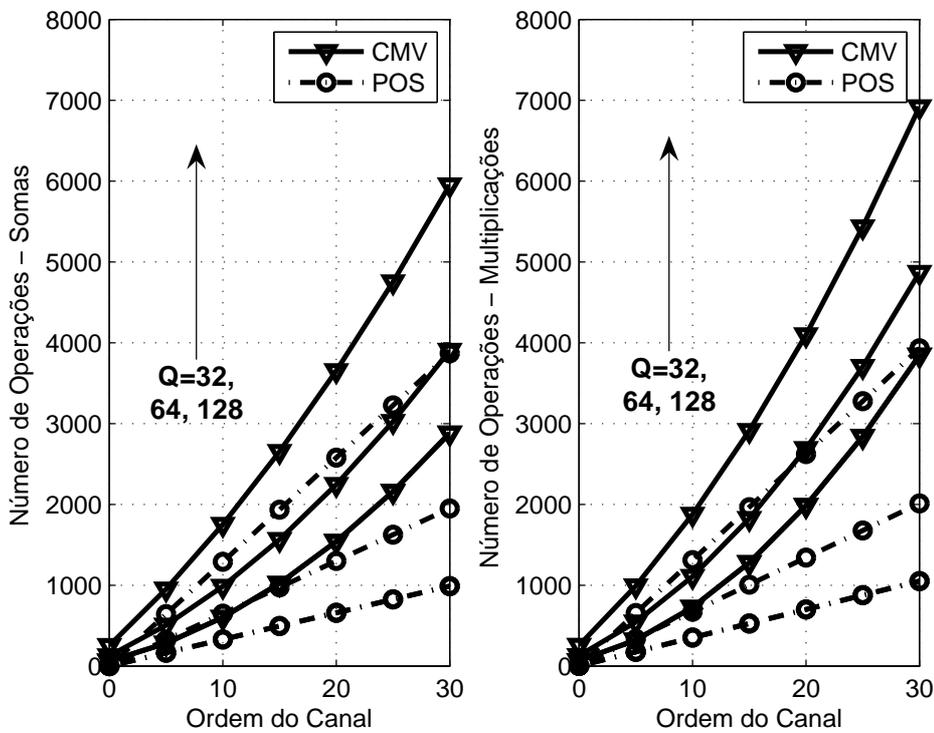


Figura 3.5: Complexidade computacional do algoritmo gradiente estocástico para receptores de mínima variância.

### 3.2.3 Simulações e Resultados

As simulações foram realizadas para um sistema BPSK síncrono, utilizando seqüências Gold de tamanho  $N = 31$ . O canal foi modelado como um filtro FIR de ordem 3 e com coeficientes,  $\mathbf{h} = [0, 7297 \ 0, 5166 \ 0, 3657 \ 0, 2589]^T$ . O tamanho de guarda foi escolhido

como sendo igual a ordem do canal, isto é,  $L_g = 3$ . A ambigüidade de fase na estimativa de canal foi removida utilizando a fase de  $h_0$  como referência.

A respeito da distribuição de potência dos usuários do sistema, foi simulado um cenário onde um usuário interferente tem a mesma potência do usuário desejado, dois usuários têm uma potência 10 dB acima da potência do usuário desejado e mais dois usuários têm uma potência 20 dB acima da potência do usuário desejado. As condições iniciais foram  $\mathbf{g}(0) = [1 \cdots 0]^T$  para a estimativa de canal e  $\mathbf{w}_k(0) = \mathbf{B}_k \mathbf{g}(0)$  para o filtro receptor. Os resultados são uma média de 1000 rodadas. A cada rodada novos códigos foram atribuídos para cada usuário.

Em todas as figuras, CMV refere-se aos os resultados que foram obtidos utilizando a estimativa do canal fornecida por (3-19) e POS indica que os resultados foram obtidos utilizando a estimativa de canal fornecida por (3-23).

Na Fig. 3.6 ilustra-se o erro quadrático médio (*mean squared error*, MSE) da estimativa do canal,  $\mathbb{E}[\|\mathbf{h} - \mathbf{g}(i)\|^2]$ , no cenário acima descrito para diferentes tamanho de passo,  $\mu_g = [0,0008 \quad 0,0034 \quad 0,0544]$  e uma razão sinal-ruído fixa de  $E_b/N_0 = 10$  dB. Observa-se que a estimativa POS se deteriora menos que a estimativa CMV conforme o tamanho de passo aumenta, sendo que esta última diverge para o passo  $\mu_g = 0,0544$ .

