

Bibliografia

ALNES, J. H. "Sense and Basic Law V in Frege's Logicism". *Nordic Journal of Philosophical Logic* 4:1, pp. 1-30, 1999.

BAKER, G.P.; HACKER, P. M. S. "Functions in *Begriffsschrift*". *Synthese* 135, pp. 273-97, 2003.

BEANEY, M. *The Frege Reader*. Oxford: Blackwell Publishers, 1997.

_____. "Frege's Use of Function-Argument Analysis and This Introduction of Truth-Values as Objects". *Grazer Philosophische Studien* 75, pp. 93-123, 2007.

BLANCHETE, P. "Frege's Reduction". *History and Philosophy of Logic*, 15, pp. 85-103, 1994.

BOOLE, G. *The Mathematical Analysis of Logic*. Bristol: Thoemmes Press, 1847.

_____. *The Laws of Thought*. New York: Prometheus Books, 1854.

BOOLOS, G. "Saving Frege from Contradiction", 1986. In: BOOLOS, 1998, pp. 171-82.

_____. "The Consistency of Frege's Foundations of Arithmetic", 1987. In: BOOLOS, 1998, pp. 183-201.

_____. "The Standard of Equality of Numbers", 1990. In: BOOLOS, 1998, pp. 202-219.

_____; Heck, R. "Die Grundlagen der Arithmetik, §§82-83", 1997. In: BOOLOS, 1998, pp. 315-333.

_____. *Logic, Logic and Logic*. Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press, 1998.

BURGE, T.. "Frege on Extension of Concepts from 1884 to 1903". *The Philosophical Review* XCIII(1), pp. 3-34, 1984.

BURGESS, J. P. "Review of Wright (1983)". *Philosophical review* 93, pp. 638-40, 1984.

BYNUM, T. W. "On The Life and Work of Gottlob Frege", 1972. In: Frege, 1972, pp. 1-54.

CANTOR, G. "Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre", 1878. In: ZERMELO (Ed.), 1962, pp. 119-33.

CHATEAUBRIAND, O. *Logical Forms Part I: Truth and Description*. Campinas: UNICAMP-CLE, 2001.

COFFA, A. "Kant, Bolzano and the Emergence of Logicism", 1982. In: DEMOPOULOS (Ed), 1995, pp. 29-40.

COOK, R.; EBERT, P. "Abstraction and Identity". *Dialectica* 59 (2), pp 121-39, 2005.

DEDEKIND, R. *Essays on theory of Numbers*. Editado e traduzido por W. Bemam. New York: Dover Publications, 1963.

DEMOPOULOS, W. "Frege and Rigorization of Analysis", 1994. In: DEMOPOULOS (Ed.), 1995, pp. 68-88.

_____. (Ed.). *Frege's Philosophy of Mathematics*. Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press, 1995.

DUARTE, A. B. *Princípio de Hume: Possibilidade de uma Filosofia (Neo) Fregeana da Aritmética?*, 2004. 156p. Dissertação (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Filosofia.

_____. "A Lógica de Boole". Artigo escrito para o exame de qualificação da Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (artigo não publicado), 2006.

DUMMETT, M. *Frege: Philosophy of Language*. London: Duckworth, 1973.

_____. *Frege: Philosophy of Mathematics*. (Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press, 1991.

FREGE, G. *Begriffsschrift. Eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*. Halle: Verlag von Louis Nebert, 1879. Reimpresso, Hildesheim: George Olms Verlag, 1998.

_____. *Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*. Breslau: Verlag von Wilhelm Koebner, 1884. Reimpresso, Hamburg: Felix Meiner Verlag, 1988.

_____. *Grundgesetze der Arithmetik. Vol I*. Jena: Pohle, 1893. Reimpresso, Hildesheim: Georg Olms Verlag, 1962.

_____. *Grundgesetze der Arithmetik. Vol II.* Jena: Pohle, 1903.
Reimpresso, Hildesheim: Georg Olms Verlag, 1962.

_____. *The Basic Laws of Arithmetic: Exposition of the System.*
Traduzido e editado por Montgomery Furth. Berkeley e Los Angeles:
University of California Press, 1967.

_____. *Conceptual Notation and Related Articles.* Traduzido e editado
por Terrell Ward Bynum. Oxford: Clarendon Press, 1972.

_____. *Wissenschaftlicher Briefwechsel.* Editado por Gottfried Gabriel,
et al. Hamburgo: Felix Meiner Verlag, 1976.

_____. *Posthumous Writings.* Editado por Hans Hermes, *et al.*
Traduzido por Peter Long e Roger White. Oxford: Basil Blackwell, 1979.

_____. *Philosophical and Mathematical Correspondence.* Traduzido por
Hans Kaal. Chicago: Basil Blackwell, 1980.

_____. *Nachgelassene Schriften.* 2. ed. Editado por Hans Hermes,
Friedrich Kambartel e Friedrich Kaulbach. Hamburg: Felix Meiner Verlag,
1983.

_____. *Collected Papers on Mathematics, Logic, and Philosophy.*
Editado por Brian McGuinness. Oxford: Basil Blackwell, 1984.

_____. *The Foundations of Arithmetik. A logico-mathematical enquiry
into the concept of number.* 2. ed. Traduzido por J. L. Austin. (Oxford: Basil
Blackwell), 1986.

_____. *Kleine Schriften.* 2. ed. Editado por Ignácio Angelelli.
Hildesheim: George Olms Verlag, 1990.

GABRIEL, G; DATHE, U. (Eds.). *Gottlob Frege: Werk und Wirkung.*
Mentis, Paderborn: Mentis Verlag, 2000.

