4
SÉRIES TEMPORAIS APLICADAS AO PLANEJAMENTO ENERGÉTICO DA OPERAÇÃO DO SIN

4.1
INTRODUÇÃO

Grande parte dos fenômenos que ocorrem na natureza possui comportamento aleatório, de modo que é quase impossível afirmar como a natureza vai se comportar no futuro. Entretanto, podem-se obter previsões razoáveis sobre a ocorrência destes fenômenos com o auxílio de ferramentas estatísticas que ajudam a prever comportamentos estocásticos, como o comportamento da vazão natural de um rio.

Modelos estocásticos, também chamados processos estocásticos, são modelos matemáticos capazes de descreverem sistemas que ao longo do tempo são delineados por leis probabilísticas. Estes modelos, em geral modelam observações contínuas medidas em pontos discretos do tempo, por exemplo , séries de dados de negócios, de economia, de engenharia e de ciências naturais que ocorrem sob a forma de séries temporais.

Os processos estocásticos descrevem medidas disponíveis ao longo do tempo, sob a forma de séries temporais e muitas vezes, os dados descritos apresentam uma dependência entre si. O corpo de técnicas disponíveis para a análise de séries de observações dependentes é chamado de Análise de Séries Temporais.

A Análise de Séries Temporais é uma ferramenta que possibilita o entendimento do comportamento de fenômenos naturais. É a partir deste entendimento que cientistas, engenheiros e pesquisadores adquirem embasamento para modelar estes fenômenos e então obter os modelos que representam com veracidade a ocorrência destes na natureza.

A obtenção destes modelos é importante por que:

Eles podem fornecer informações sobre a natureza do sistema que gerou a série temporal;

A partir deles, podem ser obtidas previsões ótimas de valores futuros da série;

Ajudam a entender a relação dinâmica entre variáveis correlacionadas, e com isso entender como a ação de uma variável influencia sobre a outra, por exemplo: temperatura, chuva e vazão afluente.

Podem ser utilizados para obter políticas de controle ótimo, mostrando como uma variável controlada do processo pode ser manipulada para minimizar distúrbios em alguma variável dependente.

4.2
SÉRIES TEMPORAIS

Uma série temporal é um conjunto de dados observados e coletados cronologicamente. Na análise de séries temporais a ordem de ocorrência dos fatos é crucial. Existem séries temporais contínuas que são provenientes de dados coletados em todo instante de tempo ou séries temporais discretas que provêm de dados discretos. As séries temporais, em sua maioria são espaçadas em intervalos constantes de tempo, sejam eles horário, diário, semanal, mensal, anual, etc.

Séries temporais de dados naturais são geralmente discretas, e igualmente espaçadas no tempo. Este tipo de série é o mais utilizado e simplifica muito a matemática que suporta os modelos. Além disso, séries contínuas no tempo podem ser discretizadas em intervalos iguais, como a de temperatura por exemplo. Os dados contínuos podem dar origem a dados horários, calculados pela média horária dos dados contínuos observados.

Existem séries que podem ser perfeitamente modeladas por uma função polinomial, e com isso a observação futura pode ser prevista com exatidão. Este tipo de série segue uma *função determinística*. Quando não se pode prever com exatidão as observações futuras e elas podem ser descritas somente em termos de distribuição de probabilidade, esta série segue um modelo *não determinístico* o que geralmente é um modelo estatístico ou estocástico.

4.3
PROCESSOS ESTOCÁSTICOS

Em se tratando de fenômenos naturais é impossível de se prever deterministicamente o que vai ocorrer no futuro. Meteorologistas nunca afirmam o quanto de chuva vai cair no dia seguinte, eles dizem somente que há probabilidade de chuva. Uma vez ocorrida a chuva, então a quantidade de chuva é conhecida exatamente. Não obstante, isso continuará acontecendo para as chuvas futuras e a seqüência de toda a precipitação histórica gravada é somente uma realização do ocorrido. Precipitação é um exemplo de um fenômeno estatístico que envolve o tempo e leis probabilísticas. A expressão matemática que descreve a estrutura de probabilidades que foi observada na série temporal é chamada de *Processo Estocástico*. A seqüência de dados históricos coletados é uma realização do processo estocástico que a produziu.

Um processo estocástico muito importante para o planejamento e operação do SIN é o processo que modela as vazões afluentes aos reservatórios do Sistema Interligado Nacional. O ONS possui o histórico das afluências conhecidas e consolidadas no período de 1931 a 2006. Esta seqüência de dados distribuída no tempo é uma série temporal, que representa a série histórica de vazões. A série temporal pode ser modelada por um processo estocástico, que nada mais é do que o conjunto de todas as possíveis séries temporais que podem ser observadas.

A série histórica é a única realização do processo estocástico que está disponível na prática. Portanto, o processo estocástico pode assumir valores aleatórios para cada instante do tempo, o que o transforma em uma variável aleatória. O valor observado em um instante t qualquer da série histórica, nada mais é do que o valor "amostrado" da distribuição de probabilidades associada à variável aleatória do processo estocástico no instante t.

Um processo estocástico é totalmente descrito pelo conjunto de todas as séries temporais que o compõe ou pela distribuição de probabilidades conjunta de todas as variáveis aleatórias envolvidas. Entretanto, não é possível determinar todas as possíveis séries de afluência que o compõem nem as distribuições de probabilidades. Com o objetivo de contornar este problema, ajusta-se um modelo pelo qual acredita-se que a série histórica tenha sido produzida e a partir dele são geradas as ***séries sintéticas*** que representam as séries temporais que podem ser "amostradas" pelo processo físico que se está observando.

4.4
ESTACIONARIEDADE

Processos estocásticos podem ser classificados como estacionários ou periódicos. Estacionariedade de um processo estocástico pode ser interpretada como uma forma de equilíbrio estatístico. Se ao longo do tempo suas propriedades estocásticas que são a média, o desvio padrão, covariância não sofrerem modificações, ele é dito estacionário. Ou, de uma forma mais abrangente, significa que a distribuição de probabilidades em um instante t qualquer é válida para qualquer outro instante. A não estacionariedade de um processo estocástico pode ser causada pela intervenção direta do homem, ou da natureza, no processo físico, ou ainda pela presença de ciclos sazonais (características que se repetem dentro de um ano).

Em certas situações, as características estatísticas do processo podem variar em função do tempo. Um exemplo disso é o processo de afluências. Quando analisado anualmente é considerado estacionário, pois possui média única para todo o período e quando analisado numa escala mensal o processo de afluências é considerado não estacionário, já que possui uma média para cada mês.

A modelagem de séries temporais não estacionárias pode ser feita aplicando-se um procedimento de retirar a não estacionariedade da série. Isso pode ser feito subtraindo-se a média e dividindo-se pelo desvio-padrão para retirar a sazonalidade. E em seguida, aplicando-se uma transformação para tornar a série homocedástica.

4.5
PROCESSO ESTOCÁSTICO RUÍDO BRANCO

O processo estocástico ruído branco é o processo cujas variáveis aleatórias componentes são independentes e identicamente distribuídas – “i.i.d.”.

A Figura 4.1 ilustra a autocorrelação deste processo que é dada por:

$$r_k = \begin{cases} 1; k = 0 \\ 0; k \geq 1 \end{cases}$$

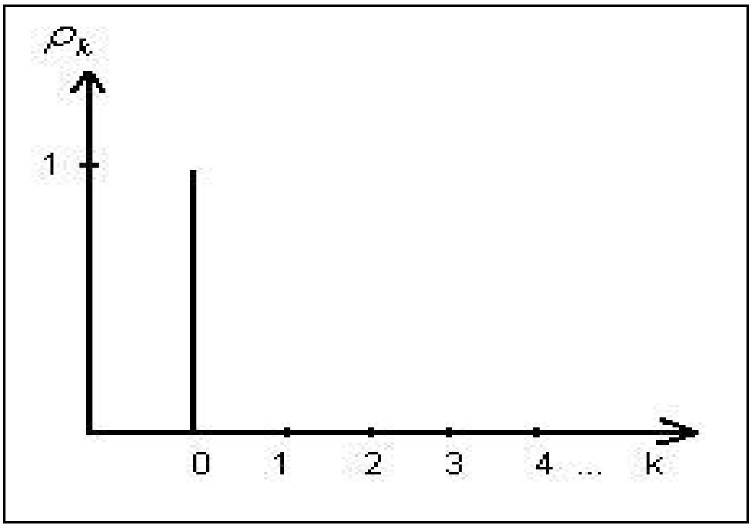

Figura 4.1: Autocorrelação do Ruído Branco

4.6

PROPRIEDADES ESTATÍSTICAS

Seja $[z_1, z_2, \ldots, z_N]$ uma série temporal de N valores que foram observados em intervalos iguais de tempo. As propriedades estatísticas a seguir serão definidas para esta série.