O impacto destes resultados na estimativa do filtro receptor é apresentado na Fig. 3.7 onde o erro quadrático médio do filtro receptor,  $\mathbb{E}[\|\mathbf{w}_{k,\text{ótimo}} - \mathbf{w}_k(i)\|^2]$ , é ilustrado. A Fig. 3.8 mostra o comportamento da taxa de erro de bit (BER) com a variação de  $\mu_g$ , para uma razão sinal-ruído fixa de  $E_b/N_0 = 10$  dB. Observa-se destas figuras que para valores de  $\mu_g$  que fazem o CMV convergir, é possível encontrar, para o algoritmo proposto, um valor de  $\mu_g$  que apresenta desempenho similar em termos de velocidade de convergência e erro quadrático mínimo (veja por exemplo Fig. 3.6,  $\mu_g = 0,0008$ ), com a vantagem de que o algoritmo proposto tem um menor custo computacional.

### 3.3

#### Implementação Adaptativa do Tipo Mínimos Quadrados (RLS)

Com o fim de evitar o alto custo computacional envolvido na inversão da matriz  $\mathbf{R}_{rr}$ , necessária para o cálculo do filtro receptor, recursões de Kalman podem ser utilizadas na implementação adaptativa do tipo mínimos quadrados. Nesta implementação  $\mathbf{R}_{rr}^{-1}$  é estimada no instante de tempo  $i$ , como [64]:

$$\hat{\mathbf{R}}_{rr}^{-1}(i) = \frac{1}{\lambda} \left[ \hat{\mathbf{R}}_{rr}^{-1}(i-1) - \gamma(i) \boldsymbol{\psi}(i) \boldsymbol{\psi}^H(i-1) \right] \quad (3-24)$$

onde  $\gamma(i) = \left[ \frac{\lambda}{1-\lambda} + \mathbf{r}^H(i) \hat{\mathbf{R}}_{rr}^{-1}(i-1) \mathbf{r}(i) \right]^{-1}$  e  $0 \ll \lambda < 1$  é o fator de esquecimento. O vetor  $\boldsymbol{\psi}(i)$ , de tamanho  $Q$ , é definido como o vetor de ganho

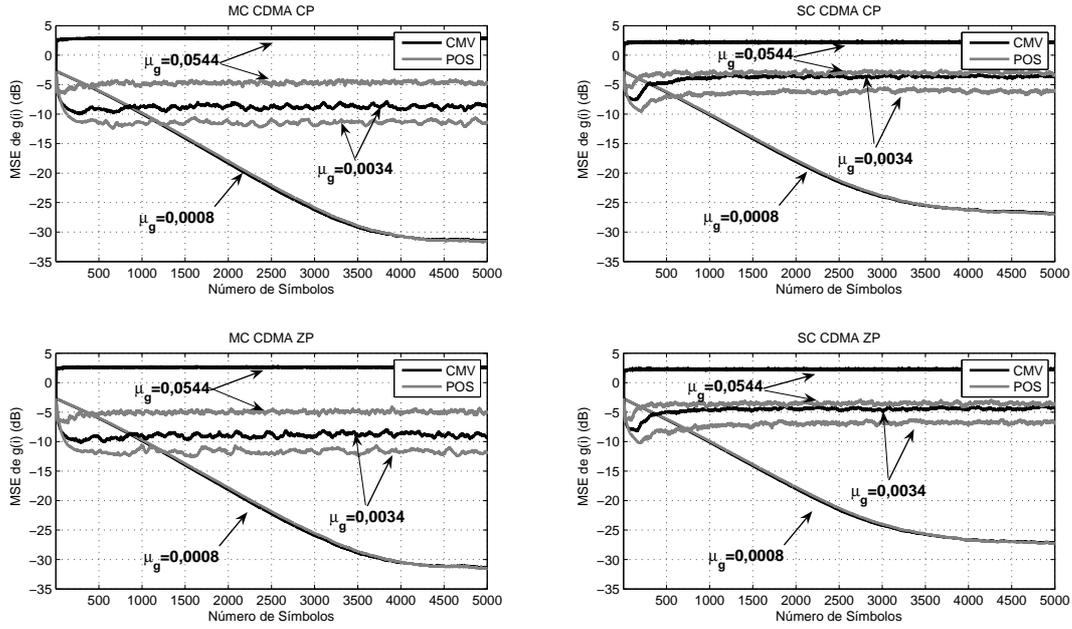


Figura 3.6: Erro quadrático médio da estimativa do canal em termos de  $\mu_g$ , implementação do tipo gradiente estocástico do receptor de mínima variância para sistemas CDMA por blocos em canais SISO invariantes no tempo.