_____; KIENSLER, W. (Eds.). *Frege in Jena: Beiträge zur
Spurensicherung.* Würzburg: Königshausen & Neumann, 1997.

GREIMANN, D.. "What is Frege's Julius Caesar Problem?" *Dialectica* 57
(3), pp. 261-78, 2003.

HAAPARANTA, L.; HINTIKKA, J. (Eds.). *Frege Synthesized*. Dordrecht: Reidel Publishing Company, 1986.

HADDOCK, G. "On Frege's Two Notions of Sense". *History and Philosophy of Logic* 7, pp. 31-41, 1986.

_____. *A Critical Introduction to the Philosophy of Gottlob Frege*. Hampshire: Ashgate Publishing, Ltd., 2006.

HALE, B. "Grundlagen §64", 1997. In: HALE; WRIGHT, 2001a, pp. 91-116.

_____.; WRIGHT, C. *The Reason's Proper Study: Essays Towards a Neo-Fregean Philosophy of Mathematics*. New York: Oxford University Press, 2001a.

_____.; _____. "To Bury Caesar...", 2001b. In: Hale; Wright, 2001a, pp. 335-96.

HALLETT, M. *Cantorian Set Theory and Limitation of Size*. Oxford: Clarendon Press, 1984.

HECK JR., R, G. "The Development of Arithmetic in Frege's Grundgesetze der Arithmetik", 1993. In: DEMOPOULOS (Ed.), 1995, pp. 257-94.

_____. "Definition by Induction in Frege's *Grundgesetze der Arithmetik*", 1995. In: DEMOPOULOS (Ed.), 1995, pp. 295-333.

_____. (Ed.). *Language, Thought and Logic*. Oxford: Oxford University Press, 1997a.

_____. "The Julius Caesar Objection", 1997b. In: HECK JR., 1997a, pp. 273-308.

_____. "Julius Caesar and Basic Law V". *Dialectica* 59 (2), 161-78, 2005.

_____. "Formal Arithmetic Before *Grundgestze*". Manuscrito não-publicado.

HODES, H. "Logicism and the Ontological Commitments of Arithmetic". *Journal of Philosophy* LXXXI (3), pp. 123-49, 1984.

HUME, D. *Tratado da Natureza Humana*. São Paulo: Editora Unesp, 2001.

JANSSEN, T. "Frege, Contextuality and Compositionality". *Journal of Logic, Language, and Information* 10, pp. 115-36, 2001.

KANT, I. *Crítica da Razão Pura*. Traduzido por Manuela Pinto dos Santos

e Alexandre Fradique Morujão. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 1997.

_____. *Prolegomena to Any Future Metaphysics*. Traduzido por James Fieser. Forgotten Books, 2008.

KASCHMIEDAR, H. *Beurteilerer Inhalt und Gedanke in der Philosophie Gottlob Freges*. Hildesheim: Georg Olms Verlag, 1989.

KEMP, G. "Caesar from Frege's Perspective". *Dialectica* 59 (2), 179-99, 2005.

KENNEDY, H. C. (Ed.). *Selected works of Giuseppe Peano*. Toronto : University of Toronto Press, 1973.

KREISER, L. *Gottlob Frege: Leben-Werk-Zeit*. Hamburg: Felix Meiner Verlag, 2001.

KUTSCHERA, F. *Gottlob Frege*. Berlin: Walter de Gruyter, 1989.

LANDAU, E. *Foundations of Analysis*. 3. ed. New York: Chelsea, 1966.

LANDINI, G. "Decomposition and Analysis in Frege's *Grundgesetze*". *History and Philosophy of Logic* 17, pp. 121-39, 1996

_____. "Frege's Cardinals as Concept-Correlates". *Erkenntnis* 65, pp. 207-43, 2006.

_____. "The Ins and Outs of Frege's Way Out". *Philosophia Mathematica* (III) 14, pp. 1-25, 2006.

LEVINE, J. "Analysis, Abstraction Principles and Slingshot Arguments". *Ratio* 19 (1), pp. 43-63, 2006.

MACBETH, D. "Striving for Truth in the Practice of Mathematics Kant and Frege". *Grazer Philosophische Studien* 75, 65-92, 2007.

_____. *Frege's Logic*. Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 2005.

MACFARLANE, J. "Frege, Kant, and the Logic in Logicism". *The Philosophical Review* 111, pp. 25-65, 2002.

MAKIN, G. *The Metaphysicians of Meaning: Russell and Frege on Sense and Denotation*. Londres: Routledge, 2000.

MENDELSON, R. L. *The Philosophy of Gottlob Frege*. New York: Cambridge University Press, 2005.

MILNE, P. "Frege's Context Principle". *Mind* 95 (380), 491-495, 1986.

Nusenoff, R. "Frege on Identity Sentences". *Philosophy and Phenomenological Research* 39 (3), pp. 438-42, 1979.

PARSONS, C. "Frege's Theory of Number", 1964. In: DEMOPOULOS (Ed.), 1995, pp. 182-210.

PEANO, G. "Le Definizioni per Astrazione". *Bollettini della Matthesis* VII, pp. 106-120, 1915.

_____. "Definitions in Mathematics", 1921. In: KENNEDY (Ed.), 1973, pp. 235-246.

RAYO, A. "Frege's Unofficial Arithmetic". *The Journal of Symbolic Logic* 67 (4), pp. 1623-38, 2001.

RECK, E. (Ed.). *From Frege to Wittgenstein: Perspective on Early Analytic Philosophy*. New York: Oxford University Press, 2002.