4.6.1

MÉDIA E VARIÂNCIA

A média teórica do processo, $m = \mathrm{E}[Z_t]$, pode ser estimada a partir da amostra realizada pela seguinte equação:

$$\overline{Z} = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} Z_t \tag{5.1}$$

A dispersão de dados do processo espalhados em torno da média é medida pela variância teórica. Esta variância pode ser estimada a partir da série dada pela seguinte equação:

$$\hat{s}_Z^2 = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} (Z_t - \overline{Z})^2 \tag{5.2}$$

4.6.2

AUTOCOVARIÂNCIA E AUTOCORRELAÇÃO

A covariância entre Z_t e o valor Z_{t+k} , separados por k intervalos de tempo é chamada de autocovariância de lag k e é definida pela equação:

$$g_k = \mathrm{cov}[Z_t, Z_{t+k}] = \mathrm{E}[(Z_t - m)(Z_{t+k} - m)] \qquad (5.3)$$

A autocovariância lag um mede o grau de dependência linear entre observações contíguas de um processo estocástico. Neste caso a autocovariância lag um indica a dependência linear entre a observação do dado de uma semana com a observação do dado de uma semana imediatamente anterior (se o intervalo de tempo for semanal).

Supondo-se que a estrutura de dependência temporal é estacionária, $s_Z^2 = g_0$ ou seja, é a mesma para o tempo t e para o tempo $t+k$, então, a autocorrelação lag k é dada por:

$$r_k = \frac{g_k}{g_0} \qquad (5.4)$$

4.6.3

PROCESSOS ERGÓTICOS

Um processo estocástico é dito ergótico, se com apenas uma realização do processo é possível caracterizá-lo.

Esta propriedade é importante, pois se deseja caracterizar o processo gerador de uma dada série temporal a partir de uma única realização desta, o que nos leva a pensar que a própria série temporal é a realização de um processo estocástico ergótico.

4.7

MODELOS LINEARES ESTACIONÁRIOS

Nos tópicos seguintes, serão estudados três tipos de modelos lineares estacionários: os modelos Auto-regressivos – AR (p), Médias Móveis – MA (q) e Auto-regressivo – Médias Móveis – ARMA (p,q).

4.7.1

MODELOS AUTO-REGRESSIVOS AR (p)

Modelos Auto-Regressivos descrevem como uma observação depende diretamente de uma ou mais observações feitas em períodos anteriores e do termo de ruído branco. Eles estimam a variável dependente a partir de valores assumidos por ela em tempos anteriores, o que significa dizer que a própria variável é capaz de explicar a sua ocorrência partindo dos dados registrados na série temporal.

Este tipo de modelo é utilizado em vários campos da ciência, economia e até no turismo.

Quando uma observação, Z_t medida num instante de tempo t depende de valores da série temporal medidos no instante *t-1* com o ruído branco a_t, este processo é chamado de *Auto-Regressivo de ordem 1* ou AR (1). O Processo **AR (1)** é comumente conhecido como *Processo de Markov* e pode ser escrito sob a forma da seguinte equação:

$$Z_t - m = f_1 (Z_{t-1} - m) + a_t \qquad (5.5)$$

Onde,

m é a média do processo

f_1 é o parâmetro auto-regressivo

a_t é o ruído branco que é independente e identicamente distribuído $(0, s_a^2)$

A seqüência da variável a_t é a parte randômica da série, é o ruído, ou o distúrbio adicionado à série. A premissa mais importante para o ruído branco é que ele é i.i.d. o que infere que os a_t's são descorrelatados e devem satisfazer a equação:

$$\mathrm{E}[a_t a_{t-k}] = \begin{cases} s_a^2, k = 0 \\ 0, k \neq 0 \end{cases} \qquad (5.6)$$

A equação (5.5) pode ser escrita de outra maneira, utilizando-se o operador de atraso "B" (Backward Shift Operator):

$BZ_t = Z_{t-1}$

e onde, k é um inteiro positivo.

$B^k Z_t = Z_{t-k}$

Partindo-se da equação (5.5) e do operador B, calcula-se o valor do ruído a_t :

$Z_t - m = f_1(BZ_t - m) + a_t$

Ou

$a_t = Z_t - m - f_1(BZ_t - m)$

$a_t = (1 - f_1 B)(Z_t - m)$

Onde,

$Bm = m$, desde que a média seja constante para todos os períodos.

$$a_t = f(B)(Z_t - m) \tag{5.7}$$

Onde $f(B) = 1 - f_1 B$ é o operador AR de ordem 1.

Partindo-se do caso particular de um AR (1), pode-se chegar ao caso genérico para um modelo AR de ordem p **AR (p)**.

$$Z_t - m = f_1(Z_{t-1} - m) + f_2(Z_{t-2} - m) + \ldots + f_p(Z_{t-p} - m) + a_t \tag{5.8}$$

De acordo com o caso particular do AR (1), a expressão acima pode ser escrita da seguinte forma:

$a_t = (1 - f_1 B - f_2 B^2 - \ldots - f_p B^p)(Z_t - m)$

Ou

$$a_t = f(B)(Z_t - m) \tag{5.9}$$

Onde $f(B) = 1 - f_1 B - f_2 B^2 - \ldots - f_p B^p$ é o operador AR de ordem p.

Condição de Estacionariedade para o AR (p)

A equação $f(B)=0$ é chamada de *Equação Característica* do processo. É condição suficiente e necessária para que o processo seja estacionário que as raízes desta equação estejam fora do círculo unitário. O círculo unitário é medido em radianos , centrado na origem do plano complexo, onde o eixo do x representa o eixo dos números reais, e o do y representa o eixo dos números imaginários.

A condição de estacionariedade garante que o processo possa ser escrito em termos do ruído branco.

Condição de Invertibilidade para o AR (p)

Todo processo auto-regressivo é invertível, não necessitando de condição alguma para garantir a invertibilidade do processo.

4.7.1.1
Função de Autocorrelação - ACF

A função de autocorrelação mede a dependência linear entre Z_t e Z_{t+k} (ou Z_{t-k}, já que a função é simétrica).

Para estudar a função teórica de autocorrelação de um processo AR (p) estacionário, é necessário multiplicar a equação do modelo, (5.8) por $(Z_{t-k}-m)$ para obter:

$$\begin{gathered}(Z_{t-k}-m)(Z_t-m)=f_1(Z_{t-k}-m)(Z_{t-1}-m)+f_2(Z_{t-k}-m)(Z_{t-2}-m)+\cdots+\\ f_p(Z_{t-k}-m)(Z_{t-p}-m)+(Z_{t-k}-m)a_t\end{gathered} \tag{5.10}$$

Ao assumir valores esperados na equação (5.10) a equação das diferenças para a função de autocovariância do processo AR (p) é:

$$g_k=f_1 g_{k-1}+f_2 g_{k-2}+\cdots+f_p g_{k-p} \qquad k>0 \tag{5.11}$$

A Expressão $\mathrm{E}\left[(Z_{t-k}-m)a_t\right]$ é zero para k>0 por que Z_{t-k} é a única função de distúrbios até o momento, e o ruído a_t não possui correlação com estes distúrbios.

Dividindo-se a equação (5.11) por g_0 determina-se a expressão da *Função de Autocorrelação Teórica* – ACF do Processo AR (p):

$$r_k = f_1 r_{k-1} + f_2 r_{k-2} + \cdots + f_p r_{k-p} \qquad k > 0$$

Esta equação pode ser equivalentemente escrita com o auxílio do operador de atraso *B* ao invés do tempo *t*. De modo que seria dada pela seguinte forma:

$$(1 - f_1 B - f_2 B^2 - \cdots - f_p B^p) r_k = f(B) r_k = 0 \qquad (5.12)$$

Desta forma, a solução geral da equação de diferenças seria:

$$r_k = A_1 G_1^k + A_2 G_2^k + \cdots + A_p G_p^k \qquad (5.13)$$

Onde $G_1^{-1}, G_2^{-1}, \cdots, G_p^{-1}$, são raízes distintas da equação característica $f(B) = 0$ e os termos $A_i's$ são constantes.

