3
Lógica e Aritmética em GLA e GGA

3.1.
GLA, Princípio de Hume e Axioma V

Nosso principal objetivo nesta seção é discutir questões formais em relação a **GLA**, partindo de duas hipóteses básicas: (1) **GLA** foi escrito para ser uma introdução ao livro mencionado na carta a Marty; (2) o sistema lógico subjacente ao suposto livro escrito na conceitografia em 1882 é justamente o sistema de **BS**, provavelmente com a adição dos axiomas IIb, IIb*[256].

Argumentaremos que a derivação de **PH** a partir da definição explícita do operador-cardinalidade e do **Axioma V** depende de (**BB**), o qual não é provável em **BS**.

Isto significa que Frege não poderia ter uma teoria das extensões de conceito em 1884 e, portanto, também em 1882. Consequentemente, podemos inferir que a introdução destes objetos em **GLA** foi um ato tardio cujo objetivo era evitar o problema de Júlio César[257] [258] e que a demora na publicação de **GGA** foi devido à busca de uma solução aos problemas que serão apresentados mais adiante.

No fim do prefácio a **BS**, Frege escreveu:

256 Ademais, como tentaremos argumentar, Frege deve ter introduzido **PH** para derivar os axiomas de Peano. Com operador-cardinalidade, ele foi capaz de definir os conceitos de *Sucessor*, *Número Natural*, *Zero*, *Um.* Frege também introduziu definições dos conceitos *Relação 1-1* e *Correlação entre dois conceitos por meio de uma relação*.

257 Argumentaremos, porém, que o problema não é evitado.

258 Ruffino (1996, 2000 e 2003) acredita que a introdução das extensões de conceitos em **GLA** não está relacionada com a solução ao Problema de Júlio César, mas sim relacionada com a redução dos números a objetos lógicos, que seriam as extensões. Por exemplo, ele escreve: "The main goal Frege's philosophical enterprise up to 1903 is to show that arithmetic is reducible to the basic laws of logic. Hence, since numbers are objects for Frege, a central part of his logicism consists in showing that numbers are reducible to – or composed of -primitive logical objects... Hence, coherently with this view, he should pursue a reduction of numbers to extensions of concepts, and this is exactly what he does in *GLA* §68 (from 1884) and later in *GGA* (from 1893). His definition of numbers as extensions both in *GLA* and in *GGA* is hence not motivated solely by the technical convenience of doing so, or, as some scholars tend to think, by the pressure coming from the so-called Julius Caesar problem. But why do extensions of concept have such a special status for Frege? As I argued elsewhere, the leading role of extension as logical objects is due to the primacy of concepts in Frege's conception of logic. Since concepts are the most basic subject of logic, and since extensions are the objects that are most closely tied with concepts (and are indeed forced into existence by the existence of concepts according to Frege's view at least before 1903), it follows – or at least Frege thought so – that extensions are the most basic kind of logical objects, and all other kinds of logical objects like numbers and truth-values have to be reduced to extensions" (Ruffino, 1998, pp. 73-4).

> Arithmetic, as I said at the beginning, was the starting point of the train of thought which led me to my “conceptual notation”. I intend, therefore, to apply it to this science first, trying to analyse its concepts further and provide a deeper foundation for its theorems. For the present, I have presented in the third chapter some things which move in that direction. Further pursuit of the suggested course – the elucidation of the concepts of number, magnitude , and so forth – is to be the subject of further investigations which I shall produce immediately after this book (**CN**, pág. 107).

Esta passagem sugere que Frege tinha um plano de execução em mente. De fato, como mencionamos, parte do plano já estava traçado desde 1874 culminando nas definições dos ancestrais forte e fraco em 1879. a partir das quais seria possível definir o conceito de número natural[259].

Contudo, **GLA** foi publicado cinco anos depois da aparição de **BS**. De acordo com Bynum, isto foi devido à pequena recepção que o primeiro livro de Frege recebeu, o que acarretou uma mudança no planejamento de autor:

> The poor reception of the *Conceptual Notation* altered Frege's plans. In the preface of his book it is clear that he had hoped to proceed immediately from *Conceptual Notation* to the definition of number and other basic mathematical concepts...[260]
> Instead of proceeding as planned, Frege rallied to the defence of his symbolic language and spent most of the next three years answering his critics. He did maintain an active interest in geometry and physics, publishing a review of Hoppe's *Textbook of analytical Geometry* and lecturing to the *Jenaische Gesellschaft für Medicin und Naturwissenschaft* once on geometry and once on physics; but most of his efforts went into the defence of the *Conceptual Notation* (**CN**, pp. 20-1).

A avaliação de Bynum não parece ser completamente correta. A carta a Marty sugere que Frege manteve o seu plano inicial

> Dear Colleague,
> Your friendly postcard gave me much pleasure, the more so as I have found only very little agreement up to now. Allow me to give you some more information about my *Conceptual Notation*, in the hope that you will perhaps have occasion to call attention to it in a journal; it would make it easier for me to publish further works. *I have now nearly completed a book in which I treat the concept of number* [Anzahl] and demonstrate that the first principles of computation which up to now have generally been regarded as unprovable axioms can be proved from definitions by means of logical laws alone, so that they may have to be regarded as analytic judgements in Kant's sense (Frege, 1980, pp. 99-100, meu grifo)[261].

259 Como já foi afirmado anteriormente, Frege já tinha em 1879 a ideia da sua possível definição.

260 Depois desta passagem, Bynum cita exatamente a passagem de Frege do prefácio, que acabamos de mencionar.

261 No original alemão, parte desta passagem é: “es wurde mir die Veröffentlichung weiterer Arbeiten

Por outro lado, Frege tinha receio de publicar o livro mencionado na missiva, porque ele acreditava que este teria a mesma sorte de **BS**. Isto fortemente sugere que Frege o escreveu na conceitografia:

> I find it difficult to gain entry into the philosophical journals[262]. Please excuse this letter as springing from my unsatisfied need for communication. *I find myself in a vicious circle: before people pay attention to my conceptual notation, they want to see what it can do, and I in turn cannot show this without presupposing familiarity with it. So it seems that I can hardly count any readers for the book I mentioned at the beginning*. If you would be so good as to answer me, I would ask you to communicate your doubts. I should like to find out what you think of the scientific value of the demonstration I am planning, supposing it succeeds and is carried out with the most painstaking precision (Frege, 1980, pág. 102).

Há indícios nesta carta que Frege já tinha chegado no resultado que ele admite ser o mais importante, a saber, o conteúdo de uma atribuição numérica consiste em predicar algo de um conceito[263] [264]:

> I regard it as one of Kant's great merits to have recognized the propositions of geometry as synthetic judgements, but I cannot allow him the same in the case of arithmetic. The two cases are anyway quite different. The field of geometry is the field

erleichtern. Ich habe jetzt ein Buch nahezu vollendet, in welchem ich den Begriff der Anzahl behandle und nachweise, dass die ersten Sätze über das Zählen der Zahl, die man bisher als unbeweisbare Axiome anzusehen geneigt war, sich nur mittels der logischen Gesetze aus Definitionen beweisen lassen, sodass sie in Kantischen Sinne wohl als analytische Urteile zu betrachten sind" (Frege, 1976, pág. 163). A expressão "die ersten Sätze über das Zählen der Zahl" foi traduzida por "the first principles of computation", mas, talvez, uma melhor tradução fosse "os primeiros princípios sobre contar os números". Com efeito, a prova que todo número natural tem um sucessor depende dos fatos seguintes fatos: de que podemos contar números naturais (objetos) e de que 0 é um número natural. Assim, se contarmos os números de 0 até *n*, perceberemos que há *n*+1 objetos. Portanto, o número que pertence ao conceito '*n* pertence à Pred-série iniciada por 0' é *n*+1. Parece plausível que em 1882 Frege já considerava os números como objetos.

262 Frege submeteu, pelo menos, dois artigos onde ele explicava a sua conceitografia e as diferenças que há entre ela e a lógica de Boole, entretanto ambos foram recusados.

263 "With this book I carry out a design that I had in view as early as my *Begriffsschrift* of 1879 and announced in my *Grundlagen der Arithmetik* of 1884. I wish here to substantiate in actual practice the view of Number that I expounded in the latter book. *The most fundamental of my results I expressed there, in §46, by saying that a statement of number expresses an assertion about a concept*; and the present account rests upon this" (**BLA**, pág. 5).

264 No artigo "*Frege on the Statement of Number*" (1990), Sullivan afirma que Frege foi influenciado pelo trabalho de Herbart, que sustentava uma posição semelhante sobre atribuições numéricas. Certamente, Frege conhecia o trabalho de Herbart, uma vez que este é citado em **GLA** (**FA**, pág. III). Além disso, Herbart é mencionado nas notas 50 e 113 de Scholz. Cf. "*Geschichte des wissenschaftlichen Nachlasses Gottlob Frege und seiner Edition. Mit einem Katalog des ursprünglichen Bestands der nachgelassenen Schriften Freges*" (1976, pp. 96 e 103).

> of possible spacial intuition; arithmetic recognizes no such limitation. Everything is enumerable, not just what is juxtaposed in space, not just what is successive in time, not just external phenomena, but also inner mental processes and events and even concepts, which stand neither in temporal nor in spacial but only in logical relations to one another. *The only barrier to enumerability is to be found in the imperfection of concepts. Bald people for example cannot be enumerated as long as the concept of baldness is not defined so precisely that any individual there can be no doubt whether he falls under it*. Thus the area of the enumerable is as wide as that of conceptual thought, and a source of knowledge more restricted in scope, like spatial intuition or sense perception, would not suffice to guarantee the general validity of arithmetical propositions. And to enable to rely on intuition for support, it does not help at all to let something spatial represent something non-spatial in enumeration; for one would have to justify the admissibility of such a representation (Frege, 1980, pág. 100).

Ademais, na passagem acima, ocorre o mesmo argumento de **GLA** para justificar que números têm uma aplicação universal e que, portanto, a sua natureza deveria ser lógica. Compare com a seguinte passagem:

> The fact that this is possible shows that the axioms of geometry are independent of one another and of the primitive laws of logic, and consequently are synthetic. Can the same be said of the fundamental propositions of the science of number? Here, we have only to try denying any one of them, and complete confusion ensues. Even to think at all seems no longer possible. The basis of arithmetic lies deeper , it seems, than that of any of empirical sciences, and even than that of geometry. The truths of arithmetic govern all that is numerable. This is the widest domain of all; for to it belongs not only the actual, not only the intuitable, but everything thinkable. Should not the laws of number, then, be connected very intimately with the laws of thought? (**FA**, pág. 21)[265].

Interessante é que este tipo de justificação é bastante adequado a **PH**. Frege menciona que negar uma proposição da aritmética implica uma contradição[266]. Isto ocorreria caso negássemos uma proposição provada por meio de **PH**, que na conceitografia seria a fórmula:

---

265 Este mesmo ponto é reafirmado no artigo "*On Formal Theories of Arithmetic*": "As a matter of fact, we can count just about everything that can be an object of thought: the ideal as well as the real, concepts as well as objects, temporal as well as spatial entities, events as well as bodies, methods as well as theorems; even numbers can in their turn be counted. What is required is really no more than a certain sharpness of delimitation, a certain logical completeness. From this we may undoubtedly gather at least this much, that the basic propositions on which arithmetic is based cannot apply merely to a limited area whose peculiarities they express in the way in which the axiom of geometry express the peculiarities of what is spacial; rather, these basic propositions must extend to everything that can be thought. And surely we are justified in ascribing such extremely general propositions to logic" (Frege, 1984, pág. 112).

266 "Here, we have only to try denying any one of them, and complete confusion ensues".

$$\vdash \left((\sharp_x P(x) \equiv \sharp_x Q(x)) \equiv \neg\, \overset{\mathfrak{R}}{\smile} \begin{array}{l} \neg\, Corr_{\alpha\beta}(\mathfrak{R}\alpha\beta)(P\alpha, Q\beta) \\ Func_{\alpha\beta}\mathfrak{R}(\alpha,\beta) \\ UpM_{\alpha\beta}\mathfrak{R}(\alpha,\beta) \end{array} \right)$$ [267]

Desta fórmula, obtemos (capítulo **4**):

(T)

$$\vdash \begin{array}{l} \neg\, Corr_{\alpha\beta}(S\alpha\beta)(P\alpha, Q\beta) \\ Func_{\alpha\beta}S(\alpha,\beta) \\ UpM_{\alpha\beta}S(\alpha,\beta) \\ \neg\, \sharp_x P(x) \equiv \sharp_x Q(x) \end{array}$$ [268]

É provável dentro da conceitografia a partir de **PH** junto com as definições de 0 e 1 o seguinte:

(Pred)

$$\vdash Pred(0,1)$$

Assumamos, por contradição, que $\neg\, Pred(0,1)$[269] . No capítulo **4**, mostramos que o seguinte é provável a partir da definição da relação “predecessor”

$$\begin{array}{l} \neg\, \sharp_x P(x) \equiv n \\ P(a) \\ \sharp_x \left(\begin{array}{l} \neg\, x \equiv a \\ P(x) \end{array} \right) \equiv m \\ \neg\, Pred(m,n) \end{array}$$ [270]

Instanciando '*m*' para '0', '*n*' para '1', '$P\xi$' para '$\xi = 0$' e '*a*' para '0', então obtemos a fórmula

267 Ou seja, o número de P é igual ao número de Q se e somente se existe uma relação R que correlaciona 1-1 os Ps e os Qs. Veja capítulo **4**.
268 PH5 no capítulo **4**.
269 A partir de agora, excluiremos o traço de juízo.
270 Veja (F4).

$$\begin{array}{l} \top\ \sharp_x(x \equiv 0) \equiv 1 \\ 0 \equiv 0 \\ \sharp_x \left(\begin{array}{l} \top\ x \equiv 0 \\ x \equiv 0 \end{array} \right) \equiv 0 \\ \top\ Pred(0,1) \end{array}$$

Mas, por hipótese, temos $\top\ Pred(0,1)$. Assim, aplicando *modus ponens*, derivamos a fórmula

$$\begin{array}{l} \top\ \sharp_x(x \equiv 0) \equiv 1 \\ 0 \equiv 0 \\ \sharp_x \left(\begin{array}{l} \top\ x \equiv 0 \\ x \equiv 0 \end{array} \right) \equiv 0 \end{array}$$

Por lógica proposicional (contraposição), obtemos a fórmula

$$\begin{array}{l} \top\ \sharp_x \left(\begin{array}{l} \top\ x \equiv 0 \\ x \equiv 0 \end{array} \right) \equiv 0 \\ 0 \equiv 0 \\ \sharp_x(x \equiv 0) \equiv 1 \end{array}$$

Os dois antecedentes podem ser eliminados (*modus ponens*)[271]. Assim, chegamos à fórmula

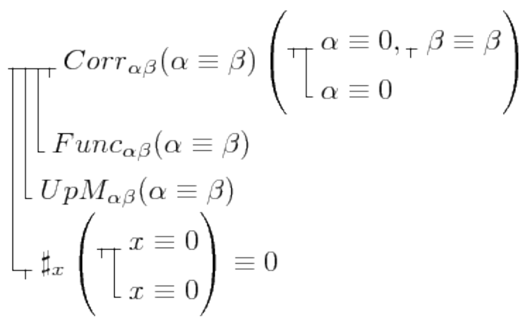
$$\top\ \sharp_x \left(\begin{array}{l} \top\ x \equiv 0 \\ x \equiv 0 \end{array} \right) \equiv 0$$

Mas, pela definição do número zero[272], esta fórmula é equivalente a

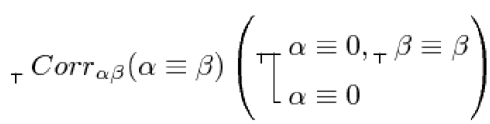
$$\top\ \sharp_x \left(\begin{array}{l} \top\ x \equiv 0 \\ x \equiv 0 \end{array} \right) \equiv \sharp_x(\top\ x \equiv x)$$

271 '$0 \equiv 0$' é uma instância de 54BS e '$\sharp_x(x \equiv 0) \equiv 1$' é exatamente a definição do número 1.
272 Zero é o número que pertence ao conceito *ser diferente de si mesmo*.

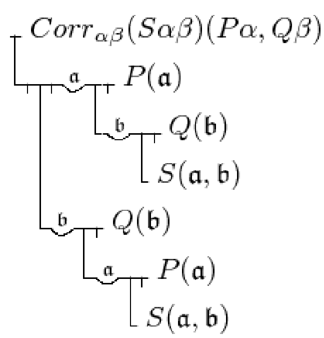
Em **T**, se instanciarmos '$P\xi$' para '$\begin{array}{l}\top\!\!\top\ \xi \equiv 0 \\ \llcorner\ \xi \equiv 0\end{array}$', '$Q\xi$', para '$\top\ \xi \equiv \xi$' e '$R(\xi, \zeta)$' para '$\xi \equiv \zeta$', obteremos a fórmula



Mas, como $\top\ \sharp_x \left(\begin{array}{l}\top\!\!\top\ x \equiv 0 \\ \llcorner\ x \equiv 0\end{array}\right) \equiv 0$, $Func_{\alpha\beta}(\alpha \equiv \beta)$[273] e $UpM_{\alpha\beta}(\alpha \equiv \beta)$[274], obtemos (*modus ponens*)

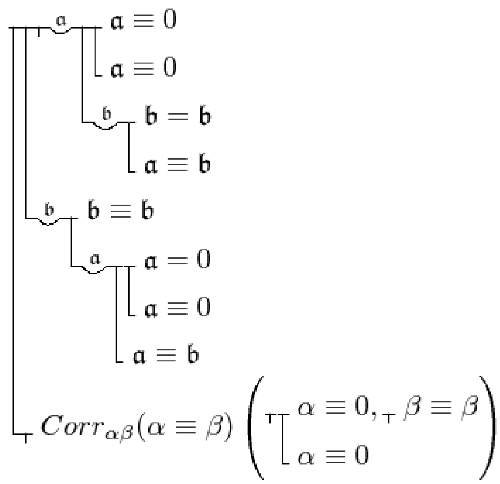


No capítulo **4**, provamos a fórmula (χ1)



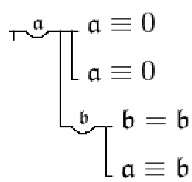
Por lógica proposicional e instanciando '$P\xi$' para $\begin{array}{l}\top\!\!\top\ \xi \equiv 0 \\ \llcorner\ \xi \equiv 0\end{array}$, '$Q\xi$', para $\top\ \xi \equiv \xi$ e $R(\xi, \zeta)$' para '$\xi \equiv \zeta$', chegamos à fórmula

273 Teorema 1 do capítulo **4**.
274 Teorema 2 do capítulo **4**.



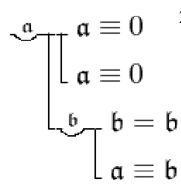
Os dois antecedentes podem ser eliminados por *modus ponens*[275] e, assim, obtemos a fórmula

(T1)

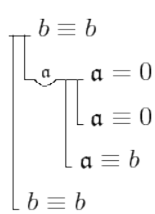


Não obstante, a seguinte fórmula é provável na conceitografia (junto com **PH**)

(T2)

 [276]

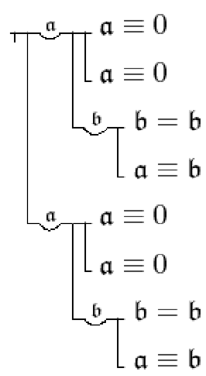
275 O seguinte é uma instância de 1BS:



Eliminando o último antecedente (*modus ponens*) e quantificando universalmente, obtemos a fórmula desejada.

276 O seguinte é uma instância de 1BS:

Usando IfGGA (capítulo **4**), **T1** e **T2** (*modus ponens*), derivamos a fórmula

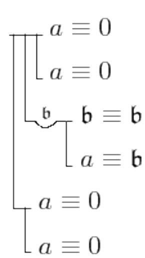
[277]

que é uma contradição[278].

Há um ponto histórico que raramente é mencionado nas discussões sobre **GLA**, a saber, que seis anos antes da publicação deste livro, Georg Cantor, no artigo "Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre" (1878), já havia feito uso, com bastante sucesso, de um princípio que tem uma íntima relação com **PH**:

(**Princípio de Cantor**): dois conjuntos *A* e *B* têm a mesma potência (ou número car-

---



O último antecedente é uma instância de 27BS, portanto pode ser eliminado (*modus ponens*). Assim, basta generalizar universalmente para obter a fórmula desejada.

277 No artigo "*Frege, Kant and the Logic in Logicism*" (2002, pág. 39), MacFarlane afirma: "To see how "complete confusion ensues" when one tries to think without being governed by the norms provided by basic laws of arithmetic, suppose one judges that 1=0. Then one can derive any claim of the forms "there are Fs" by reductio *ad absurdum*. For suppose there are no *Fs.* Then, by the usual principles governing the application of arithmetic , the number of *Fs*=0. Since 1=0, it follows that the number of *Fs*=1, which in turn implies that there are *Fs*, contradicting the hypothesis. By *reductio*, then, there are *Fs*. In particular (since '*F*' is schematic), there are circles that are not circles. But this is a contradiction. Thus, if we contradict a basic truth of arithmetic like '$1 \neq 0$', we will be committed to contradictions in areas that have nothing to do with arithmetic. Our standards for reasoning will have become incoherent. (Contrast what happens when we deny a geometrical axiom, according to Frege: we are led to conflicts with spatial intuition and experience, but not to any real contradictions)".

278 Hoje em dia, esta prova não seria considerada puramente lógica, porque ela depende das constantes não-lógicas '0' e '*Pred*'. Mas, uma vez que **PH** poderia ser uma espécie de definição, então ele seria analítico. Mas, como '0' e 'Pred' são definidos usando-se apenas símbolos da conceitografia e o operador-cardinalidade introduzido por **PH**, Frege poderia considerá-los como lógicos.

dinal) se (e somente se) existe uma correspondência 1-1 entre os elementos que pertencem a A e os que pertencem a B.

A partir de seu princípio, Cantor mostrou que os conjuntos dos números naturais, inteiros e racionais tinham a mesma potência (ou número cardinal). Além disso, ele mostrou que os números reais tinham uma potência maior que a dos naturais[279].

Em **GLA**, ao introduzir o **PH** (§63), Frege cita uma passagem do *Tratado da Natureza Humana* de Hume, mas, logo depois, em uma nota, ele menciona o artigo "*Grundlagen einer allgemeinen Mannichfaltigkeitslehre*" de Cantor[280]. Não é implausível supor que Frege conhecia o artigo de Cantor publicado em 1878[281].

A discussão na primeira parte de **GLA** (até § 45) poderia ser vista como uma tentativa de justificar a transformação do **Princípio de Cantor** – em termos de conjuntos – no **Princípio de Hume** – em termos de conceitos.

"Conjuntos", "classes", "multiplicidades" estavam carregados de significados

279 Hallett escreve: "The problem of powers in its most general form is to find a calculus of absolute size (power) adequate for describing the sizes of arbitrary infinite sets. This problem has its origin in Cantor's two striking papers [1874] and [1878]. The former demonstrated that the continuum is markedly different from the sequence of natural numbers since no denumerable sequence of real numbers can contain all real numbers. (For a description of the proof, see §2.3(a).) Since both the natural and the real numbers are infinite collections, this result showed that there are different kinds of infinity and thus raises the question: in what way precisely are they different? By 1878 Cantor had clearly taken the view that what is shown is that the real-number continuum is a *larger* infinity than the natural numbers. That is to say, he had adopted the principle of using one-one correspondences to measure the *relative* sizes of sets, a principle which Bolzano ([1851], p. 98), for example, had earlier rejected. The term power is used in a correspondingly relative sense. Thus, Cantor asserted that 'A and B' have the same power if there is a one-one correspondence between the sets (or 'manifolds') A and B, or 'A has smaller power than B' if there is one-one correspondence between A and a subset (or 'component') of B, but not between A and the whole of B (see Cantor [1878], p. 119)" (Hallett, 1984, pp. 1-2).