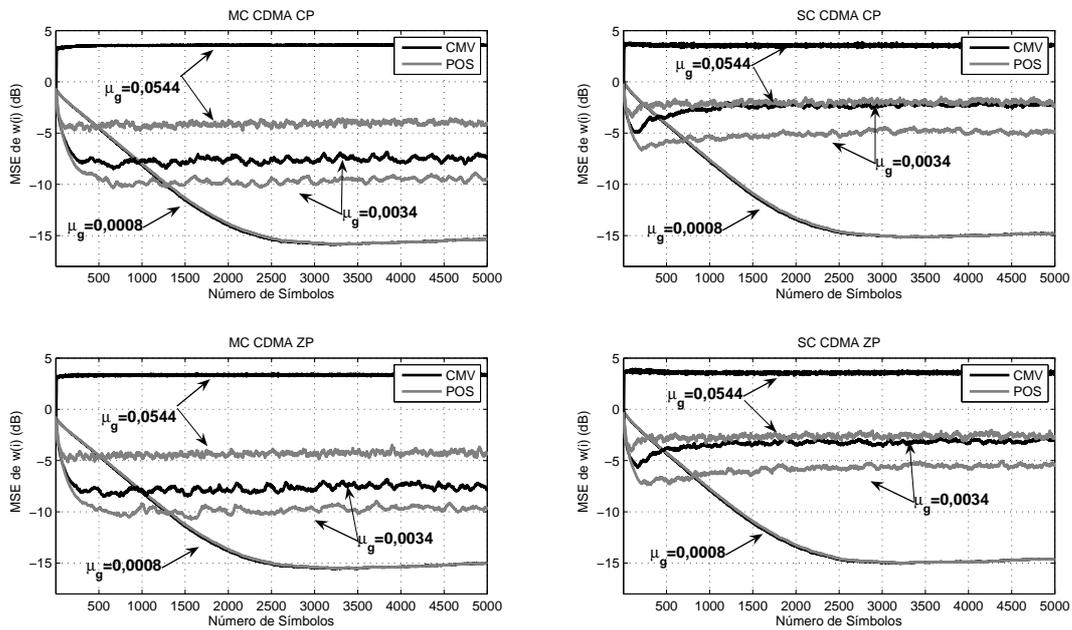


Figura 3.7: Erro quadrático médio da estimativa do filtro receptor em termos de  $\mu_g$ , implementação do tipo gradiente estocástico do receptor de mínima variância para sistemas CDMA por blocos em canais SISO invariantes no tempo.

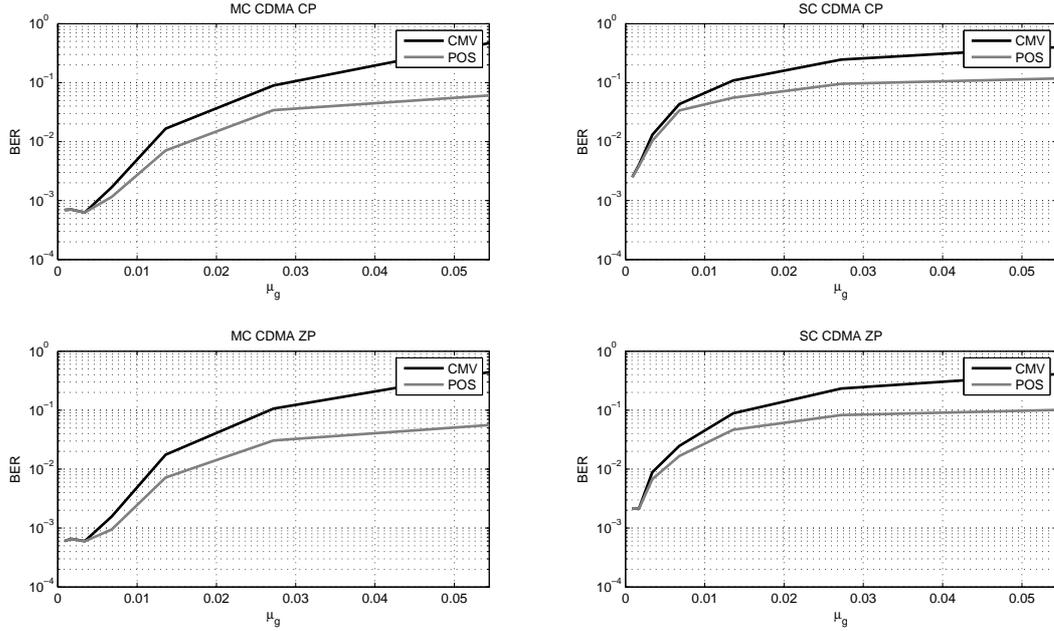


Figura 3.8: Taxa de erro de bit em termos de  $\mu_g$ , implementação do tipo gradiente estocástico do receptor de mínima variância para sistemas CDMA por blocos em canais SISO invariantes no tempo.