O gráfico da autocorrelação de um modelo AR (p) é dado por senóides e ou exponenciais que são amortecidas à medida que k cresce, conformeo pode ser observado na Figura 4.2.

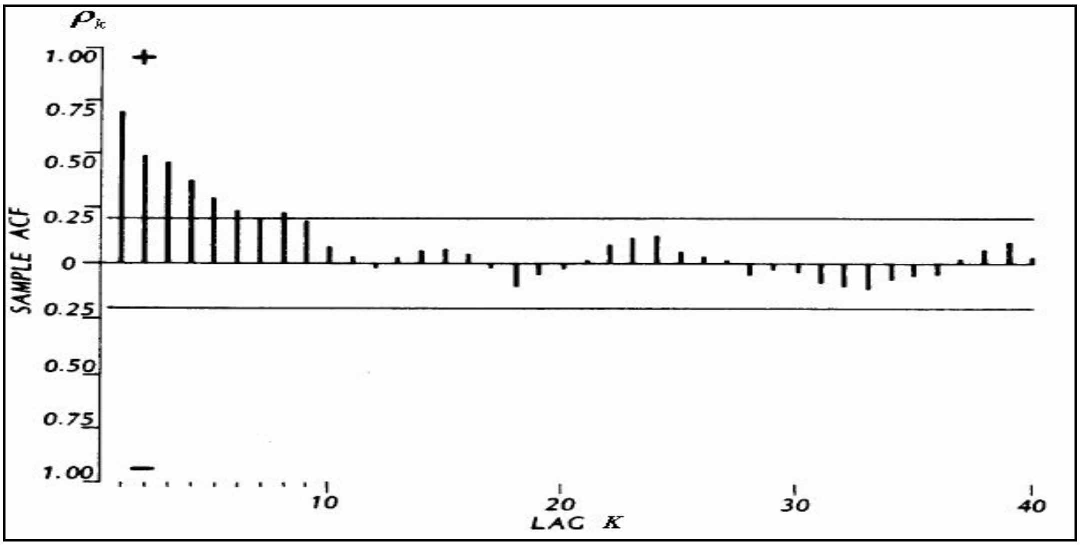

Figura 4.2: Autocorrelação do Modelo AR (p)

Equações de Yule-Walker

Substituindo *k= 1, 2, ..., p* na equação (5.12) os parâmetros podem ser expressos em termos da ACF teórica. O resultado desse conjunto de equações é chamado de ***Equações de Yule-Walker***

$$\begin{aligned} r_1 &= f_1 + f_2 r_1 + \cdots + f_p r_{p-1} \\ r_2 &= f_1 r_1 + f_2 + \cdots + f_p r_{p-2} \\ \vdots \quad & \quad \vdots \quad\quad \vdots \quad \ldots \quad \vdots \\ r_p &= f_1 r_{p-1} + f_2 r_{p-2} + \cdots + f_p \end{aligned} \tag{5.14}$$

Escrevendo as equações de Yule-Walker na forma matricial, a solução para os parâmetros em termos das autocorrelações pode ser obtida por:

$$f = P_p^{-1} r_p \tag{5.15}$$

$$f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_p \end{bmatrix} \quad r_p = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_p \end{bmatrix} \quad P_p = \begin{bmatrix} 1 & r_1 & r_2 & \cdots & r_{p-1} \\ r_1 & 1 & r_1 & \cdots & r_{p-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ r_{p-1} & r_{p-2} & r_{p-3} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Quando k=0, a contribuição do termo $\mathrm{E}[Z_{t-k} a_t]$ no valor esperado da equação (5.10) é, $\mathrm{E}[a_t^2] = s_a^2$, desde que a única parte de Z_t que tem correlação com a_t é o termo mais recente a_t.

$$g_0 = f_1 g_1 + f_2 g_2 + \cdots + f_p g_p + s_a^2 \tag{5.16}$$

Dividindo a equação acima por $g_0 = s_z^2$, a variância é dada pela seguinte expressão:

$$s_z^2 = \frac{s_a^2}{1 - r_1 f_1 - r_2 f_2 - \cdots - r_p f_p} \tag{5.17}$$

4.7.1.2

Função de Autocorrelação Parcial- PACF

A Função de Autocorrelação Parcial f_{kk} mede a dependência linear entre Z_t e Z_{t+k}, eliminando os efeitos das variáveis intermediárias $Z_{t+1,} Z_{t+2,} \ldots, Z_{t+k-1}$. Devido ao decaimento da função de autocorrelação do modelo AR (p) mostrou-se vantajoso a definição de outra função, que mostrasse nitidamente a ordem do modelo AR. A função de autocorrelação parcial é finita, e mostra um corte brusco após o lag p, o que ajuda a identificar a ordem do modelo.

Ela pode ser obtida a partir das equações de Yule-Walker que podem ser escritas da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} 1 & r_1 & r_2 & \cdots & r_{p-1} \\ r_1 & 1 & r_1 & \cdots & r_{p-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ r_{p-1} & r_{p-2} & r_{p-3} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{k1} \\ f_{k2} \\ \vdots \\ f_{kk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_k \end{bmatrix} \qquad (5.18)$$

Ou

$$P_k f_k = r_k$$

Resolvendo-se a equação para k=1, 2, 3, ..., sucessivamente, obtemos $f_{11,} f_{22,} f_{33,} \cdots, f_{kk}$

O gráfico da função de autocorrelação parcial de um modelo AR (p) é dado por um corte brusco, no lag p, como pode ser observado na Figura 4.3.

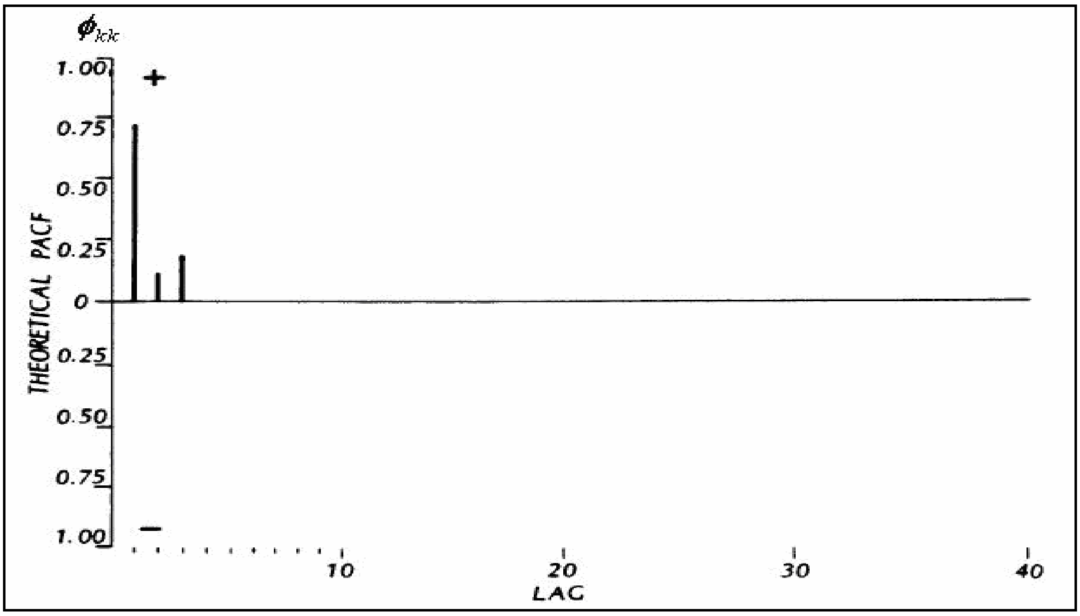

Figura 4.3: Função Teórica da Autocorrelação Parcial do Modelo AR (p)

4.7.2

MODELOS MÉDIAS MÓVEIS MA (q)

Os modelos de médias móveis descrevem quando uma observação depende do último termo do ruído branco assim como de um ou mais termos ruídos branco anteriores.