280 "Hume long ago mentioned such a means: "When two numbers are so combined as that the one has always an unit answering to every unit of the other, we pronounce them equal". This opinion that numerical equality or identity must be defined in terms of one-one correlation, seems in recent years to have gained widespread acceptance among mathematicians*. But it raises at once certain logical doubts and difficulties, which ought not to be passed over without examination

* Cf. E. Schröder, op. Cit., pp. 7-8; E Kossak, Die Elemente der Arithmetik, Programm des Friedrich-Werder'schen Gymnasiums, Berlin 1872, p. 16; G. Cantor, *Grundlagen einer allgemeinen Mannichfaltigkeitslehre*, Leipzig 1883" (**FA**, pp. 73-4).

281 Frege tinha um péssimo hábito de não mencionar as suas fontes de inspiração. Já foi dito que a ideia de que uma atribuição numérica é uma predicação de um conceito pode ter sido inspirada pelo trabalho de Herbart. Outro exemplo, ocorre em **GGAI**. Neste livro, Frege prova teoremas análogos aos teoremas da recursão e da categoricidade provados por Dedekind (1888), contudo ele não faz nenhuma referência a este autor. Além disso, em **GGAII** (§164), Frege afirma o teorema de Cantor – que o conjunto potência de A tem uma cardinalidade maior que a de A - sem fornecer qualquer referências.

fisicalistas, psicologistas, ou ambos, que acarretariam a incursão de elementos físicos, psicológicos e intuitivos nas provas das leis da aritmética, ocasionando a dependência desta ciência à intuição[282] [283].

Se os números cardinais e, consequentemente, os números naturais, fossem entidades que se aplicariam a conjuntos ou fossem eles próprios conjuntos[284], então a aritmética seria uma ciência *a posteriori* e/ou um campo da psicologia.

Se eles fossem conjuntos ou entidades associadas a conjuntos, então o campo de aplicação da aritmética seria bastante restrito. Não poderíamos contar qualquer tipo de entidade[285] [286].

Ademais, se números fossem conjuntos ou entidades associadas a conjuntos, então tornar-se-ia difícil explicar (e definir) os números 0 e 1. O que seria uma coleção de zero coisas ou uma coleção de uma coisa?

Frege criticou especialmente os autores que buscavam definir números como sendo conjuntos de unidades puras, sendo estes obtidos de coleções de objetos dos

282 "It might well be supposed that numerical formulae would be synthetic or analytic, a posteriori or a priori, according as the general laws on which their proofs depend are so. John Stuart Mill, however, is of the opposite opinion. At first, indeed, he seems to mean to base the science, like Leibniz, on definitions, since he defines the individual numbers in the same way as Leibniz; but this spark of sound sense is no sooner lit than extinguished, thanks to his preconception that all knowledge is empirical. He informs us, in fact, that these definitions are not definitions in the logical sense; not only do they fix the meaning of a term, but they also assert along with it an observed matter of fact. But what in the world can be the observed fact, or the physical fact (to use another of Mill's expressions), which is asserted in the definition of the number 777864? Of all the whole wealth of physical facts in his apocalypse, Mill names for us only a solitary one, the one which he holds is asserted in the definition of the number 3. It consist, according to him, in this, that collections of objects exist, which while they impress the sense thus, ∘ ∘ ∘, may be separated into two parts, thus, ∘∘ ∘." (**FA**, pág. 9).

283 "Some writers define Number as a set or multitude or plurality. All these views suffer from the drawback that the concept will not then cover the numbers 0 and 1. Moreover, these terms are utterly vague: sometimes they approximate in meaning to "heap" or "group" or "agglomeration", referring to a juxtaposition in space, sometimes they are so used as to be practically equivalent to "Number", only vaguer. No analysis of the concept of Number, therefore, is to be found in a definition of this kind. Thomae requires for the formation of number that item-sets which differ be given different names. By this he evidently means to refer to a process of bringing out more sharply the characteristics of the sets in question, of which the giving of names is only the external sign" (FA, pág. 38).

284 Veja (**GLA**, §§29-44).

285 "Do such things really exist as agglomerations of proofs of a theorem, or agglomerations of events? And yet these too can be numbered" (**FA**, pág. 30).

286 Outro problema relacionado é que a uma mesma coleção de coisas podem ser atribuídos diferentes números: "I am able to think of the Iliad either as one poem, or as 24 Books, or as some large Number of verses" (**FA**, pág. 28).

quais abstraímos de suas características particulares.

Para Frege, este tipo de definição apresentaria quatro categorias de problemas. Primeiro, a coleção de objetos parece ser algo físico, como já foi mencionado; segundo, o processo de abstração parece ser psicológico; terceiro, por meio deste processo, não obtemos os números, mas sim um conceito sob o qual caem os objetos em questão[287], e finalmente, mas não menos importante, para se obter a noção de número por abstração, teríamos de assumir que as unidades puras do conjunto devem ter duas características contraditórias: elas devem ser indistinguíveis entre si, porém devem ser distinguidas uma da outra[288].

Para solucionar todas estas dificuldades, Frege reivindicou que uma atribuição numérica é, na verdade, uma predicação de um conceito. Sob conceitos, podem cair objetos físicos, mentais, abstratos. Portanto, uma vez que números estão associados a conceitos, eles herdarão esta aplicação universal[289] [290].

---

287 "For suppose that we do, as Thomae demands, "abstract from the peculiarities of the individual members of a set of items", or "disregard, in considering separate things, those characteristic which serve to distinguish them". In that event we are not left, as LIPSCHITZ maintains, with "the concept of the Number of the things considered"; what we get is rather a general concept under which the things in question fall. The things themselves do not in the process lose any of their special characteristics." (**FA**, pág. 45).

288 Para se obter números, é necessário existir pluralidade. Contudo, uma vez que os números são conjuntos de unidades puras obtidos por abstração das características individuais dos elementos dos conjuntos iniciais, então parece que não há diversidade e, portanto, não podemos ter os números. Na verdade, teríamos apenas o número um: "We are faced, therefore, with the following difficulty:

If we try to produce the number by putting together different distinct objects, the result is an agglomeration in which the objects contained remain still in possession of precisely those properties which serve to distinguish them from one another; and that is not the number. But if we try to do it the other way, by putting together identicals, the result runs perpetually together into one and we never reach a plurality" (**FA**, pág. 50).

"If we call the things to be counted units, then the assertion that units are identical is, if made without qualification, false That they are identical in this respect or that is true enough but of no interest. It is actually necessary that the things to be counted should be different if number is to get beyond 1.

We were thus forced, it seemed, to ascribe to units two contradictory qualities, namely identity and distinguishability" (**FA**, pág. 58).

289 "The wide range of applicability of number also now becomes explicable. Not without reason do we feel it puzzling that we should be able to assert the same predicate of physical and mental phenomena alike, of the spatial and temporal and of the non-spacial and non-temporal. But then, this simply is not what occurs with statements of number any more than elsewhere; numbers are assigned only to the concepts, under which are brought both the physical and mental alike, both the spatial and temporal and the non-spatial and non-temporal" (**FA**, pp. 61-2).

290 Um dos argumentos de Ruffino (1996, 1998) é que extensões são objetos lógicos, porque são objetos intimamente ligados a conceitos. Mas, este mesmo argumento pode ser atribuído aos números, porque eles também são associados a conceitos.

Além disso, as explicações (definições) dos números 0 e 1 não incorrem em quaisquer dificuldades, pois existem conceitos sob os quais nada cai e existem conceitos sob os quais cai um único objeto.

O problema da atribuição de números diferentes a uma mesma coleção de objetos também é resolvido. O que ocorre é que este aglomerado de coisas ora é visto sob um determinado conceito, resultando em um determinado número, ora é entendido sob um outro conceito, ao qual atribuímos outro número.

De acordo com Frege, os conceitos para serem enumerados deveriam ter um critério de aplicação nítido. Este critério seria o "responsável" pela escolha das "unidades" que estaríamos considerando a serem contadas. Por outro lado, conceitos "enumeráveis" deveriam ter um critério de identidade a partir do qual seria possível distinguir os objetos que caem sob eles[291]. Este critério de identidade seria responsável pela "diversidade" dos objetos que caem sob o conceito. Nem todos os conceitos satisfazem estes critérios: em uma nota, já citamos uma passagem de Frege na qual ele afirma que o conceito *ser calvo* não poderia ser enumerado, pois ele não tem um critério de aplicação nítido; por outro lado, o conceito *ser vermelho* não tem um critério de identidade ocorrendo entre as coisas que caem sob ele, embora ele tenha um critério de aplicação razoável[292] [293].

De acordo com a nossa hipótese, **GLA** foi escrito para ser uma introdução ao livro de 1882. Neste caso, acreditamos, se Frege tivesse introduzido as extensões de conceito neste último livro por intermédio do **Axioma V**, ele deveria argumentar sobre o caráter lógico destas entidades, já indicando, na primeira parte de **GLA**, a possí-

291 Estes conceitos também são chamados de sortais.

292 "The concept "letters in the word three" isolates the *t* from *h*, the *h* from *r* and so on. The concept "syllables in the word three" picks out the word as whole, and as indivisible in the sense that no part of it falls any longer under that same concept. Not all concepts possess this quality. We can, for example, divide up something falling under the concept "red" into parts in a variety of ways, without the parts thereby ceasing to fall under the same concept "red". To a concept of this kind no finite number will belong. The proposition asserting that units are isolated and indivisible can, accordingly, be formulated as follows:
Only a concept which isolates what falls under it in a definite manner, and which does not permit any arbitrary division of it into parts, can be a unit relative to a finite Number" (**FA**, pág. 66).

293 As questões sobre conceitos sortais e critério de identidade não estão fechadas. Há uma discussão e bibliografia sobre este ponto em Hale; Wright (2001a). Veja também a discussão em Chateaubriand (2001, cap. 10).

vel construção da definição do conceito de número cardinal que seria feita na segunda parte (de §46 em diante).

Em inúmeros passagens da primeira parte, depois de criticar uma posição, Frege menciona a sua própria. Por exemplo, em §6, Frege discute as definições Leibnizianas dos números naturais individuais por meio de 1 e do aumento por 1 e as provas a partir destas definições. De acordo com Leibniz, temos

(1) $2 =_{def} 1+1$
(2) $3 =_{def} 2+1$
(4) $4 =_{def} 3+1$

Além disso, Leibniz assume o seguinte axioma

(Axioma) se iguais são substituídos por iguais, a igualdade permanece

E disto ele prova que 2+2=4 da seguinte forma:

Assuma 2+2. Pela definição 1, temos que 2+2=2+1+1. Mas pela definição 3, temos que 2+1+1=3+1. Portanto, pelo axioma, obtemos 2+2=3+1, que, pela definição 3, é equivalente a 2+2=4.

Frege critica esta prova porque ela faz uso tácito da lei associativa da soma, a qual não se sabe ainda se é lógica. Não obstante, Frege não descarta as definições de Leibniz, mas sugere a necessidade de se fazer ajustes:

> On turning now to consider the primary objects of arithmetic, we must distinguish between the individual numbers 3, 4 and so on, and the general concept of Number. Now we have already decided in favour of the view that the individual numbers are best derived, in the way proposed by Leibniz, Mill, H. Grassmann and others, from the number one together with increase by one, but that these definitions remain incomplete so long as the number one and increase by one are themselves undefined. And we have seen that we have need of general propositions if we are to derive the numerical formulae from these definitions. Such laws cannot, just because of their generality, follow from definitions of the individual numbers, but only from the general concept of Number[294] [295](**FA**, pág. 25).

O silêncio de Frege sobre as extensões de conceitos na primeira parte de **GLA** é, no mínimo, estranho. O mais surpreendente é o fato de Frege não ter muito a dizer

294 Estranhamente, Frege afirma que os números individuais serão obtidos pelo número 1 e o acréscimo de 1, os quais deveriam receber uma definição. Mas o procedimento de Frege em **GLA** é obter os números naturais por meio de 0 (o número do conceito *ser diferente de si mesmo*) e do acréscimo de 1 (a relação *sucessor*). Provavelmente, Frege cometeu um engano aqui.

295 Frege também já avança nesta primeira parte de **GLA** as posições que os números são objetos (**FA**, pág. 49) e que uma atribuição numérica é uma predicação de um conceito (**FA**, pág. 29).

sobre estas entidades na segunda parte, resumindo a discussão a §69. Na verdade, um dos pontos discutidos nesta seção é bastante trivial. Frege escreve:

> But now the proposition:
> the extension of the concept "equal to the concept *F*" is identical with the extension of the concept "equal to the concept *G*"
> is true if and only if the proposition
> "the same number belongs to the concept F as to the concept *G*
> is true. So that here there is complete agreement (**FA**, pág. 80)

Frege definiu o "número que pertence ao conceito *F*" como a extensão do conceito "ser equinumérico ao conceito *F*". Assim, o que foi dito acima é obtido por meio da definição junto com as leis da identidade – axiomas 52 e 54 de **BS**.

Frege chega a mencionar que o nosso pensamento sobre extensões abarca a questão da identidade entre elas, mas não há nada mais além disso[296] [297]. Agora, sendo **GLA** uma introdução ao livro de 1882, se neste livro Frege tivesse introduzido o **Axioma V** e as extensões de conceito, então claramente **GLA** não cumpriu seu papel. A verdade é que Frege parece estar bastante confuso em relação às extensões de con-

296 "That this definition is correct will perhaps be hardly evident at first. For do we not think of the extensions of concepts as something quite different from numbers? How we do think of them emerges clearly from the basic assertions we make about them. These are as follows:
1. that they are identical
2. that one is wider than the other" (**FA**, pág. 80)

297 Outra discussão sem muita relevância é sobre uma extensão de conceito ser mais ampla que outra: "Certainly we do not say that one number is wider than another, in the sense in which the extension of one concept is wider than that of another; but then it is also quite impossible for a case to occur where
the extension of the concept "equal to the concept *F*"
would be wider than
the extension of the concept "equal to the concept *G*"
For on the contrary, when all concepts equal to *G* are also equal to *F*, then conversely also all concepts equal to *F* are equal to *G*. "Wider" as used here must not, of course, be confused with "greater" as used of numbers.
Another type of case is, I admit, conceivable, where the extension of the concept "equal to the concept *F*" might be wider or less wide than the extension of some other concept, which then could not, on our definition, be a Number; and it is not usual to speak of a Number as wider or less wide than the extension of a concept; but neither is there anything to prevent us speaking in this way, if such a case ever occur" (**FA**, pág. 80-1). Assumindo que *F* e *G* são equinuméricos, então, de acordo com Frege, os conceitos "ser equinumérico a *F*" e "ser equinumérico a *G*" têm a mesma extensão e, assim, não é possível falar de um conceito ser mais amplo que o outro. Mas, assumamos que *F* e *G* não são equinuméricos. Então, os conceitos "ser equinumérico a *F*" e "ser equinumérico a *G*" não teriam a mesma extensão, porque *F* não cairia sob o segundo e *G,* sob o primeiro. Mas, neste caso, é possível falar que a extensão do primeiro é mais ampla que a do segundo ou vice-versa? E, neste caso, eles não seriam números?

ceitos[298].

Por outro lado, Frege explicitamente rejeitou definições por abstração em **GLA** e, portanto, ele rejeitou **PH** como uma possível definição do operador-cardinalidade. Decerto, isto é um grande obstáculo à visão que desejamos defender aqui. Mas, como veremos, há passagens em **GLA**, que são incoerentes com o procedimento de Frege em §68.

Na introdução deste livro, Frege menciona três princípios que deveriam ser mantidos em mente por todo livro:

> In the enquiry that follows, I have kept to three fundamental principles:
> always to separate sharply the psychological from the logical, the subjetive from the objetive;
> never ask for the meaning of a word in isolation, but only in the context of a propositions;
> never to lose sight of the distinction between concept and object (**FA**, pág. X)

Nosso maior interesse é com o segundo princípio, hoje conhecido por Princípio do Contexto. Tentaremos argumentar que o Princípio do Contexto foi introduzido para justificar as definições por abstração.

Depois de chegar ao resultado que uma atribuição numérica é uma predicação de um conceito, Frege começa a sua análise positiva com a seção denominada: IV: **The concept of Number**.

Logo a seguir, na subseção denominada **Every individual number is a self-subsistent object**, Frege propõe sua primeira tentativa de definir o conceito de número cardinal como conceitos numéricos (§55):

(D1) $N^0_x F(x) \equiv_{def} \forall x \neg F(x)$[299]

(D2) $N^1_x F(x) \equiv_{def} \exists x Fx \wedge \forall x \forall y (Fx \wedge Fy \supset x = y)$[300]

---

298 Em Burge (1984), há uma discussão minuciosa sobre a noção de extensão de Frege até 1903, não obstante ele falha em perceber que **GLA** foi escrito para ser uma introdução ao livro de 1882.

299 “The number 0 belongs to a concept, if the proposition that *a* does not fall under that concept is true universally, whatever *a* may be” (**FA**, pág.67).

300 “the number 1 belongs to a concept *F*, if the proposition that *a* does not fall under *F* is not true universally, whatever *a* may be, and if from the propositions
“*a* falls under *F*” and “*b* falls under *F*”
it follows universally that *a* and *b* are the same” (**FA**, pág 67).

(D3) $N_x^{n+1}Fx \equiv_{def} \exists x(F(x) \wedge N_y^n(F(y) \wedge x \neq y))$[301]

Isto é estranho, porque o título da subseção sugere que números são objetos, mas as definições acima pressupõem que eles sejam conceitos de segunda ordem. Mais adiante, entretanto, Frege irá criticar estas definições. Portanto, talvez, o seu objetivo fosse a tentativa de dissipar uma possível confusão que poderia surgir, já que ele havia afirmado que "o número 1" é um objeto auto-subsistente[302], mas também que uma atribuição numérica é uma predicação de um conceito. Ou seja, isto poderia dar a impressão que os números individuais fossem pensados ora como objetos, ora como conceitos, o que iria contra o seu terceiro princípio mencionado acima[303].

A primeira dúvida levantada por Frege sobre estas definições é que em (D3) ocorre um símbolo no *definiens* - $N_x^n ... x ...$ - cujo significado não foi previamente estabelecido. Isto significa que estaríamos definindo uma expressão desconhecida por outra desconhecida. Por outro lado, (D1) e (D2) são definições no sentido estrito, porque seus *definienda* podem ser estabelecidos usando-se apenas os símbolos da conceitografia, cujos significados já tinham sido determinados[304 305].

Frege admite que é possível definir as expressões "o número 1+1 pertence ao

---

301 "the number (x+1) belongs to a concept *F*, if there is an object *a* falling under *F* and such that the number *n* belongs to the concept "falling under *F*, but not *a*" (**FA**, pág. 67).

302 "When we speak of "the number one", we indicate by means of the definite article a definite and unique object of scientific study. There are not divers numbers one, but only one. In 1 we have a proper name, which as such does not admit of plural any more than "Frederick the Great" or "the chemical element gold" (**FA**, pág. 49).

303 "These definitions suggest themselves so spontaneously in the light of our previous results, that we shall have to go into the reasons why they cannot be reckoned satisfactory" (**FA**, pág. 68). Depois de rejeitar a sua primeira tentativa de definição, Frege escreve: "It is time to get a clearer view of what we mean by our expression "the content of a statement of number is an assertion about a concept". In the proposition "the number 0 belongs to the concept *F*", 0 is only an element in the predicate (taking the concept *F* to be a real subject). For this reason I have avoided calling a number such as 0 or 1 or 2 a *property* of a concept. Precisely because it forms only an element in what is a self-subsistent object. I have already drawn attention above to the fact that we speak of "the number 1", where the definite article serves to class it as an object. In arithmetic this self-subsistence comes out at every turn, as for example, in the identity 1+1=2" (**FA**, pp. 68-9).

304 "The most likely to cause misgiving is the last; for strictly speaking we do not know the sense of the expression "the number *n* belongs to the concept *G*" any more than we do that of the expression "the number (*n*+1) belongs to the concept *F*" (**FA**, pp. 67-8).

305 Se consideramos '$N_x^0 F(x)$' e '$N_x^1 F(x)$' como símbolos simples, (D1) e (D2) são definições explícitas.

conceito F", "o número 1+1+1 pertence ao conceito F", etc. a partir de (D2) e (D3)[306]. E, de fato, poderíamos definir estas expressões usando (D1) e (D3). Assim, teríamos

(D4) $N^1_x F(x) \equiv_{def} \exists x(Fx. \wedge .N^0_y(Fy \wedge x \neq y))$

(D5) $N^{1+1}_x F(x) \equiv_{def} \exists x(Fx. \wedge .N^1_y(Fy \wedge x \neq y))$

(D6) $N^{1+1+1}_x F(x) \equiv_{def} \exists x(Fx. \wedge .N^{1+1}_y(Fy \wedge x \neq y))$

Agora, todas as expressões ocorrendo nos *definienda* de (D4)-(D6) já têm o seu significado previamente estabelecido. Não obstante, esta forma de definição é problemática, porque há infinitos números naturais, e portanto, deveríamos dar infinitas tais definições dos conceitos numéricos[307].

Outro problema é que embora estes conceitos possam ser definidos de forma puramente lógica (usando-se apenas símbolos da conceitografia e símbolos previamente definidos), não é uma necessidade lógica que eles sejam satisfeitos. E, na verdade, se Frege tivesse tomado este caminho, ele teria de assumir um axioma do infinito, afirmando a existência de infinitos objetos[308].

Estranhamente, a objeção de Frege é:

> We can, of course, by using the last two definitions together, say what is meant by
> "the number 1+1 belongs to the concept F"
> and then, using this, give the sense of the expression
> "the number 1+1+1 belongs to the concept F"

---

306 "We can, of course, by using the last two definitions together, say what is meant by
"number 1+1 belongs to the concept F"
and then, using this, give the sense of the expression
"the number 1+1+1 belongs to the concept F"
and so on" (FA, pág. 68).

307 Em **GLA**, como já afirmado, Frege define o conceito de número natural usando as definições de número 0 e de ancestral fraco da relação *sucessor*. Uma possibilidade seria definir a relação *sucessor* (em terceira ordem) e o ancestral forte e fraco (em quarta ordem) para os conceitos numéricos. E a partir destas definições, definir os naturais. É evidente que este não é ponto de Frege em §55. De fato, não é claro se Frege pensou na fundamentação da aritmética desta forma. Quando Frege fala nas notas a Darmstaedter que dado um conceito numérico é possível obter o próximo por meio de uma regra, ele poderia estar pensando justamente no procedimento acima. Portanto, temos sérias dúvidas sobre a aritmética não-oficial de Frege. Veja, por exemplo, "*Frege's Unofficial Arithmetic*" (2002) de Rayo, "*Logicism and the Ontological Commitments of Arithmetic*" (1984) e "*Where do Natural Numbers come from*?" (1990) de Hodes e Landini (2006, pp. 209-18).