de Kalman e é computado como

$$\boldsymbol{\psi}(i) = \hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{r}\mathbf{r}}^{-1}(i-1)\mathbf{r}(i) \quad (3-25)$$

Logo, multiplicando pela esquerda (3-24) por  $\mathbf{C}_k$ , a matriz  $\boldsymbol{\Gamma}_k(i) = \hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{r}\mathbf{r}}^{-1}(i)\mathbf{C}_k$  de dimensão  $Q \times L$ , é atualizada por:

$$\boldsymbol{\Gamma}_k(i) = \frac{1}{\lambda} [\boldsymbol{\Gamma}_k(i-1) - \gamma(i)\boldsymbol{\psi}(i)\mathbf{r}^H(i)\boldsymbol{\Gamma}_k(i-1)]. \quad (3-26)$$

O canal pode ser estimado, usando (3-5), como o autovetor associado ao menor autovalor de  $\mathbf{C}_k^H \boldsymbol{\Gamma}_k(i) = \mathbf{C}_k^H \hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{r}\mathbf{r}}^{-1}(i)\mathbf{C}_k$  e que pode ser calculado por meio de uma SVD. Para evitar o alto custo computacional da SVD, pode ser utilizado algum método de rastreamento de subespaços tal como o método inverso das potências [65, 66], como mostrado a seguir;

$$\begin{aligned} \nu(i) &= \frac{1}{\text{tr}[\mathbf{C}_k^H \boldsymbol{\Gamma}_k(i)]} \\ \mathbf{g}(i) &= [\mathbf{I}_L - \nu(i)\mathbf{C}_k^H \boldsymbol{\Gamma}_k(i)] \mathbf{g}(i-1) \\ \mathbf{g}(i) &= \frac{\mathbf{g}(i)}{\|\mathbf{g}(i)\|} \\ \alpha(i) &= \mathbf{g}^H(i)\mathbf{C}_k^H \boldsymbol{\Gamma}_k(i)\mathbf{g}(i) \end{aligned} \quad (3-27)$$

onde  $\text{tr}[\cdot]$  indica traço de uma matriz e  $\alpha(i)$  é o menor autovalor de  $\mathbf{C}_k^H \boldsymbol{\Gamma}_k(i)$ .

Finalmente, o filtro receptor pode ser calculado como:

$$\mathbf{w}_k(i) = \alpha(i)\mathbf{\Gamma}_k(i)\mathbf{g}(i). \quad (3-28)$$

O valor inicial da matriz de autocorrelação é [64]:

$$\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{r}\mathbf{r}}(0) = E_0 \text{diag}(1, \lambda^{-1}, \lambda^{-2}, \dots, \lambda^{-(Q-1)}) \quad (3-29)$$

onde  $E_0 > 0$  é a energia do erro de predição *forward* e no instante de tempo zero,  $\mathbf{\Gamma}_k(0) = \hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{r}\mathbf{r}}^{-1}(0)\mathbf{C}_k$ .

### 3.3.1

#### Estimativa do Canal Obtida por Meio do Método Natural das Potências e o Algoritmo PASTd

Na seção anterior foi apresentada uma implementação RLS do filtro receptor e da estimativa de canal. Nesta seção, uma outra forma de implementação RLS é utilizada e é mostrado que a estimativa do canal pode ser implementada de uma forma mais eficiente do ponto de vista de complexidade computacional.

Se definimos a matriz  $\mathbf{Q}_k = \mathbf{R}_{\mathbf{r}\mathbf{r}}^{-1}\mathbf{C}_k(\mathbf{C}_k^H\mathbf{R}_{\mathbf{r}\mathbf{r}}^{-1}\mathbf{C}_k)^{-1}$  e o vetor  $\mathbf{r}_u(i) = \mathbf{Q}_k^H\mathbf{r}(i)$ , resulta que o receptor ótimo em (3-3) pode ser reescrito como  $\mathbf{w}_k = \mathbf{Q}_k\mathbf{g}$  e a variância resultante na saída do receptor, para um dado vetor  $\mathbf{g}$ , pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} J_{MV}(\mathbf{w}_k) &= \mathbf{w}_k^H\mathbf{R}_{\mathbf{r}\mathbf{r}}\mathbf{w}_k \\ &= \mathbf{g}^H\mathbf{Q}_k^H\mathbf{R}_{\mathbf{r}\mathbf{r}}\mathbf{Q}_k\mathbf{g} \\ &= \mathbf{g}^H\mathbf{R}_{\mathbf{r}_u\mathbf{r}_u}\mathbf{g} \end{aligned} \quad (3-30)$$

