

Introdução¹

No século XIX, iniciou-se o movimento que ficou conhecido por aritmetização da Análise. A ideia de alguns matemáticos desse período era tornar esta ciência um campo matemático autônomo. Até então, seus teoremas eram “provados” recorrendo-se às evidências ou às intuições geométricas e, nesse sentido, a análise era dependente da Geometria^{2 3}.

Neste processo de aritmetização da Análise, era extremamente importante definir os números reais por meios puramente aritméticos. Além disso, era necessário, a partir desta definição, provar as propriedades pertencentes a estes números sem recorrer à Geometria⁴. No livro *Continuity and Irrational Numbers* (1872),

- 1 Utilizaremos as seguintes abreviações para os livros de Frege: *Begriffsschrift und andere Aufsätze* (1998) - **BS**; *Die Grundlagen der Arithmetik* (1884) - **GLA**; *Grundgesetze der Arithmetik I* (1998) - **GGAI**; *Grundgesetze der Arithmetik II* (1998) - **GGAI**; E as seguintes abreviações para as traduções: *Conceptual Notation and Related Articles* (1972) - **CN**; *Foundations of Arithmetic* (1980)- **FA**; e *The Basic Laws of Arithmetic* (1964)- **BLA**.
- 2 Dedekind (1963, pp. 1-2), por exemplo, escreve: “As professor in the Polytechnic School in Zürich I found myself for the first time obliged to lecture upon the elements of the differential calculus and felt more keenly than ever before the lack of a really scientific foundation for arithmetic. In discussing the notion of the approach of a variable magnitude to a fixed limiting value, and especially in proving the theorem that every magnitude which grows continually, but not beyond all limits, must certainly approach a limiting value, I had recourse to geometric evidences. Even now such resort to geometric intuition in a first presentation of the differential calculus, I regard as exceedingly useful, from the didactic standpoint, and indeed indispensable, if one does not wish to lose too much time. But that this form of introduction into the differential calculus can make no claim to being scientific, no one will deny. For myself this feeling of dissatisfaction was so overpowering that I made the fixed resolve to keep meditating on the question till I should find a purely arithmetical and perfectly rigorous foundation for the principles of infinitesimal analysis. The statement is so frequently made that the differential calculus deals with continuous magnitude, and yet an explanation of this continuity is nowhere given; even the most rigorous expositions of the differential calculus do not base their proofs upon continuity but, with more or less consciousness of the fact, they either appeal to geometric notions or those suggested by geometry, or depend upon theorems which are never established in a purely arithmetic manner. Among these, for example, belongs the above-mentioned theorem, and a more careful investigation convinced me that this theorem, or any one equivalent to it, can be regarded in some way as a sufficient basis for infinitesimal analysis. It then only remained to discover its true origin in the elements of arithmetic and thus at the same time to secure a real definition of the essence of continuity”.
- 3 Uma das primeiras tentativas feitas para mostrar que a análise não dependia de intuições ou conceitos geométricos foi a de Bernard Bolzano quando ele provou, em 1817, de forma puramente analítica, o **Teorema do Valor Intermediário**. De fato, Bolzano era crítico à ideia de Kant de que a matemática era sintética *a priori*, portanto, *a fortiori*, defendia a tese segundo a qual a aritmética não dependia de qualquer tipo de intuição. Ao provar o **Teorema do Valor Intermediário** por meios analíticos a partir de sua definição de continuidade, Bolzano desejava mostrar que a intuição não desempenhava qualquer papel nas provas dos teoremas da análise. Cf. “Kant, Bolzano and the Emergence of Logicism” (1982) de Albert Coffa.
- 4 A propriedade mais importante é que os números reais formam um conjunto contínuo, sem lacunas. Essa propriedade não é satisfeita pelos números racionais. Estes, como os reais, formam um conjunto denso, ou seja, dados quaisquer dois números racionais a e b , existe sempre um número racional c entre eles, o que implica a existência de infinitos números entre a e b . Con-

por exemplo, Dedekind assume os números racionais e suas propriedades como já conhecidas e, a partir daí, ele mostra como definir - ou criar, sua palavra preferida - os números irracionais. Não é nosso objetivo entrar aqui nos detalhes do procedimento de Dedekind⁵, o que queremos enfatizar é que a aritmetização sugerida por ele neste livro só poderia ser bem-sucedida, se os números racionais pudessem ser definidos e suas propriedades pudessem ser derivadas por meios puramente aritméticos.