308 Por exemplo, assumamos que existem apenas dois objetos. Então, nenhum conceito de primeira ordem cairá sob o conceito numérico designado por $.N^{1+1+1}_x \Phi(x)$

> and so on; but we can never – to take a crude example – decide by means of our definitions whether any concept has the number JULIUS CAESAR belonging to it, or whether that same familiar conqueror of Gaul is a number or is not (**FA**, pág. 68)

Esta objeção apenas fará sentido se Frege não estiver considerando as expressões '0', '1', '1+1', '1+1+1' como sincategoremáticas. Neste caso, $N_x^0 F(x)$, $N_x^1 F(x)$, $N_x^{1+1} F(x)$, etc. não formariam um único símbolo a ser definido.

Faz-se mister perceber que se Frege quisesse definir os números cardinais individuais como os conceitos numéricos (conceitos de segunda ordem), a questão se Júlio César é um número ou não seria respondida, porque este conquistador romano não é um conceito.

A primeira tentativa de definição de Frege não funciona, pois ela não dá conta do caráter ontológico dos números cardinais. Estes são objetos, mas as definições propostas os tratam como conceitos. Isto torna-se claro quando ele escreve:

> Moreover, we cannot by aid of our suggested definitions prove that, if the number *a* belongs to the concept *F* and the number *b* belongs the same concept, then necessarily *a=b*. Thus we should be unable to justify the expression "*the* number which belongs to the concept *F*", and therefore should find it impossible in general to prove a numerical identity, since we should be quite unable to achieve a determinate number. It is only illusion that we have defined 0 and 1; in reality we have only fixed the sense of the phrases
>
> "the number 0 belongs to"
>
> "the number 1 belongs to"
>
> but we have no authority to pick out the 0 and 1 here as self-subsistent objects that can be recognized as the same (**FA**, pág. 68)[309]

Acreditamos que (D1)-(D2), embora insatisfatórias como definições, desempenham um papel fundamental na explicação da aplicação da aritmética. Uma definição "correta" do número cardinal 0 seria aquela a partir da qual pudéssemos mostrar as

309 Greimann (2003, pág. 263) escreve: "Frege is well aware of the fact that it is not clear which terms are supposed to be the *definienda* of (2). For, (2) can be regarded as a definition of the number words '0', '1', '1+1', '1+1+1', etc., as well as a definition of the second order predicates 'the number 0 belongs to the concept of being an *x* such that ϕ(x)', 'the number 1+1 belongs to the concept of being an *x* such that ϕ(x)', etc. In the first case, (2) is a contextual definition of the number words, and in the second case an explicit definition of the second order predicates. Regarded as an attempt to define these predicates, the definitional clauses of (2) are acceptable for Frege. However, since Frege aims to construe the numbers as objects, i. e., as referents of singular terms, he must consider the number words as the *definienda* of (2). For, when the numbers are constructed as the denotations of second order predicates, they must be considered as second order functions, not as objects". Este mesmo ponto é afirmado em Ricketts (pág. 1997, pág. 190)

seguintes proposições: (1) se o número de um conceito F é igual a 0, então nada cai sob F; (2) se nada cai sob F, então o número de F é igual a 0. Estas proposições são mencionadas em **GLA** (§75) e são prováveis a partir do **PH** dentro da conceitografia[310 311].

Além disso, (D3) indica o caminho para a definição da relação sucessor. Como afirmamos, o problema de (D3) é que a expressão '$N_x^n ... x ...$' não tem um significado previamente estabelecido. Frege transformará (D3) na seguinte definição da relação *sucessor*:

$$Pred(a, b) \equiv_{def} \exists F \exists y (\sharp_x F(x) = b \wedge Fy \wedge \sharp_x (Fx \wedge x \neq y) = a)$$

Diferentemente do caso de (D3), a expressão '$\sharp_x ... x ...$' terá seu significado dado por **PH** (e, de fato, em **GLA**, supostamente pela definição explícita)[312 313].

Em §§57-61, Frege busca justificar a sua posição de que os números cardinais são objetos. Como mencionado em uma nota, ele sustenta que na linguagem cotidiana falamos "do número 0", "do número 1" e não "dos números 0" e "dos números 1". Também não usamos as expressões "um número 0" e "um número 1". Ademais, na aritmética, grande parte das fórmulas são apresentadas como identidades[314].

Por outro lado, Frege admite também que na linguagem ordinária há usos atributivos dos números, como por exemplo, na sentença "Júpiter têm quatro luas". Não obstante, Frege acreditava que esta sentença poderia ser convertida em uma outra na qual o número 4 ocorreria como objeto, a saber, "o número que pertence ao conceito "lua de Júpiter" é igual a 4"[315].

---

310 Veja capítulo **4**.

311 Wright (1998, pp. 330-2) mostrou que em **AF** é possível provar o princípio Nq:

$$\sharp_x F(x) = n \leftrightarrow N_x^n F(x)$$

A prova é dada por indução matemática, provando a caso base $\sharp_x F(x) = 0 \leftrightarrow N_x^0 F(x)$. E depois assumindo a hipótese indutiva

$$\sharp_x F(x) = n \leftrightarrow N_x^n F(x),$$

provar

$$\sharp_x F(x) = n + 1 \leftrightarrow N_x^{n+1} F(x).$$

312 Parece-nos que se **PH** foi usado em 1882, então Frege admitiu que no *definiens* da definição de *Pred* (a, b) havia ocorrência apenas de símbolos cujos significados já eram previamente conhecidos.

313 Schirn (1996b, pp. 145-7) defende uma posição que corrabora a nossa.

314 A aritmética trata os números como sendo objetos.

315 Esta conversão é permitida pelo princípio Nq.

Embora haja muitas questões a serem discutidas sobre este ponto, nosso maior interesse nestas seções é sobre o uso do Princípio do Contexto[316]. Uma vez que foi defendido que números são objetos, Frege aventa a seguinte possível objeção:

> A possible criticism is, that we are not able to form of this object which we are calling Four or the Number of Jupiter's moons any sort of idea at all which would make it something self-subsistent (FA, pág. 69).

Para Frege, números não são entidades que se encontram no tempo-espaço, tampouco são entidades mentais. Não obstante, era lugar comum na sua época, ou pelo menos assim Frege acreditava, o fato de que todo objeto auto-subsistente teria de ser dado na sensibilidade.

Porém, segundo Frege, os números seriam um contra-exemplo a esta visão:

> We can form no idea of the number either as a self-subsistent object or as a property in an external thing, because it is not in fact either anything sensible or a property of an external thing. But the point is clearest in the case of the number 0; we shall try in vain to form an idea of 0 visible stars (FA, pág. 70)

Se números fossem entidades sensíveis ou dados na intuição ou se eles fossem ideias presentes nas nossas mentes, então certamente o projeto logicista de Frege estaria em sério risco[317].

Os argumentos de Frege caminham para a primeira aplicação do Princípio do Contexto. Ele escreve:

> That we can form no idea of its content is therefore no reason for denying all meaning to a word, or for excluding it from our vocabulary. We are indeed only imposed on by the opposite view because we will, when asking for the meaning of the word, consider it in isolation, which leads us to accept an idea as the meaning. Accordingly, any word for which we can find no corresponding mental picture appears to have no content. But we ought always to keep before our eyes a complete proposition. Only in a proposition have the words really a meaning. It may be that mental pictures float before us all the while, but these need not correspond to the logical elements in the judgement. It is enough if the proposition taken as whole has a sense; it is this that confers on its parts also their content (**FA**, pág. 71)

O Princípio do Contexto é problemático, porque é formulado ainda em uma lin-

316 Veja Dummett (1991, cap. 9).
317 Veja MacFarlane (2002).

guagem anterior à distinção entre sentido e referência. Assim, não sabemos ao certo se ele é um princípio que rege a “referência” ou o “sentido” das expressões. A melhor opção, é claro, é que ele seja um princípio sobre as referências das partes de uma sentença significativa. Neste caso, o princípio poderia ser visto como:

(**PC**) É suficiente que uma sentença como um todo tenha um sentido, para que sejam conferidas referências às suas partes

Aqui, “sentido” poderia ser concebido como “conteúdo judicável”, ou seja, uma proposição que é verdadeira ou falsa[318]. Portanto, a reivindicação de Frege é que dada uma sentença verdadeira

$$Fa,$$

as expressões '*a*' e '$F\xi$' deveriam ter um conteúdo (ou referência). Além disso, o Princípio do Contexto tem uma aplicação heurística, dependendo da contribuição da expressão na designação do valor de verdade da sentença, podemos saber a que tipo de entidade ela se refere. Destarte, se '*a*' em '*Fa*' for um termo singular ou uma descrição definida, então a referência de '*a*' será um objeto. E, neste caso, '$F\xi$' designará um conceito de primeira ordem.

O objetivo do Princípio do Contexto é evitar visões psicologistas de objetos abstratos. Além disso, ele justifica nosso uso de termos singulares abstratos[319], principalmente os da aritmética. Frege pretende evitar também a objeção que números *qua* objetos não podem existir, porque eles não são objetos espaço-temporais[320].

Na seção §62, intitulada *To obtain the concept of Number, we must fix the sense of a numerical identity*, Frege questiona como números são dados a nós se não podemos ter quaisquer ideias ou intuições deles. Logo a seguir, Frege evoca o Princípio do

318 Se “sentido” fosse concebido na forma em que é concebido pós-distinção entre sentido e referência, não é suficiente uma sentença expressar um sentido para que sejam conferidas referências as suas partes. Sentenças como “Pegasus é um cavalo alado”, “Odisseu foi deixado dormindo na paria de Ítaca” são sentenças que expressam sentidos, mas os nomes “Pegasus” e “Odisseu” não se referem a nenhum objeto.

319 Termos singulares cujos referentes são objetos abstratos.

320 “But, it will perhaps be objected, even if the Earth is really not imaginable, it is at any rate an external thing, occupying a definite place; but where is the number 4? It is neither outside us nor within us. And, taking those words in their spatial sense, that is quite correct. To give spatial coordinates for the number 4 makes no sense; but the only conclusion to be drawn from that is, that 4 is not a spatial object, not that is not an object at all. Not every object has a place” (**FA**, pág. 72)

Contexto e afirma a necessidade de definir o sentido de uma sentença na qual numerais ocorrem. Esta sentença deve ser tal que manifeste a natureza ontológica dos números (objetos)[321].

De acordo com Frege, o tipo proeminente de sentenças nas quais numerais ocorrem designando objetos são aquelas que expressam identidades, aquelas que expressam nosso reconhecimento de um número como sendo o mesmo novamente. Assim, Frege propõe definir o sentido da sentença

o número do conceito F é o mesmo que o número do conceito G

Em símbolos, a expressão acima é:

$$\sharp_x F(x) \equiv \sharp_x G(x)$$ [322]

Na definição, por razões óbvias, o *definiens* não pode conter a expressão "o número do conceito *F*":

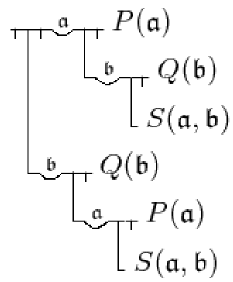
> In our present case, we have to define the sense of the proposition
> "the Number which belongs to the concept *F* is the same as that which belongs to the concept G";
> *that is to say, we must reproduce the content of this proposition in other terms, avoiding the use of the expressions*
> "the Number which belongs to the concept *F*" (**FA,** pág, 73, nosso grifo)

E, assim, Frege propõe definir o sentido da proposição acima por meio da sentença que expressa a existência de uma relação *R* que correlaciona um-para-um os objetos que caem sob *F* e os objetos que caem sob *G*.

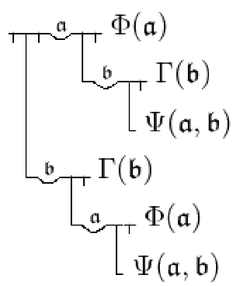
Agora, o conceito de correlação um-para-um pode ser definido usando-se apenas os símbolos da conceitografia: Dois conceitos *F* e *G* são correlacionados por meio de uma relação *S*, justamente quando para todo objeto *x* que cai sob *F*, existe um objeto *y* que cai sob *G* e *x* encontra-se na relação *S* com *y* e para todo objeto *y* que cai sob *G*, existe um objeto *x* que cai sob *F* e *x* encontra-se na relação *S* com *y*. Na conceitografia, isto é formulado assim

321 "But we have already settled that number words are to be understood as standing for self-subsistent objects" (**FA**, pág. 73)

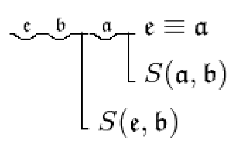
322 A seguir, argumentaremos porque usamos a tripla barra.



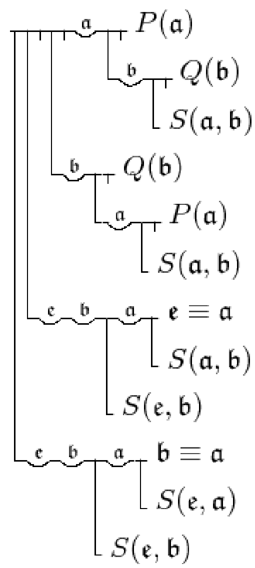
O conceito de *correlação* é de segunda ordem. Se admitirmos que 'Φ', 'Γ'e 'Ψ' representam lugares do argumento, o conceito será expresso por:



A correlação será um-para-um justamente quando a relação *S* for funcional (no sentido já explicado no capítulo **2**) e um-para-muitos, que pode ser definida da seguinte forma: uma relação *S* é um-para-muitos justamente quando para todos objetos *x, y* e *z*, se *x* está na relação *S* com *y* e *z* está na relação *S* com *y*, então *x*=*z*. Conceitograficamente, isto é

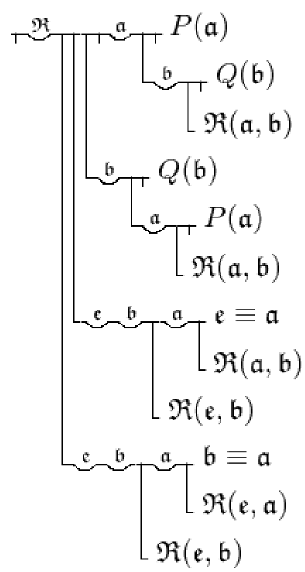


Assim, correlação um-para-um é dada por



E, portanto, introduzimos a quantificação existencial

(Q)



Sendo uma definição, **PH** tem de expressar uma identidade (por meio da tripla barra de **BS**) entre o conteúdo judicável expresso pela sentença afirmando a identidade entre os números cardinais dos conceitos *F* e *G* e o da sentença afirmando a existência de uma relação *R* que correlaciona um-para-um os conceitos *F* e *G*[323].

323 Em **GLA**, Frege afirma a identidade de conteúdo judicável entre a proposição que expressa o paralelismo entre retas e a proposição que expressa a identidade de direção destas retas: “Now in order to get, for example, from parallelism to the concept of direction, let us try the following definition: The propositions

“line *a* is parallel to line *b*”

Podemos notar que na definição de correlação 1-1 não há ocorrência do operador cardinalidade. Se adicionarmos abreviações para as fórmulas que ocorrem em **Q**, **PH** é a fórmula:

(**Q1**)

$$\Vdash \left(\begin{array}{l} (\sharp_x P(x) \equiv \sharp_x Q(x)) \equiv \; \top\!\!\smile^{\!\!\mathfrak{R}}\!\!\top\!\top Corr_{\alpha\beta}(\mathfrak{R}\alpha\beta)(P\alpha, Q\beta) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \llcorner Func_{\alpha\beta}\mathfrak{R}(\alpha,\beta) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \llcorner UpM_{\alpha\beta}\mathfrak{R}(\alpha,\beta) \end{array} \right)$$ [324]

Usando 52BS e 57BS, Frege obtém as fórmulas condicionalizadas, sendo estas suficientes para provar os axiomas de Peano.

Embora, à primeira vista, **PH** defina o operador-cardinalidade e pareça ser uma definição no sentido estrito, ele não o é e Frege estava ciente disso:

> It is not only among numbers that the relationship of identity is found. From which it seems to follow that we ought not to define it specially for the case of numbers. We should expect the concept of identity to have been fixed first, and that then, from it together with the concept of Number, it must be possible to deduce when Numbers are identical with one another, without there being need for this purpose of a special definition of numerical identity as well.
> As against this, it must be noted that for us the concept of Number has not yet been fixed, but is only due to be determined in the light of our definition of numerical identity. Our aim is to construct the content of a judgement which can be taken as an identity such that each side of it is a number. *We are therefore proposing not to define identity specially for this case, but to use the concept of identity, taken as already known, as a means for arriving at that which is to be regarded as being identical* (**FA**, pág. 74, meu grifo).

Em **BS**, como já foi afirmado, o *definiendum* das definições introduzidas contém apenas símbolos desconhecidos, ou seja, os símbolos introduzidos devem ser simples. Contudo, na passagem acima, Frege admite que a definição do operador-cardinalidade faz uso da identidade já tomada como conhecida. Isto quer dizer que Frege não está propondo que o símbolo

(**A**) $$\sharp_x F(x) \equiv \sharp_x G(x)$$

---

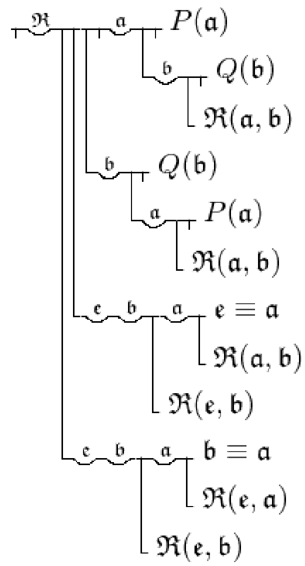
is to mean the same as [sei gleichbedeutend mit]

"the direction of line *a* is identical with the direction of line *b*" (**FA**, pág. 76)

324 Veja capítulo **4**.

seja uma mera abreviação para o símbolo mais complexo

(**B**)



Em **GLA**, §65, Frege volta ao mesmo ponto. Depois de propor a definição da identidade de direções de retas por meio da relação de paralelismo, ele escreve:

> This definition departs to some extent from normal practice, in that it serves ostensibly to adapt the relation of identity, taken as already known, to a special case, whereas in reality it is designed to introduce the expression "the direction of line *a*", which only comes into it incidentally. (**FA**, pág. 76)

Então Frege levanta a seguinte dúvida:

> It is this that gives rise to a second doubt – are we not liable, through using such methods, to become involved in conflict with the well-known laws of identity? Let us see what these are. As analytic truths they should be capable of being derived from the concept itself alone. Now Leibniz's definition is as follows:
> "Things are the same as each other, of which one can be substituted for the other without loss of truth".
> This I proposed to adopt as my own definition [explanation] of identity (**FA**, pág. 76).

As conhecidas leis da identidade são aquelas estabelecidas por 52BS e 54BS. E a definição Leibniziana da identidade supracitada equivale, dentro na conceitografia, às fórmulas 52BS e 57BS. Assim, quando Frege diz que ele toma a definição de Leibniz como sendo a sua própria explicação da identidade, ele está sugerindo que a identidade entre as direções é estabelecida por meio da tripla barra. O mesmo pode ser afirmado em relação a **PH**.

Há uma discussão com relação a esta passagem, ou seja, sobre se Frege pretendia definir a relação de identidade[325]. Acreditamos que isto é pouco provável. Em primeiro lugar, a tradução de Austin parece ser problemática. Em alemão, lemos:

Diese Erklärung eigne ich mir für die Gleichheit an. (**GLA**, pág. 73)

A palavra "*Erklärung*" pode ser traduzida por "definição", mas também pode ser traduzida por "explicação". Portanto, o que Frege poderia estar dizendo é que o significado da relação de identidade é explicado por meio de 52BS, 54BS e 57BS.

Além disso, como já foi mencionado, Frege não pode definir a identidade (tripla barra), porque ela é um primitivo lógico que é usado também nas definições. Lembremos que as definições em **BS** têm seguinte forma:

$$\Vdash (A \equiv B)$$

Assim, a possível definição da relação de identidade dentro da conceitografia seria

$$\Vdash \left(\begin{array}{l} \overset{\mathfrak{f}}{\smile}\!\top\, \mathfrak{f}(b) \\ \quad\ \llcorner\, \mathfrak{f}(a) \end{array} \right) \equiv (a \equiv b)$$

Mas, neste caso, estaríamos definindo a identidade (tripla barra) por meio dela mesma[326].

325 Dummett (1991, pág. 112)

326 Em sua resenha ao livro *Philosophie der Arithmetik I* de Husserl, Frege escreve: "It should be noted in this connection that I am using the word 'equal' or 'identical' without further addition in the sense of 'not different', 'coinciding', 'same'. As psychological logicians lack any understanding of definition, they lack any understanding of identity. This relation cannot but remain perfectly mysterious to them; for if words designated ideas throughout, one could never say '*a* is the same as *b*'; for to able to say this, one would first have to distinguish *a* from *b*, and they would then just be different ideas. *All the same, I agree with the author that Leibniz' explanation* [Erklärung] *that 'two things are the same when one can be substituted for the other without loss of truth' does not deserve to be called a definition, even if my reasons are different from his. Since any definition is an identification, identity itself cannot be defined. Leibniz's explanation could be called a principle that brings out the nature of the relation of identity, and as such it is of fundamental importance*" (Frege, 1984, pág. 200, nosso grifo). Em uma carta de Frege a Peano, há a seguinte passagem: "The last point I should not like to admit. To begin with, I doubt whether you can really designate all the purely logical forms you use by those three signs. I have my doubts even about identity. In Formulary I, sect. 1, 3, we find a definition of the sign = in the form

$$a = b \cdot = \cdot a \supset b \cdot b \supset a$$

But this evidently pressupposes the meaning of the definiendum. For in the Preface, p. iv, you say: 'Every definition is expressed by an equation; the first term is the sign that is being defined.' Here

Há uma passagem no artigo "*Boole's logical Calculus and the Concept-script*" que dá origem a uma dificuldade interpretativa. Frege escreve:

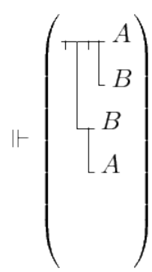
> The first thing one notices is that Boole uses a greater number of signs. Indeed I too have an identity sign, but I use it between judgeable contents almost exclusively to stipulate the sense of a new designation. Furthermore I now no longer regard it as a primitive sign but would define it by means of others (Frege, 1979, pág. 36)

Mas, reiterando, Frege não pode definir a tripla barra, porque ela é usada nas definições. Talvez, Frege tivesse introduzido um novo símbolo primitivo para ser usado nas definições. Mas, neste caso, ele seria obrigado a introduzir novos axiomas que explicassem o significado deste novo símbolo[327]. E isto não representaria nenhum ganho em simplicidade do sistema.

Aqui há apenas duas possibilidades plausíveis. A primeira seria que Frege mudou a forma de suas definições. Por exemplo, elas poderiam ser feitas por meio da conjunção de implicações. Ou seja, a forma da definição seria:

$$\Vdash A \leftrightarrow B$$

Lembrando que esta fórmula seria uma abreviação para

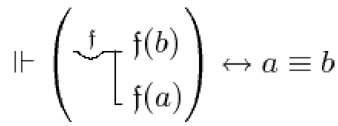


As formas condicionalizadas seriam obtidas usando IbGGA (veja capítulo **4**). A identidade seria definida pela fórmula

the left side of the definitional equation is 'a=b', the right side '$a \supset b \cdot b \supset a$', and between the two occurs the sign of identity whose meaning must therefore be already known if the definition is to be understood. For this reason alone there can be no question of a reduction of identity to the meanings of the three primitive signs" (Frege, 1980, pág. 113, nosso grifo).