onde  $\mathbf{R}_{\mathbf{r}_u\mathbf{r}_u} = \mathbb{E}[\mathbf{r}_u(i)\mathbf{r}_u^H(i)] = \mathbf{Q}_k^H\mathbf{R}_{\mathbf{r}\mathbf{r}}\mathbf{Q}_k$  é a matriz de autocorrelação de  $\mathbf{r}_u(i)$ . Assim, seguindo o critério max/min e de acordo com (3-5),  $\mathbf{g}$  é obtido como aquele que maximiza (3-30):

$$\begin{aligned} \mathbf{g} &= \arg \max_{\|\mathbf{g}\|=1} J_{MV}(\mathbf{w}_k) \\ &= \arg \max_{\|\boldsymbol{\xi}\|=1} \boldsymbol{\xi}^H\mathbf{R}_{\mathbf{r}_u\mathbf{r}_u}\boldsymbol{\xi} \end{aligned} \quad (3-31)$$

cujas solução  $\mathbf{g}$  é o autovetor correspondente ao maior autovalor de  $\mathbf{R}_{\mathbf{r}_u\mathbf{r}_u}$ .

Como pode ser observado, a estimativa fornecida pela equação (3-31) é matematicamente equivalente à estimativa fornecida por (3-5), porém, a estimativa de canal baseada em (3-5) requer da estimativa do autovetor associado ao menor autovalor de uma matriz sem uma estrutura que facilite a implementação eficiente, enquanto que (3-31) requer da estimativa

do autovetor principal de uma matriz de autocorrelação e, portanto, em implementações adaptativas podem ser utilizados métodos mais eficientes do ponto de vista do custo computacional, como mostrado a seguir.

Usando (3-26), aplicando o lema de inversão de matrizes [67] a  $\mathbf{\Omega}_k(i) = \mathbf{C}_k^H \mathbf{\Gamma}_k(i)$  e pré-multiplicando o resultado por  $\mathbf{\Gamma}_k(i)$  temos que  $\hat{\mathbf{Q}}_k(i) = \mathbf{\Gamma}_k(i) \mathbf{\Omega}_k^{-1}(i)$  pode ser calculado recursivamente como [64]:

$$\mathbf{u}(i) = \mathbf{C}_k^H \boldsymbol{\psi}(i) \quad (3-32)$$

$$\mathbf{v}^H(i) = \mathbf{r}^H(i) \hat{\mathbf{Q}}_k(i-1) \quad (3-33)$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{Q}}_k(i) &= \left[ \hat{\mathbf{Q}}_k(i-1) - \gamma(i) \boldsymbol{\psi}(i) \mathbf{v}^H(i) \right] \times \\ &\quad \times \left[ \mathbf{I}_L + \frac{\mathbf{u}(i) \mathbf{v}^H(i)}{\frac{1}{\gamma(i)} - \mathbf{v}^H(i) \mathbf{u}(i)} \right] \end{aligned} \quad (3-34)$$

O valor inicial é  $\hat{\mathbf{Q}}_k(0) = \mathbf{\Gamma}_k(0) [\mathbf{C}_k^H \mathbf{\Gamma}_k(0)]^{-1}$  onde  $\mathbf{\Gamma}_k(0) = \hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{r}\mathbf{r}}^{-1}(0) \mathbf{C}_k$ .

Uma vez atualizada a matriz  $\hat{\mathbf{Q}}_k(i)$ , atualiza-se a estimativa da matriz  $\mathbf{R}_{\mathbf{r}_u \mathbf{r}_u}$  e desta calcula-se  $\mathbf{g}(i)$  segundo (3-31). Para o cálculo eficiente da estimativa de  $\mathbf{g}(i)$ , usamos o fato de que em (3-31),  $\mathbf{g}(i)$  corresponde ao autovetor associado ao maior autovalor de uma matriz de autocorrelação, e portanto métodos eficientes de rastreamento de subespaços podem ser utilizados (veja por exemplo [68]).

Aqui é proposto o uso de dois métodos de rastreamento já conhecidos na literatura. O primeiro é o método natural das potências [66]. Usando este método  $\mathbf{g}(i)$  pode ser calculado recursivamente como:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_u(i) &= \hat{\mathbf{Q}}_k^H(i) \mathbf{r}(i) \\ \hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{r}_u \mathbf{r}_u}(i) &= \lambda \hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{r}_u \mathbf{r}_u}(i-1) + \mathbf{r}_u(i) \mathbf{r}_u^H(i) \\ \mathbf{g}(i) &= \hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{r}_u \mathbf{r}_u}(i) \mathbf{g}(i-1) \\ \mathbf{g}(i) &= \frac{\mathbf{g}(i)}{m(\mathbf{g}(i))} \end{aligned} \quad (3-35)$$

onde  $m(\mathbf{g}(i))$  denota o componente de máxima magnitude de  $\mathbf{g}(i)$ .