Em outras palavras, se a definição dos números racionais e as provas de suas propriedades dependessem da intuição geométrica, o processo de aritmetização da análise estaria fadado ao fracasso. De alguma forma, a Análise dependeria da Geometria e não seria uma ciência autônoma.

Portanto, era também necessário definir os números racionais e provar suas propriedades por meios puramente aritméticos. Há muitos meios de se proceder. Landau, por exemplo, no seu livro *Foundations of Analysis* (1951), assume os axiomas de Dedekind-Peano e prova uma série de fatos sobre os números naturais⁶. Depois, ele define uma fração como um par de números naturais:

$$\frac{x_1}{x_2} =_{def} (x_1, x_2), \text{ onde } x_1 \text{ e } x_2 \text{ são números naturais}^7$$

Então, Landau define quando duas frações são equivalentes:

$$\frac{x_1}{x_2} \sim \frac{y_1}{y_2} =_{def} x_1 \cdot y_2 = y_1 \cdot x_2$$

tudo, o conjunto dos racionais tem lacunas, “buracos”. Por exemplo, $\sqrt{2}$ não corresponde, como já provado há cerca de 2400 anos atrás, a nenhum número racional.

- 5 Dedekind obtém os números irracionais por meio de cortes de números racionais. Em termos modernos, um corte é um conjunto X de números racionais que deve satisfazer as seguintes condições: (1) X não é vazio e é um subconjunto próprio do conjunto dos números racionais; (2) X é fechado “para baixo”, isto é, se x for um número racional que pertence a X e y for um número racional que é menor que x , então y pertencerá a X ; e (3) X não tem maior elemento. O seguinte conjunto representa um corte: o conjunto dos números racionais x tais que x é menor que 0 (racional) – $\{x: x < 0\}$. Este conjunto não é vazio e é um subconjunto próprio do conjunto dos números racionais. Claramente, este conjunto é fechado “para baixo”. E este conjunto não tem maior elemento. Este último fato é provado, porque os números racionais formam um conjunto denso. Assim, dado um número racional z muito próximo do número racional 0 é possível construir um outro número z' tal que $z < z' < 0$. Este corte define o número real 0.
- 6 Dentre estes, os mais importantes são: as leis comutativas e associativas da adição e da multiplicação, a transitividade da relação de ordenação (*ser maior que*) e a lei distributiva da multiplicação sobre a soma.
- 7 Landau assume que o primeiro número natural é o 1. Assim, ele não necessita restringir o denominador da fração.

É importante mencionar que ‘ $x_1 \cdot y_2 = y_1 \cdot x_2$ ’ é uma espécie de relação de equivalência⁸:

(Reflexividade): $\frac{x_1}{x_2} \sim \frac{x_1}{x_2}$ se e somente se $x_1 \cdot x_2 = x_1 \cdot x_2$. Obviamente, $x_1 \cdot x_2 = x_1 \cdot x_2$.

(Simetria): Assuma que $\frac{x_1}{x_2} \sim \frac{y_1}{y_2}$, ou seja, $x_1 \cdot y_2 = y_1 \cdot x_2$. Pela lei de identidade, temos $y_1 \cdot x_2 = x_1 \cdot y_2$. Por meio da definição, isto é: $\frac{y_1}{y_2} \sim \frac{x_1}{x_2}$.

(Transitividade): Para provar a transitividade, temos de assumir que $\frac{x_1}{x_2} \sim \frac{y_1}{y_2}$ e $\frac{y_1}{y_2} \sim \frac{z_1}{z_2}$, ou seja, (1) $x_1 \cdot y_2 = y_1 \cdot x_2$ e (2) $y_1 \cdot z_2 = z_1 \cdot y_2$. Na aritmética dos números naturais, temos o seguinte teorema: se $x=y$ e $z=w$, então $x \cdot z = y \cdot w$. Assim, $(x_1 \cdot y_2) \cdot (y_1 \cdot z_2) = (y_1 \cdot x_2) \cdot (z_1 \cdot y_2)$. A partir de aplicações das leis comutativas e associativas da multiplicação, obtemos $(x_1 \cdot z_2) \cdot (y_1 \cdot y_2) = (z_1 \cdot x_2) \cdot (y_1 \cdot y_2)$. E disto, chegamos a $(x_1 \cdot z_2) = (z_1 \cdot x_2)$, ou seja, $\frac{x_1}{x_2} \sim \frac{z_1}{z_2}$.