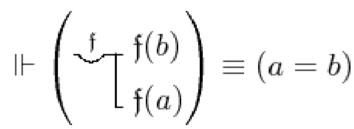
327 "The more primitive signs you introduce, the more axioms you need. But it is a basic principle of science to reduce the number of axioms to the fewest possible" (Frege, 1979, pág, 36).

(**C**)

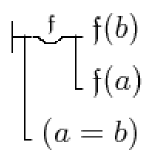


A segunda possibilidade poderia ser que Frege estivesse propondo a distinção entre os símbolos '$\equiv$' e '=' e que ele desejava definir este último da seguinte forma:

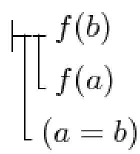
(**D**)



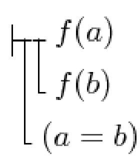
A tripla barra seria usada entre sentenças e '=', entre objetos. Isto implicaria a seguinte situação: teríamos leis similares tanto para '$\equiv$' quanto para '='. Frege ainda teria de ter no seu sistema lógico 52BS e 54BS, a partir dos quais ele provaria 57BS. Por outro lado, a partir (**D**) e 52BS, ele provaria



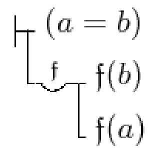
Usando IIb (capítulos **2** e **4**), derivaríamos a fórmula



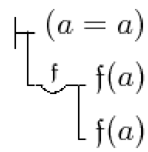
E desta formula, obteríamos



Além disso, usando 57BS, é possível inferir de (**D**), a fórmula



Substituindo-se '*b*' por '*a*' na fórmula acima, teríamos



Como o antecedente é provável em **BS**, por *modus ponens*, inferiríamos

$$\vdash a = a$$

(**D**) complicaria muito o sistema lógico de Frege. Teríamos leis para a tripla barra e para a identidade, que seriam uma o espelho da outra[328].

(**C**) acima não complica muito o sistema de Frege, contudo ela não parece justificar a expressão "*gleichbedeutend*", mesmidade de conteúdo judicável usadas nas definições. Por isso, preferimos manter a tripla barra ao expressar **PH**.

Uma vez que '$\equiv$' já tem seu significado estabelecido, **PH** não define a identidade por meio dela mesma. Ao contrário, fazendo uso da identidade, **PH** define (ou introduz) o operador-cardinalidade.

Uma das preocupações de Frege em **GLA**, §65 é se seria possível substituir a expressão 'o número do conceito *Q*' em todos os lugares em que ocorre a expressão "o número do conceito *P*" e vice-versa, quando os conceitos *P* e *Q* estão correlacionados 1-1[329].

328 O mesmo tipo de espelhamento que ocorre entre as proposições primárias e secundárias que Frege tinha criticado em relação à lógica de Boole.

329 Em GLA, este ponto é argumentado em termos de direção, mas na nota 47 de Scholz, Frege sustenta-o em termos do operador cardinalidade: "In order, therefore, to justify our proposed definition of the direction of line, we should have to show that it is possible, if line *a* is parallel to line *b*, to substitute

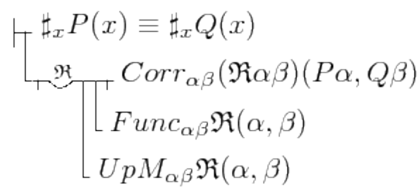
"the direction of *b*"

everywhere for

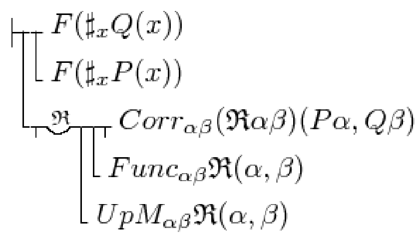
"the direction of *a*"

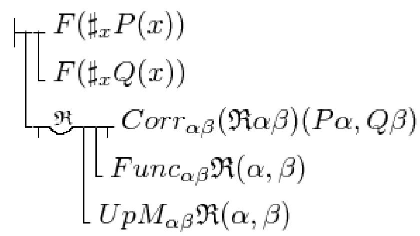
This task is made simpler by the fact that we are being taken initially to know of nothing that can be asserted about the direction of line except the one thing, that is coincides with the direction of some other line. We should thus have to show only that substitution was possible in an identity of

Isto é possível, porque a partir de **PH**, usando 52BS, derivamos as fórmulas

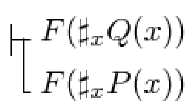


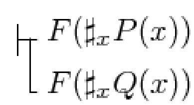
E, usando 52BS e 57BS, derivamos, respectivamente, as fórmulas





Mas, por hipótese, assumimos que existe uma relação *R* que correlaciona os conceitos *P* e *Q*, podemos eliminar os antecedentes das fórmulas acima (*modus ponens*), obtendo





PH é uma instância de uma definição por abstração e este tipo de definição sempre teve um uso corrente dentro da Matemática[330] [331]. Para Frege, as definições por abstração teriam a seguinte forma:

$$\Sigma(\alpha) \equiv \Sigma(\beta) \equiv \alpha \approx \beta$$

---

this one type, or in judgeable contents containing such identities as constituent elements" (**FA**, pág, 77)

330 Em uma seção intitulada "Definitions by Abstraction", Peano (1921, pág. 243) escreve o seguinte: "Sometimes we define a function *f*(*a*) not by a nominal definition of the form *f*(*a*) = expression composed of preceding signs, but defining the equality *f*(*a*)=*f*(*b*). For example, Definition 5 of Euclid is translated: (the ratio of size of *a* to the homogeneous entity *b* = the ratio of *c* to *d*)=(for arbitrary natural numbers *m* and *n*, if *m.a* is less than or equal to or greater than *nb*, the *m.c* is less than or equal to or grater than *n.d*)". Em outro artigo, denominado "Le Definizioni per Astrazione" (1915), Peano descreve uma série de definições por abstração que existe na Matemática. Dentre estas, ele menciona **PH** (ou algo análogo) e a definição de ponto no infinito (ou direção).

331 O próprio Frege era consciente deste fato, porque ele escreve: "Admittedly, this seems to be a very odd kind of definition, to which logicians have not yet paid enough attention; but that it is not altogether unheard of, may be shown by a few examples" (**FA**, pág. 74). Os exemplos de Frege têm origem na geometria.

À direita da fórmula acima, a expressão '$\alpha \approx \beta$' afirma que há uma relação de equivalência entre as entidades denotadas por 'α' e 'β'. Isto significa que as entidades α e β têm algo em comum, são idênticas sob algum aspecto. À direita, a expressão '$\Sigma(\alpha) \equiv \Sigma(\beta)$' indica que aquilo que é comum entre as entidades α e β pode ser dado por meio de uma identidade:

> The judgement "line *a* is parallel to line *b*", or, using symbols,
> $$a//b,$$
> can be taken as an identity. If we do this, we obtain the concept of direction, and say: "the direction of the line *a* is identical with the direction of line *b*". Thus we replace the symbol // by the more generic symbol =, through removing what is specific in the content of the former and dividing it between *a* and *b*. We carve up the content in a way different from the original, and this yields us a new concept" (**FA**, pág. 75).[332]

Infelizmente, o exemplo acima de Frege não deixa claro o tipo de análise que ele deseja dar. O ponto é que Frege está considerando estes três tipos de sentenças:

(a1) a direção da reta *a* é igual à direção da reta *b*
(a2) a reta *a* tem a mesma direção que a reta *b* ou a reta a e a reta *b* são idênticas em direção[333]
(a3) a reta *a* é paralela à reta *b*

O "*carve up*" indicado na passagem é em relação às sentenças (a1) e (a2). Ou seja, aquilo que ocorre como sendo comum às retas *a* e *b* é dividido entre elas formando as expressões "a direção da reta *a*" e "a direção da reta *b*". Depois, a relação expressa por (a2) seria definida em termos de (a3).

Destarte, a análise de Frege seria que (a1) e (a2) expressam o mesmo conteúdo judicável, embora, gramaticalmente falando, as sentenças sejam diferentes. Por outro lado, (a2) seria definido por (a3). Portanto, teríamos que (a1) expressaria o mesmo conteúdo que (a3).

A análise acima da mesmidade de conteúdo judicável entre (a1) e (a2) é sugerida pela seguinte passagem de GLA:

> We obtain in a similar way from the parallelism of planes a concept corresponding to

332 Aqui teríamos a seguinte definição por abstração introduzindo as direções: $D(a) \equiv D(b) \equiv a//b$.

333 Em termos mais gerais, de acordo com Frege, as sentenças "α e β são idênticos em φ" e "o φ de α e o φ de β são idênticos" expressam o mesmo conteúdo.

that of direction in the case of straight lines; I have seen the name "orientation" used for this. From geometrical similarity is derived the concept of shape, *so that of "the two triangles are similar" we say "the two triangles are of identical shape" or "the shape of the one is identical with that of the other"*. (**FA**, pág. 75)[334]

No caso de **PH**, as três sentenças seguintes expressariam o mesmo conteúdo judicável:

(**PH1**) o número do conceito *F* é igual ao número do conceito *G*
(**PH2**) os conceitos *F* e *G* são iguais em número[335]
(**PH3**) existe uma relação *R* que correlaciona um-para-um o conceito *F* e o conceito *G*

(**PH2**) é definida em termos de (**PH3**)[336]. (**PH1**) teria o mesmo conteúdo que (**PH2**) seguindo a análise sugerida em GLA, §64. Disto, obteríamos a identidade de conteúdo entre (**PH1**) e (**PH3**).

O que devemos ter em mente é que na conceitografia (provavelmente no livro de 1882), **PH** seria introduzido como uma definição:

$$\Vdash \left(\begin{array}{l} (\sharp_x P(x) \equiv \sharp_x Q(x)) \equiv \overset{\mathfrak{R}}{\smile} \; Corr_{\alpha\beta}(\mathfrak{R}\alpha\beta)(P\alpha, Q\beta) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \llcorner\, Func_{\alpha\beta}\mathfrak{R}(\alpha,\beta) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \llcorner\, UpM_{\alpha\beta}\mathfrak{R}(\alpha,\beta) \end{array} \right)$$

Como afirmamos, uma definição Fregeana estipula que os símbolos que ocorrem no lado direito e no lado esquerdo da tripla barra expressam o mesmo conteúdo conceitual. E, depois, esta definição é transformada em um "axioma" do sistema:

334 "This I propose to adopt as my own definition of identity. Whether we use "the same", as Leibniz does, or "identical", is not of any importance. "The same" may indeed be thought to refer to complete agreement in all respects, "identical" only to agreement in this respect or that; but we can adopt a form of expression such that this distinction vanishes. For example, instead of "the segments are identical in length" we can say "the length of the segments is identical" or "the same", and instead of "the surfaces are identical in colour", "the colour of the surfaces is identical". And this is the way in which the word has been used in the examples above". (**FA**, pág. 76)

335 Austin traduz o termo "gleichzahlig" por "equal". Com isso, acabamos perdendo de vista este tipo de análise.

336 "The expression

"The concept *F* is equal [in number] (gleichzalig) to the concept *G*"

is to mean the same as (sei gleichbedeutend mit) the expressions

"there exists a relation ϕ which correlates one to one the objects falling under the concept *F* with the objects falling under the concept *G*"" (**FA**, pág 85).

$$\vdash \left(\begin{array}{l} (\sharp_x P(x) \equiv \sharp_x Q(x)) \equiv \smile^{\mathfrak{R}} \begin{array}{l} Corr_{\alpha\beta}(\mathfrak{R}\alpha\beta)(P\alpha, Q\beta) \\ Func_{\alpha\beta}\mathfrak{R}(\alpha,\beta) \\ UpM_{\alpha\beta}\mathfrak{R}(\alpha,\beta) \end{array} \end{array} \right)$$

Assim, o objetivo de **GLA**, §64 parecia ser a justificação deste tipo de definição, a qual Frege já tinha feito uso em 1882. E, de fato, usando uma instância da geometria, seria mais fácil avançar seu ponto.

Algumas críticas ao procedimento de Frege em **GLA**, §64 estão relacionadas com a não-observação da manobra intermediária que apontamos. Uma questão é que as implicações "ontológicas" de cada lado de uma definição por abstração são diferentes. Por exemplo, assumamos o Princípio de direção:

(**PD**)

$$\Vdash D(a) \equiv D(b) \equiv a//b$$

Da identidade "$D(a)$=$D(b)$" podemos obter a existência da direção de uma reta a. Por outro lado, da relação de paralelismo "$a//b$", podemos obter somente que há uma reta que é paralela a reta a. Ou seja, isto significa que os conjuntos de consequências de "$D(a)$=$D(b)$" e "$a//b$" são diferentes. E, neste caso, estas sentenças não seriam equivalentes.

O mesmo fato ocorre com **PH**. Da identidade entre os números dos conceitos F e G, obtemos a existência do número de F. Por outro lado, da existência de uma relação 1-1 entre F e G, obtemos a existência de um conceito que se encontra nesta relação com F.

Conceitograficamente, assumamos, por hipótese que

$$\sharp_x F(x) = \sharp_x G(x)$$

Da seguinte instância de 58BS, temos

$$\begin{array}{l} \sharp_x F(x) \equiv \sharp_x G(x) \\ \smile^{\mathfrak{a}}\ \sharp_x F(x) \equiv \mathfrak{a} \end{array}$$

Por contraposição, chegamos à fórmula

$$\begin{array}{l} \neg\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\neg\; \sharp_x F(x) \equiv \mathfrak{a} \\ \sharp_x F(x) \equiv \sharp_x G(x) \end{array}$$

Como assumimos o antecedente da fórmula acima, obtemos a existência do número do conceito *F*.

Por outro lado, assumamos que os conceitos F e G são equinuméricos, fato que expressaremos pela fórmula:

$$F \sim G$$

Seja a seguinte instância de IIb

$$\begin{array}{l} F \sim G \\ \overset{\mathfrak{F}}{\smile}\neg\; F \sim \mathfrak{F} \end{array}$$

Por contraposição, temos

$$\begin{array}{l} \neg\overset{\mathfrak{F}}{\smile}\neg\; F \sim \mathfrak{F} \\ F \sim G \end{array}$$

Novamente, como assumimos o antecedente da fórmula acima, obtemos a existência de algum conceito que está correlacionado 1-1 com o conceito *F*.

Esta diferença no conjunto de consequências parece mostrar que os lados direito e esquerdo de uma definição por abstração não podem expressar o mesmo conteúdo. Este ponto é enfatizado por Beaney:

> What all these considerations suggest is that there is a real problem in specifying what the conceptual content of a proposition involves, a problem that arises just because Frege allows alternative analyses. As the cases of (Da) and D(b), and N(a) and N(b), shows, the propositions that reflect these analyses can look very different, even though they are regarded as having the same content. Such propositions can seem to have different ontological commitments. (Da) seems to refer to lines and parallelism, for example, while (Db) seems to refer to a direction and the relation of identity. Frege thinks that directions and numbers are genuine, albeit abstract, objects. So are both lines *a* and *b*, their direction, and the relations of parallelism and identity all involved in the content of (Da) and (Db)? (Beaney, 2007, pág. 107).

(Da) e (Db), na análise de Beaney, são os nossos (a1) e (a3) acima. Beaney falha em perceber que há o passo designado em (a2), o que torna a análise de Frege mais plausível[337] . Notemos que (a2) trata de retas, direções e identidade (ou igualdade). Portanto, parece que (a1) e (a2) estão comprometidas com as mesmas entidades.

O que acontece é que (a2) é definida em termos de (ou reduzida a) paralelismo entre retas. Não estamos dizendo que o procedimento de Frege não é problemático, ao contrário – o **Paradoxo de Russell** é apenas um sintoma -, mas talvez, para ele, isto fosse suficiente para justificar a introdução de **PH** como uma definição.

De fato, a introdução de **PH** como uma definição à conceitografia teria efeitos estranhos, porque embora os conjuntos de consequências de cada lado de **PH** sejam diferentes, as leis lógicas do seu sistema garantiriam a equivalência deles[338] [339].

O ponto central de §64 consiste em que podemos obter conhecimento de objetos não-intuitivos por meio de relações intuitivas ou lógicas. Frege escreve:

> Often, of course, we conceive of the matter the other way round, and many authorities define parallel lines as lines whose directions are identical. The proposition that straight lines parallel to the same straight line are parallel to one another" can than be very conveniently proved by invoking the analogous proposition about things identical with the same things. Only the trouble is, that this is to reverse the true order of things. *For surely everything geometrical must be given originally in intuition. But now I ask whether anyone has an intuition of the direction of a straight line. Of a straight line, certainly;* but do we distinguish in our intuition between this straight line and something else, its direction? That is hardly plausible. *The concept of direction is only discovered at all as a result of a process of intellectual activity which takes its start from the intuition. On the other hand, we do have an idea of parallel straight lines. Our convenient proof is only made possible by surreptitiously assuming, in our use of the word "direction", what was to be proved; for if it were false that "straight lines parallel to the same line are parallel to one another" , then we could not transform a// b into an identity*" (**FA**, pág. 75, nosso grifo).

Esta passagem tem relação com algumas questões epistemológicas latentes que Frege discutiu na sua tese de doutorado intitulada "*On a geometrical Representation of Imaginary Forms in the Plane*". Esta tese é puramente matemática, mas Frege está preocupado com a questão epistemológica do tratamento dispensado às figuras imagi-

337 Veja, por exemplo, (Dummett, 1991, pp. 167-179), (Hale, 1997, pp. 91-116).

338 Equivalência está sendo pensada aqui como cada lado de **PH** implicar o outro.

339 O mesmo ocorre com o Axioma V. Do fato de que duas funções *f* e *g* são coextensivas, podemos provar que existe uma função que é coextensiva a *f*. E do fato de que a extensão de *f* é idêntica à extensão de *g*, podemos provar que existe a extensão de *f*. Por outro lado, em **GGA**, devido a seus axiomas, podemos provar a equivalência entre os dois lados do **Axioma V**.

nárias como sendo entidades próprias (na geometria projetiva). Porém, não temos quaisquer intuições destes objetos projetivos. E isto se torna um problema, porque Frege acreditava que os axiomas da geometria derivam sua validade da intuição[340]

A sugestão de Frege para tratar do problema em questão é mostrar que podemos nos referir às entidades imaginárias e às suas relações, indiretamente, por meio de entidades e relações intuitivas:

> *As in the consideration of points at infinity, there now arises the need, not only for treating these improper elements in the same way as the proper ones, but also for having them before our eyes*. This is easily achieved for points at infinity in the plane by projecting the plane on a sphere from a point on the sphere which is neither the nearest nor the furthest. In that case there is no difference in projection between proper points and points in infinity. In what follows we shall attempt to do the same for imaginary forms. By a geometrical representation of imaginary forms in the plane we understand accordingly a kind of correlation in virtue of which every real or imaginary element of the plane has a real, intuitive element corresponding to it. The first advantage to be gained by this is one common to all cases where there is a one-one relation between two domains of elements: *that we can arrive at new truths by merely carrying over known propositions*. But there is another advantage peculiar to this case: *that the non-intuitive relations between imaginary forms are replaced by intuitive ones. The meaning of imaginary forms comes out equally whether they are considered metrically or projectively*.(Frege, 1984, pp. 2-3).

Considerando esta análise de Frege em termos de **PH**, poderíamos supor que ele desejaria sustentar que nosso conhecimento da verdade da sentença que expressa a identidade entre o número do conceito *F* e o número do conceito *G* dependeria apenas do nosso conhecimento da verdade da sentença que expressa a existência de uma correlação um-para-um entre estes conceitos. E diferentemente da relação de paralelismo, aquela relação é dada por meios puramente lógicos.

Isto é, o nosso conhecimento da verdade da sentença que expressa a identidade entre o número do conceito *F* e o número do conceito *G* seria puramente lógico. **PH** poderia ser uma explicação natural do nosso conhecimento dos números cardinais sem recorrer à intuição. O mais importante é que adicionado à conceitografia, **PH** implica, junto com as demais definições, os axiomas de Peano.

340 “When we consider that the whole of geometry rests ultimately on axioms which derive their validity from the nature of out intuitive faculty, we seem well justified in questioning the sense of imaginary forms, since we attribute to them properties which not infrequently contradict all our intuitions”. (Frege, 1984, pág.1).

O Princípio do Contexto serviria como um guia para buscar a definição correta de números cardinais (como objetos). Mas, ele também garantiria o conteúdo (referência) das expressões da forma '$\sharp_x ... x ...$'.

Notemos que é uma verdade da lógica de segunda ordem que todo conceito F é equinumérico a si mesmo:

(E)

$$\vdash F \sim F$$

Portanto, será uma verdade "lógica" que o número de F é igual ao número de F

(I)

$$\vdash \sharp_x F(x) \equiv \sharp_x F(x)$$

E, portanto, o termo '$\sharp_x F(x)$' terá um conteúdo, via o Princípio do Contexto. Há uma prova trivial dentro da conceitografia da existência de quaisquer objetos, cujos nomes são introduzidos no sistema. Como já foi afirmado, o seguinte é provável em **BS**:

$$\vdash\!\top\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\top\,(\mathfrak{a} = a)$$

Se introduzirmos o nome "Pegasus" no sistema, teremos, então

$$\vdash\!\top\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\top\,(\mathfrak{a} = Pegasus)$$

Acreditamos que não é este tipo de prova de existência de números que Frege pretendia dar em 1882. A prova dependeria de (**I**), cuja verdade dependeria de (**E**).

Na nossa visão, esta seria a abordagem "logicista" de Frege no livro mencionado a Marty. Números seriam entidades ligadas a conceitos. A existência dos números dependeria da existência de conceitos e das relações que ocorrem entre conceitos. O nosso conhecimento destes objetos seria não-intuitivo e, de fato, lógico.

Por algum motivo entre 1882 e 1884, Frege mudou de ideia. Com efeito, acreditamos que isto ocorreu quando grande parte de **GLA** já estava escrita, porque há uma série de elementos neste livro sugerindo que o conceito de número cardinal seria definido por abstração[341].

Em **GLA**, §66, Frege levanta o que seria a objeção fatal às definições contextuais e, em particular, a **PD** e **PH**. De acordo com ele, este tipo de definição apenas decide os valores de verdade de sentenças do tipo

$$\Sigma(\alpha) \equiv \Sigma(\beta)$$

Em particular, **PD** só decide o valor de verdade de sentenças do tipo

$$D(a) \equiv D(b),$$

e **PH** apenas decide o valor de verdade de sentenças do tipo

$$\sharp_x F(x) \equiv \sharp_x G(x),$$

Estritamente falando, **PD** e **PH** deveriam decidir o valor de verdade de sentenças que expressam identidades em todos os casos possíveis[342].

Este problema ficou conhecido na literatura secundária pelo nome de "Problema de Júlio César". Não nos é totalmente claro exatamente qual é o significado do "Problema de Júlio César" e por que ele surgiu quando Frege escrevia **GLA**.

341 Na introdução de **GLA**, Frege implicitamente escreve que irá definir o conceito de número cardinal por meio de **PH**: "With numbers of all these types, as with the positive whole numbers, it is a matter of fixing the sense of an identity" (**FA**, pág. X). O mesmo ponto é feito no título da seção 62: "To obtain the concept of Number, we must fix the sense of a numerical identity". Uma vez que Frege rejeitou a definição por abstração, então não há justificação de manter o título em §62 e a passagem na introdução. Além disso, a ausência das extensões na primeira parte de **GLA** é algo surpreendente. Ainda, a falta de clareza em §69 é outro sintoma. E no fim de GLA, Frege escreve: "Now we, from our previous treatment of the positive whole numbers, have seen that it is possible to avoid all importation of external things and geometrical intuitions into arithmetic, without, for that all, falling into the error of the formalist. Here, just as there, *it is a matter of fixing the content of a recognition-judgement*" (**FA**, pág. 119).