RICKETTS, T. "Truth-Values and Courses-of-Values in Frege's Grundgesetze", 1997. In: TAIT (Ed.), 1998, pp. 187-211.

RODRIGUES FILHO, A. A. *Frege, Fazedores de Verdade e o Argumento da Funda*, 2007. 223p. Tese (Doutorado) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Filosofia.

RUFFINO, M. *Frege's Notion of Logical Objects*, 1996. 298p. Tese (Doutorado) - Universidade da Califórnia, Los Angeles.

_____. "The Primacy of Concepts and the Priority of Judgments in Frege's Logic". *Grazer Philosophische Studien* 56, pp. 73-90, 1998.

_____. "Wahrheitswerte als Gegenstände und die Unterscheidung zwischen Sinn und Bedeutung". In: Gabriel; Kienzler (Eds.), 1997, pp.139-148.

_____. "Extensions as Representative Objects in Frege's Logic". *Erkenntnis* 53 (2), pp. 239-52, 2000.

_____. "Why Frege would not be a Neo-Fregean". *Mind* 112, pp. 51-78, 2003.

RUSSELL, B. *Principles of Mathematics*. Reimpresso, New York: W.W. Norton & Company, 1996.

_____. *Introduction to Mathematical Philosophy*. Reimpresso, New York: Dover Publications, 1993.

SCHIRN, M. (Ed.). *Studies on Frege I: Logic and Philosophy of Mathematics*. Stuttgart: Friedrich Frommann Verlag, 1976.

_____. "Begriff und Begriffsumfang. Zu Freges Anzahldefinition in den *Grundlagen der Arithmetik*. *History and Philosophy of Logic* 4, pp. 117-43, 1983.

_____. (Ed.). *Frege: Importance and Legacy* Berlin e New York: Walter de Gruyter, 1996a.

_____. "On Frege's Introduction of Cardinal Numbers as Logical Objects", 1996b. In: SCHIRN (Ed.), 1996a, pp. 114-173.

_____. "Fregean Abstraction, Referential Indeterminacy and The Logical Foundations of Arithmetic". *Erkenntnis* 59, pp. 203-232, 2003.

_____. "Hume's Principle and Axiom V Reconsidered: Critical Reflections on Frege and His Interpreters". *Synthese* 148, pp. 171-227, 2006.

SLUGA, H. *Gottlob Frege*. London: Routledge and Kegan Paul, 1980.

SNAPPER, J. "Contextual Definition: What Frege Might Have Meant but Probably Didn't". *Noûs* 8, pp. 259-72, 1974.

SULLIVAN, P. "Frege on the Statement of Number". *Philosophy and Phenomenological Research* 1 (3), pp. 595-603, 1990.

TABATA, H. "Frege's Theorem and his Logic". *History and Philosophy of Logic* 21, pp. 265-95, 2000.

TAIT, W. (Ed.). *Early Analytic Philosophy: Essays in honor of Leonard Linsky* Lasalle: Open Court, 1997.

TAPENDEN, J. "The Caesar Problem in its Historical Context: Mathematical Background". *Dialectica* 59 (2), pp. 237-64, 2005.

VAN HEIJENOORT, J. "Sense in Frege". *Journal of Philosophical Logic* 6, pp. 93-102, 1977.

_____. "Frege on sense Identity". *Journal of Philosophical Logic* 6, pp. 103-8, 1977.

VERAART, A. "Geschichte des wissenschaftlichen Nachlasses Gottlob Freges und seiner Edition. Mit einem Katalog des ursprünglichen Bestands der nachgelassenen Schriften Freges". In: SCHIRN, 1976, pp. 49-106.

VIKKO, R. "The Reception of Frege's Begriffsschrift". *Historia Mathematica* 25, 412-22, 1998.

WAGNER, S. "Frege's Definition of Number". *Notre Dame Journal of Formal Logic* 24 (1), pp. 1-21, 1983.

WALKER, J. D. B. *A Study of Frege*. Oxford: Basil Blackwell, 1965.

WILSON, M. "To Err is Humean". *Philosophia Mathematica* 7, pp. 247-57, 1999.

WRIGHT, C. *Frege's Conception of Numbers as Objects*. Aberdeen: Aberdeen University Press, 1983.

ZERMELO, E. (Ed.). *Gesammelte Abhandlungen Mathematischen und Philosophischen Inhalts*. Hildesheim: Georg Olms, 1962.

Apêndice 1⁵³⁹

Provas de independências das fórmulas (IV*), (BB) e (NN) em relação aos axiomas de BS

1. O Cálculo BS-Prop

A linguagem de **BS** é inteiramente diferente da linguagem dos sistemas lógicos formais contemporâneos. De fato, poderia ser sem sentido e anacrônico tentar apresentar o conteúdo de **BS** como um sistema formal. Porém, é possível interpretar a linguagem de **BS** em uma linguagem formalizada contemporânea. Foi assim que Lukasiewicz mostrou que os axiomas (1), (2), (28), (31) e (41) são independentes uns dos outros e que o axioma (8) de **BS** não é independente, sendo provável a partir dos axiomas (1) e (2). Neste sentido, iremos propor um cálculo, que será chamado BS-Prop, no qual tentaremos interpretar os axiomas (1), (2), (28), (31), (41), (52) e (54) de **BS**. A linguagem de BS-Prop é diferente da linguagem usual dos sistemas lógicos formais proposicionais contemporâneos, uma vez que, além de variáveis proposicionais, do conectivo unário ' $\neg$ ' (a negação) e do conectivo binário ' $\supset$ ' (a implicação), há um conectivo binário ' $\equiv$ ' que será chamado identidade de conteúdo.