A partir das definições acima e das propriedades dos números naturais, Landau define ordenação⁹, adição, multiplicação¹⁰ e diferença¹¹ em relação às frações.

Por exemplo, a adição entre duas frações $\frac{x_1}{x_2}$ e $\frac{y_1}{y_2}$ é definida por:

$$\frac{x_1}{x_2} +_f \frac{y_1}{y_2} =_{\text{def}} \frac{x_1 y_2 + y_1 x_2}{x_2 y_2} \quad 12$$

A lei comutativa da adição entre frações, isto é, $\frac{x_1}{x_2} +_f \frac{y_1}{y_2} \sim \frac{y_1}{y_2} +_f \frac{x_1}{x_2}$, depende

⁸ Relações de equivalência são relações que são reflexivas, simétricas e transitivas.

⁹ Uma fração x_1/x_2 é maior que uma fração y_1/y_2 quando $x_1 \cdot y_2 > y_1 \cdot x_2$, onde ‘>’ é a relação ‘maior que’ definida para os números naturais. Como x_1 , x_2 , y_1 e y_2 são números naturais, a relação acima depende da multiplicação dos números naturais e da relação de ordenação entre números naturais.

¹⁰ A multiplicação entre frações é definida por meio da multiplicação entre números naturais: $x_1/x_2 \times_f y_1/y_2 =_{\text{def}} x_1 \times y_1 / x_2 \times y_2$.

¹¹ A definição da diferença entre frações depende do seguinte teorema (teorema 67, pág. 29): dadas duas frações x_1/x_2 e y_1/y_2 , se a primeira é maior que a segunda, então existe uma única fração u_1/u_2 cuja soma com y_1/y_2 é equivalente a x_1/x_2 . Esta fração u_1/u_2 é chamada a diferença entre x_1/x_2 e y_1/y_2 .

¹² Landau não usa um símbolo diferente para adição entre frações.

apenas das propriedades comutativas da soma e da multiplicação entre números naturais. Por exemplo, assumamos que $\frac{x_1}{x_2} +_f \frac{y_1}{y_2}$. Pela definição da adição entre frações, temos

$$\frac{x_1 y_2 + y_1 x_2}{x_2 y_2}$$

Pela lei comutativa da adição dos números naturais, isso é equivalente a

$$\frac{y_1 x_2 + x_1 y_2}{x_2 y_2}$$

E pela comutatividade da multiplicação dos números naturais, a fórmula acima é equivalente a

$$\frac{y_1 x_2 + x_1 y_2}{y_2 x_2}$$

Mas, novamente, pela definição da adição entre frações, essa fórmula é equivalente a

$$\frac{y_1}{y_2} +_f \frac{x_1}{x_2}.$$

Em seguida, Landau define um número racional (positivo) como o conjunto de todas as frações equivalentes a alguma dada fração. Dados os números racionais (positivos), ele define a ordenação, adição e multiplicação entre eles¹³. A adição e multiplicação dos números racionais são comutativas e associativas.

Landau prova o seguinte teorema: se um número racional X for maior que um número racional Y , então existirá um único número U tal que $Y+U=X$. Este te-

¹³ Os números racionais são definidos como classes (de equivalência) de todas as frações equivalentes a uma dada fração. Assim, as definições de ordenação, adição e multiplicação entre números racionais dependeriam apenas da ordenação, adição e multiplicação de apenas uma das frações pertencentes às classes de equivalência. Por exemplo, o número racional (representado por) $2/3$ é a classe de todas as frações equivalentes a $2/3$: $\{2/3, 4/6, 6/9, 8/12, \dots\}$; o número racional (representado por) $4/7$ é a classe de todas as frações equivalentes a $4/7$: $\{4/7, 8/14, 12/21, 16/28, \dots\}$. Agora, a ordenação, a soma e a multiplicação destes dois números racionais dependem apenas da ordenação, soma e multiplicação de uma destas frações pertencentes a estas classes de equivalência. Assim, o número racional obtido pela multiplicação entre $2/3$ e $4/7$ é classe de todas as frações equivalentes, por exemplo, a $8/21$: o conjunto $\{8/21, 16/42, 24/63, \dots\}$.

orema é provado, usando-se o teorema análogo em relação às frações mencionado na nota 9. Com este teorema a sua disposição, Landau define, então, a diferença entre dois números racionais, que é justamente este número racional U , obtendo, desse modo, todos os números racionais.