342 "But there is still a third doubt which may make us suspicious of our proposed definition. In the proposition

"the direction of *a* is identical with the direction of *b*

the direction of *a* plays the part of an object, and our definition affords us a means of recognizing this object as the same again, in the case it should happen to crop up in some other guise, say as the direction of *b*. But this means does not provide for all cases. It will not, for instance, decide for us whether England is the same as the direction of the Earth' axis – if I may be forgiven an example which looks nonsensical. Naturally no one is going to confuse England with the direction of the Earth's axis; but that is no thanks to our definition of direction. That says nothing as to whether the proposition

"the direction of *a* is identical with *q*"

should be affirmed or denied, except for the one case where *q* is given in the form of "the direction of *b*". What we lack is the concept of direction" (**FA**, pág. 77-8).

A possibilidade que aventamos está ligada ao Princípio do Contexto[343] [344]. Usaremos **PH**, porque tornará nosso exemplo mais claro. Se introduzirmos na conceitografia o nome "Júlio César", então, via **PH**, a sentença

$$\#_x F(x) \equiv \text{Júlio César}$$

expressará o mesmo conteúdo judicável que a sentença que afirma a existência de uma correlação 1-1 entre conceito F e Júlio César. Mas esta última sentença não tem sentido[345]. E, assim, a sentença

$$\#_x F(x) \equiv \text{Júlio César}$$

também não terá sentido. Por conseguinte, não poderíamos atribuir conteúdos às partes da sentença[346].

A falsidade da sentença acima poderia ser decidida da seguinte forma: Júlio César não é um número cardinal e, portanto, ele não pode ser idêntico ao número cardinal de F. Contudo, Frege define o conceito de número cardinal por meio do operador cardinalidade:

343 O problema de Júlio César foi bastante estudado na literatura secundária. Veja, por exemplo, (Greimann, 2003), (Kemp, 2005), (Heck Jr., 1997b, 2005), (Tappenden, 2005), (Wright, 1983) e (Hale; Wright, 2001b)

344 Landini (2006) acredita que a rejeição de Frege de **PH** é porque ele não dá uma definição explícita do operador-cardinalidade e que o problema de Júlio César é um sintoma. De fato, ele afirma que o problema mencionado por Frege é o mesmo que aquele mencionado por Russell (1996, cap XI). Mas, desde o início, Frege tinha plena consciência de que **PH** não definia explicitamente o operador-cardinalidade e, portanto, ele já o deveria ter sido descartado.

345 O conceito de correspondência 1-1 é de segunda ordem, sob o qual caem conceitos de primeira ordem. A questão se um objeto cai ou não sob um conceito de segunda ordem não pode ser respondida nem afirmativa, nem negativamente, porque ela simplesmente não faz sentido. Da mesma forma, perguntar se algo cai sob um objeto é sem sentido: "It is to concepts of just this kind (for example, satellite of the Earth) that the number 1 belongs, which is a number in the same sense as 2 and 3. With a concept the question is always whether anything, and if so what, falls under it. *With a proper name such questions makes no sense*" (**FA**, pág. 64).

346 "One doubt, however, still remained, which was this. A recognition-statement must always have a sense. But now if we treat the possibility of correlating one to one the objects falling under the concept F with the objects falling under the concept G by putting: "the Number which belongs to the concept F is identical with the number which belongs to the concept G", thus introducing the expression "the Number which belongs to the concept F", this gives us a sense for identity only if both sides of it are of the form just mentioned" (**FA**, pág. 117).

$$\Vdash [(\neg\overset{\mathfrak{F}}{\smile}\neg\ \sharp_x\mathfrak{F}(x) \equiv n) \equiv Card(n)]$$ [347] [348]

Ou seja, Júlio César será um número cardinal se existir algum conceito *F* do qual ele é número, o que é equivalente a perguntar se Júlio César é igual ao número do conceito *F*.

Com dissemos no capítulo **2**, não há nomes próprios em **BS**. Em 1882, os únicos nomes próprios introduzidos na teoria seriam nomes do tipo '$\sharp_x...x...$'. Agora, em que sentido teríamos o problema de Júlio César? Em **GLA**, Frege menciona a prova do seguinte teorema: nenhum objeto precede ao 0

$$\vdash\neg\, Pred(c, 0)$$

Isto é equivalente à fórmula

$$\vdash\overset{\mathfrak{F}}{\smile}\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\neg\begin{array}{l} \sharp_x\mathfrak{F}(x) \equiv 0 \\ \mathfrak{F}(\mathfrak{a}) \\ \sharp_x\left(\neg\begin{array}{l} x \equiv \mathfrak{a} \\ \mathfrak{F}(x) \end{array}\right) \equiv c \end{array}$$ [349]

Usando IIb e 58BS, disto obteríamos

$$\vdash\neg\begin{array}{l} \sharp_x H(x) \equiv 0 \\ H(a) \\ \sharp_x\left(\neg\begin{array}{l} x \equiv a \\ H(x) \end{array}\right) \equiv c \end{array}$$

Se 'Julio César' fosse um nome do sistema, e se ele substituísse '*c*' na fórmula acima, então ela não teria sentido, porque o último antecedente não teria também, porque afirmaria a existência de relação que correlaciona 1-1 o conceito *cair sob F, mas ser diferente de a* e Júlio César.

Mas, na teoria de 1882, poderíamos substituir '*c*' apenas por nomes do tipo $\sharp_x...x...$

347 "The expression

"*n* is a Number"

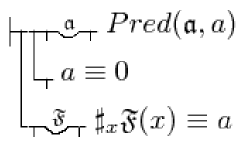
is to mean the same as the expression (sei gleichbedeutend mit)

"there is a concept such that *n* is the Number which belongs to it" (**FA**, pág. 85).

348 Capítulo **4**.

349 Ibid.

$\sharp_x \ldots x \ldots$. Isto não acarretaria o problema de Júlio César. Há outros teoremas prováveis no sistema de 1882 que seriam problemáticos, se novos nomes fossem introduzidos no sistema. Por exemplo, Frege prova o teorema que todo número cardinal diferente de 0 é o sucessor de algum número



Se instanciarmos '*a*' para '2', '3', '4', cujas definições seriam dadas por meio do operador-cardinalidade, poderíamos provar que todos estes números são sucessores de algum número. Por outro lado, se 'Júlio César' fosse um nome do sistema, então esta sentença não teria sentido, no caso de instanciarmos '*a*' por 'Júlio César'.

Talvez o problema tenha ocorrido na mente de Frege quando ele começou as suas investigações para obter os demais números a partir dos naturais. O procedimento poderia ser aquele que mencionamos na introdução da presente tese[350]. Frege necessitaria introduzir novas definições por abstração e introduzir novos operadores-abstração. De fato, a seguinte passagem dá uma boa indicação a favor do nosso ponto:

> In the same way with the definitions of fractions, complex numbers and the rest, *everything will in the end come down to the search for a judgeable content which can be transformed into an identity whose sides precisely are the new numbers. In other words, what we must do is fix the sense of a recognition-judgement for the case of these numbers*" (**FA**, pág. 114-5, nosso grifo).

Assim, Frege teria de introduzir uma série de condições de identidade para os

350 Sem considerar as classes de equivalências. Ou seja, introduziríamos os pares ordenados pelo princípio do par:
(**Par**) $< a, b > \equiv < c, d > \cdot \equiv \cdot a \equiv c \wedge b \equiv d$
Depois, os números inteiros seriam introduzidos como entidades relacionadas a pares de números naturais (estes introduzidos por **PH**), satisfazendo a seguinte condição
(**Int**) $I < x, y > \equiv I < w, z > \cdot \equiv \cdot x + z \equiv y + w$, onde *x*, *y*, *w* e *z* percorrem naturais e '+' seria definível.
As frações seriam obtidas como entidades relacionadas a pares de inteiros que satisfazem uma certa condição (introdução).

demais números, cada uma das quais dadas pelas respectivas definições por abstração[351]. Em particular, se Frege introduzisse o número inteiro **1**, não poderíamos decidir se o número natural 1 é igual ou não ao número inteiro **1**. Nem **PH,** nem (**Int**) decidiriam a questão – se, é claro, Frege tivesse introduzido inteiros desta forma[352].

A manobra de Frege em **GLA** (§68) foi identificar os números cardinais a certas extensões de conceitos (definição explícita), a saber,

o número do conceito *F* é a extensão do conceito *ser equinumérico ao conceito F*

e assumir que é conhecido o que é uma extensão de conceitos.

Da mesma forma, depois da passagem supracitada de **GLA**, Frege propõe identificar os demais números como sendo certas extensões de conceitos:

> In doing so, we must not forget the doubts raised by such transformations, which we discussed in §§ 63-68. If we follow the same procedure as we did there, then the new numbers are given to us as extensions of concepts (**FA**, pág. 115)

O problema da definição explícita proposta é que o Princípio do Contexto perde seu papel, qual seja, evitar a intrusão de elementos psicologistas na definição de número cardinal. Extensões de conceitos são objetos abstratos dos quais não podemos ter relações causais. Mas, então, o que é uma extensão? É uma ideia? Voltamos ao ponto inicial das discussões ocorridas nas §§57-61 de **GLA.** Existe uma tensão entre a aplicação do Princípio do Contexto para justificar os conteúdos dos termos singulares abstratos e definições por abstração e a identificação direta dos números cardinais

351 Veja o artigo "*Abstraction and Identity*" (2005) de Cook e Ebert, principalmente as páginas 132-3.

352 Todas as questões levantadas anteriormente sobre Júlio César ocorreriam com relação a **1**. **1** precederia ou não o número cardinal (natural) 0?

como sendo certas extensões do conceito[353] [354].

Somos céticos sobre a possibilidade de Frege ter em 1884 o seu Axioma V e uma prova formal de **PH** a partir da sua definição explícita. Em primeiro lugar, é uma falha grave de Frege não mencionar a introdução de um novo axioma no seu sistema, principalmente porque estamos assumindo a hipótese de que **GLA** foi escrito para ser uma introdução ao livro de 1882.

Além disso, há uma questão sobre que tipo de extensões de conceitos os números são. Pela definição em §68, eles parecem ser extensões de conceitos de segunda ordem. De fato, o conceito *ser equinumérico ao conceito F* é expresso por

$$\begin{array}{l} \vdash\!\overset{\mathfrak{R}}{\smile}\!\!\top\!\!\top\, Corr_{\alpha\beta}(\mathfrak{R}\alpha\beta)(F\alpha, \Phi\beta) \\ \qquad\;\; \llcorner\, Func_{\alpha\beta}\mathfrak{R}(\alpha,\beta) \\ \qquad \llcorner\, UpM_{\alpha\beta}\mathfrak{R}(\alpha,\beta) \end{array}$$

onde 'Φ' indica o lugar de argumento. Portanto, Frege teria de introduzir o seguinte **Axioma V***:

353 Sluga (1980, pp. 127-8) menciona o mesmo fato: “But there is something surprising and disturbing about the definition of numbers in terms of extensions of concepts in the general context of Frege's thought. He had originally reasoned that numbers as logical objects had to be defined contextually. It was presumably for this reason that he titled the relevant section of the book: “To obtain the concept of Number, we must fix the sense of a numerical identity' (F, p. 73). But the conclusion of that section was that the attempt definition which fulfilled that condition could not legitimately be adopted. A definition of numbers as objects had been achieved, but the question remained whether that definition revealed numbers to be logical objects. The notion of the extension of a concept which is used in the definition appears out of nowhere on page 79 in the *Foundations of Arithmetic*. How is it to be understood? Is it a logical notion and why? In the Foundations Frege writes somewhat lamely: 'I assume that it is known what the extension of a concept' (ibid. 80). And he suggests that after all the notion might not be essential to the construction: 'I attach no decisive significance even to bringing in the extensions of concepts at all (*ibid.*, p. 117; cf. Also p. 80)”.

354 Não concordamos com a interpretação de Dummett (1991, cap. 16) de que o Princípio do Contexto serviria como um guia para a definição correta do conceito de número cardinal: “Thus, as before, the derivability of the original equivalence – the criterion of identity for numbers – becomes a condition for the correctness of a definition of the cardinality operator. What the context principle teaches us is to be *satisfied* with a definition from which the original equivalence can be derived, or, more exactly, with any definition fulfilling our two conditions” (**FA**, pág. 201-2).

$$Ext_Z M(Z) \equiv Ext_Z N(Z) \equiv \overset{\mathfrak{f}}{\smile} (M_\alpha \mathfrak{f}(\alpha) \equiv N_\alpha \mathfrak{f}(\alpha))$$ [355] [356]

O problema é que teríamos de supor que funções de primeira ordem também têm extensões. Mas, neste caso, Frege teria de introduzir a seguinte instância do **Axioma V:**

$$\varepsilon' f(\varepsilon) \equiv \varepsilon' g(\varepsilon) \equiv \overset{\mathfrak{a}}{\smile} (f(\mathfrak{a}) \equiv g(\mathfrak{a}))$$

Todavia, teríamos o seguinte Problema de Júlio César, a saber, qual é o valor de verdade da identidade

$$\varepsilon' f(\varepsilon) \equiv Ext_Z M(Z)?$$

Ele não é decidido nem por **Axioma V***, nem por **Axioma V**. Blanchette também atenta para este fato:

> But here again there are difficulties. For there are no clear criteria by means of which to conclude that the relevant first-level and second-level extension are in fact distinct (Blanchette, 1994, pág. 92)[357]

Levando em conta a posição de Blanchette, Landini (2006, pág. 227) menciona que se o operador-extensionalidade fosse considerado como uma função de terceira ordem que se aplica a conceitos de segunda, então Frege não poderia definir a relação

---

355 Blanchette (1994, pág. 92) escreve: "In fact, it appears that Frege himself proposes two distinct reductions of the numbers to extensions. In the *Grundlagen*, the numerals refer to the extensions of second-order concepts, while in the *Grundgesetze* they refer to extensions of first-level concepts. This would seems to clinch the case in favour of Frege's tolerance of multiple reductions". Veja também (Schirn 2003, pág. 211).

356 Boolos (1986/7, pág. 173) assume que os números cardinais são definidos em **GLA** como extensões de segunda-ordem e mostra que esta instância do **Axioma V** também é inconsistente.

357 Schirn (2003, pág. 212) parece fazer o mesmo ponto: "Thus, by virtue of (ED) [definição explícita], Frege succeeds in extending the range of applicability of the originally proposed criterion of identity for cardinal numbers. Nevertheless, the criterion so extended lacks the required unrestricted generality. Take, for example, the two equations "$N_x(x \neq x) = \sharp x(x \neq x)$" and "$N_x(x \neq x) =$Julius Caesar". The first cannot be transformed into an equation of type (1), since $\sharp_x(x \neq x)$, unlike "$\sharp\varphi(E_x(\varphi(x), x \neq x))$", denotes the extension of a *first-level* concept. Hence, *HP is powerless to decide whether* "$N_x(x \neq x) = \sharp x(x \neq x)$" *is true or false.* Although does not comment on such a case, he seems to assume that (ED) removes the referential indeterminacy of the cardinality operator once and for all. If we really do know what the extension of a concept in general is – and Frege takes that for granted, albeit without any justification – then we ought to be able to distinguish the extension of a first-level concept from the extension of a second-level concept, and the latter from Julius Caesar".

de pertinência (**GGA** §34) e teria de introduzir infinitos operadores-extensionalidade (um para cada nível de funções) e infinitos **Axiomas V** (um para cada operador-extensionalidade)[358]. De acordo com Landini, isto seria catastrófico. Então ele escreve:

> Such untoward consequences are to be avoided by a principle of interpretative charity if possible. Charity is possible. In Frege's response to Benno Kerry's review of the *Grundlagen*, he notes that readers should grant him a "pinch of salt"when understanding his expression "the concept *f*.". He explains that often when the phrase occurs in subject position he intended to be referring to an object (an extension) correlated with the concept *f*. This intent is corroborated by a footnote in the *Grundlagen* itself. Frege remarks that the phrase "the concept *f*" can often be replaced by the phrase "the extension of the concept *f*". This strongly suggests that Frege intended that the notion of extension of the *Grundlagen* provides for the *multiple* correlations that enable one to correlate a function of any level with a unique object. *The Grundlagen* defines equinumerosity as a relation between second-order functions [erro?]. It defines cardinal number of *f* as the extension of the concept *equinumerous with the concept f*. But once Frege allows an extension function (from first-level functions to objects), correlations of functions of level *n* with functions of level *n*-1, and eventually to objects, result. The second-level concept *equinumerous with the concept f* will be correlated with a first-level relation between objects. Thus, the account of cardinal numbers as objects in *Grundlagen* agrees with that of the *Grundgesetze* (2006, pp. 227-8)

Na passagem acima, Landini sustenta a tese da identificação das expressões '*o conceito f*' e "*a extensão do conceito f*"[359]. E, apoiando-se na famosa passagem da nota de §68, sustenta a seguinte transformação:

(**Def1**) o número que pertence ao conceito *F* é a extensão do conceito *ser equinumérico ao conceito F*
(**Def2**) o número que pertence à extensão do conceito *F* é a extensão do conceito *ser equinumérico à extensão do conceito F*

Porém, o ponto de Landini é fraco. Esta transformação não depende apenas de questões linguísticas. Frege teria de ter meios dentro da conceitografia para transformar o conceito de segunda ordem de equinumerosidade em um conceito de primeira ordem.

Isto é feito em **GGA** por meio da definição da relação '∩', que seria uma espécie de relação de pertinência. Não há qualquer indicação em **GLA** de que Frege tinha

358 Landini defende a tese da correlação, ou seja, cada conceito de ordem *n*+1 está correlacionado a um conceito de ordem *n*. Por fim, conceitos de primeira ordem estão relacionados a extensões.

359 Esta tese é mencionada por Resnik (1967), defendida por Ruffino (1996, 1998, 2000) e negada por Schirn (1990, 1996b).

esta relação em mente. Como veremos, ela depende da introdução de uma outra função '\' que funciona como o artigo definido. Mas, a introdução desta função obrigaria Frege a introduzir outro axioma, um análogo do axioma VI de **GGA**, que rege a função '\'[360]. O mais importante é que Frege teria de ter o axioma IV* no sistema, a partir do qual ele provaria o teorema **BB**[361]**.** E deste último, ele poderia chegar a um análogo do teorema 1 de **GGA**

(T1) $f(a) \equiv a \cap \varepsilon' f(\varepsilon)$

E a partir de (**T1**) poderia ser provado um análogo do teorema 2 de **GGA**.

(T2) $f(a, b) \equiv a \cap (b \cap \alpha' \varepsilon' f(\varepsilon, \alpha))$.

Nenhuma destas provas está aberta a Frege pela falta de IV* ou (**BB**) no seu sistema.

Assumamos que o **Axioma V** tem a seguinte forma:

(**Axioma V**)

$$\vdash \varepsilon' f(\varepsilon) \equiv \varepsilon' g(\varepsilon) \equiv \overset{\mathfrak{a}}{\smile} (f(\mathfrak{a}) \equiv g(\mathfrak{a})),$$

Além disso, suponhamos que a relação de pertinência foi definida da seguinte forma:

(**Pert**)

$$\Vdash \left(a \cap b \equiv \top\!\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\!\top \begin{array}{l} g(a) \\ b \equiv \varepsilon' g(\varepsilon) \end{array} \right)$$ [362] [363]

Do **Axioma V**, derivaríamos as fórmulas condicionalizadas (usando 52BS, 57BS):

---

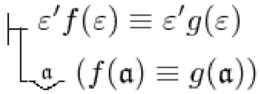
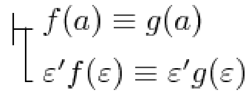
360 Na notação de **BS**, o axioma VI seria:

$$\vdash a = \backslash \epsilon'(a = \epsilon)$$

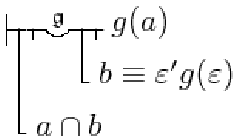
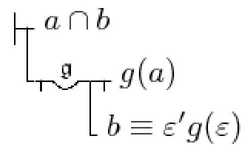
361 Ou introduzir BB como axioma. Mas, como já mencionamos, isto acarretaria problemas no sistema.

362 Na notação contemporânea: $a \in b \equiv_{def} \exists g(b = \varepsilon' g(\varepsilon) \wedge g(a))$.

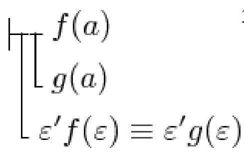
363 Esta definição é diferente daquela dada em **GGA**. Como veremos, pela definição de **GGA**, Frege precisa de IVa para provar seu teorema 1, então esta definição não nos serve aqui, uma vez que em **GLA** não há **BB**.

(Va)  (Vb) 

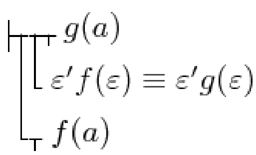
A partir de **Pert**, obteríamos também as seguintes fórmulas condicionalizadas

(P1)  **(P2)** 

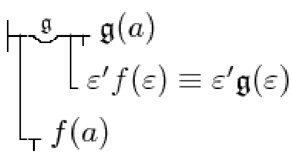
De (**Va**), poderíamos obter a fórmula

 [364]

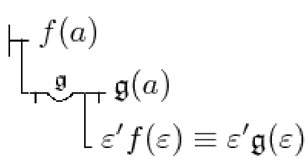
Por contraposição, chegaríamos a



Generalizando universalmente, inferiríamos



E, novamente, por contraposição, derivaríamos

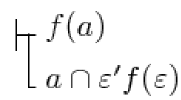


Notemos que o antecedente da fórmula acima corresponde ao fato de que *a*

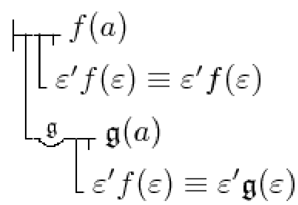
364 Aqui temos um primeiro problema, a saber, '$f(a) \equiv g(a)$' é bem-formada ainda que '$f\Gamma$' e '$g\Gamma$' não sejam conceitos. Porém, para provar esta fórmula, devemos pressupor que '$f\Gamma$' e '$g\Gamma$' sejam conceitos, caso contrário, teríamos fórmulas mal-formadas.

pertence à extensão do conceito *F*. Usando (**P1**) acima, chegaríamos à fórmula

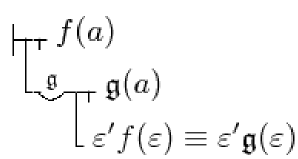
(**x1**)



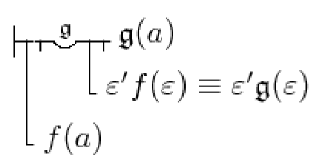
Por outro lado, teríamos a seguinte instância de IIb



A fórmula '$\varepsilon' f(\varepsilon) \equiv \varepsilon' f(\varepsilon)$' seria provável do **Axioma V** (ou poderia ser considerada uma instância do axioma 54BS). Portanto, poderíamos eliminá-la, obtendo

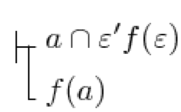


Por contraposição, chegaríamos à fórmula



Notemos que o consequente da fórmula acima corresponde ao fato de que *a* pertence à extensão do conceito *f*. Usando (P2), obteríamos a fómula

(**x2**)



De (**x1**) e (**x2**), Frege poderia derivar apenas a fórmula

(x3)

$$\vdash f(a) \leftrightarrow a \cap \varepsilon' f(\varepsilon)$$ [365 366]

Todavia, desta fórmula, Frege não poderia obter a fórmula

$$\vdash f(a,b) \leftrightarrow a \cap (b \cap (\alpha'\varepsilon' f(\varepsilon,\alpha))$$ [367 368]

Frege teria de introduzir a seguinte instância do **Axioma V** para relações binárias

(V**)

$$\vdash \alpha'\varepsilon' f(\varepsilon,\alpha) \equiv \alpha'\varepsilon' g(\varepsilon,\alpha) \equiv \overset{\mathfrak{b}}{\smile}\overset{\mathfrak{a}}{\smile} (f(\mathfrak{a},\mathfrak{b}) \equiv g(\mathfrak{a},\mathfrak{b}))$$ [369]

Um problema que surge neste caso é que não é claro como Frege poderia definir a relação de pertinência para extensões de relações. Deveria ser algo como

$$\Vdash \left(< a, b > \cap c \equiv \begin{array}{l} \overset{\mathfrak{g}}{\smile} \top g(a,b) \\ \quad \llcorner\, c \equiv \alpha'\varepsilon' g(\varepsilon,\alpha) \end{array} \right) ?$$ [370]

A teoria das extensões em 1884 seria extremamente problemática. Frege não poderia dar a mesma definição do operador numérico que foi dada em **GGA** em **GLA**[371].