Quando uma série temporal Z_t depende somente do último ruído branco e mais do ruído corrente, esse processo é chamado de Médias Móveis de ordem 1- **MA (1)**, e pode ser descrito pela seguinte equação:

$$Z_t - m = a_t - q_1 a_{t-1} \qquad (5.19)$$

Onde,

m é a média do processo

q_1 é o parâmetro de médias-móveis

a_t é o ruído branco que é independente e identicamente distribuído $(0, s_a^2)$

A equação acima, pode ser reescrita, em função do operador de atraso *B*:

$$Z_t - m = a_t - q_1 B a_t$$
$$Z_t - m = (1 - q_1 B) a_t \qquad (5.20)$$
$$Z_t - m = q(B) a_t$$

Onde o polinômio $q(B) = 1 - q_1 B$ é o operador MA (1).

O MA (1) visto acima, pode ser estendido para modelos que possuam q parâmetros de médias móveis. O processo de médias-móveis de ordem q é denotado por **MA (q)** e é dado pela equação:

$$Z_t - m = a_t - q_1 a_{t-1} - q_2 a_{t-2} - \cdots - q_q a_{t-q} \qquad (5.21)$$

A equação acima, pode ser reescrita, em função do operador de atraso *B*.

$$Z_t - m = a_t - q_1 B a_t - q_2 B^2 a_t - \cdots - q_q B^q a_t$$
$$Z_t - m = q(B) a_t \qquad (5.22)$$

Onde o polinômio $q(B) = 1 - q_1 B - q_2 B^2 - \cdots - q_q B^q$ é o operador MA (q).

Condição de Estacionariedade para o MA (q)

Toda série temporal composta por a_t's é dita estacionária, e como Z_t na equação (5.22) é formado por uma combinação linear de a_t's, então o processo pode ser escrito em termos do ruído branco o que garante a estacionariedade do processo.

Condição de Invertibilidade para o MA (q)

A equação $q(B) = 1 - q_1 B - q_2 B^2 - \cdots - q_q B^q = 0$ é chamada de *Equação Característica* do processo. É condição suficiente e necessária para que o processo MA (q) seja invertível que as raízes da equação característica estejam fora do círculo unitário.

Quando a condição de invertibilidade é satisfeita para um MA (q), este processo pode ser expresso como um AR puro

4.7.2.1

Função de Autocorrelação – ACF

Utilizando-se a equação (5.3) da função de autocovariância e equação do processo MA (q) (5.21), temos que:

$$\gamma_k = \mathrm{E}\left[(Z_t - \mu)(Z_{t-k} - \mu)\right]$$

$$\gamma_k = \mathrm{E}[(a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \cdots - \theta_q a_{t-q})(a_{t-k} - \theta_1 a_{t-k-1} - \theta_2 a_{t-k-2} - \cdots - \theta_q a_{t-k-q})]$$

(5.23)

Após a multiplicação e o valor esperado, a função de autocorrelação é dada por:

$$\gamma_k = \begin{cases} (-\theta_k + \theta_1\theta_{k+1} + \theta_2\theta_{k+2} + \cdots + \theta_{q-k}\theta_q)\sigma_a^2, k = 1,2,\ldots,q \\ 0, k > q \end{cases} \qquad (5.24)$$

Onde, $\theta_0 = 1$ e $\theta_{-k} = 0$ para $k \geq 1$. Quando k=0, na equação (5.23) a variância é:

$$\gamma_0 = (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \cdots + \theta_q^2)\sigma_a^2 \qquad (5.25)$$

Dividindo-se a autocovariância pela variância, é encontrada a ACF teórica para o processo MA (q).

$$\rho_k = \begin{cases} \dfrac{-\theta_k + \theta_1\theta_{k+1} + \theta_2\theta_{k+2} + \cdots + +\theta_{q-k}\theta_q}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \cdots + \theta_q^2}, k = 1,2,\ldots,q \\ 0, k > q \end{cases} \qquad (5.26)$$

A autocorrelação de um modelo MA (q) é finita e apresenta um corte brusco após o lag (q).

4.7.2.2

Função de Autocorrelação Parcial – PACF

Em geral, qualquer MA (q) finito e invertível pode ser expresso como um processo AR infinito. Para processos AR (p) finitos a função teórica de autocorrelação parcial é zero após o lag p. Portanto, para um processo MA (q) ou o equivalente AR (p) infinito, a PACF f_{kk} deve ser amortecida à medida que os lags vão aumentando. Esta característica pode ser observada na Figura 4.4, onde a Função de Autocorrelação Parcial tem a forma de uma senóide amortecida e cujo último lag significante é o segundo, o que indica o modelo ser um MA (2).

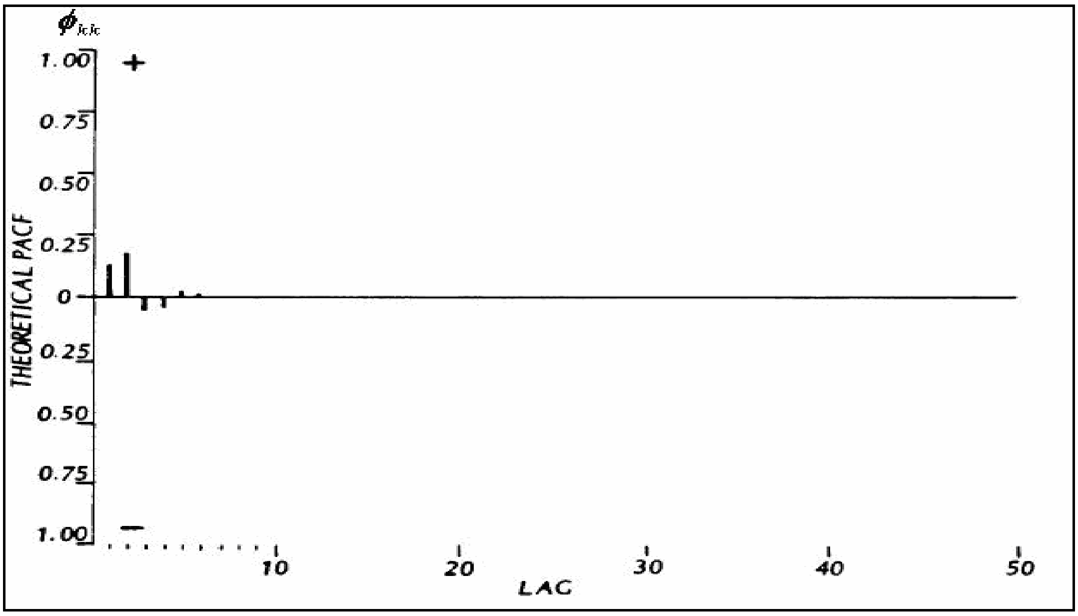

Figura 4.4: Função Teórica da Autocorrelação Parcial do Modelo MA (2)

4.7.3

MODELOS AUTO REGRESSIVOS MÉDIAS MÓVEIS ARMA (p,q)

Um bom modelo deve ser capaz de representar todos os dados de uma série temporal, ou a maior parte deles, com o menor número de parâmetros possível. Partindo-se dessa premissa a família de modelos Auto-Regressivos e de Médias Móveis **ARMA (p,q)** pode representar séries que contenham características tanto de um modelo AR como de um MA, com o menor número de parâmetros possível.

Se um modelo possui um parâmetro AR e um parâmetro MA, então ele é chamado **ARMA (1,1)**, e pode ser descrito pela seguinte equação:

$$(Z_t - m) - f_1(Z_{t-1} - m) = a_t - q_1 a_{t-1} \tag{5.27}$$

Utilizando-se o operador B, o modelo ARMA (1,1) pode ser escrito como:

$$(1 - f_1 B)(Z_t - m) = (1 - q_1 B)a_t \tag{5.28}$$

Ou,

$$f(B)(Z_t - m) = q(B)a_t$$

Onde, $f(B) = 1 - f_1 B$ e $q(B) = 1 - q_1 B$ são respectivamente os operadores AR e MA.