Os números inteiros são definidos por Landau como a classe de todas as frações equivalentes à fração $\frac{x}{1}$, onde x é qualquer número natural¹⁴.

Outra maneira de se obter os números racionais aritmeticamente seria definindo a diferença entre naturais como um sendo também um par ordenado:

$$x_1 - x_2 =_{\text{def}} (x_1, x_2)$$

E, é claro, seguindo Landau, poderíamos definir quando duas diferenças são equivalentes:

$$(\text{Dif}) \quad x_1 - x_2 \sim y_1 - y_2 =_{\text{def}} x_1 + y_2 = y_1 + x_2$$

Obviamente, a relação ' $x_1 + y_2 = y_1 + x_2$ ' é uma relação de equivalência. Podemos definir a adição entre duas diferenças por meio da adição entre números naturais:

$$x_1 - x_2 +_I y_1 - y_2 =_{\text{def}} x_1 + y_1 - x_2 + y_2 \quad ^{15}$$

Lembremos que ' $x_1 - x_2$ ' representa um par ordenado, portanto ' $x_1 + y_1 - x_2 + y_2$ ' é o par $(x_1 + y_1, x_2 + y_2)$. Como Landau fez em relação aos racionais, poderíamos definir, de forma análoga, os inteiros como a classe de todas as diferenças equivalentes a uma dada diferença. Assim, por exemplo, o número inteiro 0 seria a classe de todas as diferenças equivalentes à diferença 1-1. Qualquer uma das diferenças da forma $n-n$, onde n é um número natural, poderia ser usada. Percebamos que $n-n$ é equivalente a 1-1, uma vez que $n+1=1+n$.

14 Também é provado o teorema que os números racionais formam um conjunto denso (teorema 91). Este teorema é facilmente provado, uma vez que temos uma prova análoga sobre frações (teorema 55): dadas duas frações x_1/x_2 e y_1/y_2 , tal que $x_1/x_2 < y_1/y_2$, então existe uma fração z_1/z_2 tal que $x_1/x_2 < z_1/z_2 < y_1/y_2$.

15 A multiplicação entre diferenças pode ser definida por meio da multiplicação e adição entre naturais da seguinte forma: $x_1 - x_2 \times_I y_1 - y_2 =_{\text{def}} x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1 + x_1 \cdot y_2$. Ou seja, a diferença correspondendo ao par ordenado $(x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2, x_2 \cdot y_1 + x_1 \cdot y_2)$.

Os números racionais podem ser definidos a seguir em uma forma muito próxima à de Landau, mas agora assumindo que as frações são pares de números inteiros, e tomando-se o cuidado de se restringir o denominador - o segundo elemento do par ordenado - que não pode ser o número inteiro 0.

A discussão informal acima tem o único propósito de evidenciar que a aritmetização da Análise depende, em última instância, dos números naturais e suas propriedades^{16 17}, depende da autonomia da Aritmética dos números naturais. Se os números naturais fossem dados pela intuição geométrica, então a Análise seria dependente, de alguma forma, da Geometria.

O processo de aritmetização não foi, contudo, homogêneo. De um lado, havia matemáticos que estavam satisfeitos com a autonomia da Aritmética e da Análise em relação à Geometria, embora pudessem aceitar que algum outro tipo de intuição diferente do geométrico fosse necessário para construir os conceitos aritméticos^{18 19}.

16 O processo de aritmetização tem um forte aspecto reducionista. Os números reais e suas propriedades são reduzidos aos números racionais (conjuntos de racionais) e suas propriedades. Estes são reduzidos aos números naturais e suas propriedades. Portanto, os números reais são reduzidos aos números naturais e suas propriedades. Por exemplo, Dedekind (1872, pág. 10) escreve: “Just as negative and fractional rational numbers are formed by a new creation, and as the laws of operating with these numbers must and can be *reduced* to the laws of operating with positive integers, so we must endeavor completely to define irrational numbers by means of the rational numbers alone. The question only remains how to do this” (Nosso grifo).