A base axiomática para BS-prop é dada pelos seguintes esquemas de axiomas:

- (1) $(A \supset (B \supset A))$
- (2) $((A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C)))$
- (3) $(\neg \neg A \supset A)$
- (4) $(A \supset \neg \neg A)$
- (5) $((A \supset B) \supset (\neg B \supset \neg A))$
- (6) $(A \equiv A)$
- (7) $((A \equiv B) \supset (C \supset C[A/B]))$

A regra de inferência utilizada é *Modus Ponens*: $A, A \supset B \vdash B$

No axioma 7, ' $C[A/B]$ ' é uma notação para uma fórmula que resulta de C pela

539 Esta prova foi-nos sugerida pela Prof. (a) Dr. Andrea Loparic.

substituição de uma ou mais ocorrência de A por uma ou mais ocorrências de B . Este axioma pretende ser um substituto da proposição (52) de **BS**, quando ' $\equiv$ ' é aplicado a fórmulas.

Chamaremos de CPC (Cálculo Proposicional Clássico) o sub-cálculo de Prop-BS que tem os axiomas de (1) a (5) expressáveis na linguagem clássica (LC) contendo apenas variáveis proposicionais, a negação, implicação e *Modus Ponens*. Os seguintes fatos são válidos em CPC e LC:

- (I) CPC é uma base axiomática completa para a lógica clássica das funções bivalentes em LC, ou seja, o conjunto dos teoremas de CPC é o mesmo que o das sentenças tautológicas clássicas de LC.;
- (II) LC é funcionalmente completa, isto quer dizer, todas as funções bivalentes de verdade podem ser expressas em LC

A prova de independência de (**IV***), (**BB**) e (**NN**) mostra que BS-Prop não é um cálculo clássico, caso contrário, ' $\equiv$ ' teria de expressar uma função de verdade bivalente. Neste caso, alguma fórmula de LC deveria ser dedutivamente equivalente a ' $A \equiv B$ '⁵⁴⁰.

Mas que função de verdade poderia ser expressa por $(A \equiv B)$? Vamos considerar todas as possibilidades de distribuição dos valores de verdade V e F nas variáveis A e B :

$\equiv$	V	F
V	1	2
F	3	4

Como temos o axioma (6) $(A \equiv A)$, então nas posições 1 e 4 temos de ter o Verdadeiro. Por outro lado, uma vez que $((A \equiv B) \supset (A \supset B))$ é demonstrável a partir do axioma (7) e, portanto, esta fórmula tem de ser verdadeira, então quando $(A \supset B)$ é

⁵⁴⁰ Obviamente, BS-Prop seria uma base, na sua linguagem (LC + $\equiv$), para a lógica das funções de verdade bivalentes.

falsa (na posição 2), $(A \equiv B)$ também deve ser. Por outro lado, $((A \equiv B) \supset (B \supset A))$ é demonstrável no sistema (a partir de 57 de **BS**) e uma vez que $(B \supset A)$ é falsa na posição 3, então $(A \equiv B)$ deveria ser obrigatoriamente falsa nesta posição também. Portanto, em BS-Prop, as únicas candidatas que restariam para expressar $(A \equiv B)$ como uma função de verdade bivalente seriam todas as fórmulas equivalentes a: $\neg((A \supset B) \supset \neg(B \supset A))$ ⁵⁴¹.

Destarte, se ' $\equiv$ ' expressasse uma função de verdade bivalente, $(A \equiv B)$ deveria ser dedutivamente equivalente a $\neg((A \supset B) \supset \neg(B \supset A))$. Mas, pela nossa hipótese, em BS-Prop, o teorema da dedução teria de ser válido e, portanto, o esquema $(\neg((A \supset B) \supset \neg(B \supset A)) \supset (A \equiv B))$ deveria ser demonstrável.

Contudo, recorrendo-se a uma matriz com três valores, mostraremos que um esquema dedutivamente equivalente a $(\neg((A \supset B) \supset \neg(B \supset A)) \supset (A \equiv B))$ não é demonstrável em BS-Prop.

Portanto, ' $A \equiv B$ ' não expressa a equivalência material e, assim, não expressa nenhuma função de verdade bivalente. Disto, podemos concluir que BS-Prop não é um cálculo clássico.

2 – Matriz Trivalente para BS-Prop

Seja $M = \langle \{1, 2, 3\}, \{1\}, \neg, \supset, \equiv \rangle$ uma matriz trivalente com o valor distinguido 1.

Sejam também as tabelas abaixo para os conectivos de BS-Prop.

Tabela da Negação

A	$\neg A$
1	2
2	1
3	1

⁵⁴¹ Esta fórmula expressa a equivalência material.

Tabela da Implicação

$\rightarrow$	1	2	3
1	1	2	2
2	1	1	1
3	1	1	1

Tabela da Identidade de Conteúdo

$\equiv$	1	2	3
1	1	3	3
2	3	1	3
3	3	3	1

3 – M-Validade dos Axiomas de BS-Prop

Dizemos que uma fórmula é M-válida se ela recebe valor distinguido 1 para qualquer atribuição dada às suas variáveis proposicionais.

Agora, verificaremos se os axiomas de (1) a (7) recebem valor 1 para todas as atribuições, mostrando que todos são M-válidos.