No segundo método proposto, usamos ainda o fato de que na prática  $\mathbf{R}_{\mathbf{r}_u \mathbf{r}_u}$  é estimada por uma soma onde as parcelas têm posto um,  $\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{r}_u \mathbf{r}_u}(i) = \lambda \hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{r}_u \mathbf{r}_u}(i-1) + \mathbf{r}_u(i) \mathbf{r}_u^H(i)$ , e portanto, o algoritmo PASTd pode ser utilizado [27]. O PASTd é um método eficiente para rastreamento de subespaços e tem baixa complexidade computacional. Este algoritmo realiza o rastreamento do autovetor principal de uma matriz de autocorrelação estimada recursivamente, sem precisar computar diretamente esta matriz.

A Tab. 3.3 ilustra o algoritmo de estimação de canal utilizando o método

PASTd. Note que a estimativa da matriz de autocorrelação  $\mathbf{R}_{\mathbf{r}_u \mathbf{r}_u}(i)$  não é computada. Note-se ainda que  $\alpha(i)$  é o maior autovalor de  $\hat{\mathbf{Q}}_k(i)$  [69].

Tabela 3.3: Implementação adaptativa do tipo RLS para receptores de mínima variância nos sistemas CDMA por blocos. Estimação de canal usando o algoritmo PASTd.

<p>a) Atualizar <math>\hat{\mathbf{Q}}_k(i)</math> segundo (3-34)</p> <p>b) Calcular <math>\mathbf{r}_u(i) = \hat{\mathbf{Q}}_k^H(i)\mathbf{r}(i)</math></p> <p>c) Atualizar a estimativa do canal utilizando o algoritmo PASTd:</p> $\beta(i) = \mathbf{g}^H(i-1)\mathbf{r}_u(i)$ $\alpha(i) = \lambda\alpha(i-1) +  \beta(i) ^2$ $\mathbf{g}(i) = \mathbf{g}(i-1) + (\mathbf{r}_u(i) - \mathbf{g}(i-1)\beta(i))\beta^*(i)/\alpha(i)$ <p>d) Computar a saída do filtro <math>y(i) = \mathbf{g}^H(i)\mathbf{r}_u(i)</math> ou alternativamente <math>\mathbf{w}_k(i) = \hat{\mathbf{Q}}_k(i)\mathbf{g}(i)</math></p>
--

### 3.3.2 Complexidade Computacional

Em todos os métodos apresentados, para estimar o canal e calcular o filtro receptor, primeiro devem ser calculadas as matrizes  $\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{r}\mathbf{r}}^{-1}(i)$  e  $\mathbf{\Gamma}_k(i)$ , cujas equações de atualização têm um custo computacional associado de ordem  $\mathcal{O}(Q^2)$  e  $\mathcal{O}(QL)$ , respectivamente.

Para o cálculo da estimativa do canal usando o método inverso das potências, são necessárias  $\mathcal{O}(QL^2)$  operações para computar  $\mathbf{C}_k^H\mathbf{\Gamma}_k$  e  $\mathcal{O}(L^2)$  operações para atualizar a estimativa de canal segundo (3-27). Para calcular o filtro receptor são necessárias  $\mathcal{O}(QL)$  operações adicionais.

Para o cálculo da estimativa do canal utilizando o método natural das potências ou o algoritmo PASTd, são necessárias  $\mathcal{O}(QL^2)$  operações para atualizar  $\hat{\mathbf{Q}}_k(i)$  mais  $\mathcal{O}(QL)$  operações para a obtenção de  $\mathbf{r}_u(i)$ . Se o método natural das potências é utilizado, então  $\mathcal{O}(L^2)$  operações são necessárias para atualizar a estimativa do canal segundo (3-35). Esta solução é equivalente, em termos de complexidade computacional, ao método inverso das potências, nenhum custo computacional relevante é adicionado. Se, entretanto, a estimativa de canal é obtida utilizando-se o algoritmo PASTd, apenas  $\mathcal{O}(L)$  operações são necessárias para cada iteração no PASTd. Em ambos os casos, para computar a saída do filtro receptor, é necessário  $\mathcal{O}(L)$  operações adicionais.

Na Tab. 3.4 resume-se a ordem do custo computacional associada aos diferentes métodos, considerando apenas as operações não comuns a todos os algoritmos.