Em geral, um processo ARMA é formado por p parâmetros da parte auto-regressiva e q parâmetros da parte de médias móveis, formando os processos **ARMA (p,q)**, que são escritos sob a forma:

$$\begin{aligned}(Z_t - m) - f_1(Z_{t-1} - m) - f_2(Z_{t-2} - m) - \cdots - f_p(Z_{t-p} - m) \\ = a_t - q_1 a_{t-1} - q_2 a_{t-2} - \cdots - q_q a_{t-q}\end{aligned} \tag{5.29}$$

Utilizando-se o operador B, o modelo ARMA (p,q) pode ser escrito como:

$$(1 - f_1 B - f_2 B^2 - \cdots - f_p B^p)(Z_t - m) = (1 - q_1 B - q_2 B^2 - \cdots - q_q B^q)a_t$$

Ou, (5.30)

$$f(B)(Z_t - m) = q(B)a_t$$

Onde, $f(B) = 1 - f_1 B - f_2 B^2 - \cdots - f_p B^p$ é o operador AR de ordem p, e o polinômio $q(B) = 1 - q_1 B - q_2 B^2 - \cdots - q_q B^q$ é o operador MA de ordem q.

Um processo ARMA (p,q) contem tanto o processo AR puro quanto o MA, de modo que um processo AR (p) pode ser escrito sob a forma ARMA (p,0) assim como um processo MA (q) pode ser escrito sob a forma ARMA (0,q).

Condição de Estacionariedade e Invertibilidade para o ARMA (p,q)

As condições de estacionariedade e invertibilidade discutidas anteriormente para os modelos AR e MA também são válidas para os processos ARMA (p,q). Para um processo ARMA (p,q) ser estacionário as raízes da equação característica $f(B)=0$ devem estar fora do círculo unitário. Similarmente, as raízes do polinômio $q(B)=0$ devem estar fora do círculo unitário, para que o processo seja invertível e possa ser expresso como um AR puro.

4.7.3.1
Função de Autocorrelação – ACF

A função teórica da autocorrelação para um processo ARMA (p,q) é obtida de forma semelhante à ACF do processo AR, multiplicando-se ambos os lados da equação (5.29) por $(Z_{t-k}-m)$ e tirando-se o valor esperado.

$$\begin{aligned} &g_k - f_1 g_{k-1} - f_2 g_{k-2} - \cdots - f_p g_{k-p} = \\ &g_{za}(k) - q_1 g_{za}(k-1) - q_2 g_{za}(k-2) - \cdots - q_q g_{za}(k-q) \end{aligned} \qquad (5.31)$$

Onde $g_k = \mathrm{E}[(Z_t - m)(Z_{t-k} - m)]$ é a função de autocovariância e $g_{za}(k) = \mathrm{E}[(Z_{t-k} - m)a_t]$ é a covariância entre Z_{t-k} e a_t. Desde que Z_{t-k} seja independente dos ruídos que tenham ocorrido até o tempo $t-k$, temos o seguinte resultado:

$$\begin{aligned} &g_{za}(k) = 0, k > 0 \\ &g_{za}(k) \neq 0, k \leq 0 \end{aligned} \qquad (5.32)$$

Devido aos termos g_{za} em (5.31) é necessário obter mais uma equação, e esta é obtida multiplicando-se (5.29) por a_{t-k}:

$$g_{za}(-k) - f_1 g_{za}(-k+1) - f_2 g_{za}(-k+2) - \cdots - f_p g_{za}(-k+p) = -[q_k]s_a^2 \qquad (5.33)$$

Onde,

$$[q_k] = \begin{cases} q_k & , k = 1,2,\dots,q \\ -1 & , k = 0 \\ 0 & , k < 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema com as equações (5.31) e (5.33), a autocovariância para o modelo ARMA (p,q) é dada por:

$$\begin{aligned} &g_k - f_1 g_{k-1} - f_2 g_{k-2} - \cdots - f_p g_{k-p} = 0 \\ &Ou \\ &f(B) g_k = 0 \end{aligned} \qquad (5.34)$$

Dividindo a autocovariância (5.34) por g_0, finalmente obtemos a função teórica da autocorrelação r_k do modelo ARMA (p,q):

$$(1 - f_1 B - f_2 B^2 - \cdots f_p B^p) r_k = f(B) r_k = 0, k > q \qquad (5.35)$$

A Figura 4.5 mostra o gráfico de uma função teórica da autocorrelação de um modelo ARMA (p,q).

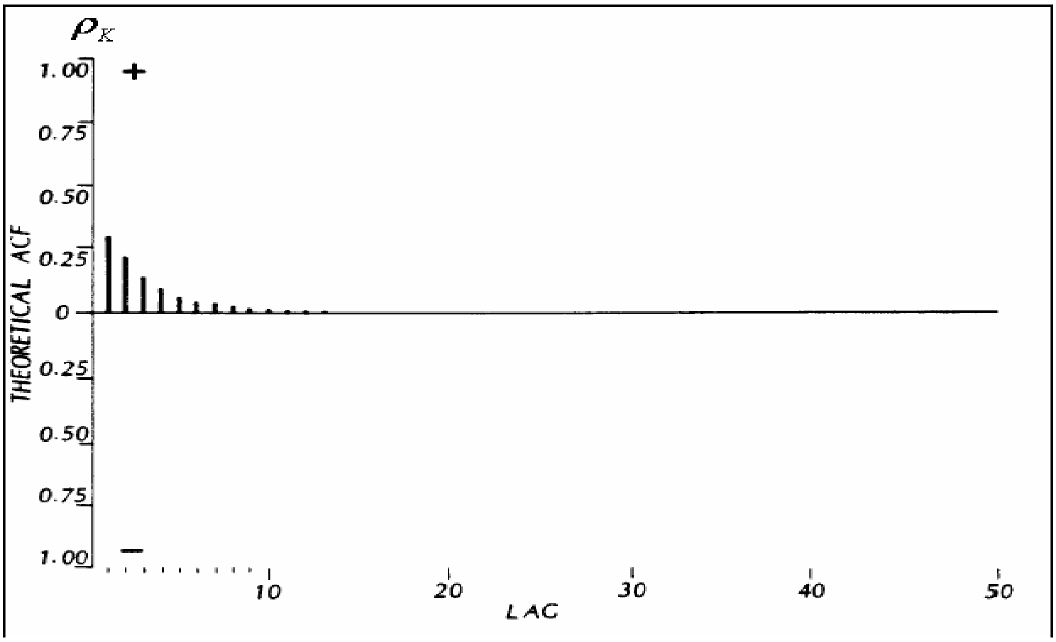

Figura 4.5: Função Teórica da Autocorrelação do Modelo ARMA (p,q)

4.7.3.2 Função de Autocorrelação Parcial – PACF

Como resultado do operador MA em (5.30), o processo ARMA (p,q) pode ser escrito sob a forma de um AR infinito dado por:

$$a_t = q(B)^{-1} f(B)(Z_t - m) \qquad (5.36)$$

Onde, $q(B)^{-1}$ é uma série infinita em B. Para processos AR (p) finitos a função teórica de autocorrelação parcial é zero após o lag p. Portanto, para um processo MA (q) ou o equivalente AR (p) infinito, a PACF f_{kk} deve, ter formas de senóides e ou exponenciais amortecidas à medida que os lags vão aumentando. A Figura 4.6 mostra o gráfico da autocorrelação parcial de um modelo ARMA (1,1) que é uma exponencial amortecida com o aumento dos lags.