Além disso, independentemente de como operador-cardinalidade é definido, se por meio de extensões de conceitos de segunda ordem ou por meio de extensões de conceitos de primeira ordem, **PH** não pareceria ser provável em **GLA**.

---

365 O símbolo '↔' já foi explicado.

366 Não se trata de uma prova no sentido próprio, porque a teoria é inconsistente.

367 Em **GGA**, Frege precisa provar $f(a) = a \cap \varepsilon' f(\varepsilon)$. Como esta fórmula é dada por uma identidade, ele pode utilizar a substituição de idênticos (teorema IIIc de GGA ou 52BS) e provar a fórmula $f(a,b) = a \cap (b \cap \alpha'\varepsilon' f(\varepsilon,\alpha))$. E desta, por substituição de idênticos, ele pode provar $f(a,b,c) = c \cap (a \cap (b \cap \gamma'\alpha'\varepsilon' f(\varepsilon,\alpha,\gamma)))$. E assim por diante.

368 Esta fórmula é necessária para transformar o conceito de número cardinal de **GLA** no conceito de **GGA**.

369 Para cada relação eneária, Frege seria obrigado a introduzir um **Axioma V** correspondente.

370 Landini nos sugeriu a definição da seguinte relação ternária:

$$\Vdash \left(a \cap (b \cap c) \equiv \begin{array}{l} \overset{\mathfrak{g}}{\smile} \top g(a,b) \\ \quad \llcorner\, c \equiv \alpha'\varepsilon' g(\varepsilon,\alpha) \end{array} \right)$$

Aqui, a substituição de '*c*' por uma extensão de conceito (unário) seria problemática.

371 Parece existir também um problema com a seguinte identidade: $\varepsilon' f(\varepsilon) \equiv \alpha'\varepsilon' g(\varepsilon,\alpha)$.

É importante notar que nos respectivos lados direitos de **Axioma V*** e **Axioma V** ocorre a tripla barra:

(**Axioma V***) $Ext_Z M(Z) \equiv Ext_Z N(Z) \equiv \overset{\mathfrak{f}}{\smile} (M_\alpha \mathfrak{f}(\alpha) \equiv N_\alpha \mathfrak{f}(\alpha))$

(**Axioma V**) $\vdash \varepsilon' f(\varepsilon) \equiv \varepsilon' g(\varepsilon) \equiv \overset{\mathfrak{a}}{\smile} (f(\mathfrak{a}) \equiv g(\mathfrak{a}))$

Destes axiomas, obteríamos as fórmulas

(**Va***) $$\begin{array}{l} \vdash\!\top\, Ext_Z M(Z) \equiv Ext_Z N(Z) \\ \quad\llcorner\overset{\mathfrak{f}}{\smile} (M_\alpha \mathfrak{f}(\alpha) \equiv N_\alpha \mathfrak{f}(\alpha)) \end{array}$$

(**Va**) $$\begin{array}{l} \vdash\!\top\, \varepsilon' f(\varepsilon) \equiv \varepsilon' g(\varepsilon) \\ \quad\llcorner\overset{\mathfrak{a}}{\smile} (f(\mathfrak{a}) \equiv g(\mathfrak{a})) \end{array}$$

Mas, os antecedentes destas fórmulas nem sempre seriam prováveis, devido à falta de **BB** no sistema. É provável em **BS**, como dissemos, a seguinte fórmula: $\vdash\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile} (f(\mathfrak{a}) \equiv f(\mathfrak{a}))$. Disto podemos inferir: $\vdash \varepsilon' f(\varepsilon) \equiv \varepsilon' f(\varepsilon)$

Provavelmente, o seguinte seria um teorema de **BS**: $\vdash M_\alpha f(\alpha) \equiv M_\alpha f(\alpha)$. Quantificando universalmente (segunda ordem), obtemos: $\vdash\!\overset{\mathfrak{f}}{\smile} (M_\alpha \mathfrak{f}(\alpha) \equiv M_\alpha \mathfrak{f}(\alpha))$. E usando (**Va***), inferiríamos: $\vdash Ext_Z M(Z) \equiv Ext_Z M(Z)$.

Mas, se observamos o que Frege escreve em **GLA** (§73), percebemos que a prova sugerida por ele não se seguiria:

> On our definition [of "the Number which belongs to the concept *F*"], what has to be shown is that the extension of the concept "equal to the concept *F*" is the same as the extension of the concept "equal to the concept *G*", if the concept *F* is equal to the concept *G*. In other words: it is to be proved that, for *F* equal *G*, the following two propositions hold good universally:
> if the concept *H* is equal to the concept *F*,
> then it is also equal to the concept *G*;
> and
> if the concept *H* is equal to the concept *G*,
> then it is also equal to the concept *F* (**FA,** pág. 85-6)

Na passagem acima, a partir da hipótese de que os conceitos F e G são equinuméricos - $F \sim G$ -, Frege sugere que as seguintes fórmulas são prováveis:

$$\begin{array}{l} \vdash\!\!\top\!\!\top H \sim G \\ \quad\;\; \llcorner H \sim F \\ \quad \llcorner F \sim G \end{array} \qquad\qquad\qquad \begin{array}{l} \vdash\!\!\top\!\!\top H \sim F \\ \quad\;\; \llcorner H \sim G \\ \quad \llcorner F \sim G \end{array}$$[372]

Mas, destas fórmulas, ele não poderia obter a fórmula:

(F)

$$\begin{array}{l} \vdash\!\!\top H \sim F \equiv H \sim G \\ \quad \llcorner F \sim G \end{array}$$

Frege teria de ter (**BB**) na forma:

$$\begin{array}{l} \vdash\!\!\top\!\!\top H \sim F \equiv H \sim G \\ \quad\;\; \llcorner\!\!\top H \sim F \\ \quad\;\;\quad \llcorner H \sim G \\ \quad \llcorner\!\!\top H \sim G \\ \quad\;\; \llcorner H \sim F \end{array}$$

Mas, (**BB**) não é provável em **BS**, que possivelmente é o sistema lógico de **GLA** e do livro mencionado na carta a Marty. Portanto, Frege não poderia provar a fórmula:

(F1)

$$\begin{array}{l} \vdash\!\!\top\!\!\overset{\mathfrak{f}}{\smile} (\mathfrak{f} \sim F \equiv \mathfrak{f} \sim G) \\ \quad \llcorner F \sim G \end{array}$$

O consequente de (**F1**) é uma instância do antecedente de (**Va***). Se (**F1**) fosse provável, então obteríamos a fórmula

(F3)

$$\begin{array}{l} \vdash\!\!\top Ext_P(P \sim F) \equiv Ext_P(P \sim G) \\ \quad \llcorner F \sim G \end{array}$$

Mas, '$Ext_P(P \sim F)$' e '$Ext_P(P \sim G)$' são, respectivamente, os operadores-cardinalidade 'o número que pertence ao conceito F' e o 'o número que pertence ao

372 Aqui, estamos pensando na prova de **PH** assumindo que o operador-cardinalidade é definido por meios de extensões de segunda ordem. Se o operador-cardinalidade for definido por meio de extensão de conceitos de primeira ordem, as fórmulas a serem provadas seriam (veja, **GGA**, §64):

$$\begin{array}{l} \vdash\!\!\top\!\!\top a \sim \varepsilon' g(\varepsilon) \\ \quad\;\; \llcorner a \sim \varepsilon' f(\varepsilon) \\ \quad \llcorner \varepsilon' f(\varepsilon) \sim \varepsilon' g(\varepsilon) \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{l} \vdash\!\!\top\!\!\top a \sim \varepsilon' f(\varepsilon) \\ \quad\;\; \llcorner a \sim \varepsilon' g(\varepsilon) \\ \quad \llcorner \varepsilon' f(\varepsilon) \sim \varepsilon' g(\varepsilon) \end{array}$$

Não obstante, o argumento é o mesmo.

conceito *G*'[373].

Outra possibilidade seria a seguinte[374]. Ao invés de ter o **Axioma V**, Frege teria introduzido a relação '∩' como um primitivo lógico regido pelo axioma

(**CC**) $\vdash f(a) \equiv a \cap \varepsilon' f(\varepsilon)$[375]

Além disso, seria necessário adicionar o seguinte axioma:

(**Ext**)

$$\vdash \varepsilon' f(\varepsilon) \equiv \varepsilon' g(\varepsilon) \quad \text{[376]}$$
$$\smile^{\mathfrak{a}} (f(\mathfrak{a}) \leftrightarrow g(\mathfrak{a}))$$

Inicialmente, Landini acreditava que **BS** + (**CC**) + (**Ext**) provaria **PH** e evitaria os problemas mencionados – como, por exemplo, adição de uma série de Axiomas V para cada relação eneária. De acordo com ele, a partir de (**CC**), Frege poderia provar, de forma análoga a **GGA**, a seguinte fórmula:

(**CC2**) $f(a, b) \equiv a \cap (b \cap \alpha' \varepsilon' f(\varepsilon, \alpha))$[377]

Landini não tem razão quando afirma que de (**CC**) é possível provar (**CC2**) de forma análoga a **GGA**, porque o antecedente de (**Ext**) exige que '*f*' e '*g*' sejam conceitos, caso contrário, a fórmula

$$\smile^{\mathfrak{a}} (f(\mathfrak{a}) \leftrightarrow g(\mathfrak{a}))$$

373 Frege poderia ter introduzido o **Axioma V** ou o **Axioma V*** com uma bi-implicação:
(**Axioma V***): $Ext_Z M(Z) \equiv Ext_Z N(Z) \equiv \smile^{\mathfrak{f}} (M_\alpha \mathfrak{f}(\alpha) \leftrightarrow N_\alpha \mathfrak{f}(\alpha))$
(**Axioma V**): $\vdash \varepsilon' f(\varepsilon) \equiv \varepsilon' g(\varepsilon) \equiv \smile^{\mathfrak{a}} (f(\mathfrak{a}) \leftrightarrow g(\mathfrak{a}))$
Mas, nenhum destes dois axiomas produziria uma teoria das extensões como a de **GGA**. Todos os problemas já mencionados ocorreriam, exceto que **PH** seria provável. Não acreditamos que isto seja um ponto fraco da nossa interpretação, porque se este tivesse sido o caminho tomado por Frege, ele poderia ter publicado o livro de 1882, logo após a publicação de **GLA**. Frege demorou nove anos para publicar **GGA**, o que fortemente sugere que ele não tinha adicionado nem o **Axioma V**, nem **Axioma V***.

374 Sugerida por Landini.

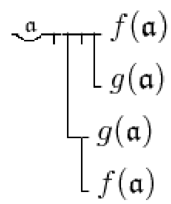
375 À primeira vista, esta fórmula é bem formada, mesmo se '*f*' for uma função, mas não um conceito.

376 Se o antecedente fosse formulado com a tripla barra, então o **PH** não seria provável.

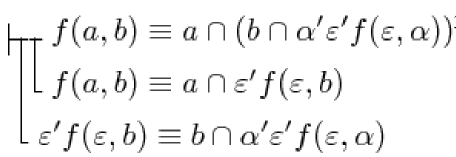
377 E fato, ele acreditava que poderiam ser provadas todas as fórmulas (**CC**) para cada relação eneária.

é mal-formada.

Lembremos novamente que esta fórmula é equivalente a



Mas, então, devemos considerar '*f*' em (**CC**) como sendo um conceito também, caso contrário, haveria uma estranha assimetria entre os axiomas[378]. Todavia, neste caso, a prova de (**CC2**) falha. Assumamos, (**CC**). Seguindo a prova de **GGA**, temos a seguinte instância de 52BS:


[379]

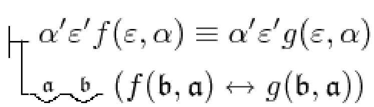
A fórmula '$f(a,b) \equiv a \cap \varepsilon' f(\varepsilon, b)$' seria uma instância de (**CC**) e, portanto, poderia ser eliminada por meio de *modus ponens*. Contudo, a fórmula

$$\varepsilon' f(\varepsilon, b) \equiv b \cap \alpha' \varepsilon' f(\varepsilon, \alpha)$$

não é uma instância de (**CC**), porque '$\varepsilon' f(\varepsilon, \xi)$' não é um conceito. Assim, a prova de (**CC2**) análoga a de **GGA** não está aberta. Ou seja, Frege teria de introduzir axiomas (**CC**) para cada relação eneária. O problema não é contornado.

Ademais, Frege não poderia provar a partir de (**Ext**) a seguinte fórmula:

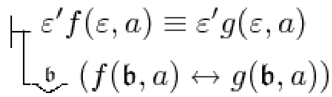
(**Ext2**)



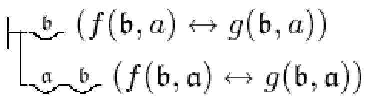
Da seguinte instância de (**Ext**)

378 Landini nos concedeu este ponto.

379 Tome a propriedade que ocorre em 52BS como: '$f(a,b) \equiv a \cap \xi$'.

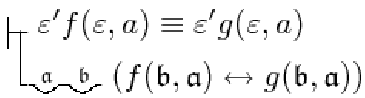


e da seguinte instância de 58BS



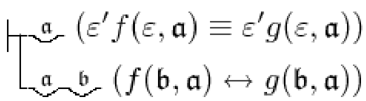
obteríamos (transitividade do condicional) a fórmula

(**L**)

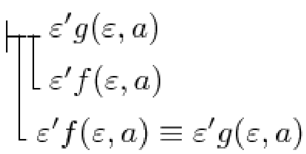


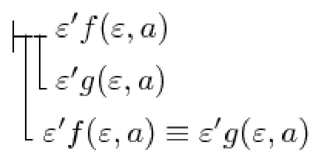
Poderíamos aplicar a regra de confinamento da generalidade ao consequente em (**L**), obtendo a fórmula

(**M**)



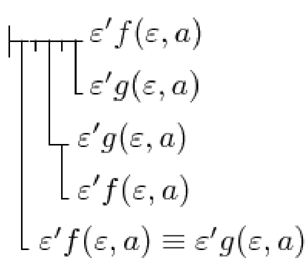
Todavia, o consequente de (**M**) não é uma instância do antecedente de (**Ext**). Além disso, em (**L**), '$\varepsilon' f(\varepsilon, a)$' e '$\varepsilon' g(\varepsilon, a)$' são objetos e, portanto, não poderíamos usar 52BS e 57BS para derivar as fórmulas





porque elas seriam mal-formadas[380]. Logo, não poderíamos obter

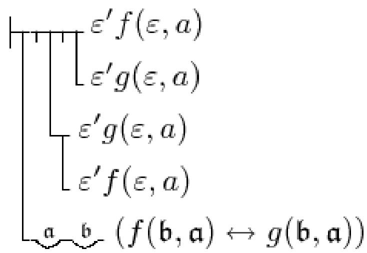
(**N**)



380 Lembremos que o traço de conteúdo deve ser anexado a conteúdos judicáveis.

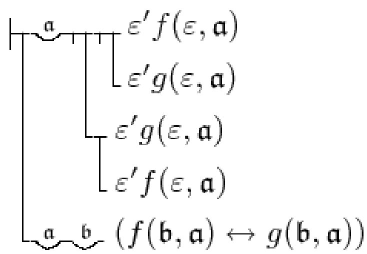
Por conseguinte, não poderíamos chegar à fórmula (usando **M** e **N**)

(**O**)



E, assim, não poderíamos usar (**O**) para obter a fórmula (generalização universal)

(**P**)



Assim, não poderíamos usar (**P**) e (**Ext**) para obter (**Ext2**)[381]. Consequentemente, Frege seria obrigado a introduzir muitos axiomas (**Ext**), um para cada relação eneária. Dada a complexidade dos problemas que surgem com a introdução das extensões de conceitos no sistema lógica de **BS** (o suposto sistema de **GLA** e do livro de 1882), somo levados a acreditar que Frege não tinha nenhuma prova formalizada usando extensões de conceitos em 1884.

Ao tentar dar as provas, principalmente a de **PH** a partir da sua definição explícita**,** ele deve ter percebido todas estas questões. As modificações introduzidas posteriormente no seu sistema foram feitas para adequar a sua teoria das extensões de conceitos. Esta foi a razão pela qual Frege não publicou o livro mencionado em 1882.

Por outro lado, a introdução do **PH** ao sistema lógico de **BS**, não introduz dificuldades formais, no que diz respeito às provas das leis básicas da aritmética (veja capítulo **4**). Nossa hipótese é, portanto, que no livro de 1882 Frege usou este princípio ou como um tipo de definição (mais provável dadas as discussões de **GLA**)

381 O consequente de (**P**) seria, se bem-formado, uma instância do antecedente de (**Ext**). Se isto fosse o caso, obteríamos (**Ext2**) por meio da transitividade do condicional.

ou como um axioma.

Como uma última evidência a favor do nosso ponto, gostaríamos de citar a nota 47 de Scholz que menciona um manuscrito de Frege no qual ele define o operador numérico sem usar extensões de conceitos:

> N 47 (Kritische Fragen zu „Grundlagen“ §§63-69)
> a) „Ist es nötig, die Zahlengleichheit als strenge Identität zu fassen?“ b) „Ist es möglich, einem beurteilbaren Inhalt, der $N_\tau F(\tau)$* enthält, dadurch zu definieren, dass man sagt, er dürfe sich nicht ändern, wenn F durch G ersetzt wird, sobald $F(\varrho) \asymp_\varrho G(\varrho)$[382] gilt? <c) (Die Schwierigkeit der Definition eines Gegenstandes durch ein Wiedererkennungsurteil).> 6. Spalten Quart. Nach 1884 (Rückseite (1)) b) enthält Ausfüt[unen üb. d. Def. Von Gegenständen u. Eine frühe Ausführg. Der Def. Eines Begriffsumfanges
> [Hierzu gehörte folgende Anmerkung:] 1) <$N_\tau F(\tau)$ ist eine frühe symbolische Darstellung von Kardinalzahl von F.>
>
> N.47 (Questões críticas sobre “Fundamentos §§63-9)
> a) “É necessário conceber a identidade numérica como uma identidade estrita?” b) É possível definir um conteúdo judicável que contém $N_\tau F(\tau)$, dizendo que ele não muda se substituirmos F por G, na medida em que $F(\varrho) \asymp_\varrho G(\varrho)$ vale? c)(A dificuldade da definição de um objeto por meio de um juízo de reconhecimento)

Scholz datou este manuscrito como sendo posterior a **GLA** (depois de 1884). Temos sérias dúvidas sobre esta data, porque, como a nota indica, as discussões presentes nele equivalem às §§ 62-8 de **GLA**[383]. Por que Frege retomaria estas discussões? Ou melhor, de acordo com a nota, Frege parece estar preocupado em responder questões que já tinham sido respondidas em **GLA**. Isto é, no mínimo, estranho.

Burge menciona esta nota e escreve:

> It seems reasonable then to conjecture that in the lost post-*Foundations* manuscript Frege was reconsidering the whole question of whether numbers were objects – whether numerals and expressions like 'the number of Fs' were primitive singular terms in arithmetic and in counting. He seems to have been contemplating a contextual definition of such singular terms (roughly in the spirit of Russell's “no class” theory). Perhaps he also considered an account of the equals sign as indicating not identity but numerical equivalence among concepts (Burge, 1984, pp. 13-4).

382 Modificamos levemente o símbolo usado.

383 a) equivale à discussão em §63 de **GLA**; b) equivale à discussão §65 deste livro. Lá, elas foram discutidas em termos de direções e **PD**, mas na nota a discussão se dá em termos do operador-cardinalidade e **PH**; c) equivale à discussão em §66.

Tendo por base a carta a Marty, a hipótese mais plausível é que este manuscrito é de 1883 ou 1884. Provavelmente ele seja uma espécie de inserção a **GLA**. As seções tratadas são exatamente aquelas que poderiam ser excluídas deste livro sem causar qualquer dano para sua compreensão total. De fato, Frege contempla uma definição por abstração (contextual), porque, se nossa hipótese estiver correta, as leis da aritmética foram provadas a partir de **PH** em 1882.

3.2.
Valores de verdade, Axioma IV e Axioma V

Neste subcapítulo, estaremos preocupados com questões formais relacionadas com a distinção entre sentido e referência, a introdução dos valores de verdade, o **Axioma IV** e a introdução do **Axioma V**[384] [385].

Na introdução a **GGAI**, Frege escreve:

> I have justified this more thoroughly in my essay on sense and denotation, mentioned above; here it may merely be mentioned that only in this way can indirect discourse be correctly understood. That is, the thought, which otherwise is the sense of a sentence, in indirect discourse becomes its denotation. How much simpler and sharper everything becomes by the introduction of truth-values, only detailed acquaintance with this book can show. These advantages alone put a great weight in the balance in favor of my own conception, which indeed may seem strange at first sight (**BLA**, pág. 7).

Na seção anterior, apontamos algumas complicações que poderiam ocorrer em um sistema sem os valores de verdade e o Axioma IV (**BB**). Como mostramos, Frege teria de introduzir uma série de **Axiomas V** para obter as extensões de quaisquer relações eneárias.

Além disso, Frege precisa "reduzir" ou correlacionar os conceitos de segunda

384 Talvez o tema mais discutido na Filosofia de Frege tenha sido a distinção entre sentido e referência, mas raramente tais debates são relacionadas com as provas formais em **GGA**. Ruffino (1996, 1997) foi um dos primeiros que atentou para estas relações formais.

385 Há outras questões formais bastantes discutidas sobre a introdução dos valores de verdade que não serão, porém, o principal foco aqui. Com a distinção entre sentido e referência e a introdução dos valores de verdade, Frege pôde caracterizar de forma nítida a diferença entre função e conceito. Além disso, ele pôde distinguir com mais clareza funções de primeira ordem das funções de segunda. A distinção entre conceito e objeto também se torna mais cristalina. Veja, por exemplo, (Ruffino, 1996, cap. V) e (Beaney, 2007).

ordem, que são necessários para provar os axiomas de Peano, a conceitos de primeira ordem, caso contrário, ele teria de adicionar um **Axioma V** para conceitos de segunda ordem.

Em **GGA**, há um único **Axioma V**, o que fortemente sugere que as modificações elaboradas por Frege foram bem-sucedidas em resolver todos os pontos que mencionados anteriormente.