Axioma 1: $(A \supset (B \supset A))$

A	B	$(B \supset A)$	$(A \supset (B \supset A))$
1	1	1	1
1	2	1	1
1	3	1	1
2	1	2	1
2	2	1	1
2	3	1	1
3	1	2	1
3	2	1	1
3	3	1	1

Axioma 3 e Axioma 4: $(\neg\neg A \supset A)$ e $(A \supset \neg\neg A)$

A	$\neg A$	$\neg\neg A$	$(\neg\neg A \supset A)$	$(A \supset \neg\neg A)$
1	2	1	1	1
2	1	2	1	1
3	1	2	1	1

Axioma 2: $((A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C)))$

A	B	C	$(B \supset C)$	$(A \supset (B \supset C))$	$(A \supset B)$	$(A \supset C)$	$((A \supset B) \supset (A \supset C))$	$(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$
1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	2	2	2	1	2	2	1
1	1	3	2	2	1	2	2	1
1	2	1	1	1	2	1	1	1
1	2	2	1	1	2	2	1	1
1	2	3	1	1	2	2	1	1
1	3	1	1	1	2	1	1	1
1	3	2	1	1	2	2	1	1
1	3	3	1	1	2	2	1	1
2	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	2	1	1	1	1	1
2	1	3	2	1	1	1	1	1
2	2	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	1	1	1	1	1	1
2	2	3	1	1	1	1	1	1
2	3	1	1	1	1	1	1	1
2	3	2	1	1	1	1	1	1
2	3	3	1	1	1	1	1	1
3	1	1	1	1	1	1	1	1
3	1	2	2	1	1	1	1	1
3	1	3	2	1	1	1	1	1
3	2	1	1	1	1	1	1	1
3	2	2	1	1	1	1	1	1
3	2	3	1	1	1	1	1	1
3	3	1	1	1	1	1	1	1
3	3	2	1	1	1	1	1	1
3	3	3	1	1	1	1	1	1

Axioma 5: $((A \supset B) \supset (\neg B \supset \neg A))$

A	B	$\neg B$	$\neg A$	$(A \supset B)$	$(\neg B \supset \neg A)$	$((A \supset B) \supset (\neg B \supset \neg A))$
1	1	2	2	1	1	1
1	2	1	2	2	2	1
1	3	1	2	2	2	1
2	1	2	1	1	1	1
2	2	1	1	1	1	1
2	3	1	1	1	1	1
3	1	2	1	1	1	1
3	2	1	1	1	1	1
3	3	1	1	1	1	1

Axioma 6: $(A \equiv A)$

A	$(A \equiv A)$
1	1
2	1
3	1

Axioma 7: $((A \equiv B) \supset (C \supset C[A/B]))$

O axioma 7 tem a forma implicativa, portanto ele só poderia receber um valor diferente de 1 no caso do antecedente receber o valor 1. Mas, $(A \equiv B)$ só receberá valor 1, quando A e B receberem o mesmo valor. Ora, se A e B tiverem o mesmo valor, C e $C[A/B]$ terão necessariamente o mesmo valor, qualquer que seja C . Mas, pela tabela da implicação, quando o antecedente e o consequente recebem o mesmo valor, a implicação receberá o valor 1. Assim, sempre que $(A \equiv B)$ tiver valor 1, $(C \supset C[A/B])$ terá o valor 1 também. Portanto, o axioma 7 é M-válido.

Teorema 1: Todos os axiomas de BS-Prop são M-válidos.

Se chamarmos grotescas todas as fórmulas que recebem o valor 1 para todas as atribuições, então:

Lema: Modus Ponens (MP) preserva a propriedade de ser grotesca.

Esboço de Prova: Assuma que A e $A \supset B$ são grotescas. Assuma, por contradição, que B (inferida por MP) não é grotesca. Ou seja, B recebe valor 2 ou 3. Mas, uma

vez que A é grotesco, ele recebe valor 1 sempre. Assim, existiria alguma atribuição tal que A é 1 e B é 2 ou 3. Mas, nestes casos, seguindo a tabela de implicação, $A \supset B$ receberia valor 2, contradizendo o fato inicial de que $A \supset B$ tem a propriedade de ser grotesca.

Corolário: Todos os teoremas de BS-Prop são grotescos, portanto sempre recebem valor 1, ou seja, são M-válidos.

O próximo passo é mostrar que **(IV*)**, **(NN)** e **(BB)** não são grotescos. Para isto, basta mostrar apenas a existência de uma M-valorização que dá um valor diferente de 1 para cada uma destas fórmulas.

4 – Independência de **(IV*)**, **(NN)** e **(BB)**

Independência de IV*: $(\neg(A \equiv \neg B) \supset (A \equiv B))$

Há três possibilidades nas quais **(IV*)** não recebe valor 1. Estas são:

A	B	$\neg B$	$(A \equiv \neg B)$	$\neg(A \equiv \neg B)$	$(A \equiv B)$	$(\neg(A \equiv \neg B) \supset (A \equiv B))$
2	3	1	3	1	3	2
3	1	2	3	1	3	2
3	2	1	3	1	3	2

Independência de (BB): $((A \supset B) \supset ((B \supset A) \supset (A \equiv B)))$

Há duas possibilidades na qual **(BB)** não recebe valor 1

A	B	$(A \supset B)$	$(B \supset A)$	$(A \equiv B)$	$(B \supset A) \supset (A \equiv B)$	$((A \supset B) \supset ((B \supset A) \supset (A \equiv B)))$
2	3	1	1	3	2	2
3	2	1	1	3	2	2

Independência de (NN): $\neg\neg A \equiv A$

Há uma possibilidade na qual **(NN)** não recebe valor 1.