17 Na verdade, implicitamente é assumida a existência de outros objetos matemáticos: pares ordenados de números naturais e conjuntos de números racionais. Na teoria de conjuntos, pares ordenados são também reduzidos a certos tipos de conjunto. Os números naturais, inteiros, racionais e reais também são certos tipos de conjuntos. Ou seja, na teoria de conjuntos, a aritmética inteira é reduzida aos conjuntos e suas propriedades.

18 Entre estes matemáticos, poderíamos mencionar Leopold Kronecker (1823-1891) que admitia que os números naturais poderiam ser acessados por meio de uma intuição direta. De acordo com ele, a partir dos números naturais, os demais números poderiam ser construídos. Kronecker é considerado como um precursor do intuicionismo matemático.

19 Os matemáticos formalistas - assim chamados por Frege (por exemplo, **GLA**, §§92-109; **GGAI**, §§86-137) - também poderiam ser considerados como participantes do movimento da aritmetização da Análise. De acordo com eles, os números naturais seriam os próprios numerais. Os demais números são obtidos estendendo o domínio por meio de operações matemáticas. Como é bem conhecido, as operações de adição e multiplicação são fechadas sobre os números naturais. Isto quer dizer que dados quaisquer dois números naturais a e b , $a+b$ e $a.b$ representam também números naturais. Por outro lado, as operações de subtração e divisão não são fechadas sobre os números naturais, ou seja, nem toda subtração e divisão entre quaisquer dois números naturais a e b resultam em um número natural. Por exemplo, assumamos que a e b são números naturais e que a é maior que b . A subtração de b por a não representa qualquer número natural. De acordo com isto, o formalista estende o domínio dos números, introduzindo símbolos da forma $-a$, onde a é um número natural. E a união de todos os números naturais com os números da forma $-a$, representa o conjunto dos números inteiros. Da mesma maneira, a operação de divisão não é fechada sobre os números inteiros. Isto significa que dados quaisquer dois números inteiros A e B , nem sempre a divisão entre eles resulta em um número inteiro. Se A e B são números inteiros e A é maior que B , por exemplo, então B dividido

Do outro, existia um grupo que desejava extirpar qualquer tipo de intuição da Aritmética, seja geométrica ou não. A este grupo pertenciam, por exemplo, Bolzano, Frege e Dedekind²⁰.

O empecilho ao processo de aritmetização, pelo menos no sentido do último grupo mencionado acima – extirpar qualquer tipo de intuição da aritmética –, é que, na *Crítica da Razão Pura* (CRP, 1997), Kant argumentou a favor da tese segundo a qual a matemática pura é sintética *a priori*²¹. Isto significava que, embora esta ciência não dependesse de fatos empíricos para provar suas proposições, ela seria dependente das intuições puras de tempo e de espaço (CRP, B 14-16; A 39/ B 55-6; A 716/B 744). Portanto, em particular, a Aritmética dos números naturais dependeria de algum tipo de intuição^{22 23}.

por A não representa nenhum número inteiro. Assim, eles estendem o domínio incluindo agora numerais que tem a forma $\frac{B}{A}$, onde A e B são inteiros. A união dos números inteiros com os números da forma $\frac{B}{A}$ constitui o conjunto dos números racionais. E assim por diante. Os reais são obtidos, porque a operação de exponenciação não é fechada sobre os números racionais. Sabemos que não existe nenhum número racional que elevado ao quadrado resulta no número 2. Assim, o domínio é estendido, introduzindo-se, no caso do nosso exemplo, o símbolo $\sqrt{2}$.