Em termos de notação simbólica dos primitivos lógicos, o sistema lógico de **GGA** não se diferencia drasticamente de **BS**. Uma primeira mudança é a introdução do símbolo de identidade '=' no lugar da tripla barra '≡'[386]. Outra diferença é a introdução do operador-extensionalidade que é regido pelo **Axioma V**. Frege também introduz um novo símbolo de função '\' que funciona como o artigo definido da linguagem natural. Esta função primitiva é regida por um novo axioma introduzido por Frege em **GGA**.

Por outro lado, semanticamente, os símbolos de Frege mudam drasticamente. A causa disso é a nova interpretação que o traço de conteúdo, agora chamado de horizontal, recebe em **GGA**. Lembremos que no primeiro capítulo foi afirmado que este símbolo desempenhava um papel meramente sintático, sendo aplicado apenas a símbolos que expressam conteúdos judicáveis, a fim de determinar o escopo de atuação dos demais primitivos lógicos.

Esta interpretação do traço de conteúdo em **BS** forçou estipulações condicionais dos demais primitivos de **BS**. Por exemplo, o traço de negação e o traço de condicionalidade só poderiam ser anexados a símbolos que expressassem conteúdos judicáveis também.

Mas, em **GGA**, o horizontal é interpretado como uma função total, estipulada para todos os objetos. Na verdade, o horizontal é um conceito[387]. A estipulação do horizontal é como se segue:

$$— \Delta$$

386 Em nossa visão, esta mudança não é essencial, porque Frege poderia sustentar todos os seus pontos e ainda usar a tripla barra.

387 Conceitos são funções cujos resultados são sempre valores de verdade. Por exemplo, '$\xi + 3 = 5$' é um conceito.

será o Verdadeiro, se Δ for o verdadeiro; e ele será o Falso, se Δ não for o Verdadeiro[388] [389].

Com esta estipulação, o horizontal será bem-formado com qualquer nome da conceitografia. Em **BS**, como mostramos, se assumíssemos '2' como um nome da conceitografia, o seguinte seria sintaticamente mal-formado

$$—2,$$

porque '2' não expressaria um conteúdo judicável. Porém, em **GGA**,

$$—2,$$

é sintaticamente bem-formado e é o Falso, porque 2 não é o verdadeiro.

Se assumirmos que '2+2=4' é um nome da conceitografia, então

$$—2+2=4$$

é o Verdadeiro, porque 2+2=4 é o Verdadeiro. Portanto, podemos afirmá-lo

$$\vdash 2+2=4$$

Por outro lado, sendo '2+2=5' um nome da conceitografia, então

$$—2+2=5$$

é o Falso, porque 2+2=5 não é o verdadeiro. O horizontal funcionará como uma espécie de função identidade quando o argumento for um valor de verdade, ou seja, se Δ for um dos dois valores de verdade, então

$$— \Delta = \Delta$$

será o Verdadeiro. Percebamos que

$$— 2 = 2$$

será o Falso, porque — 2 é o Falso, o qual é diferente de 2.

Esta propriedade do horizontal será importante para a expressão do Axioma IV de **GGA**.

Devido ao horizontal, o traço de negação também é transformado em uma função total (conceito). A estipulação do traço de negação em **GGA** é como se segue:

$$\top \Delta$$

388 Ao invés de denotar conteúdos judicáveis, as sentenças agora referem-se a um dos dois valores de verdade: o Verdadeiro ou o Falso.
389 **GGA**, §5.

será o Verdadeiro, se $—\Delta$ for o Falso. Por outro lado, ele será o Falso, se $—\Delta$ for o Verdadeiro. Em última análise,

$$_{\top}\Delta$$

será o Verdadeiro, se Δ não for o Verdadeiro; e ele será o Falso, se Δ for o Verdadeiro[390]. Diferentemente de **BS**, onde o símbolo

$$_{\top}2$$

era mal-formado, em **GGA**, este símbolo é bem-formado e será o Verdadeiro. Portanto, podemos afirmá-lo

$$\vdash_{\!\top} 2$$[391]

Por outro lado, se '2+2=4' for um nome da conceitografia, então

$$_{\top}2+2=4$$

será o Falso, porque 2+2=4 é o Verdadeiro. Se '2+2=5' for um nome da conceitografia, então

$$_{\top}2+2=5$$

será o Verdadeiro, já que 2+2=5 é o Falso.

O traço de condicionalidade também é transformado em uma função (relação[392]) total por causa do horizontal. A estipulação do traço de condicionalidade é como se segue:

$$\begin{array}{l} \top\,\Gamma \\ \lfloor\,\Delta \end{array}$$

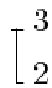
será o Falso, se Δ for o verdadeiro e Γ não for o Verdadeiro. Em todos os outros casos,

$$\begin{array}{l} \top\,\Gamma \\ \lfloor\,\Delta \end{array}$$

será o Verdadeiro[393].

Em **BS**, o seguinte símbolo

390 **GGA**, §6.
391 Isto pode ser interpretado como “2 não é o Verdadeiro”.
392 Relações são funções binárias cujos resultados são sempre valores de verdade para quaisquer argumentos. Por exemplo: $\xi < \zeta$.
393 **GGA**, 12.



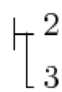
é mal-formado, contudo em **GGA**, devido ao horizontal, ele é bem-formado e é o Verdadeiro, porque 2 não é o verdadeiro. Portanto, podemos afirmá-lo

(i)

Notemos também que o seguinte denota o verdadeiro

E, assim, também podemos afirmá-lo

(ii)



Em §7 de **GGA**, Frege estipula o significado da identidade. De acordo com ele,

“$\Gamma = \Delta$”

denotará o Verdadeiro, se Γ é a mesma coisa que Δ. Em todos os outros casos, ele denotará o Falso[394]. Assim,

“2=1+1”

denotará o verdadeiro, porque “2” e “1+1” referem-se ao mesmo objeto, o número 2. Por outro lado,

“2=4”

denotará o Falso, porque “2” e “4” referem-se a objetos diferentes, o primeiro referindo-se ao número 2, o segundo, ao número 4.

Em **BS** (e **GLA**), não é totalmente claro se identidades do tipo

“2=(2+2=4)”

são bem-formadas, mas, em **GGA**, elas são e, no caso em questão, ela denota o Falso,

394 A identidade é uma relação, ou seja, uma função binária que sempre resulta em um valor de verdade quando saturada.

porque “2” denota o número 2 e “2+2=4” denota o Verdadeiro.

Devido ao horizontal, o quantificador universal pode ser aplicado a qualquer tipo de expressão, sem incorrer na formação de fórmulas mal-formadas no sistema. Lembremos que o seguinte é mal-formado em **BS**

$$“\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\, \mathfrak{a} + 2“$$

Isto é bem-formado em **GGA** e denota o Falso, pois Frege estipula a generalidade como se segue:

> “$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\, \Phi(\mathfrak{a})$” is to denote the True if for every argument the value of the function $\Phi(\xi)$ is the True, and otherwise is to denote the False (**BLA**, pág. 42)[395]

Para o argumento '2', obtemos “2+2”. Isto não denota o Verdadeiro, mas sim o número 4. Portanto, $\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\, \mathfrak{a} + 2$ é o Falso. Assim,

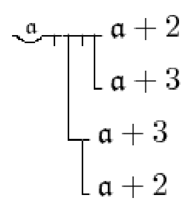
$$\top\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\, \mathfrak{a} + 2$$

é o verdadeiro e, por conseguinte, podemos afirmá-lo

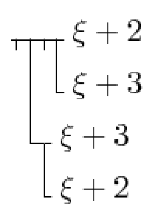
$$\vdash\!\top\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\, \mathfrak{a} + 2$$

O seguinte

(iii)

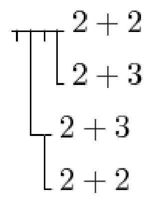


é o Verdadeiro, porque para qualquer argumento, a função



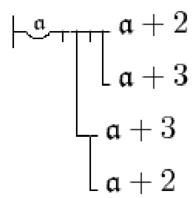
sempre resultará no Verdadeiro, quando saturada. Por exemplo,

395 Como em **BS**, o seguinte continua sendo mal-formado: $\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\, P$. A letra gótica deve sempre ocorrer em alguma fórmula que se segue depois da generalidade.



é o Verdadeiro. Portanto, podemos afirmar (iii)

(iv)



(iv) implica a não possibilidade de introduzir o **Axioma V** pela fórmula

(V)

$$\vdash \varepsilon' f(\varepsilon) = \varepsilon' g(\varepsilon) = \underset{\smile}{\mathfrak{a}}\ (f(\mathfrak{a}) \leftrightarrow g(\mathfrak{a})),$$

porque, neste caso, todas as funções, que não fossem conceitos, teriam de ter o mesmo percurso de valores. Notemos que (iv) é uma instância do lado direito de (**V**). De (**V**) e (iv), obteríamos

$$\varepsilon'(\varepsilon + 2) = \varepsilon'(\varepsilon + 3)^{396}$$

A introdução do horizontal apenas é insuficiente para produzir uma teoria coerente das extensões (percurso de valores).

Em §11 de **GGA**, Frege introduz a função \ que desempenha um papel central na teoria das extensões de conceitos de Frege, sem a qual alguns dos problemas mencionados na seção anterior ocorreriam. De acordo com Frege, \ substitui o artigo definido da linguagem natural. Se anexarmos o artigo definido 'o' a um predicado *F* que se refere a um conceito sob o qual cai um e apenas um objeto, então a expressão 'o *F*' denotará este objeto. Por exemplo, anexando o artigo definido ao predicado *satélite natural da Terra*, que expressa um conceito sob o qual cai um e apenas um objeto, obtemos a *o satélite natural da Terra*, que denota este objeto, isto é, a Lua.

Nem sempre a anexação do artigo definido a um predicado produz uma

396 Os gráficos das funções '$\xi + 2$' e '$\xi + 3$' são matematicamente diferentes. (**V**) implicaria a identidade de seus gráficos.

expressão (descrição definida) referencial. O exemplo clássico é anexar o artigo definido ao predicado *atual rei da França*, que expressa um conceito sob o qual nada cai, porque não exite mais nenhum rei na França. A descrição definida *o atual rei da França* não denota nenhum objeto. O mesmo ocorre se o predicado expressa um conceito sob o qual cai mais de um objeto. Por exemplo, *o autor do Principia Mathematica* não denota, porque há dois autores: Russell e Whitehead.

Tendo isto em mente, Frege faz a seguinte estipulação da função \ξ

> Now of course this not possible, because that equation could be sustained in its general form, but we can serve our purpose by introducing the function
>
> \ξ
>
> with the stipulation that two cases are to be distinguished:
> 1. If to the argument there corresponds an object Δ such that the argument is $\varepsilon'(\Delta = \varepsilon)$, then let the value of the function \ξ be itself;
> 2. If to the argument there does not correspond an object Δ such that the argument is $\varepsilon'(\Delta = \varepsilon)$, then let the value of the function be the argument itself.
>
> Accordingly $\backslash\varepsilon'(\Delta = \varepsilon)$=Δ is the True, and "$\backslash\varepsilon'\Phi(\varepsilon)$" denotes the object falling under concept $\Phi(\xi)$ if $\Phi(\xi)$ is a concept under which falls one and only one object; in all other cases "$\backslash\varepsilon'\Phi(\varepsilon)$" denotes the same as "$\varepsilon'\Phi(\varepsilon)$". (BLA, pág. 50).

Sob o conceito $\xi + 2 = 5$ cai um objeto que resulta no verdadeiro, o número 3. Se tomarmos a extensão deste conceito, isto é, $\varepsilon'(\varepsilon + 2 = 5)$ e "anexarmos" a função \ a esta extensão, então "$\backslash\varepsilon'(\varepsilon + 2 = 5)$" denotará este único objeto que cai sob o conceito $\xi + 2 = 5$. Portanto, $\varepsilon'(\varepsilon + 2 = 5)$=3 é o Verdadeiro.

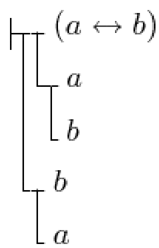
Por outro lado, sob a função $\xi + 2$ caem infinitos objetos, os números naturais. Assim, tomando-se a extensão deste conceito, a saber, $\varepsilon'(\varepsilon + 2)$ e "anexando" a função \ a este percurso de valores, a estipulação de Frege implica que $\backslash\varepsilon'(\varepsilon + 2) = \varepsilon'(\varepsilon + 2)$.

O objetivo de Frege com (2) acima é evitar a formação de nomes sem denotação no sistema. Como afirmamos, na linguagem ordinária, descrições definidas como "o atual rei da França", "o autor do Principia Mathematica", "a raiz quadrada de 2" não denotam. Porém, em **GGA**, todos os termos devem denotar e a estipulação da função \ força esta denotação[397].

Como mencionamos anteriormente, a introdução das extensões de conceitos e, portanto, do **Axioma V**, forçou as modificações no sistema de **GGA**. A grande questão é como expressar a relação de coextensionalidade que ocorre no lado direito desta lei, evitando a necessidade da introdução de outros Axiomas V.

Se a relação de coextensividade fosse dada pela conjunção de implicações, Frege precisaria apenas da fórmula

(**U**)



que é provável em **GGA**. De fato, como apontamos, esta fórmula é provável em **BS**, mas as regras de formação implicam que as letras latinas expressem conteúdos judicáveis. Em **GGA**, devido ao horizontal, esta limitação não existe. O seguinte é bem-formado e verdadeiro no sistema :

397 “Here there is a logical danger. For if we wanted to form from the words “square root of 2” the proper name “the square root of 2” we should commit a logical error, because this proper name, in the absence of further stipulation, would be ambiguous, hence even devoid of denotation. If there were no irrational numbers – as has indeed been maintained – then even the proper name “the positive square root of 2” would be without a denotation, at least by the straight forward sense of the words, without special stipulation. And if we to give this proper name a denotation expressly, the object denoted would have no connection with the formation of the name, and we should not be entitled to infer that was positive square root of 2, while yet we should be only too inclined to conclude just that. This danger about the definite article is here completely circumvented, since “$\backslash\varepsilon'\Phi(\varepsilon)$” always has denotation, whether the function $\Phi(\xi)$ be not a concept, or a concept under falls no object or more than one, or an concept under which falls exactly one object” (**BLA**, pp. 50-1).

(iii)

$$\begin{array}{l} \vdash\!\!\!\top\!\!\top (2 \leftrightarrow 3) \\ \quad \llcorner\!\top 2 \\ \qquad \llcorner 3 \\ \quad \llcorner\!\top 3 \\ \qquad \llcorner 2 \end{array}$$

Mas os antecedentes de (iii) são as fórmulas verdadeiras (i) e (ii). Logo, por *modus ponens*, obtemos

$$\vdash 2 \leftrightarrow 3$$

Se provarmos dentro da conceitografia que as seguintes fórmulas

$$\begin{array}{l} \vdash\!\!\top g(a) \\ \quad \llcorner f(a) \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{l} \vdash\!\!\top f(a) \\ \quad \llcorner g(a) \end{array}$$

então, por meio de instâncias adequadas de **U**, obtemos a fórmula (*modus ponens*)

(iv)

$$\vdash f(a) \leftrightarrow g(a)$$

Generalizando universalmente, chegamos a

(v)

$$\vdash\!\smile^{\mathfrak{a}}\!- f(\mathfrak{a}) \leftrightarrow g(\mathfrak{a}),$$

que é uma instância do lado direito (**V**) acima. De (v) e (**V**), derivaríamos a fórmula

$$\varepsilon' f(\varepsilon) = \varepsilon' g(\varepsilon)$$

Mas, como já indicamos, caso $f\xi$ e $g\xi$ não sejam conceitos, (**V**) implicará que as extensões destas funções são idênticas, resultado não-desejado. Além disso, (**V**) não produzirá o teorema 1 de GGA[398]:

$$f(a) = a \cap \varepsilon' f(\varepsilon),$$

mas apenas

$$f(a) \leftrightarrow a \cap \varepsilon' f(\varepsilon)$$

398 Novamente, o sistema é inconsistente, logo esta afirmação não é correta. Deve-se ter em mente que **V** não produzirá o teorema 1 na forma que Frege imaginava.

Mas, deste último, Frege não pode obter o seguinte:

$$f(a,b) \leftrightarrow a \cap (b \cap \alpha'\varepsilon' f(\varepsilon,\alpha)).$$

Para produzir este teorema seria necessário introduzir um novo **Axioma V**, regendo as extensões de relações e a introdução de uma nova definição de pertinência.

Em **GGA**, do teorema 1, Frege prova, usando as leis da identidade, o teorema 2

$$f(a,b) = a \cap (b \cap \alpha'\varepsilon' f(\alpha,\varepsilon)).$$

E disto, ele poderia provar o Axioma V para relações (veja apêndice 3).

Portanto, expressar a relação de coextensionalidade por meio da conjunção de implicações não produziria a teoria das extensões de conceitos que Frege desejava. Por outro lado, como tentamos mostrar no capítulo **2**, Frege não dispõe de meios para obter uma equivalência por meio da identidade, quando provamos

$$\begin{array}{l} \vdash\!\!\!\top g(a) \\ \;\;\llcorner f(a) \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{l} \vdash\!\!\!\top f(a) \\ \;\;\llcorner g(a) \end{array}$$

O sistema lógico de **BS** não lhe permite produzir a fórmula

$$\vdash f(a) \equiv g(a)$$

Como tentamos argumentar, Frege não poderia introduzir nem **IV***, nem **BB** no sistema sem causar problemas. Em nossa visão, o principal objetivo da distinção entre sentido e referência foi motivada para justificar a introdução do Axioma IV em **GGA**. Em "*Über Sinn und Bedeutung*" (1892), Frege exclui o pensamento como sendo a referência das sentenças, porque, se isto fosse o caso, existiriam inúmeras sentenças que falsificariam tanto o Axioma IV, quanto o teorema IVa de **GGA**[399].

Descartados os pensamentos, Frege teria de encontrar algo que fosse a

399 As outras possíveis referências, tais como estado de coisas e as próprias sentenças, também falsificariam o Axioma IV e o teorema IVa. Intuitivamente, 2+2=4 e 3+3=6 e ~3+3=6 não parecem designar os mesmos estados de coisas ou sentenças. Isto falsificaria o Axioma IV.

referência de sentenças, caso contrário, ele não poderia ter a equivalência na forma de identidade. Esta referência devia ter a propriedade de não falsificar o seu axioma IV e o teorema IVa[400]. Em nossa visão, a única possibilidade reside nos valores de verdade.

Toda sentença significativa terá um valor de verdade associado a ela[401]. E, classicamente, há apenas dois valores de verdade: o Verdadeiro e o Falso. Dadas duas sentenças significativas *P* e *Q*, apenas uma das duas possibilidades ocorre: ou *P* e *Q* têm o mesmo valor de verdade ou *P* e *Q* não têm o mesmo valor de verdade. Isto é justamente a expressão do axioma IV de **GGA**:

$$\begin{array}{l} \vdash\!\!\top\, (-\, a) = (-\, b) \\ \;\llcorner_{\top}\, (-\, a) = ({}_{\top}\, b) \end{array}$$

O horizontal se faz necessário na expressão do Axioma IV, porque, caso contrário, haveria instâncias que o falsificariam. Ou seja, se o axioma IV fosse

$$\begin{array}{l} \vdash\!\!\top\, a = b \\ \;\llcorner_{\top}\, a = {}_{\top}\, b \end{array}$$

então, assumindo que '2' e '3' sejam nomes da conceitografia, a seguinte instância é falsa

$$\begin{array}{l} \vdash\!\!\top\, 2 = 3 \\ \;\llcorner_{\top}\, 2 = {}_{\top}\, 3 \end{array}$$

pois, seria provável em **GGA** a fórmula

$$\vdash_{\top} 2 = {}_{\top}\, 3,$$

uma vez que 2 não é o Falso. Logo, por *modus ponens*, obteríamos

$$\vdash 2 = 3.$$

Porém, 2=3 é o Falso. Com o horizontal na expressão de IV, isto não ocorre. O antecedente continuaria sendo provável

$$\vdash_{\top} (-\, 2) = ({}_{\top}\, 3)$$

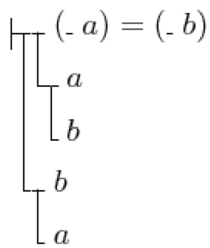
400 Em nossa visão, o objetivo de Frege era ter IVa ou na forma de um axioma ou na forma de um teorema. A introdução do axioma IV como axioma foi simplificar o sistema.

401 Entendemos uma sentença significativa aquela que não tem nenhum termo não-referencial ocorrendo nela.

já que (-2) é o Falso e $\top 3$ é o Verdadeiro. Porém, agora, o consequente é verdadeiro, porque (-2) é o Falso e (-3) é o Falso.

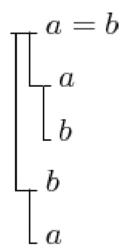
A partir do axioma IV, Frege obtém o teorema IVa[402]

(IVa)

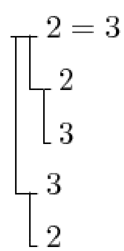


A seguinte fórmula

(vi)

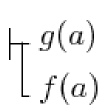


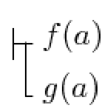
não é provável em **GGA**, sendo falsa para algumas instâncias. Considere a fórmula



Ora, os antecedentes são as fórmulas (i) e (ii). Portanto, por *modus ponens*, obteríamos: 2=3, que é o Falso.

Se, dentro da conceitografia, são prováveis as seguinte fórmulas





402 A prova segue a mesma linha das provas dadas no apêndice IV, faltando apenas o último passo que é a aplicação do axioma IV.

então, usando IVa, obtemos a fórmula

$$\vdash f(a) = g(a)$$

E, quantificando universalmente, derivamos

$$\vdash\!\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile} f(\mathfrak{a}) = g(\mathfrak{a})$$

Por causa da introdução dos valores de verdade como objetos, Frege tem a equivalência na forma de identidade. E, por conseguinte, ele pode expressar a **Axioma V** na forma da identidade

(**AV**)

$$\vdash \varepsilon' f(\varepsilon) = \varepsilon' g(\varepsilon) = \overset{\mathfrak{a}}{\smile} f(\mathfrak{a}) = g(\mathfrak{a})$$

A partir de (**AV**), usando IIIa (57BS) e IIIc (52BS)[403], Frege obtém as fórmulas condicionalizadas

(**AVa**) $\begin{array}{l} \vdash\!\!\top \varepsilon' f(\varepsilon) = \varepsilon' g(\varepsilon) \\ \quad \llcorner\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile} f(\mathfrak{a}) = g(\mathfrak{a}) \end{array}$

(**AVb**) $\begin{array}{l} \vdash\!\!\top f(a) = g(a) \\ \quad \llcorner\, \varepsilon' f(\varepsilon) = \varepsilon' g(\varepsilon) \end{array}$

O próximo passo de Frege é "reduzir" o conceito de segunda ordem de equinumerosidade a um conceito de primeira ordem, caso contrário, ele teria de introduzir extensões de conceitos de segunda ordem e um Axioma V regendo este operador-extensionalidade. Esta redução é feita por meio da definição da relação $\xi \cap \zeta$. De acordo com Frege

> It has already been suggested, in §25, that in further developments, instead of second-level functions, we may employ first-level functions. This will now be show. As was indicated then, this is made possible through the functions that appear as arguments of second-level functions being represented by their courses-of-value – though of course not in such a way that they simply give up their places to them, for that is impossible.
> In the first instance it is a matter only of designating the value of the function $\Phi(\xi)$ for the argument Δ, I. e., $\Phi(\Delta)$, by means of "Δ" and "$\varepsilon'\Phi(\varepsilon)$". I do so in this way:
> "$\Delta \cap \varepsilon'\Phi(\varepsilon)$",
> which is to mean the same as [was gleichbedeutend mit] "$\Phi(\Delta)$" (**BLA**, pág. 92).