A	$\neg A$	$\neg\neg A$	$\neg\neg A \equiv A$
3	1	2	3

Apêndice 2

Prova de um análogo do teorema 96 de GGA

$$\begin{array}{l} \vdash \#_x F(x) \equiv \#_x G(x) \\ \quad \vdash_{\alpha} (F(\alpha) \equiv G(\alpha)) \end{array}$$

Da seguinte instância de PH6, temos

$$\begin{array}{l} \vdash \#_x F(x) \equiv \#_x G(x) \\ \quad \vdash \text{Corr}_{\alpha\beta}(\alpha \equiv \beta)(F\alpha, G\beta) \\ \quad \vdash \text{Func}_{\alpha\beta}(\alpha \equiv \beta) \\ \quad \vdash \text{UpM}_{\alpha\beta}(\alpha \equiv \beta) \end{array} \quad (1)$$

Dos teoremas 1 e 2 de 4 e MP, obtemos

$$\begin{array}{l} \vdash \#_x F(x) \equiv \#_x G(x) \\ \quad \vdash \text{Corr}_{\alpha\beta}(\alpha \equiv \beta)(F\alpha, G\beta) \end{array} \quad (2)$$

Isto é equivalente a

$$\begin{array}{l} \vdash \#_x F(x) \equiv \#_x G(x) \\ \quad \vdash_{\mathfrak{d}} F(\mathfrak{d}) \\ \quad \quad \vdash_{\alpha} G(\alpha) \\ \quad \quad \quad \vdash \mathfrak{d} \equiv \alpha \\ \quad \vdash_{\alpha} G(\alpha) \\ \quad \quad \vdash_{\mathfrak{d}} F(\mathfrak{d}) \\ \quad \quad \quad \vdash \mathfrak{d} \equiv \alpha \end{array} \quad (3)$$

De 58BS, temos

$$\begin{array}{l} \vdash F(b) \\ \quad \vdash b \equiv b \\ \quad \vdash_{\mathfrak{d}} F(\mathfrak{d}) \\ \quad \quad \vdash \mathfrak{d} \equiv b \end{array} \quad (4)$$

De 54BS e MP, derivamos

$$\begin{array}{l} \vdash F(b) \\ \quad \vdash F(\mathfrak{d}) \\ \quad \quad \vdash \mathfrak{d} \equiv b \end{array}$$

(5)

De 58BS, temos

$$\begin{array}{l} \vdash F(b) \equiv G(b) \\ \quad \vdash (F(\mathfrak{a}) \equiv G(\mathfrak{a})) \end{array}$$

(6)

De 52BS, temos

$$\begin{array}{l} \vdash G(b) \\ \quad \vdash F(b) \\ \quad \vdash F(b) \equiv G(b) \end{array}$$

(7)

De (6), (7) e TR, obtemos

$$\begin{array}{l} \vdash G(b) \\ \quad \vdash F(b) \\ \quad \quad \vdash (F(\mathfrak{a}) \equiv G(\mathfrak{a})) \end{array}$$

(8)

De (5), (8) e TR, obtemos

$$\begin{array}{l} \vdash G(b) \\ \quad \vdash F(\mathfrak{d}) \\ \quad \quad \vdash \mathfrak{d} \equiv b \\ \quad \quad \vdash (F(\mathfrak{a}) \equiv G(\mathfrak{a})) \end{array}$$

(9)

Aplicando CGC1, obtemos

$$\begin{array}{l} \vdash G(\mathfrak{a}) \\ \quad \vdash F(\mathfrak{d}) \\ \quad \quad \vdash \mathfrak{d} \equiv \mathfrak{a} \\ \quad \quad \vdash (F(\mathfrak{a}) \equiv G(\mathfrak{a})) \end{array}$$

(10)

De 58BS, temos

$$\begin{array}{l}
 \vdash F(b) \\
 \quad \vdash b \equiv b \\
 \quad \vdash F(d) \\
 \quad \quad \vdash d \equiv b
 \end{array}$$

(11)

De 54BS e MP, temos

$$\begin{array}{l}
 \vdash G(d) \\
 \quad \vdash G(a) \\
 \quad \quad \vdash d \equiv a
 \end{array}$$

(11)

De 58BS, temos

$$\begin{array}{l}
 \vdash F(d) \equiv G(d) \\
 \quad \vdash (F(a) \equiv G(a))
 \end{array}$$

(12)

De 57BS, temos

$$\begin{array}{l}
 \vdash F(d) \\
 \quad \vdash G(d) \\
 \quad \vdash F(d) \equiv G(d)
 \end{array}$$

(13)

De (12), (13) e TR, temos

$$\begin{array}{l}
 \vdash F(d) \\
 \quad \vdash G(d) \\
 \quad \vdash (F(a) \equiv G(a))
 \end{array}$$

(14)

De (11), (14) e TR, derivamos

$$\begin{array}{l}
 \vdash F(d) \\
 \quad \vdash G(a) \\
 \quad \quad \vdash d \equiv a \\
 \quad \vdash (F(a) \equiv G(a))
 \end{array}$$

(15)

Aplicando CGC1, obtemos

$$\begin{array}{l}
 \vdash \overbrace{\quad}^{\mathfrak{d}} F(\mathfrak{d}) \\
 \quad \vdash \overbrace{\quad}^{\mathfrak{a}} G(\mathfrak{a}) \\
 \quad \quad \vdash \mathfrak{d} \equiv \mathfrak{a} \\
 \vdash \underbrace{\quad}_{\mathfrak{a}} (F(\mathfrak{a}) \equiv G(\mathfrak{a}))
 \end{array}$$

(16)