- 20 Dedekind (1963, pág. 31) escreve: “In science nothing capable of proof ought to be accepted without proof. Though this demand seems so reasonable yet I cannot regard it as having been met even in the most recent methods of laying the foundations of the simplest science; viz., that part of logic which deals with the theory of numbers. In speaking of arithmetic (algebra, analysis) as a part of logic *I mean to imply that I consider the number-concept entirely independent of the notions or intuitions of space and time*, that I consider it an immediate result from the laws of thought” (Nosso grifo).
- 21 Na introdução de CRP (A6-10/B10-14), Kant faz a distinção entre juízos analíticos e sintéticos. A principal característica que um juízo sintético tem é a de estender nosso conhecimento, enquanto juízos analíticos seriam meras identidades, a partir das quais nada novo é obtido. Os juízos da matemática, em particular, da aritmética, parecem estender o nosso conhecimento. Este fato exclui, de acordo com Kant, que seus juízos sejam analíticos.
- 22 Demopoulos (1994, 75) escreve: “There is an understandable tendency to pass over such passages, because of the extreme difficulty of the Kantian concept of an a priori intuition. But I think it is possible to understand Frege's thought without entering into a detailed investigation of this concept. It suffices to recall that for the Kantian mathematical tradition of the period, our a priori intuitions are of space and time, and that the study of space and time falls within the provinces of geometry, kinematics, and perhaps, mechanics. It then follows that the dependence of a basic principle of arithmetic on some a priori intuition would imply that arithmetic lacks the autonomy and generality we associate with it: To establish its basic principles, we would have to appeal to our knowledge of space and time, and then arithmetical principles, like the connectedness of the ancestral and mathematical induction, would ultimately come to depend on our knowledge of spacial and temporal notions for their full justification”.
- 23 Depois de introduzir a sua definição de hereditariedade em *Begriffsschrift* (BS), Frege escreve o seguinte que corrobora a nossa afirmação: “This sentence [a definição] is different from those considered previously since symbols occur in it which have not been defined before; it itself gives the definition. It does not say, “The right side of equation has the same content as the left”; but, “They are to have the same content.”. This sentence is therefore not a judgement;

Não nos é totalmente claro se, para Kant, a Aritmética dependeria apenas da intuição temporal, ou se esta ciência também seria dependente da intuição espacial. No livro *Prolegomena to Any Future Metaphysics* (1783), há a seguinte passagem:

Arithmetic accomplishes its concept of number by *the successive addition of units in time*²⁴ (pág. 32)

Em **CRP** (A 411-/B438), ele escreve:

Para agora dispormos a tábua das ideias segundo a das categorias, tomamos em primeiro lugar os dois *quanta* originários de toda a nossa intuição, o tempo e o espaço. O tempo é em si uma série (*e a condição formal de todas as séries*²⁵) pelo que, em relação a um presente dado, podem distinguir-se nele *a priori* os *antecedentia*, como condição (o passado) dos *consequentia* (o futuro).

A progressão infinita que os números naturais formam dependeria, de algum modo, no entendimento de Kant, da série infinita dada pela intuição pura do tempo.

Por outro lado, a intuição espacial parece desempenhar algum papel na formação das unidades a serem contadas. Por exemplo, em **CRP** (A 142-3 / B 182), Kant escreveu:

A imagem pura de todas as quantidades (*quantorum*) para o sentido externo é o espaço, e a de todos os objetos dos sentidos em geral é o tempo. O esquema puro da quantidade (*quantitatis*), porém, como conceito do entendimento, é o número, que é uma representação que engloba a *adição sucessiva da unidade* à unidade (do homogêneo). Portanto, o número não é mais do que a unidade da síntese que eu opero entre o diverso de uma intuição homogênea em geral, pelo fato de eu produzir o próprio tempo na apreensão da intuição^{26 27}.

Não queremos discutir aqui minuciosamente a Filosofia da Matemática de Kant, o que nos levaria muito além do escopo do nosso tema. O que queremos salientar, com as observações acima, é a necessidade dos representantes do segundo grupo supracitado de demonstrar, contra Kant, como a Aritmética dos números na-

and consequently, to use the Kantian expression, also *not a synthetic judgement*. I make this remark because Kant holds that all judgements of mathematics are synthetic. Now if (69) were a synthetic judgement, the propositions derived from it would be synthetic also". (pp. 167-8).

24 Nosso grifo.

25 Nosso grifo.

26 Todas as traduções de **CRP** são do livro editado pela Fundação Calouste Gulbenkian.

27 Nosso grifo.

turais não dependeria de qualquer intuição²⁸.

Em Duarte (2004, pp. 16-17), indicamos dois tipos de resposta a Kant: **(I)** mostrar como obtemos conhecimento das proposições da aritmética dos números naturais sem apelar a qualquer tipo de intuição; ou **(II)** reduzir a aritmética dos números naturais a algo mais básico que não apele implícita ou explicitamente à intuição²⁹.