Tabela 3.4: Complexidade computacional associada aos métodos para obtenção do receptor de mínima variância.

Algoritmo	Ordem
Métodos inverso da potências	$\mathcal{O}(QL^2) + \mathcal{O}(QL) + \mathcal{O}(L^2)$
Métodos natural da potências	$\mathcal{O}(QL^2) + \mathcal{O}(QL) + \mathcal{O}(L^2) + \mathcal{O}(L)$
PASTd	$\mathcal{O}(QL^2) + \mathcal{O}(QL) + \mathcal{O}(L)$

### 3.3.3

#### Simulações e Resultados

As simulações foram realizadas em um sistema BPSK síncrono, utilizando seqüências Gold de tamanho  $N = 31$ . Foi simulado um cenário dinâmico que tem inicialmente 10 usuários. A potência dos usuários segue uma distribuição log-normal com desvio padrão de 3 dB. Após 1500 símbolos transmitidos, 6 usuários adicionais entram no sistema com potências seguindo a distribuição log-normal, porém, com desvio padrão de 6 dB. O canal é modelado como um filtro FIR de ordem 3. Os coeficientes do canal,  $h_l(i) = p_l \alpha_l(i)$  ( $l = 0, 1, 2, 3$ ) são obtidos de acordo com o modelo de Clarke [70]. Este procedimento corresponde a gerar seqüências de variáveis aleatórias gaussianas complexas correlatadas com potência unitária ( $\mathbb{E}[|\alpha_l^2(i)|] = 1$ ). Os ganhos dos percursos,  $p_l$ , são normalizados tal que  $\sum_{l=0}^{L-1} p_l^2 = 1$ . A potência relativa de cada percurso foi definida como 0, -3, -6 e -9 dB. Os resultados são apresentados em termos de frequência Doppler normalizada ( $f_d T$ ), onde  $f_d$  é a frequência Doppler e  $T$  é o inverso da taxa de símbolos. Em todos os casos foi utilizado  $f_d T = 0,0001$ . Em cada rodada o canal é mantido fixo. Os resultados são uma média de 200 rodadas.

A condição inicial para o estimador de canal é  $\mathbf{g}(0) = [1 \cdots 0]^T$  e o fator de esquecimento utilizado foi  $\lambda = 0,997$ . A ambigüidade de fase presente em todos os estimadores às cegas de canal foi removida utilizando a fase de  $h_0$  como referência.

Nas figuras, só estão apresentados os resultados obtidos quando a estimativa do canal foi calculada com o uso da SVD e com o algoritmo PASTd; as estimativas de canal obtidas com o método inverso das potências e com o método natural das potências, apresentam resultados similares ao PASTd, mas não foram incluídos nas figuras para uma melhor visualização.

A Fig. 3.9 ilustra o erro quadrático médio (MSE) da estimativa do canal,  $\mathbb{E}[\|\mathbf{h} - \mathbf{g}(i)\|^2]$ , no cenário acima descrito para diferentes relações sinal-ruído do usuário desejado,  $E_b/N_0 = 0$  dB e  $E_b/N_0 = 15$  dB. Observa-se que ambas as estimativas apresentam o mesmo erro mínimo, mas o PASTd tem uma velocidade de convergência um pouco menor que o SVD.

A Fig. 3.10 apresenta a razão sinal-ruído mais interferência (SINR)