403 A diferença entre IIIa e 57BS é que no primeiro temos o símbolo '=' e no último a tripla barra. O mesmo vale para IIIc e 52BS. Continuaremos usando 52BS e 57BS para nos referir a IIIc e IIIa, respectivamente.

A definição de Frege é dada pela fórmula

$$\Vdash \backslash\alpha'\left(\overset{\mathfrak{g}}{\smile} \begin{array}{l} g(a) = \alpha \\ u = \varepsilon' g(\varepsilon) \end{array} \right) = a \cap u$$

A função \ é determinada para todos os seus argumentos, portanto, a definição da relação $\xi \cap \zeta$ também será determinada para todos os argumentos. A relação é expressa pelo seguinte:

$$\backslash\alpha'\left(\overset{\mathfrak{g}}{\smile} \begin{array}{l} g(\zeta) = \alpha \\ \xi = \varepsilon' g(\varepsilon) \end{array} \right)$$

$\cap$ é uma relação que ocorre entre dois objetos. Além disso, a fórmula

$$\backslash\alpha'\left(\overset{\mathfrak{g}}{\smile} \begin{array}{l} g(a) = \alpha \\ u = \varepsilon' g(\varepsilon) \end{array} \right)$$

tem a forma "$\backslash\alpha'\Phi(\alpha)$" que, por estipulação, denota "$\alpha'\Phi(\alpha)$" se nenhum ou mais de um objeto caem sob $\Phi(\xi)$ e que denota "Δ", se Δ é o *único* objeto que cai sob $\Phi(\xi)$.

Se existir um objeto Δ tal que

$$\overset{\mathfrak{g}}{\smile} \begin{array}{l} g(\Theta) = \Delta \\ \Gamma = \varepsilon' g(\varepsilon) \end{array}$$ [404]

é o Verdadeiro, mas para todos os demais argumentos o valor da função

$$\overset{\mathfrak{g}}{\smile} \begin{array}{l} g(\Theta) = \xi \\ \Gamma = \varepsilon' g(\varepsilon) \end{array}$$

é sempre o falso, então

$$\backslash\alpha'\left(\overset{\mathfrak{g}}{\smile} \begin{array}{l} g(\Theta) = \alpha \\ \Gamma = \varepsilon' g(\varepsilon) \end{array} \right)$$

404 Aqui 'Γ' e 'Θ' designam objetos arbitrários.

é o próprio Δ.

Mas,

$$\begin{array}{l} \top\!\!\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\!\!\top\!\!\top\; g(\Theta) = \Delta \\ \qquad\quad \llcorner\; \Gamma = \varepsilon' g(\varepsilon) \end{array}$$

será o Verdadeiro, se existir alguma função *g* cuja extensão é Γ e cujo valor para o argumento Θ for o objeto Δ. Agora, assuma que Γ é a extensão da função $f\xi$, isto é, $\varepsilon' f(\varepsilon)$ e Θ é *a:*

$$\begin{array}{l} \top\!\!\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\!\!\top\!\!\top\; g(a) = \Delta \\ \qquad\quad \llcorner\; \varepsilon' f(\varepsilon) = \varepsilon' g(\varepsilon) \end{array}$$

A definição de Frege junto com **AV** (e com os demais os axiomas do sistema) implicará que Δ somente é *f*(*a*). E, assim,

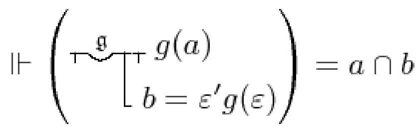
$$\backslash\alpha' \left(\begin{array}{l} \top\!\!\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\!\!\top\!\!\top\; g(a) = \alpha \\ \qquad\quad \llcorner\; \varepsilon' f(\varepsilon) = \varepsilon' g(\varepsilon) \end{array} \right)$$

é $f(a)$[405].

Nas discussões sobre a filosofia de Frege, em geral a definição de '∩' é transcrita para a definição contemporânea de ∈: $a \in b =_{def} \exists g(b = z' g(z) \wedge g(a))$. Mas isto é equivalente na conceitografia à seguinte expressão

405 Frege também estipula o caso no qual Γ não é um percurso de valores: "I, however, Γ is not a course-of-values, then the function $\begin{array}{l} \top\!\!\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\!\!\top\!\!\top\; g(\Theta) = \xi \\ \qquad\quad \llcorner\; \Gamma = \varepsilon' g(\varepsilon) \end{array}$ has the False as value for every argument, and in that case our stipulation is to be drawn upon, that "$\backslash\Lambda$" is to denote "Λ" itself if there exists no object Δ such that Λ is the course-of-values $\varepsilon'(\Delta = \varepsilon)$. Accordingly, if Γ is not a course-of-values, "Θ ∩ Γ" denotes the course-of-values of a function whose value for every argument is the False: thus, $\varepsilon'(_{\top}\, \varepsilon = \varepsilon)$.

(**Pert1**)

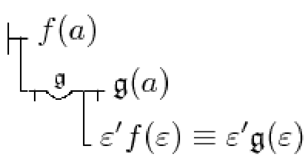


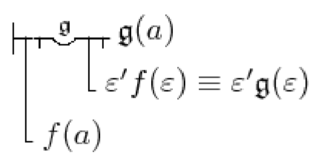
O problema é que desta definição junto com o (**AV**) e com os demais axiomas e teoremas do sistema Frege não poderia obter o teorema 1 de **GGA**. Frege pode apenas obter:

(**Z**) $(\text{-}\ f(a)) = a \cap \varepsilon' f(\varepsilon)$

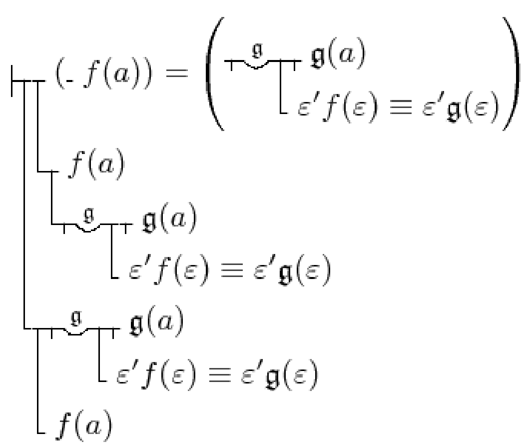
(**Z1**) $f(a) \leftrightarrow \varepsilon' f(\varepsilon)$

Mostraremos a prova de (**Z**) e onde ela falha em produzir o teorema 1. Já indicamos na seção anterior que (**Pert 1**) produzirá as fórmulas:





Temos a seguinte instância do teorema IVa



Por *modus ponens*, obtemos

(Z')

$$\vdash (-\, f(a)) = \left(\begin{array}{l} \smile^{\mathfrak{g}}\!\top\; \mathfrak{g}(a) \\ \quad\llcorner\; \varepsilon' f(\varepsilon) \equiv \varepsilon' \mathfrak{g}(\varepsilon) \end{array} \right)$$

As regras de **GGA** não permitem, em geral, eliminar o horizontal de -*f*(*a*). O horizontal funcionará como uma identidade, somente se o argumento for um valor de verdade. Assim, o seguinte não é um teorema de **GGA**

$$\vdash a = -a.$$

Mas, se $f\xi$ for uma função, mas não um conceito, então temos que

$$\vdash\!\top\, f(a) = (-\, f(a))$$

Portanto, usando substituição de idênticos o máximo que podemos obter de (Z') é a fórmula:

$$\vdash (-\, f(a)) = a \cap \varepsilon' f(\varepsilon)$$

Por outro lado, a seguinte fórmula é um teorema de **GGA**

$$\vdash (-\, (a = b) = (a = b))$$ [406]

Este teorema diz que o valor de verdade de $-(a{=}b)$ é idêntico ao valor de verdade de ($a{=}b$). A definição da relação de "pertinência" de **GGA** foi produzida para permitir a aplicação deste teorema acima. Para a prova do teorema 1 precisamos introduzir o axioma IV

(VI)

$$\vdash a = \backslash \varepsilon' (a = \varepsilon)$$ [407]

Deste axioma, usando (**AVa**), (57BS), Frege obtém a fórmula

406 Teorema IIIi de **GGA**.

407 A estipulação da função \ garante a verdade deste axioma.

$$\begin{array}{l} \vdash\!\!\top\, a = \backslash\varepsilon' f(\varepsilon) \\ \quad \llcorner\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\, f(\mathfrak{a}) = (a = \mathfrak{a}) \end{array}$$

A prova do teorema 1 é como se segue:

Da seguinte instância de (**AVb**)

$$\begin{array}{l} \vdash\!\!\top\, f(a) = g(a) \\ \quad \llcorner\, \varepsilon' f(\varepsilon) = \varepsilon' g(\varepsilon) \end{array}$$

e da seguinte instância de 52 BS

$$\begin{array}{l} \vdash\!\!\top\!\!\top\, g(a) = b \\ \quad\quad \llcorner\!\top\, f(a) = b \\ \quad \llcorner\, f(a) = g(a) \end{array}$$

obtemos, por meio da transitividade do condicional, a fórmula

$$\begin{array}{l} \vdash\!\!\top\!\!\top\, g(a) = b \\ \quad\quad \llcorner\, \varepsilon' f(\varepsilon) = \varepsilon' g(\varepsilon) \\ \quad \llcorner\!\top\, f(a) = b \end{array}$$ [408]

Aplicando o confinamento da generalidade ao condicional, derivamos a fórmula

$$\begin{array}{l} \vdash\!\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\!\top\!\!\top\, \mathfrak{g}(a) = b \\ \quad\quad\quad \llcorner\, \varepsilon' f(\varepsilon) = \varepsilon' \mathfrak{g}(\varepsilon) \\ \quad \llcorner\!\top\, f(a) = b \end{array}$$

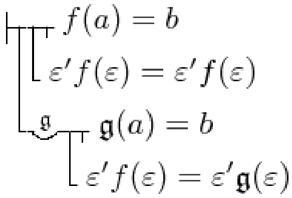
Por contraposição, obtemos

(A)

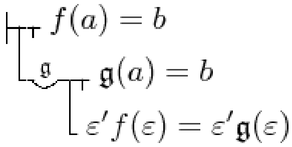
$$\begin{array}{l} \vdash\!\!\top\, f(a) = b \\ \quad \llcorner\!\top\!\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\!\top\!\!\top\, \mathfrak{g}(a) = b \\ \quad\quad\quad\quad \llcorner\, \varepsilon' f(\varepsilon) = \varepsilon' \mathfrak{g}(\varepsilon) \end{array}$$

Por outro lado, do axioma IIb, temos a seguinte instância

408 Aplicamos aqui a permutação dos antecedentes (veja capítulo 4).

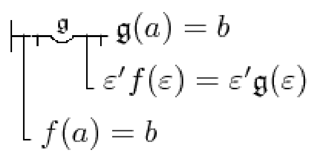


Mas, como temos $\vdash \varepsilon' f(\varepsilon) = \varepsilon' f(\varepsilon)$ (consequência de **AVa**)[409], podemos eliminá-lo (*modus ponens*). Assim, obtemos

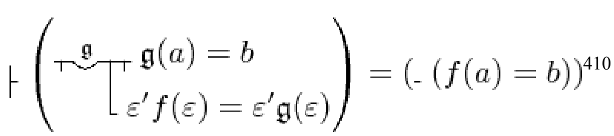


Por contraposição, derivamos a fórmula

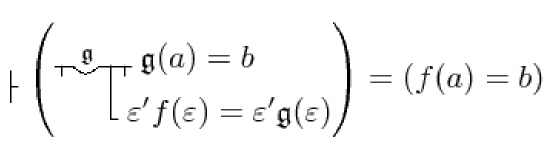
(**B**)



De (**A**) e (**B**) e teorema IVa, inferimos



Usando o axioma substituição de idênticos (57BS) e o teorema IIIi, Frege elimina o horizontal de "-(*f*(*a*)=*b*)", obtendo a fórmula



Quantificando universalmente, obtemos

409 Frege afirma que este teorema é uma instância do teorema IIIe: *a*=*a*

410 Isto é, o teorema IVa é fundamental para a prova do teorema 1.

(**C**)

$$\vdash\!\smile^{\mathfrak{a}} \left(\begin{array}{l} \mathrm{T}\!\smile^{\mathfrak{g}}\!\!\mathrm{T}\; \mathfrak{g}(a) = \mathfrak{a} \\ \qquad \llcorner\; \varepsilon' f(\varepsilon) = \varepsilon' \mathfrak{g}(\varepsilon) \end{array} \right) = (f(a) = \mathfrak{a})$$

(**C**) é uma instância do consequente do teorema VIa. Assim, por meio das substituições relevantes das letras latinas e *modus ponens*, obtemos a fórmula

$$\vdash f(a) = \backslash\alpha' \left(\begin{array}{l} \mathrm{T}\!\smile^{\mathfrak{g}}\!\!\mathrm{T}\; \mathfrak{g}(a) = \alpha \\ \qquad \llcorner\; \varepsilon' f(\varepsilon) = \varepsilon' \mathfrak{g}(\varepsilon) \end{array} \right)$$

Entretanto, o lado direito desta fórmula é equivalente à formula $a \cap \varepsilon' f(\varepsilon)$. Por substituição de idênticos (57BS) e *modus ponens*, obtemos o teorema 1:

(**T1**)

$$\vdash f(a) = a \cap \varepsilon' f(\varepsilon)$$

Com o **T1** a sua disposição, Frege prova o teorema 2 de **GGA d**a seguinte forma: seja a seguinte instância de 52BS

$$\begin{array}{l} \vdash\!\mathrm{T}\!\mathrm{T}\; f(a,b) = a \cap (b \cap \alpha' \varepsilon' f(\varepsilon, \alpha)) \\ \quad \llcorner\; f(a,b) = a \cap \varepsilon' f(\varepsilon, b) \\ \llcorner\; \varepsilon' f(\varepsilon, b) = b \cap \alpha' \varepsilon' f(\varepsilon, \alpha) \end{array}$$

Os dois antecedentes da fórmula são instâncias de **T1.** Portanto, podemos eliminá-las por meio de *modus ponens*. Assim, derivamos

(**T2**)

$$\vdash f(a,b) = a \cap (b \cap \alpha' \varepsilon' f(\varepsilon, \alpha))$$

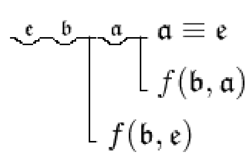
Por meio de substituição de idênticos (57BS) e **T2**, Frege poderia provar o seguinte:

(T3)

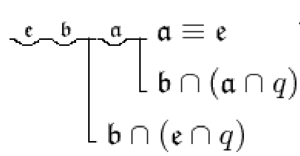
$$\vdash f(a,b,c) = a \cap (b \cap (c \cap \gamma'\alpha'\varepsilon' f(\varepsilon,\alpha,\gamma)))$$

Frege poderia provar teoremas análogos para todas as relações. Além disso, por causa destes teoremas, Axiomas V poderiam ser derivados no sistema para todas as relações[411].

Dispondo de **T1** e **T2**, Frege pôde justificar a sua redução de funções de segunda ordem a funções de primeira ordem. Mostramos no capítulo **2**, por exemplo, que o conceito de uma relação *f* ser funcional é de segunda ordem, dada pela fórmula:



Em **GGA**, o conceito de *ser funcional* é de primeira ordem. De acordo com Frege, a expressão *q é funcional* é definida pela fórmula:

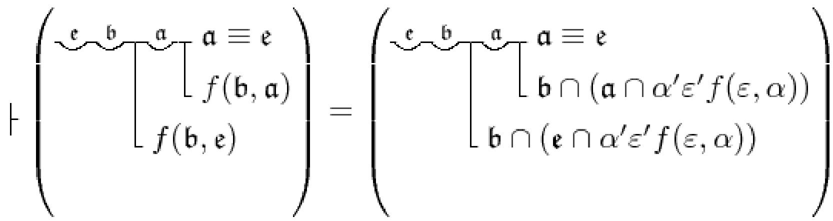
 [412]

Dada a definição de ser funcional em **GGA**, teorema IVa e **T2**, poderíamos mostrar que

411 Veja o apêndice 3 para a prova do Axioma V para relações binárias.

412 Para quaisquer objetos *a*, *b* e *c* se *b* e *a* (nesta ordem) pertencem à extensão *q* e *b* e *c* (nesta ordem) pertencem à extensão *q*, então *a*=*c*.

(K)



De acordo com Landini, resultados deste tipo seguir-se-iam dos teoremas **T1**, **T2**, etc. por meio da substituição de idênticos:

> With Basic Law V, Frege arrives at the theorem
> $\vdash \forall f \forall x (x \cap z' f z. = .f x)$
> The following correlation is immediate by substitution of identicals:
> $\vdash \forall f (M_x f x. = .M_x (x \cap z' f z))$ (Landini, 2006, pág. 223).

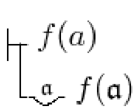
No entanto, este resultado não seria provável por substituição de idênticos, porque $M_x \Phi(x)$ é uma função de segunda ordem. Mas, a substituição de idênticos exige substituições por meio de funções de primeira ordem. Ou seja, se $a = b$, então qualquer propriedade de primeira ordem que *a* tiver, *b* terá e vice-versa[413]. Uma instância da fórmula mencionada por Landini é:

(L)

$$\vdash (\smile^{\mathfrak{a}} f(\mathfrak{a})) = \smile^{\mathfrak{a}} (\mathfrak{a} \cap \varepsilon' f(\varepsilon))$$

Esta fórmula seria provável em **GGA**, mas não completamente por substituição de idênticos. O teorema IVa desempenha um papel fundamental. A prova seria como se segue:

De 58Bs, temos



413 O teorema em que Landini deveria estar pensado é o teorema IIIh: $a = b \supset f(a) = f(b)$

Através de **T1** e substituição de idênticos, obtemos

$$\vdash \begin{array}{l} a \cap \varepsilon f(\varepsilon) \\ \llcorner \overset{\mathfrak{a}}{\smile} f(\mathfrak{a}) \end{array}$$

Generalizando universalmente, obtemos

$$\vdash \begin{array}{l} \overset{\mathfrak{a}}{\smile} \mathfrak{a} \cap \varepsilon f(\varepsilon) \\ \llcorner \overset{\mathfrak{a}}{\smile} f(\mathfrak{a}) \end{array}$$

Por outro lado, da seguinte instância de 58BS, temos

$$\vdash \begin{array}{l} a \cap \varepsilon f(\varepsilon) \\ \llcorner \overset{\mathfrak{a}}{\smile} \mathfrak{a} \cap \varepsilon f(\varepsilon) \end{array}$$

De **T1** e substituição de idênticos, derivamos

$$\vdash \begin{array}{l} f(a) \\ \llcorner \overset{\mathfrak{a}}{\smile} \mathfrak{a} \cap \varepsilon f(\varepsilon) \end{array}$$

Generalizando universalmente, inferimos

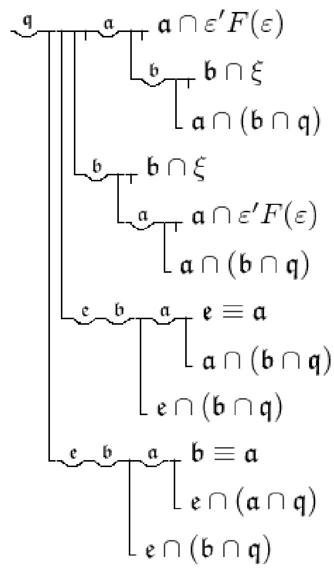
$$\vdash \begin{array}{l} \overset{\mathfrak{a}}{\smile} f(\mathfrak{a}) \\ \llcorner \overset{\mathfrak{a}}{\smile} \mathfrak{a} \cap \varepsilon f(\varepsilon) \end{array}$$

Usando o teorema IVa, chegamos ao resultado desejado. A prova da fórmula (K) acima seguiria o mesmo caminho.

Com a relação '∩' introduzida no sistema[414], todos os conceitos de segunda ordem mencionados no capítulo 2 são reduzidos a conceitos de primeira ordem. Em particular, o conceito *ser equinumérico ao conceito F* é transformado no conceito *ser equinumérico à extensão do conceito F*:

414 Junto com T1 e T2 como critério de correção da definição.

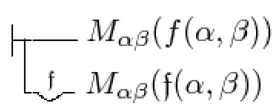
(Q)



Portanto, em **GGA**, o operador-cardinalidade é definido em termos de extensões de conceitos de primeira ordem.

T2 também possibilitou a eliminação do axioma IIb para relações

(IIb*)



Este axioma é necessário para provar alguns teoremas a partir do **PH** (capítulo **4**). Porém, em **GGA**, ele não é afirmado, embora tenha sido implicitamente mencionado. O fato é que com o **T2** a sua disposição, Frege pode transformar $\Phi(a, b)$ em $a \cap (b \cap q)$. Assim, ao invés de quantificar sobre funções binárias, ele quantifica sobre objetos. Anteriormente, expressamos o conceito *ser equinumérico ao conceito F* por meio de uma quantificação de segunda ordem. Na fórmula (**Q**) acima, temos uma quantificação de primeira ordem. Todos os teoremas **T** para cada relação eneária permitiriam a eliminação de todos estes axiomas IIb para relações eneárias.

O único uso necessário da quantificação de segunda ordem em **GGA** é na definição da relação '$\cap$' e na prova do teorema 1. Estranhamente, Frege não elimina a quantificação de segunda ordem na sua definição do ancestral, embora ela seja eliminável e ele parece ser consciente disso[415 416].

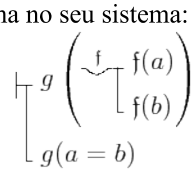
A simplicidade do sistema de **GGA** foi possibilitada pela introdução dos valores de verdade como objetos, o que permitiu justificar a introdução do axioma IV no sistema e deste provar o teorema IVa, que desempenha um papel fundamental na prova do teorema 1 de **GGA**. Com o teorema 1, Frege poderia provar teoremas análogos para relações eneárias. Em particular, ele provou o teorema 2 de **GGA**.

Com isso, ele pôde transformar os conceitos de segunda ordem usados em **BS** e **GLA** em conceitos de primeira ordem. Como tentamos mostrar, nada disto estava aberto a Frege em 1884, quando ele publicou **GLA**. Nossa suposição é que **PH** foi usado nas provas dos axiomas de Peano no livro mencionado na carta a Marty[417].

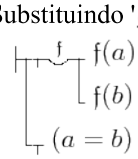
415 Veja **GGA**, §25.

416 Na definição de Predecessor, Frege eliminou a quantificação de segunda ordem em favor da quantificação de primeira ordem (**GGA**, §43).

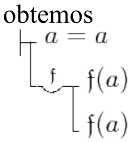
417 A introdução dos valores de verdade como objetos permitiu a eliminação da fórmula $a = a$ como axioma. Frege introduz o seguinte axioma no seu sistema:



Este axioma só parece ser justificado por causa da introdução dos valores de verdade. Em termos de conteúdos conceituais, ele é duvidoso. Substituindo '$g\xi$' por '$\top\,\xi$', obtemos a fórmula:



Por contraposição e substituindo '*b*' por '*a*', obtemos



O antecedente é provável e, portanto, eliminado por modus ponens.