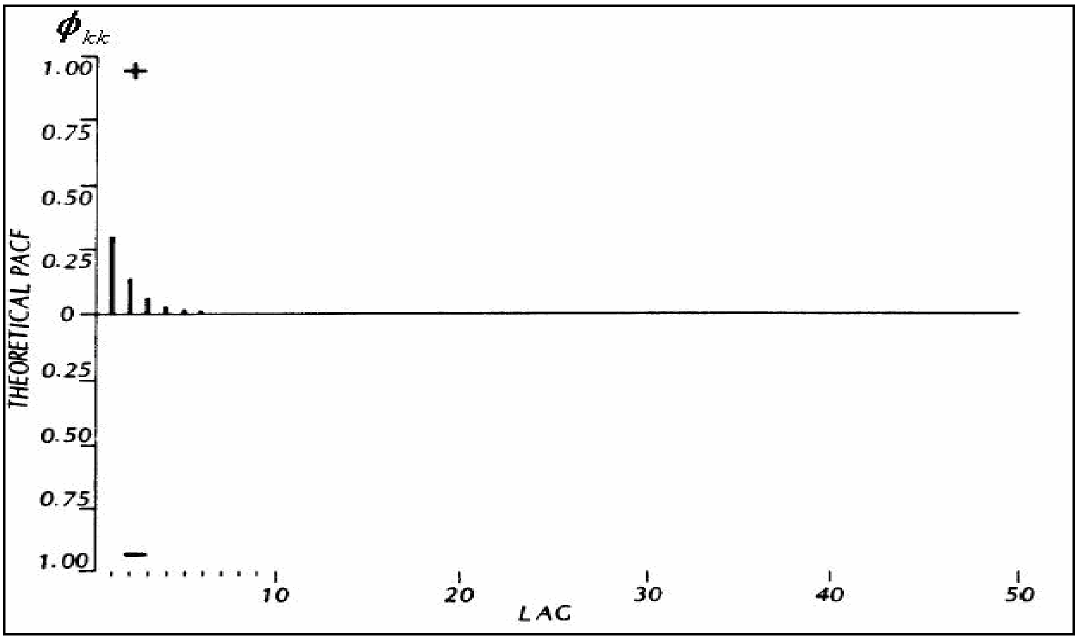

Figura 4.6: Função Teórica da Autocorrelação Parcial de um Modelo ARMA (1,1)

Na tabela seguinte, segue um resumo das principais características dos modelos AR(p), MA (q) e ARMA (p,q).

Tabela 4.1: Resumo das Características dos Modelos AR(p), MA (q) e ARMA (p,q).

	AR (p)	**MA (q)**	**ARMA (p,q)**
Modelo	$a_t = f(B)(Z_t - m)$	$Z_t - m = q(B)a_t$	$f(B)(Z_t - m) = q(B)a_t$
Condição de Estacionariedade	Raízes de $f(B) = 0$ Fora do círculo unitário	Sempre Estacionário	Raízes de $f(B) = 0$ Fora do círculo unitário
Condição de Invertibilidade	Sempre Invertível	Raízes de $q(B) = 0$ Fora do círculo unitário	Raízes de $q(B) = 0$ Fora do círculo unitário
Função de Autocorrelação r_k	Infinita – Exponenciais e/ou senóides amortecidas	Finita – corte após o lag “q”	Infinita – Exponenciais e/ou senóides amortecidas após o lag “q-p”
Função de Autocorrelação Parcial f_{kk}	Finita – corte após o lag “p	Infinita– Exponenciais e/ou senóides amortecidas	Infinita – Exponenciais e/ou senóides amortecidas após o lag “p-q”

4.8
MODELOS PERIÓDICOS

Modelos sazonais hidrológicos, como as vazões naturais de um rio, e outros tipos de séries sazonais apresentam uma estrutura de autocorrelação que depende não só do intervalo de tempo entre as observações, mas também das estações sazonais ao longo do ano. Estes processos, quando analisados em escalas semanal ou mensal, têm como característica o comportamento periódico, refletindo o ciclo das estações do ano. Cada período apresenta um conjunto de suas propriedades probabilísticas, definidas pela média, desvio-padrão e função de autocorrelação.

A média amostral de cada período é dada por:

$$\hat{m}_m = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Z_{(i-1)12+m} \qquad \textit{para m = 1, 2, ..., 12 meses} \qquad (5.37.a)$$

Ou,

$$\hat{m}_m = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Z_{(i-1)52+m} \qquad \textit{para m = 1, 2, ..., 52 semanas} \qquad (5.37.b)$$

O desvio padrão amostral de cada período é dado por:

$$\hat{s}_m = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Z_{(i-1)12+m} - \hat{m}_m} \qquad \textit{para m = 1, 2, ..., 12 meses} \qquad (5.38.a)$$

Ou,

$$\hat{s}_m = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Z_{(i-1)52+m} - \hat{m}_m} \qquad \textit{para m = 1, 2, ..., 52 semanas} \qquad (5.38.b)$$

O valor da auto-covariância amostral do período pode ser obtido da seguinte forma:

$$\hat{g}^m(k) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} (Z_{(i-1)12+m} - \hat{m}_m)(Z_{(i-1)12+m-k} - \hat{m}_{m-k}) \quad \textit{para m = 1, 2, ..., 12 meses}$$

(5.39.a)

Ou,

$$\hat{g}^m(k) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} (Z_{(i-1)52+m} - \hat{m}_m)(Z_{(i-1)52+m-k} - \hat{m}_{m-k}) \quad \textit{para m = 1, 2, ..., 52 semanas}$$

(5.39.b)

O valor da autocorrelação amostral para o mês ou para a semana pode ser obtido da seguinte forma:

$$\hat{r}^m(k) = \frac{\hat{g}^m(k)}{\hat{s}_m \hat{s}_{m-k}} \qquad \textit{para m variando de 1 a 12 meses,} \qquad \textit{(5.40)}$$

ou para m variando de 1 a 52 semanas

Os dois tipos de modelos periódicos mais utilizados na previsão de vazões são os Modelos Periódico Auto-Regressivo – PAR (p) e Auto-Regressivo Média-Móvel Periódico – PARMA (p, q). Quando modelamos uma série sazonal com um modelo PAR (p), um modelo AR é especificado para cada estação do ano. De maneira similar, o modelo PARMA consiste em ter um ARMA separado para cada estação do ano.

4.8.1
MODELOS AUTO-REGRESSIVOS PERIÓDICOS – PAR (p)

O histórico das afluências conhecidas e consolidadas pelo ONS totalizando 75 anos representa a série histórica de vazões do SIN.

O modelo PAR (p) é bem adequado à análise deste tipo de série, em virtude dos seus parâmetros apresentarem comportamento periódico, tal como as séries semanais e mensais de vazões afluentes. Os modelos periódicos consideram para o ajuste de parâmetros somente determinadas semanas de um mês, trimestre ou semestre, agrupando determinados períodos do ano, enquanto que modelos estacionários consideram a série como um todo com todos os meses do ano, no qual meses e trimestres diferentes são tratados do mesmo modo.

Na prática, observa-se que em meses iniciais de período úmido as afluências dependem de 1 ou no máximo 2 meses anteriores. Já em meses iniciais de período seco as afluências dependem de vários meses passados do último período úmido.

O número de termos auto-regressivos do modelo PAR (p) indica a ordem do modelo, que em geral é um vetor, p = (p_1, p_2,..., p_{12}), onde cada elemento fornece a ordem de cada período.

A essência do modelo PAR (p) é definir um modelo AR para cada estação *m* do ano. A descrição que se segue, é a formulação matemática do modelo PAR (p), que para séries mensais, p = (p_1, p_2,..., p_{12}).

$$\left(\frac{(Z_t - m_m)}{s_m}\right) = f_1^m \left(\frac{(Z_{t-1} - m_{m-1})}{s_{m-1}}\right) + \ldots + f_p^m \left(\frac{(Z_{t-p} - m_{m-p})}{s_{m-p}}\right) + a_t \qquad (5.41.a)$$

ou

$$\Phi^m(B)\left(\frac{(Z_t - m_m)}{s_m}\right) = a_t \qquad (5.41.b)$$

Onde:

Z_t é uma série sazonal de período s

s é o número de períodos (s=12 para séries mensais)

N é o número de anos

t é o índice do tempo, t=1, 2, ..., sN, função do ano T (T=1, 2, ..., N) e do período m (m=1, 2, ..., s)

μ_m é a média sazonal de período s

s_m é o desvio-padrão sazonal de período s

f_i^m é o coeficiente AR para a estação *m*

$\Phi^m(B)$ é o operador auto-regressivo de ordem p_m

$$\Phi^m(B) = (1 - f_1^m B - f_2^m B^2 - \ldots - f_p^m B^{pm}) \qquad (5.42)$$

B^i aplicado a Z_t resulta em Z_{t-i} $(B^i Z_t = Z_{t-i})$

p é a ordem de cada operador auto-regressivo

a_t é a série de ruídos independentes com média zero e variância $s_a^{2(m)}$

Condição de Estacionariedade para o PAR (p)

Para que o modelo associado a cada estação *m* seja estacionário, é necessário que as raízes da equação característica sazonal $\Phi^{(m)}(B) = 0$ estejam fora do círculo unitário. Entretanto, esta não é condição suficiente para que o modelo PAR (p) seja estacionário.