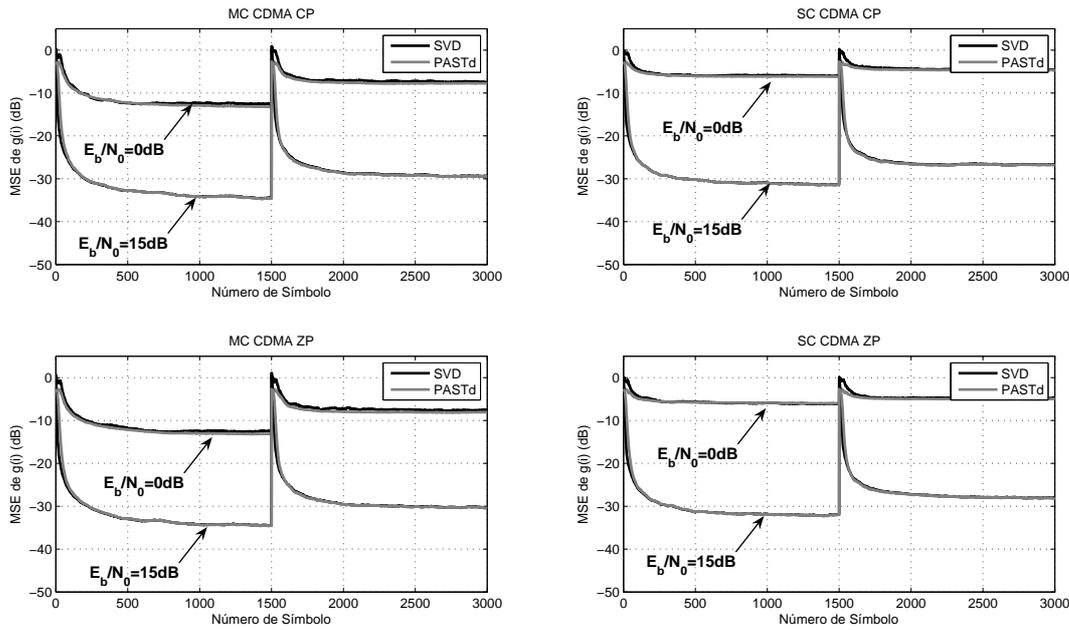


Figura 3.9: Erro quadrático médio da estimativa do canal (dB), implementação do tipo RLS do receptor de mínima variância para sistemas CDMA por blocos.

correspondente às relações sinal-ruído da figura anterior. Observa-se que o método proposto fornece resultados similares aos obtidos com SVD, apesar de seu menor custo computacional.

Devido à lenta velocidade de convergência do algoritmo PASTd, se a frequência Doppler normalizada do canal aumenta, o erro da estimativa do canal também tende a aumentar, este comportamento é comum em todos os métodos de potências.

### 3.4

#### Conclusões

Neste capítulo foi apresentado um projeto de receptor às cegas que minimiza a variância da saída do filtro receptor. Baseados na análise da perturbação, foram obtidas expressões analíticas do erro na recepção e em base a estas expressões foi realizada uma comparação entre os quatro sistemas abordados neste trabalho. Os resultados dessa seção foram publicados em [44].

Foram também implementados dois algoritmos adaptativos para este tipo de receptores multiusuário às cegas, o algoritmo gradiente estocástico e o algoritmo do tipo mínimos quadrados. Em cada caso, algoritmos com menor custo computacional foram propostos para a estimação do canal. Os resultados desta seção foram publicados em [45] e [46].

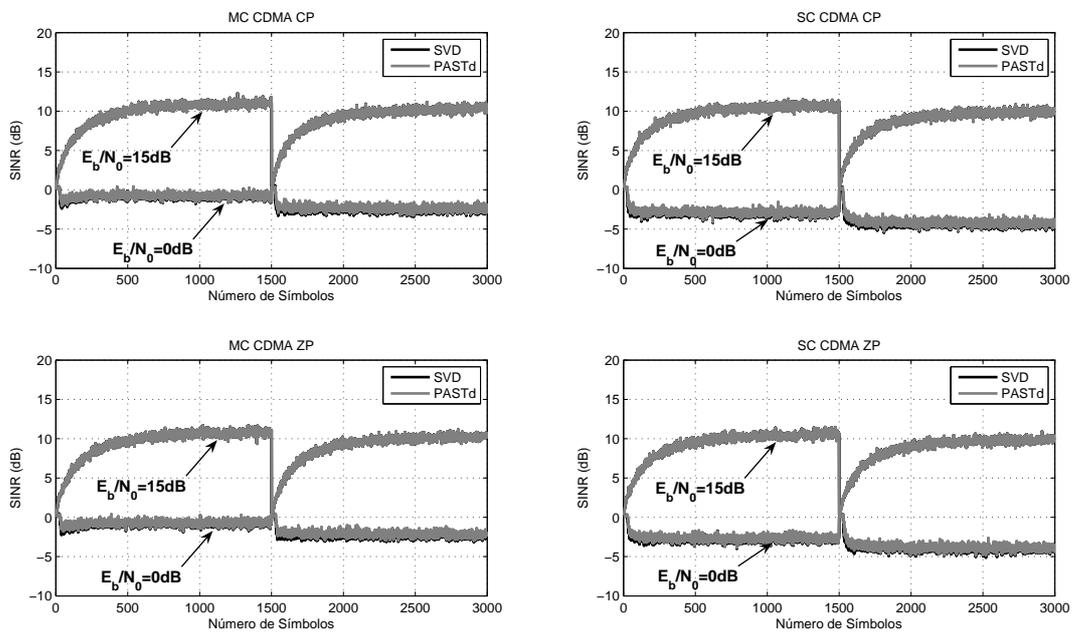


Figura 3.10: Razão Sinal-Ruído mais Interferência (dB), implementação do tipo RLS do receptor de mínima variância para sistemas CDMA por blocos.