Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

Alessandro Bandeira Duarte

Lógica e Aritmética na Filosofia da Matemática de Frege

Tese de Doutorado

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Filosofia da PUC-Rio como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Filosofia.

Orientador: Oswaldo Chateaubriand Filho

Vol. I

Rio de Janeiro, Junho de 2009

Alessandro Bandeira Duarte

Lógica e Aritmética na Filosofia da Matemática de Frege

Tese apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor pelo Programa de Pós-graduação em Filosofia do Departamento de Filosofia do Centro de Teologia e Ciências Humanas da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Prof. Oswaldo Chateaubriand Filho
Orientador
Departamento de Filosofia da PUC-Rio

Prof. Luiz Carlos Pinheiro Dias Pereira
Departamento de Filosofia da PUC-Rio

Prof. Danilo Marcondes de Souza Filho
Departamento de Filosofia da PUC-Rio

Prof. Dirk Greimann
Universidade Federal do Ceará

Prof. Marco Caron Ruffino
Universidade Federal do Rio de Janeiro

Prof. Paulo Fernando Carneiro de Andrade
Coordenador Setorial do Centro de
Teologia e Ciências Humanas – PUC-Rio

Rio de Janeiro, 5 de Junho de 2009

Alessandro Bandeira Duarte

Graduou-se em Bacharel em Filosofia em 2001 e Mestre em Filosofia em 2004. Suas áreas de interesse são Filosofia da Linguagem, Filosofia da Matemática, Ontologia.

Ficha Catalográfica

Duarte, Alessandro Bandeira

Lógica e aritmética na filosofia da matemática de Frege / Alessandro Bandeira Duarte ; orientador: Oswaldo Chateaubriand Filho. – 2009.
2 vs. ; 30 cm

Tese (Doutorado em Filosofia)–Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2009.
Inclui bibliografia

1. Filosofia – Teses. 2. Axioma IV. 3. Axioma V. 4. Princípio de Hume. 5. Valores de verdade. 6. Gottlob Frege. I. Chateaubriand Filho, Oswaldo. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Filosofia. III. Título.

CDD: 100

Dedicamos a presente tese ao querido e saudoso amigo
Arno Viero

Agradecimentos

À Eleonora, pela paciência e carinho;

À CAPES e à FAPERJ;

Aos Profs. Luiz Carlos P. D. Pereira, Dirk Greimann e Danilo Marcondes de Souza Filho que se dispuseram a participar da Banca Examinadora;

Ao Prof. Marco Ruffino, pela sua amizade;

Aos Profs. Gregory Landini e Richard Heck pelas discussões sobre o papel do axioma IV na lógica de Frege;

À Prof(a) Andrea Loparic pela sua inestimável ajuda nas provas de independência;

Finalmente, ao meu orientador Prof. Oswaldo Chateaubriand Filho pela sua orientação e paciência.

Resumo

Duarte, Alessandro Bandeira; Chateaubriand, Oswaldo. **Lógica e Aritmética na Filosofia da Matemática de Frege**. Rio de Janeiro, 2009. 351 p. Tese de Doutorado – Departamento de Filosofia, Pontifícia Universidade Católica.

Nos *Fundamentos da Aritmética* (§68), Frege propõe definir explicitamente o operador-abstração 'o número de...' por meio de extensões e, a partir desta definição, provar o Princípio de Hume (**PH**). Contudo, a prova imaginada por Frege depende de uma fórmula (**BB**) não provável no sistema em 1884. Acreditamos que a distinção entre sentido e referência e a introdução dos valores de verdade como objetos foram motivada para justificar a introdução do Axioma IV, a partir do qual um análogo de (**BB**) é provável. Com (**BB**) no sistema, a prova do Princípio de Hume estaria garantida. Concomitantemente, percebemos que uma teoria unificada das extensões só é possível com a distinção entre sentido e referência e a introdução dos valores de verdade como objetos. Caso contrário, Frege teria sido obrigado a introduzir uma série de **Axiomas V** no seu sistema, o que acarretaria problemas com a identidade (Júlio César). Com base nestas considerações, além do fato de que, em 1882, Frege provara as leis básicas da aritmética (carta a Anton Marty), parece-nos perfeitamente plausível que as estas provas foram executadas adicionando-se o **PH** ao sistema lógico de *Begriffsschrift*. Mostramos que, nas provas dos axiomas de Peano a partir de **PH** dentro da conceitografia, nenhum uso é feito de (**BB**). Destarte, não é necessária a introdução do Axioma IV no sistema e, por conseguinte, não são necessárias a distinção entre sentido e referência e a introdução dos valores de verdade como objetos. Disto, podemos concluir que, provavelmente, a introdução das extensões nos *Fundamentos* foi um ato tardio; e que Frege não possuía uma prova formal de **PH** a partir da sua definição explícita. Estes fatos também explicam a demora na publicação das *Leis Básicas da Aritmética* e o descarte de um manuscrito quase pronto (provavelmente, o livro mencionado na carta a Marty).

Palavras-chave

Axioma IV; Axioma V; Princípio de Hume; Valores de Verdade; Gottlob Frege.

Abstract

Duarte, Alessandro Bandeira; Chateaubriand, Oswaldo (Advisor). **Logic and Arithmetic in Frege's Philosophy of Mathematics**. Rio de Janeiro, 2009. 351 p. Doctoral Thesis – Departamento de Filosofia, Pontifícia Universidade Católica.

In The Foundations of Arithmetic (§68), Frege proposes to define explicitly the abstraction operator 'the number of …' by means of extensions and, from this definition, to prove Hume's Principle (HP). Nevertheless, the proof imagined by Frege depends on a formula (BB), which is not provable in the system in 1884. we believe that the distinction between sense and reference as well as the introduction of Truth-Values as objects were motivated in order to justify the introduction of Axiom IV, from which an analogous of (BB) is provable. With (BB) in the system, the proof of HP would be guaranteed. At the same time, we realize that a unified theory of extensions is only possible with the distinction between sense and reference and the introduction of Truth-Values as objects. Otherwise, Frege would have been obliged to introduce a series of **Axioms V** in his system, what cause problems regarding the identity (Julius Caesar). Based on these considerations, besides the fact that in 1882 Frege had proved the basic laws of Arithmetic (letter to Anton Marty), it seems perfectly plausible that these proofs carried out by adding to the *Begriffsschrift*'s logical system. We show that in the proofs of Peano's axioms from **HP** within the *begriffsschrift*, (**BB**) is not used at all. Thus, the introduction of Axiom IV in the system is not necessary and, consequently, neither the distinction between sense and reference nor the introduction of Truth-Values as objects. From these findings we may conclude that probably the introduction of extensions in *The Foundations* was a late act; and that Frege did not hold a formal proof of HP from his explicit definition. These facts also explain the delay in the publication of the *Basic Laws of Arithmetic* and the abandon of a manuscript almost finished (probably the book mentioned in the letter to Marty).

Keywords

Axiom IV; Axiom V; Hume's Principle; Truth-Values; Gottlob Frege.

Sumário