Conforme mostrado por Troutman (1979), o modelo PAR (p) é uma caso particular do PARMA (p,q) para que o modelo PAR (p) seja estacionário, a condição necessária e suficiente é dada pela equação:

$$\sum_{i=0}^{\infty} (y_i^{(m)})^2 < \infty \qquad m = 1,2,\ldots,s$$

Onde $y_i^{(m)}$ é o coeficiente de pesos do modelo PARMA e é dado pela equação:

$$f^{(m)}(B) y_k^{(m)} = -q_k^{(m)}$$

4.8.1.1

Função de Autocorrelação – ACF

Seja $r_k^{(m)}$ a correlação entre Z_t e Z_{t-k}, de tal forma que t corresponda ao período m:

$$r^{(m)}(k) = \mathrm{E}\left[\left(\frac{Z_t - m_m}{s_m}\right)\left(\frac{Z_{t-k} - m_{m-k}}{s_{m-k}}\right)\right] \tag{5.43}$$

Multiplicando-se ambos os lados da equação (5.41a) por $\left(\frac{Z_{t-k} - m_{m-k}}{s_{m-k}}\right)$ e tomando os valores esperados de cada termo, obtemos para cada período:

$$\mathrm{E}\left[\left(\frac{Z_t - m_m}{s_m}\right)\left(\frac{Z_{t-k} - m_{m-k}}{s_{m-k}}\right)\right] = f_1^m \mathrm{E}\left[\left(\frac{(Z_{t-1} - m_{m-1})}{s_{m-1}}\right)\left(\frac{Z_{t-k} - m_{m-k}}{s_{m-k}}\right)\right] + \ldots +$$

$$+ f_p^m \mathrm{E}\left[\left(\frac{(Z_{t-p_m} - m_{m-p_m})}{s_{m-p_m}}\right)\left(\frac{Z_{t-k} - m_{m-k}}{s_{m-k}}\right)\right] + \mathrm{E}\left[a_t\left(\frac{Z_{t-k} - m_{m-k}}{s_{m-k}}\right)\right] \tag{5.44}$$

Fazendo k =1, a expressão (5.44) resulta em:

$$r^m(1) = f_1^m + f_2^m r^{m-1}(1) + \ldots + f_p^m r^{m-1}(p_m - 1) \tag{5.45}$$

Uma vez conhecidos os parâmetros do modelo PAR (p) as funções $r_k^{(m)}$ são dadas pela solução da equação (5.44) e podem ser expressas por uma combinação de decaimentos exponenciais e/ou ondas senoidais, o que faz $r_k^{(m)}$ tender a zero, à medida que k cresce.

Fixando-se m (como um período qualquer) e variando-se k de 1 a p na equação (5.44) obtemos para cada período o conjunto de equações a seguir, que são conhecidas como equações de Yule-Walker.

$$\begin{bmatrix} 1 & r^{m-1}(1) & r^{m-1}(2) & \cdots & r^{m-1}(p-1) \\ r^{m-1}(1) & 1 & r^{m-2}(1) & \cdots & r^{m-2}(p-2) \\ r^{m-1}(2) & r^{m-2}(1) & 1 & \cdots & r^{m-3}(p-3) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r^{m-1}(p-1) & r^{m-2}(p-2) & r^{m-3}(p-3) & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1^m \\ f_2^m \\ f_3^m \\ \cdots \\ f_p^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r^m(1) \\ r^m(2) \\ r^m(3) \\ \cdots \\ r^m(p) \end{bmatrix}$$

(5.46)

Para k=0, a expressão (5.44) fica:

$$1 = f_1^m r^m(1) + f_2^m r^m(2) + \ldots + f_p^m r^m(p) + \mathrm{E}\left[a_t\left(\frac{Z_t - m_m}{s_m}\right)\right] \tag{5.47}$$

Multiplicando-se a equação (5.41.a) por a_t e tomando o valor esperado, obtemos:

$$\mathrm{E}\left[a_t\left(\frac{Z_t - m_m}{s_m}\right)\right] = s_a^{2(m)} \tag{5.48}$$

Substituindo este resultado na equação (5.47), obtemos a seguinte expressão válida para qualquer período m:

$$s_a^{2(m)} = 1 - f_1^m r^m(1) - f_2^m r^m(2) - \ldots - f_p^m r^m(p) \tag{5.49}$$

4.8.1.2

Função de Autocorrelação Parcial – PACF

Já que a função de autocorrelação do modelo PAR para um período m vai decaindo com o tempo e não trunca após um lag específico, não determinando a ordem exata do modelo, pode ser útil identificar outras funções que sejam truncadas após determinado lag, e assim ajudem a identificar o modelo. Para conseguir determinar esta função definiu-se a função teórica de autocorrelação parcial – PACF de um modelo PAR (p) semelhante a definição utilizada para o modelo AR (p), de modo que essa função seja bruscamente cortada após o último lag significante do modelo, e com isso seja determinada a ordem do modelo para o período m.

4.8.2

MODELOS AUTO-REGRESSIVOS MÉDIAS-MÓVEIS PERIÓDICOS – PARMA (p,1)

O modelo PARMA foi criado para definir um modelo ARMA para cada período do ano. A descrição que se segue, é a formulação matemática do modelo PARMA (p, 1) que é dada por:

$$\left(\frac{(Z_t - m_m)}{s_m}\right) = f_1^m\left(\frac{(Z_{t-1} - m_{m-1})}{s_{m-1}}\right) + \ldots + f_p^m\left(\frac{(Z_{t-p} - m_{m-p})}{s_{m-p}}\right) - q_1^m a_{t-1} + a_t$$

(5.50)

Onde:

Z_t é uma série sazonal de período s

s é o número de períodos (s=12 para séries mensais)

N é o número de anos

t é o índice do tempo, t=1, 2, ..., sN, função do ano T (T=1, 2, ..., N) e do período m (m=1, 2, ..., s)

μ_m é a média sazonal de período s

s_m é o desvio-padrão sazonal de período s

$\Phi^m(B)$ é o operador auto-regressivo de ordem p_m

$$\Phi^m(B) = (1 - f_1^m B - f_2^m B^2 - \ldots - f_p^m B^{pm}) \qquad (5.51)$$

B^i aplicado a Z_t resulta em Z_{t-i} $(B^i Z_t = Z_{t-i})$

p é a ordem de cada operador auto-regressivo

q_1^m é coeficiente média-móvel de ordem 1

a_t é a série de ruídos independentes com média zero e variância $s_{a_t}^2$

Multiplicando-se ambos os lados da equação (5.50) por a_t e tomando os valores esperados de cada termo, obtemos para cada período:

$$\mathrm{E}\left[\left(\frac{(Z_t - m_m)}{s_m}\right)a_t\right] = f_1^m \mathrm{E}\left[\left(\frac{(Z_{t-1} - m_{m-1})}{s_{m-1}}\right)a_t\right] + \ldots + f_p^m \mathrm{E}\left[\left(\frac{(Z_{t-p} - m_{m-p})}{s_{m-p}}\right)a_t\right] -$$

$$- q_1^m \mathrm{E}[a_{t-1}a_t] + \mathrm{E}[a_t a_t]$$

$$\mathrm{E}\left[\left(\frac{(Z_t - m_m)}{s_m}\right)a_t\right] = s_{a_t}^2 \qquad (5.52)$$

Multiplicando-se a equação (5.50) por a_{t-1} e tomando os valores esperados, obtemos:

$$\mathrm{E}\left[\left(\frac{(Z_t - m_m)}{s_m}\right)a_{t-1}\right] = f_1^m \mathrm{E}\left[\left(\frac{(Z_{t-1} - m_{m-1})}{s_{m-1}}\right)a_{t-1}\right] + \ldots + f_p^m \mathrm{E}\left[\left(\frac{(Z_{t-p} - m_{m-p})}{s_{m-p}}\right)a_{t-1}\right] -$$

$$- q_1^m \mathrm{E}[a_{t-1}a_{t-1}] + \mathrm{E}[a_t a_{t-1}]$$

$$\mathrm{E}\left[\left(\frac{(Z_t - m_m)}{s_m}\right)a_{t-1}\right] = f_1^m s_{a_{t-1}}^2 - q_1^m s_{a_{t-1}}^2$$