De (3), (10), (16) e TR, obtemos

$$\begin{array}{l}
 \vdash \#_x F(x) \equiv \#_x G(x). \\
 \vdash \underbrace{\quad}_{\mathfrak{a}} (F(\mathfrak{a}) \equiv G(\mathfrak{a}))
 \end{array}$$

Apêndice 3

Suposta prova da fórmula (V*)

$$\vdash \alpha' \epsilon' f(\epsilon, \alpha) = \alpha' \epsilon' g(\epsilon, \alpha) = \underbrace{a \quad b}_{\sim} ((f(a, b) = g(a, b)))$$

Na suposta prova, deveríamos mostrar as duas proposições:

$$(Va^*) \quad \vdash \begin{array}{l} \alpha' \epsilon' f(\epsilon, \alpha) = \alpha' \epsilon' g(\epsilon, \alpha) \\ \underbrace{a \quad b}_{\sim} (f(a, b) = g(a, b)) \end{array}$$

$$(Vb^*) \quad \vdash \begin{array}{l} \underbrace{a \quad b}_{\sim} (f(a, b) = g(a, b)) \\ \alpha' \epsilon' f(\epsilon, \alpha) = \alpha' \epsilon' g(\epsilon, \alpha) \end{array}$$

O que desejamos mostrar é a dependência de (Vb*) em relação ao teorema 1 de **GGA**, que por sua vez depende do teorema IVa e dos valores de verdade como objetos.

Assumiremos aqui os teoremas (Va) e (Vb) que são derivados diretamente do Axioma V:

$$(Va) \quad \vdash \begin{array}{l} \epsilon' f(\epsilon) = \epsilon' g(\epsilon) \\ \underbrace{a}_{\sim} (f(a) = g(a)) \end{array}$$

$$(Vb) \quad \vdash \begin{array}{l} \underbrace{a}_{\sim} (f(a) = g(a)) \\ \epsilon' f(\epsilon) = \epsilon' g(\epsilon) \end{array}$$

Prova de (Va*)

De IIa, temos a seguinte instância

$$\vdash \begin{array}{l} \underbrace{b}_{\sim} (f(a, b) = g(a, b)) \\ \underbrace{a \quad b}_{\sim} (f(a, b) = g(a, b)) \end{array}$$

(1).

Da seguinte instância de IIa

$$\vdash \begin{array}{l} f(a, b) = g(a, b) \\ \underbrace{b}_{\sim} (f(a, b) = g(a, b)) \end{array}$$

(2)

(1) e TR, obtemos

$$\begin{array}{l} \vdash f(a, b) = g(a, b) \\ \vdash \underbrace{a \quad b}_{(3)} (f(a, b) = g(a, b)) \end{array}$$

Por CGC1, obtemos

$$\begin{array}{l} \vdash \underbrace{a}_{(3)} (f(a, b) = g(a, b)) \\ \vdash \underbrace{a \quad b}_{(4)} (f(a, b) = g(a, b)) \end{array}$$

Da seguinte instância de (Va)

$$\begin{array}{l} \vdash \epsilon' f(\epsilon, b) = \epsilon' g(\epsilon, b) \\ \vdash \underbrace{a}_{(4)} (f(a, b) = g(a, b)) \end{array}$$

(4) e TR, obtemos

$$\begin{array}{l} \vdash \epsilon' f(\epsilon, b) = \epsilon' g(\epsilon, b) \\ \vdash \underbrace{a \quad b}_{(5)} (f(a, b) = g(a, b)) \end{array}$$

Por CGC1, temos

$$\begin{array}{l} \vdash \underbrace{b}_{(5)} (\epsilon' f(\epsilon, b) = \epsilon' g(\epsilon, b)) \\ \vdash \underbrace{a \quad b}_{(6)} (f(a, b) = g(a, b)) \end{array}$$

Da seguinte instância de Va

$$\begin{array}{l} \vdash \alpha' \epsilon' f(\epsilon, \alpha) = \alpha' \epsilon' g(\epsilon, \alpha) \\ \vdash \underbrace{b}_{(6)} (\epsilon' f(\epsilon, b) = \epsilon' g(\epsilon, b)) \end{array}$$

(6) e TR, obtemos

$$\begin{array}{l} \vdash \alpha' \epsilon' f(\epsilon, \alpha) = \alpha' \epsilon' g(\epsilon, \alpha) \\ \vdash \underbrace{a \quad b}_{(Va^*)} (f(a, b) = g(a, b)) \end{array}$$

Prova de (Vb*)

Da seguinte instância de IIIc (ou 52BS), temos

$$\begin{array}{l} \vdash f(a, b) = a \cap (b \cap \alpha' \epsilon' g(\epsilon, \alpha)) \\ \vdash \underbrace{\begin{array}{l} f(a, b) = a \cap (b \cap \alpha' \epsilon' f(\epsilon, \alpha)) \\ \alpha' \epsilon' f(\epsilon, \alpha) = \alpha' \epsilon' g(\epsilon, \alpha) \end{array}}_{(7)} \end{array}$$

Observação: aqui ' $f\xi$ ' que ocorre em IIIc foi substituída pela seguinte fórmula:

$$f(a, b) = a \cap (b \cap \xi)$$

Uma vez que há o teorema 2 de GGA

$$\vdash f(a, b) = a \cap (b \cap \alpha' \epsilon' f(\epsilon, \alpha))$$

aplicando MP, obtemos

$$\begin{array}{l} \vdash f(a, b) = a \cap (b \cap \alpha' \epsilon' g(\epsilon, \alpha)) \\ \quad \vdash \alpha' \epsilon' f(\epsilon, \alpha) = \alpha' \epsilon' g(\epsilon, \alpha) \end{array}$$