Os dois tipos de resposta acima não são equivalentes. É possível argumentar a favor do caráter não-intuitivo da aritmética dos números naturais sem reduzi-la *totalmente* a entidades mais básicas que não dependam da intuição³⁰. Em Duarte (2004, pág. 17), sustentamos que o Logicismo de Frege era uma espécie de corolário do processo da aritmetização mencionado acima e argumentamos que Frege pretendia reduzir os conceitos aritméticos a conceitos lógicos, que não dependiam da intuição, e que, portanto, ele pretendia dar um tipo de resposta como **(II)** a Kant.

28 Na verdade, as afirmações de Kant podem voltar-se contra as posições do outro grupo. Se a afirmação acima estiver correta, de acordo com Kant, a aritmética dos números naturais dependeria de alguma forma da intuição espacial. Portanto, de alguma forma, os números naturais dependeriam da geometria. Assim, por exemplo, Kronecker deveria mostrar que a intuição que ele defende que temos dos números naturais não é (nem depende), de forma alguma, uma intuição geométrica.

29 Acreditamos que Dedekind poderia ter pretendido dar uma resposta como **(II)**. Dedekind assume que aritmética é parte da lógica e independente das intuições de tempo e de espaço. Em *The Nature and Meaning of Numbers* (1963, pp. 31-115), ele assume os seguintes conceitos como sendo seus primitivos lógicos: os conceitos de objeto (seção I), de sistema (seção I) e de transformação de um sistema (seção II). Sistema é o que entendemos hoje por conjunto, transformação de um sistema é o que entendemos por função. Implicitamente, Dedekind parece assumir os axiomas da compreensão e extensionalidade (seção I) para conjuntos. Ele define a relação de subconjunto, subconjunto próprio, união arbitrária e interseção arbitrária (seção I). Também é definido o conceito de similaridade de uma transformação (seção III) – em termos mais contemporâneos, o conceito de uma função ser um-para-um. A partir de seus primitivos e das definições precedentes, Dedekind também define o conceito de cadeia (seção IV): um sistema (conjunto) S é uma cadeia em relação a uma transformação ϕ quando é fechada sob ϕ , ou seja, um sistema S é uma cadeia em relação a ϕ quando o resultado da aplicação de ϕ a todos os elementos de S é um elemento de S . Dedekind define o conceito de infinito (seção V): um sistema S é infinito quando ele é similar a um de seus subconjuntos próprios. A definição de infinito é puramente lógica e obtida por meio apenas de seus primitivos lógicos. O grande problema no logicismo de Dedekind encontra-se na prova da existência de, pelo menos, um sistema infinito (teorema 66). O teorema 66 é imprescindível para a prova da existência de um sistema (conjunto) simplesmente infinito, que é definido (na seção VI). Um sistema simplesmente infinito é um conjunto que produz, entre seus elementos, uma progressão infinita unidirecional por meio de uma transformação similar ϕ . Em outras palavras, é um conjunto que satisfaz os axiomas de Dedekind-Peano. Os números naturais são obtidos – ou criados, segundo Dedekind – por meio do processo de abstração sobre o sistema simplesmente infinito.

30 O Neo-Logicismo defendido por Crispin Wright poderia ser considerado como o tipo de resposta (I). Entretanto, a preocupação de Wright não é primariamente Kant, mas sim os argumentos defendidos por Benacerraf no artigo “Mathematical Truth” (1973).

Embora o que foi afirmado em Duarte (2004) não esteja incorreto, tentaremos mostrar no capítulo **3** que Frege cogitou também dar um tipo de resposta como **(I)** acima, derivando as leis básicas da Aritmética do **Princípio de Hume**. Estas possíveis derivações são apresentadas, de forma quase completa, no capítulo **4**.

Também no capítulo **3**, analisaremos as razões formais que levaram Frege a fazer a distinção entre sentido e referência. Mostraremos de que maneira a introdução dos valores de verdade como objetos simplifica seu sistema de lógica.

No capítulo **2**, tratamos da teoria lógica de **BS**, a qual será de suma importância no entendimento das questões que serão levantadas em **3** e das provas executadas em **4** e nos apêndices.