Ou

$$\mathrm{E}\left[\left(\frac{(Z_t - m_m)}{s_m}\right)a_{t-1}\right] = (f_1^m - q_1^m) s_{a_{t-1}}^2 \qquad (5.53)$$

Multiplicando a equação (5.50) por $\frac{Z_t - m_m}{s_m}$ e tomando os valores esperados, obtemos:

$$\mathrm{E}\left[\left(\frac{(Z_t - m_m)}{s_m}\right)\left(\frac{(Z_t - m_m)}{s_m}\right)\right] = f_1^m \mathrm{E}\left[\left(\frac{(Z_{t-1} - m_{m-1})}{s_{m-1}}\right)\left(\frac{(Z_t - m_m)}{s_m}\right)\right] + \ldots +$$

$$+ f_p^m \mathrm{E}\left[\left(\frac{(Z_{t-p} - m_{m-p})}{s_{m-p}}\right)\left(\frac{(Z_t - m_m)}{s_m}\right)\right] - q_1^m \mathrm{E}\left[a_{t-1}\left(\frac{(Z_t - m_m)}{s_m}\right)\right] +$$

$$+ \mathrm{E}\left[a_t\left(\frac{(Z_t - m_m)}{s_m}\right)\right]$$

$$1 = f_1^m r^m(1) + \cdots + f_p^m r^m(p) + s_{a_t}^2 - q_1^m(f_1^m - q_1^m)s_{a_t-1}^2$$

Ou

$$s_{a_t}^2 = 1 - f_1^m r^m(1) - \cdots - f_p^m r^m(p) + q_1^m(f_1^m - q_1^m)s_{a_t-1}^2 \qquad (5.54)$$

4.8.2.1

Função de Autocorrelação – ACF

Para obtermos a função de autocorrelação lag um basta multiplicar a equação (5.50) por Z_{t-1} e tomar o valor esperado, obtendo:

$$\mathrm{E}\left[\left(\frac{(Z_t - m_m)}{s_m}\right)\left(\frac{(Z_{t-1} - m_{m-1})}{s_{m-1}}\right)\right] = f_1^m \mathrm{E}\left[\left(\frac{(Z_{t-1} - m_{m-1})}{s_{m-1}}\right)\left(\frac{(Z_{t-1} - m_{m-1})}{s_{m-1}}\right)\right] + \ldots +$$

$$+ f_p^m \mathrm{E}\left[\left(\frac{(Z_{t-p} - m_{m-p})}{s_{m-p}}\right)\left(\frac{(Z_{t-1} - m_{m-1})}{s_{m-1}}\right)\right] - q_1^m \mathrm{E}\left[a_{t-1}\left(\frac{(Z_{t-1} - m_{m-1})}{s_{m-1}}\right)\right] +$$

$$+ \mathrm{E}\left[a_t\left(\frac{(Z_{t-1} - m_{m-1})}{s_{m-1}}\right)\right]$$

$$r^m(1) = f_1^m + f_2^m r^{m-1}(1) + \cdots + f_p^m r^{m-1}(p-1) - q_1^m s_{a_{t-1}}^2 \qquad (5.55)$$

Ou, tirando o valor de q_1^m, temos:

$$q_1^m = \frac{f_1^m - r^m(1) + f_2^m r^{m-1}(1) + \cdots + f_p^m r^{m-1}(p-1)}{s_{a_{t-1}}^2} \qquad (5.56)$$

Repetindo-se o procedimento acima para Z_{t-2}, vamos obter o coeficiente auto regressivo para o lag 2:

$$E\left[\left(\frac{(Z_t - m_m)}{s_m}\right)\left(\frac{(Z_{t-2} - m_{m-2})}{s_{m-2}}\right)\right] = f_1^m E\left[\left(\frac{(Z_{t-1} - m_{m-1})}{s_{m-1}}\right)\left(\frac{(Z_{t-2} - m_{m-2})}{s_{m-2}}\right)\right] + \ldots +$$

$$+ f_p^m E\left[\left(\frac{(Z_{t-p} - m_{m-p})}{s_{m-p}}\right)\left(\frac{(Z_{t-2} - m_{m-2})}{s_{m-2}}\right)\right] - q_1^m E\left[a_{t-1}\left(\frac{(Z_{t-2} - m_{m-2})}{s_{m-2}}\right)\right] +$$

$$+ E\left[a_t\left(\frac{(Z_{t-2} - m_{m-2})}{s_{m-2}}\right)\right]$$

$$r^m(2) = f_1^m r^{m-1}(1) + f_2^m + \cdots + f_p^m r^{m-2}(p-2) \tag{5.57}$$

Em fim, repetindo-se este procedimento até Z_{t-p-1} obteremos o coeficiente auto regressivo para o lag p+1:

$$E\left[\left(\frac{(Z_t - m_m)}{s_m}\right)\left(\frac{(Z_{t-p-1} - m_{m-p-1})}{s_{m-p-1}}\right)\right] = f_1^m E\left[\left(\frac{(Z_{t-1} - m_{m-1})}{s_{m-1}}\right)\left(\frac{(Z_{t-p-1} - m_{m-p-1})}{s_{m-p-1}}\right)\right] + \ldots +$$

$$+ f_p^m E\left[\left(\frac{(Z_{t-p} - m_{m-p})}{s_{m-p}}\right)\left(\frac{(Z_{t-p-1} - m_{m-p-1})}{s_{m-p-1}}\right)\right] - q_1^m E\left[a_{t-1}\left(\frac{(Z_{t-p-1} - m_{m-p-1})}{s_{m-p-1}}\right)\right] +$$

$$+ E\left[a_t\left(\frac{(Z_{t-p-1} - m_{m-p-1})}{s_{m-p-1}}\right)\right]$$

$$r^m(p+1) = f_1^m r^{m-1}(p) + f_2^m r^{m-2}(p-1) + \cdots + f_p^m r^{m-p}(1) \tag{5.58}$$

Arrumando-se as equações (5.57) e (5.58) em forma matricial, obtemos o seguinte sistema de equações:

$$\begin{bmatrix} r^{m-1}(1) & 1 & \cdots & r^{m-2}(p-2) \\ r^{m-1}(2) & r^{m-2}(1) & \cdots & r^{m-3}(p-3) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ r^{m-1}(p) & r^{m-2}(p-1) & \cdots & r^{m-p}(1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1^m \\ f_2^m \\ \vdots \\ f_p^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r^m(2) \\ r^m(3) \\ \vdots \\ r^m(p+1) \end{bmatrix} \tag{5.59}$$

Através da solução do sistema de equações acima, são obtidos os parâmetros auto regressivos de cada período.

4.9

ERRO MÉDIO QUADRÁTICO DE PREVISÃO

Seja $\hat{X}_t(k)$ a previsão para X_{t+k} em t, ou seja, com o conhecimento de $X_t, X_{t-1}, \ldots$ Seja $e_t(k)$ o erro desta previsão definido por:

$$e_t(k) = X_{t+k} - \hat{X}_t(k) \tag{5.60}$$

O erro médio quadrático de previsão é dado por:

$$E\left[(e_t(k))^2\right] = VAR\left[e_t(k)\right] + E^2\left[e_t(k)\right] \tag{5.61}$$

Como no instante t, $\hat{X}_t(k)$ já é conhecido, o valor esperado e a variância de $e_t(k)$ dependem apenas de X_{t+k}. Logo, podemos escrever:

$$E\left[(e_t(k))^2\right] = VAR\left[X_{t+k} \mid x_t, x_{t-1}, \ldots\right] + \left(E\left[\left[X_{t+k} \mid x_t, x_{t-1}, \ldots\right] - \hat{X}_t(k)\right]\right)^2 \tag{5.62}$$

Portanto para minimizar o erro médio quadrático de previsão deve-se fazer:

$$\hat{X}_t(k) = E\left[X_{t+k} \mid x_t, x_{t-1}, \ldots\right] \tag{5.63}$$

Assim, a previsão do erro quadrático médio mínimo para X_{t+k} é seu valor esperado condicionado às informações disponíveis no instante em que se faz a previsão. Este resultado é geral para qualquer variável aleatória, como descrito em Maceira (1989).