(8)

Da seguinte instância de IIIc

$$\begin{array}{l} \vdash g(a, b) = f(a, b) \quad 542 \\ \quad \vdash g(a, b) = a \cap (b \cap \alpha' \epsilon' g(\epsilon, \alpha)) \\ \quad \vdash f(a, b) = a \cap (b \cap \alpha' \epsilon' g(\epsilon, \alpha)) \end{array},$$

teorema 2 de GGA e MP, derivamos

$$\begin{array}{l} \vdash g(a, b) = f(a, b) \\ \quad \vdash f(a, b) = a \cap (b \cap \alpha' \epsilon' g(\epsilon, \alpha)) \end{array}$$

(9)

De (8), (9) e TR, obtemos

$$\begin{array}{l} \vdash g(a, b) = f(a, b) \\ \quad \vdash \alpha' \epsilon' f(\epsilon, \alpha) = \alpha' \epsilon' g(\epsilon, \alpha) \end{array}$$

(10)

Da seguinte instância de IIIf de GGA

$$\begin{array}{l} \vdash f(a, b) = g(a, b) \\ \quad \vdash g(a, b) = f(a, b) \end{array},$$

(10) e TR, derivamos

$$\begin{array}{l} \vdash f(a, b) = g(a, b) \\ \quad \vdash \alpha' \epsilon' f(\epsilon, \alpha) = \alpha' \epsilon' g(\epsilon, \alpha) \end{array}$$

(11)

Por CGC1, obtemos

$$\begin{array}{l} \vdash \overline{a \sim b} (f(a, b) = g(a, b)) \\ \quad \vdash \alpha' \epsilon' f(\epsilon, \alpha) = \alpha' \epsilon' g(\epsilon, \alpha) \end{array}$$

(Vb*)

De (Va*), (Vb*), IVa e MP, obtemos (V*).

542 Aqui substituímos ' $f\xi$ ' por ' $g(a, b) = \xi$ '.

Apêndice 4

Prova das fórmulas

$$(1) \vdash (a \equiv_{\tau} a)$$

$$(2) \vdash \vdash (a \equiv_{\tau} b)$$

$$\begin{array}{l} \vdash \vdash \vdash a \\ \vdash \vdash \vdash b \\ \vdash \vdash b \\ \vdash a \end{array}$$

Prova de (1)

Da seguinte instância de de 57BS, temos

$$\begin{array}{l} \vdash a \\ \vdash \vdash a \\ \vdash (a \equiv_{\tau} a) \end{array}$$

(1)

e CP, obtemos

$$\begin{array}{l} \vdash \vdash (a \equiv_{\tau} a) \\ \vdash \vdash a \end{array}$$

(2)

Da seguinte instância de 52BS

$$\begin{array}{l} \vdash \vdash \vdash a \\ \vdash \vdash \vdash a \\ \vdash (a \equiv_{\tau} a) \end{array}$$

(3)

e CP, derivamos

$$\begin{array}{l} \vdash \vdash (a \equiv_{\tau} a) \\ \vdash a \end{array}$$

(4)

De (2), (3) e TMI, obtemos

$$\vdash (a \equiv_{\tau} a).$$

Prova de 2

Da seguinte instância de 57BS,

$$\begin{array}{l} \vdash a \\ \quad \vdash b \\ \quad (a \equiv_{\tau} b) \end{array}$$

(5)

e (CP), obtemos

$$\begin{array}{l} \vdash (a \equiv_{\tau} b) \\ \quad \vdash a \\ \quad \quad \vdash b \end{array}$$

(6)

Da seguinte instância de 52BS

$$\begin{array}{l} \vdash b \\ \quad \vdash a \\ \quad (a \equiv_{\tau} b) \end{array}$$

(7)

e CP, obtemos

$$\begin{array}{l} \vdash (a \equiv_{\tau} b) \\ \quad \vdash b \\ \quad \quad \vdash a \end{array}$$

(8)

Da seguinte instância de 27BS

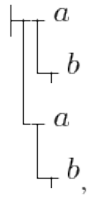
$$\begin{array}{l} \vdash b \\ \quad \vdash a \\ \quad \quad \vdash b \\ \quad \quad \quad \vdash a, \end{array}$$

(8) e TR, derivamos

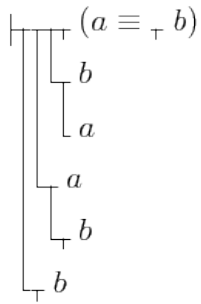
$$\begin{array}{l} \vdash (a \equiv_{\tau} b) \\ \quad \vdash a \\ \quad \quad \vdash b \\ \quad \quad \quad \vdash a \end{array}$$

(9)

Da seguinte instância de 27BS

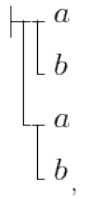


(9) e TR, inferimos

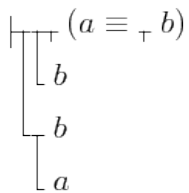


(10)

Da seguinte instância de 27BS

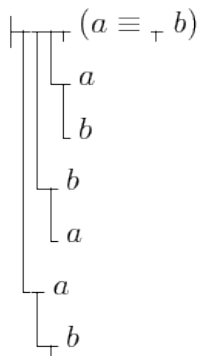


(8) e TR, obtemos



(11)

De (10), (11) e TMI, derivamos



(12)

De (6), (12) e TMI, obtemos

$$\begin{array}{l} \vdash (a \equiv_{\tau} b) \\ \vdash a \\ \vdash b \\ \vdash b \\ \vdash a \end{array}$$